

Môn thi: Toán

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1 (7,0 điểm). Giải các phương trình sau:

a) $(\sin x + \cos x)^2 + 2\sin^2 \frac{x}{2} = \sin x (2\sqrt{3} \sin x + 4 - \sqrt{3})$

b) $\sqrt{x+4} + \sqrt{3-x} + \sqrt{12-x-x^2} = x-1 + \sqrt{2x+5}$

Câu 2 (7,0 điểm).

a) Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số sao cho trong mỗi số đó có một chữ số xuất hiện hai lần, các chữ số còn lại xuất hiện không quá một lần.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x+3=2\sqrt{(3y-x)(y+1)} \\ \sqrt{3y-2}-\sqrt{\frac{x+5}{2}}=xy-2y-2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Câu 3 (4,0 điểm).

a) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại C , có phân giác trong AD với $D(\frac{7}{2}; -\frac{7}{2})$ thuộc BC . Gọi E và F lần lượt thuộc các cạnh AB và AC sao cho $AE = AF$. Đường thẳng EF cắt BC tại K . Biết $E(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2})$, F có hoành độ nhỏ hơn 3 và phương trình đường thẳng AK là $x-2y-3=0$. Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC .

b) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: x-y=0$ và đường tròn $(T): (x-1)^2 + (y+4)^2 = 5$. Từ điểm M thuộc đường thẳng d kẻ hai tiếp tuyến MA, MB (A, B là các tiếp điểm) và cát tuyến MCD đến đường tròn (T) với C nằm giữa M và D ; AB cắt CD tại N . Tìm tọa độ điểm M biết rằng $CD=1$ và $ND=\frac{5}{9}$.

Câu 4 (2,0 điểm). Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x(y+z)}{4-yz} + \frac{y(z+x)}{4-zx} + \frac{z(x+y)}{4-xy} \geq 2xyz$$

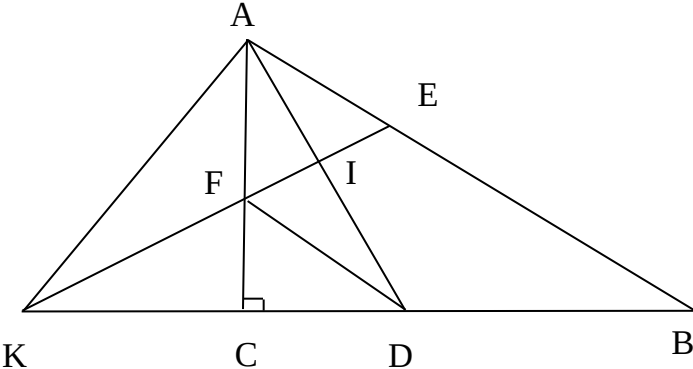
----- HẾT -----

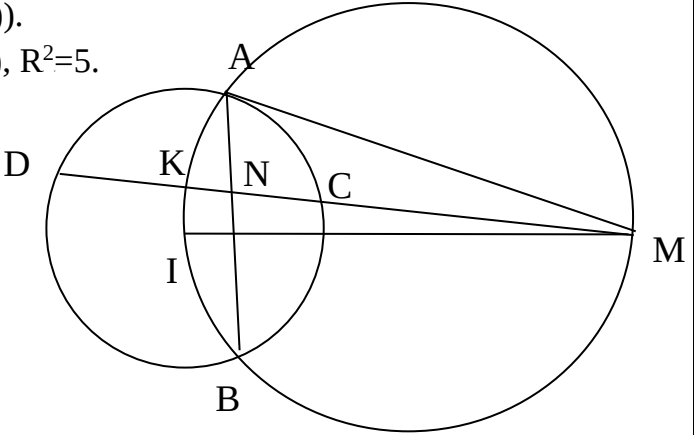
Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI THỬ

