SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO QUẢNG NGÃI	KỲ THI CHỌN HSG CẤP TỈNH THAM DỰ KỲ THI CHỌN HSG QUỐC GIA NĂM HỌC 2023-2024
ĐỀ CHÍNH THỨC	Ngày thi: **03/10/2023** Môn: **Toán** Thời gian làm bài: **180 phút**

Bài 1: (5,0 điểm)

Cho a là một số thực dương và dãy số (u_n) được xác định bởi

$$u_1 = a,\ u_{n+1} = 10^n.u_n^3,\ \forall n \geq 1.$$

a) Tìm công thức của số hạng tổng quát u_n.

b) Tìm tất cả các giá trị của a để dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn.

Bài 2: (5,0 điểm)

Cho số nguyên dương a. Một số nguyên dương b được gọi là số *"tốt"* nếu $\left(C_{an}^b - 1\right) \vdots (an+1)$ với mọi số nguyên dương n mà $an \geq b$. Chứng minh rằng:

a) Nếu b là số *"tốt"* thì b là số chẵn.

b) Nếu b là số *"tốt"* thì mọi số nguyên tố không vượt quá b đều là ước của a.

Bài 3: (5,0 điểm)

Tìm tất cả các hàm số đơn điệu $f:(0;+\infty) \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y) = x^{2024} f\left(\frac{1}{x^{2023}}\right) + y^{2024} f\left(\frac{1}{y^{2023}}\right) \text{ với mọi } x, y \text{ dương.}$$

Bài 4: (5,0 điểm)

Cho tam giác ABC không cân. Một đường tròn (O) đi qua B, C lần lượt cắt các đoạn thẳng AB, AC tại F, E (khác B, C). Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE cắt đường thẳng CF tại M, N sao cho M nằm giữa C và F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACF cắt đường thẳng BE tại P, Q sao cho P nằm giữa B và E.

a) Chứng minh rằng các điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

b) Đường thẳng qua N vuông góc với AN cắt đường thẳng BE tại R. Đường thẳng qua Q vuông góc với AQ cắt đường thẳng CF tại S. Đường thẳng SP cắt NR tại U, đường thẳng RM cắt QS tại V. Chứng minh rằng các đường thẳng MP, NQ, UV, RS đồng quy.

———————— HẾT ————————

Ghi chú: *Giám thị không giải thích gì thêm.*

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **QUẢNG NGÃI**	**KỲ THI CHỌN HSG CẤP TỈNH THAM DỰ** **KỲ THI CHỌN HSG QUỐC GIA** **NĂM HỌC 2023-2024**
ĐỀ CHÍNH THỨC	Ngày thi: **04/10/2023** Môn: **Toán** Thời gian làm bài: **180 phút**

Bài 5: (6,0 điểm)

Người ta viết các số $1,2,3,4,...,2022,2023$ lên bảng (mỗi số đúng 1 lần) rồi tô màu ít nhất 1011 số trong các số đó theo quy luật sau:

Nếu số x được tô màu thì số $2x$ cũng được tô màu (nếu $2x$ có trên bảng).

Nếu hai số x,y được tô màu thì số $x+y$ cũng được tô màu (nếu $x+y$ có trên bảng).

Gọi T là tổng tất cả các số không được tô màu trên bảng. Tìm giá trị lớn nhất của T.

Bài 6: (7,0 điểm)

Trong tập hợp tất cả các đa thức hệ số thực $\mathbb{R}[x]$, ta gọi hai đa thức là "*bạn bè* " nếu chúng có cùng tập nghiệm thực. Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}[x]$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) $f(0)=0$.

ii) $\deg f(P)\le \deg P+1$ với mọi $P\in\mathbb{R}[x], P\neq 0$.

iii) $P-f(Q)$ và $Q-f(P)$ là "*bạn bè* " với mọi $P,Q\in\mathbb{R}[x]$.

a) Chứng minh rằng $f(P)=0 \Leftrightarrow P=0$ với $P\in\mathbb{R}[x]$.

b) Chứng minh rằng $f(x)=x$ hoặc $f(x)=-x$.

c) Xác định $f\left(3+x^4+x^{10}+x^{2023}+x^{2024}\right)$.

Bài 7: (7,0 điểm)

Cho tam giác nhọn, không cân ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). Đường tròn (I) lần lượt tiếp xúc với các cạnh BC,CA,AB tại D,E,F. Đường tròn ω_A tiếp xúc với AB,AC sao cho dây cung chung của hai đường tròn ω_A và (I) là đường kính của ω_A. Gọi O_A là tâm của đường tròn ω_A. Các đường tròn ω_B,ω_C và các điểm O_B,O_C được xác định một cách tương tự. Gọi $\Delta_D,\Delta_E,\Delta_F$ là các đường thẳng lần lượt đi qua các điểm D,E,F và tương ứng vuông góc với O_BO_C, O_CO_A, O_AO_B. Chứng minh rằng:

a) A,M,O_A,I là hàng điểm điều hòa với M là trung điểm của EF.

b) Các đường thẳng $\Delta_D,\Delta_E,\Delta_F$ đồng quy tại một điểm thuộc OI.

——————— HẾT ———————

Ghi chú: *Giám thị không giải thích gì thêm.*