Môn: TOÁN

Câu	Đáp án	Điểm
1 (7,0đ)	a) (3,5đ) Giải phương trình $(\sin x + \cos x)^2 + 2\sin^2 \frac{x}{2} = \sin x(2\sqrt{3}\sin x + 4 - \sqrt{3})$ (1)	
	(1) $\Leftrightarrow 1 + 2\sin x \cos x + 1 - \cos x = 2\sqrt{3}\sin^2 x + 4\sin x - \sqrt{3}\sin x$	0,5
	$\Leftrightarrow (2 - 4\sin x) + (2\sin x \cos x - \cos x) = (2\sqrt{3}\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x)$	1,0
	$\Leftrightarrow 2(1 - 2\sin x) + \cos x(2\sin x - 1) = \sqrt{3}\sin x(2\sin x - 1)$	1,0
	$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\sqrt{3}\sin x - \cos x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin x - 1 = 0 \\ \sqrt{3}\sin x - \cos x + 2 = 0 \end{cases}$	
	+) $\sqrt{3}\sin x - \cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -1$ $\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$	0,5
	+) $2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$ Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$	0,5
	b) (3,5đ) Giải phương trình $\sqrt{x+4} + \sqrt{3-x} + \sqrt{12-x-x^2} = x-1 + \sqrt{2x+5}$	
	ĐK: $-\frac{5}{2} \leq x \leq 3$. Đặt $t = \sqrt{x+4} + \sqrt{3-x} \Rightarrow \sqrt{12-x-x^2} = \frac{t^2-7}{2}, (t > 0)$	0,5
	Khi đó phương trình trở thành: $\frac{t^2-7}{2} + t = x-1 + \sqrt{2x+5}$	1,0
2 (7,0đ)	Suy ra $t^2 + 2t = a^2 + 2a$ với $a = \sqrt{2x+5}, (a \geq 0) \Rightarrow (t-a)(t+a+2) = 0 \Rightarrow t = a$	1,0
	Với $t = a$ ta có $\sqrt{x+4} + \sqrt{3-x} = \sqrt{2x+5} \Leftrightarrow \sqrt{12-x-x^2} = x-1 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{89}}{4}$	1,0
	a) (3,5đ) Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số sao cho trong mỗi số đó có một chữ số xuất hiện hai lần, các chữ số còn lại xuất hiện không quá một lần.	
	+TH1: Chữ số 0 xuất hiện 2 lần Có C_3^2 cách chọn 2 vị trí cho chữ số 0 Có A_9^2 cách xếp 2 chữ số trong 9 chữ số vào 2 vị trí còn lại Vậy có $C_3^2 \cdot A_9^2$ số có 4 chữ số thỏa mãn trường hợp này.	1,0
	+TH2: Chữ số a (khác 0) xuất hiện 2 lần và a ở vị trí đầu tiên (vị trí hàng nghìn) Có 9 cách chọn a Có 3 cách chọn thêm một vị trí nữa cho a Có A_9^2 cách xếp 2 chữ số trong 9 chữ số vào 2 vị trí còn lại Vậy có $9 \cdot 3 \cdot A_9^2$ số có 4 chữ số thỏa mãn trường hợp này.	1,0
	+TH3: Chữ số a (khác 0) xuất hiện 2 lần và a không xuất hiện ở vị trí hàng nghìn	1,0

	Có 9 cách chọn a Có C_3^2 cách chọn 2 vị trí cho chữ số a Có 8 cách chọn một chữ số (khác 0 và khác a) vào vị trí hàng nghìn Có 8 cách chọn một chữ số vào vị trí còn lại Vậy có $9.8.8.C_3^2$ số có 4 chữ số thỏa mãn trường hợp này.	
	Vậy có $C_3^2.A_9^2 + 9.3.A_9^2 + 9.8.8.C_3^2 = 3888$ số thỏa mãn đề bài.	0,5
	b) (3,5đ) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+3=2\sqrt{(3y-x)(y+1)} & (1) \\ \sqrt{3y-2}-\sqrt{\frac{x+5}{2}}=xy-2y-2 & (2) \end{cases}$	
	ĐK: $y \geq \frac{2}{3}; x \geq -5; 3y \geq x$ $PT(1) \Leftrightarrow (x+3)^2 = 4(3y-x)(y+1) \Leftrightarrow (x+6y+9)(x-2y+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6y-9 \\ x = 2y-1 \end{cases}$	1,0
	TH1: $x = -6y-9$ Từ PT (1), $x \geq -3 \rightarrow -6y-9 \geq -3 \Leftrightarrow y \leq -1$. Suy ra hệ PT vô nghiệm	0,5
	TH2: $x = 2y-1$. Thay vào PT (2) ta có $\sqrt{3y-2}-\sqrt{y+2} = 2y^2-3y-2 \Leftrightarrow \frac{2(y-2)}{\sqrt{3y-2}+\sqrt{y+2}} = (2y+1)(y-2)$	1,0
	$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ \frac{2}{\sqrt{3y-2}+\sqrt{y+2}} = 2y+1 \end{cases}$ PT $\frac{2}{\sqrt{3y-2}+\sqrt{y+2}} = 2y+1$ vô nghiệm vì $\frac{2}{\sqrt{3y-2}+\sqrt{y+2}} \leq \sqrt{\frac{3}{2}}; 2y+1 \geq \frac{7}{3}$ Vậy hệ PT có nghiệm (x; y) với $x=3, y=2$	1,0
3 (4,0đ)	a) (2,0đ) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại C, có phân giác trong AD với $D(\frac{7}{2}; -\frac{7}{2})$ thuộc BC. Gọi E và F lần lượt thuộc các cạnh AB và AC sao cho AE = AF. Đường thẳng EF cắt BC tại K. Biết $E(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2})$, F có hoành độ nhỏ hơn 3 và phương trình đường thẳng AK là $x-2y-3=0$. Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC.	
	Gọi I là giao điểm của AD và EF, suy ra I là trung điểm của EF Chứng minh $DF \perp AK$ 	0,5

Phương trình của DF là: $4x + 2y - 7 = 0$ Gọi $F(t; \frac{7}{2} - 2t) \Rightarrow I(\frac{2t+3}{4}; \frac{1-2t}{2}) \Rightarrow \overrightarrow{IE} = (\frac{3-2t}{4}; -3+t), \overrightarrow{ID} = (\frac{11-2t}{4}; -4+t)$ Do $\overrightarrow{IE} \cdot \overrightarrow{ID} = 0 \Rightarrow (3-2t)(11-2t) + 16(t-3)(t-4) = 0$ $20t^2 - 140t + 225 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{9}{2} \\ t = \frac{5}{2} \end{cases}$ Vì F có hoành độ nhỏ hơn 3 nên $F(\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}) \Rightarrow I(2; -2)$	1,0
Do đó đường thẳng AD có phương trình $x + y = 0 \Rightarrow A(1; -1)$ Vậy phương trình đường thẳng chứa các cạnh của tam giác ABC là: $AC: x + 3y + 2 = 0; AB: 3x + y - 2 = 0; BC: 3x - y - 14 = 0$	0,5
b) (2,0đ) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x - y = 0$ và đường tròn $(T): (x-1)^2 + (y+4)^2 = 5$. M là điểm thuộc d, qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến (T) (A, B là các tiếp điểm) và cát tuyến MCD đến đường tròn (T) với C nằm giữa M và D; AB cắt CD tại N. Tìm tọa độ điểm M biết rằng $CD = 1$ và $ND = \frac{5}{9}$.	
+ Gọi K trung điểm DC, I là tâm đường tròn (T), khi đó $IK \perp CD$. Mà $IA \perp MA$ suy ra đường tròn đường kính MI đi qua I, K, A, B. (Kí hiệu là đường tròn (T')). Đường tròn (T) tâm $I(1; -4), R^2 = 5$. 	0,5
+ $CD = 1, DN = \frac{5}{9} \Rightarrow NC = \frac{4}{9}, NK = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$. N là điểm trong (T) ta có: $ND \cdot NC = NA \cdot NB = 20/81$ Tương tự vì N trong (T'): $NK \cdot NM = NA \cdot NB = 20/81$ Suy ra $NM = \frac{40}{9}$. Mặt khác $IK^2 = ID^2 - KD^2 = R^2 - KD^2 = \frac{19}{4} \Rightarrow IN^2 = IK^2 + KN^2 = \frac{385}{81}$	0,5
+ Sử dụng định lý cosin trong tam giác INM ta có: $IM^2 = IN^2 + NM^2 - 2IN \cdot NM \cdot \cos(\widehat{INM}) = IN^2 + NM^2 + 2IN \cdot NM \cdot \cos(\widehat{INK}) \quad (*)$ Với $\cos(\widehat{INM}) = \cos(\pi - \widehat{INK}) = -\cos(\widehat{INK}) = -\frac{KN}{IN}$, thay vào $(*)$ ta	0,5

	có: $IM^2 = IN^2 + NM^2 + 2NK \cdot NM = \frac{385}{81} + \frac{1600}{81} + \frac{40}{81} = \frac{2025}{81} = 25$. Vậy $IM = 5$.	
	Vậy giao của đường tròn $(I;5)$ và (d) cho ta 2 điểm M cần tìm là $(1;1)$ và $(-4;-4)$.	0,5
4 (2,0đ)	Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng: $\frac{x(y+z)}{4-yz} + \frac{y(z+x)}{4-zx} + \frac{z(x+y)}{4-xy} \geq 2xyz \quad (1)$	
	Ta có $(\sqrt{yz} + \sqrt{zx} + \sqrt{xy})^2 \leq (x+y+z)^2 = 9 \Rightarrow \sqrt{yz} + \sqrt{zx} + \sqrt{xy} \leq 3$ $(1) \Leftrightarrow \frac{(y+z)}{yz(4-yz)} + \frac{(z+x)}{zx(4-zx)} + \frac{(x+y)}{xy(4-xy)} \geq 2 \quad (2)$	0,5
	Ta có $\frac{(y+z)}{yz(4-yz)} \geq \frac{2\sqrt{yz}}{yz(2-\sqrt{yz})(2+\sqrt{yz})} = \frac{2}{[\sqrt{yz}(2-\sqrt{yz})](2+\sqrt{yz})} \geq \frac{2}{2+\sqrt{yz}}$	0,5
	Do đó $\frac{(y+z)}{yz(4-yz)} + \frac{(z+x)}{zx(4-zx)} + \frac{(x+y)}{xy(4-xy)} \geq 2 \left[\frac{1}{2+\sqrt{yz}} + \frac{1}{2+\sqrt{zx}} + \frac{1}{2+\sqrt{xy}} \right] \geq$ $\geq \frac{18}{6+(\sqrt{yz} + \sqrt{zx} + \sqrt{xy})} \geq \frac{18}{6+3} = 2$ Vậy (2) đúng. Suy ra đpcm.	1,0

Ghi chú: Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa.