

TÌM SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH HÀM HỢP KHI BIẾT BẢNG BIẾN THIÊN HOẶC ĐỒ THỊ

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- $f(x) = m$ là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y = f(x)$, $y = m$. Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của hai đồ thị $y = f(x)$, $y = m$.
- $f(x) = g(x)$ là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y = f(x)$, $y = g(x)$. Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của hai đồ thị $y = f(x)$, $y = g(x)$.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

- Sử dụng BBT hoặc đồ thị của hàm số $f(x)$ để tìm số nghiệm thuộc đoạn $[a; b]$ của phương trình $c.f(g(x)) + d = m$, với $g(x)$ là hàm số lượng giác.
- Sử dụng BBT hoặc đồ thị của hàm số $f(x)$ để tìm số nghiệm thuộc đoạn $[a; b]$ của phương trình $c.f(g(x)) + d = m$, với $g(x)$ là hàm số căn thức, đa thức, ...
- Sử dụng BBT hoặc đồ thị của hàm số $f(x)$ để tìm số nghiệm thuộc đoạn $[a; b]$ của phương trình $c.f(g(x)) + d = m$, với $g(x)$ là hàm số mũ, hàm số logarit.
- Sử dụng BBT hoặc đồ thị của hàm số $f(x)$ để tìm số nghiệm thuộc đoạn $[a; b]$ của phương trình $c.f(g(x)) + d = m$, với $g(x)$ là hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối.

III. BÀI TẬP MẪU VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

CÂU 46 - ĐỀ MINH HỌA TỐT NGHIỆP THPT 2020 MÔN TOÁN

Đề bài: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f(x)$	$-\infty$	2	0	2	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(\sin x) = 1$ là

- A.** 7. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán sử dụng BBT hoặc đồ thị của hàm số $f(x)$ để tìm số nghiệm thuộc đoạn $[a; b]$ của PT $c.f(g(x)) + d = m$.

2. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

Số nghiệm thuộc đoạn $[a'; b']$ của PT $f(t) = k$ là số giao điểm của đồ thị $y = f(t)$ và đường thẳng $y = k$ với $t \in [a'; b']$ (k là tham số).

3. HƯỚNG GIẢI:

B1: Đặt ẩn phụ $t = g(x)$. Với $x \in [a; b] \Rightarrow t \in [a'; b']$.

B2: Với $c.f(g(x)) + d = m \Rightarrow f(t) = k$.

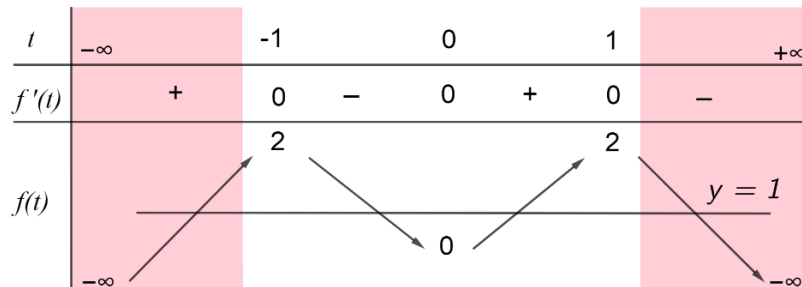
B3: Từ BBT của hàm số $y = f(x)$ suy ra BBT của hàm số $y = f(t)$ để giải bài toán số nghiệm thuộc đoạn $[a'; b']$ của phương trình $f(t) = k$.

4. LỜI GIẢI CHI TIẾT:

Chọn C

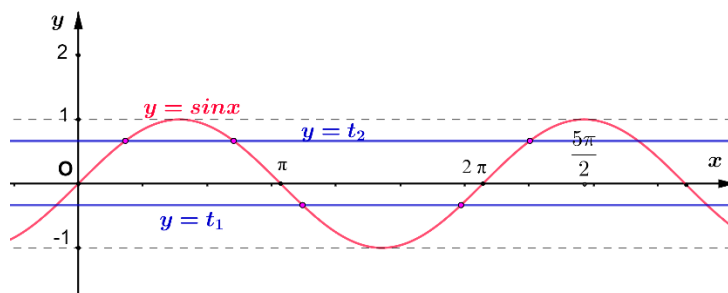
Đặt $t = \sin x$, $t \in [-1; 1]$ thì PT $f(\sin x) = 1$ (1) trở thành $f(t) = 1$ (2).

BBT hàm số $y = f(t)$, $t \in [-1; 1]$:



Dựa vào BBT ta có số nghiệm $t \in [-1; 1]$ của PT (1) là 2 nghiệm phân biệt $t_1 \in (-1; 0)$, $t_2 \in (0; 1)$.

Quan sát đồ thị $y = \sin x$ và hai đường thẳng $y = t_1$ với $t_1 \in (-1; 0)$ và $y = t_2$ với $t_2 \in (0; 1)$.



+ Với $t_1 \in (-1; 0)$ thì PT $\sin x = t_1$ có 2 nghiệm $x \in \left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$.

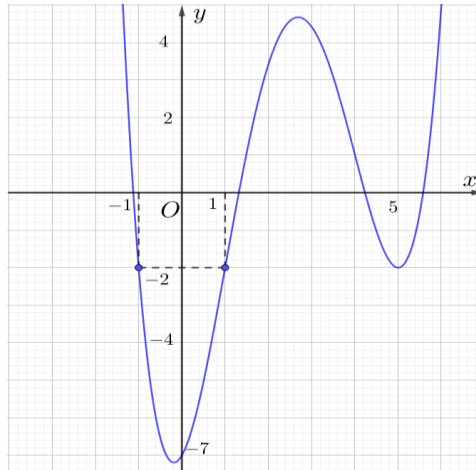
+ Với $t_2 \in (0; 1)$ thì PT $\sin x = t_2$ có 3 nghiệm $x \in \left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Vậy số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(\sin x) = 1$ là $2 + 3 = 5$ nghiệm.

IV. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

↪ Mức độ 3

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây:



Số nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ của phương trình $f(\sin x) = -4$ là

A. 0.

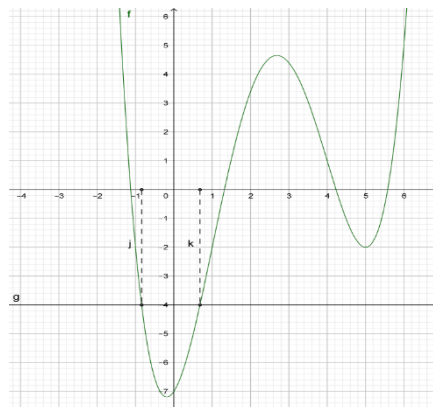
B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn C



$$\text{Xét phương trình: } f(\sin x) = -4 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \alpha \in (-1; 0) \\ \sin x = \beta \in (0; 1) \end{cases}$$

Vì $x \in (0; \pi) \Rightarrow \sin x \in (0; 1]$. Suy ra với $x \in (0; \pi)$ thì $f(\sin x) = -4 \Leftrightarrow \sin x = \beta \in (0; 1)$. Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x \in (0; \pi)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	4	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$		-8	5	13	$-\infty$

Phương trình $f(\cos x) = \frac{13}{3}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \cos x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0; 1]$.

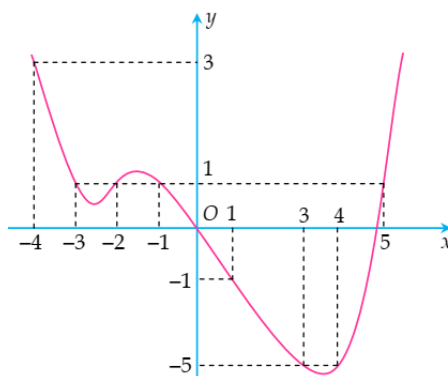
Phương trình $f(\cos x) = \frac{13}{3}$ trở thành $f(t) = \frac{13}{3}$.

Dựa vào bảng biến thiên trên ta có phương trình $f(t) = \frac{13}{3}$ có đúng một nghiệm $t \in (0; 1)$.

Với một nghiệm $t \in (0; 1)$, thay vào phép đặt ta được phương trình $\cos x = t$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Vậy phương trình $f(\cos x) = \frac{13}{3}$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Số nghiệm của phương trình $f(2 \sin x) = 1$ trên đoạn $[0; 2\pi]$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = 2 \sin x$, $t \in [-2; 2]$.

Xét phương trình $f(t) = 1$, dựa vào đồ thị ta thấy:

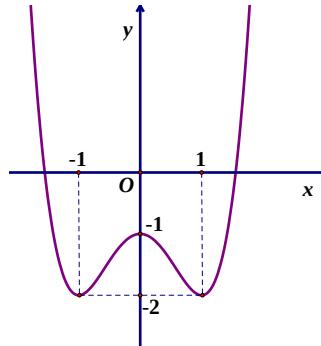
$$f(t)=1 \Leftrightarrow \begin{cases} t=-3 & (l) \\ t=-2 & (n) \\ t=-1 & (n) \\ t=5 & (l) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin x = -2 \\ 2\sin x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Với $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, x \in [0; 2\pi] \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$.

Với $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, x \in [0; 2\pi] \Rightarrow x = \frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}.$

Vậy phương trình $f(2\sin x) = 1$ có 3 nghiệm trên đoạn $[0; 2\pi]$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ như sau:



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ của phương trình $3f(\cos x) + 5 = 0$ là

A. 4.

B. 7.

C. 6.

D. 8.

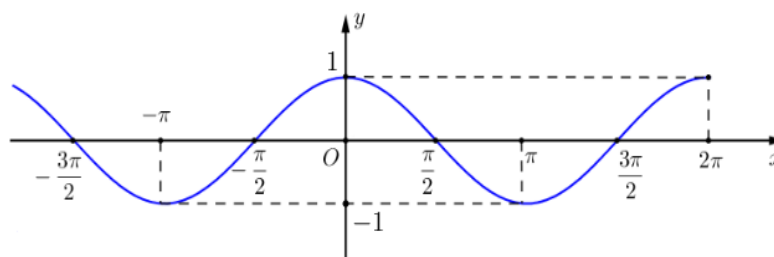
Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } 3f(\cos x) + 5 = 0 \Leftrightarrow f(\cos x) = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = a \in (-2; -1) \\ \cos x = b \in (-1; 0) \\ \cos x = c \in (0; 1) \\ \cos x = d \in (1; 2) \end{cases}$$

Vì $\cos x \in [-1; 1]$ nên $\cos x = a \in (-2; -1)$ và $\cos x = d \in (1; 2)$ vô nghiệm.

Xét đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.



Phương trình $\cos x = b \in (-1; 0)$ có 4 nghiệm phân biệt.

Phương trình $\cos x = c \in (0; 1)$ có 3 nghiệm phân biệt, không trùng với nghiệm nào của phương trình $\cos x = b \in (-1; 0)$.

Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-2	1	-2	$+\infty$	

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; \pi]$ của phương trình $3f(2\sin x) + 1 = 0$ là

A. 4.

B. 5.

C. 2.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 2\sin x$. Vì $x \in [-\pi; \pi]$ nên $t \in [-2; 2]$.

$$\Rightarrow 3f(t) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(t) = -\frac{1}{3}.$$

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $f(t) = -\frac{1}{3}$ có 2 nghiệm $t_1 \in (-2; 0)$ và $t_2 \in (0; 2)$.

Suy ra $\sin x = \frac{t_1}{2} \in (-1; 0)$ và $\sin x = \frac{t_2}{2} \in (0; 1)$.

➤ Với $\sin x = \frac{t_1}{2} \in (-1; 0)$ thì phương trình có 2 nghiệm $-\pi < x_1 < x_2 < 0$.

➤ Với $\sin x = \frac{t_2}{2} \in (0; 1)$ thì phương trình có 2 nghiệm $0 < x_3 < x_4 < \pi$.

Vậy phương trình có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi; \pi]$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
f'(x)		+	0	-	0	+	0	-
f(x)			5		5			
	$-\infty$			4				$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ của phương trình $2f(2\cos x) - 9 = 0$ là

- A.** 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 2\cos x$, $t \in [-2; 2]$ thì $2f(2\cos x) - 9 = 0$ trở thành $2f(t) - 9 = 0 \Leftrightarrow f(t) = \frac{9}{2}$ (1).

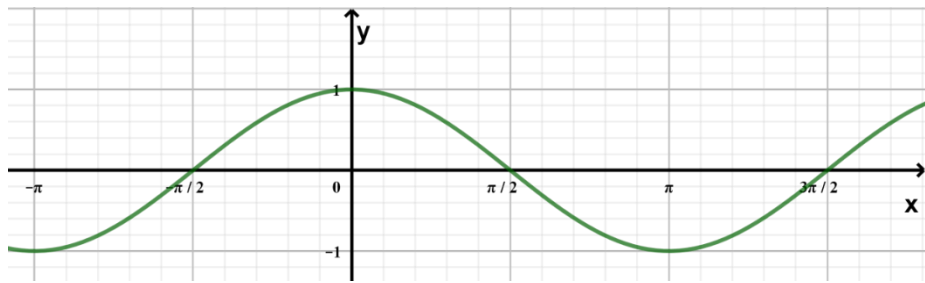
Nhận xét: số nghiệm của phương trình là (1) số giao điểm của hai đồ thị: $(C): y = f(t)$ và đường thẳng $(d): y = \frac{9}{2}$.

Bảng biến thiên hàm số $y = f(t)$ trên đoạn $[-2; 2]$:

t	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$		
f'(t)	+	0	-	0	+	0	-
f(t)	$-\infty$	5	4	5	$-\infty$		

Dựa vào bảng biến thiên, trên đoạn $[-2; 2]$ phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt $t_1 \in (-2; 0)$, $t_2 \in (0; 2)$.

Ta có đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$:



- Với $t_1 \in (-2; 0) \Rightarrow 2 \cos x = t_1 \in (-2; 0) \Rightarrow \cos x = \frac{t_1}{2} \in (-1; 0)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ ta thấy phương trình $\cos x = \frac{t_1}{2} \in (-1; 0)$ có 3

nghiệm phân biệt: $-\pi < x_1 < -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} < x_2 < \pi < x_3 < \frac{3\pi}{2}$.

- Với $t_2 \in (0; 2) \Rightarrow 2 \cos x = t_2 \in (0; 2) \Rightarrow \cos x = \frac{t_2}{2} \in (0; 1)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ ta thấy phương trình $\cos x = \frac{t_2}{2} \in (0; 1)$ có 2

nghiệm phân biệt $-\frac{\pi}{2} < x_4 < 0 < x_5 < \frac{\pi}{2}$.

Vậy số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ của phương trình $2f(2\cos x) - 9 = 0$ là 5 nghiệm.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-2	-1	-2	$+\infty$

Số nghiệm trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$ của phương trình $4f(\cos x) + 5 = 0$ là

- A. 4. B. 6. C. 3. D. 8.

Lời giải

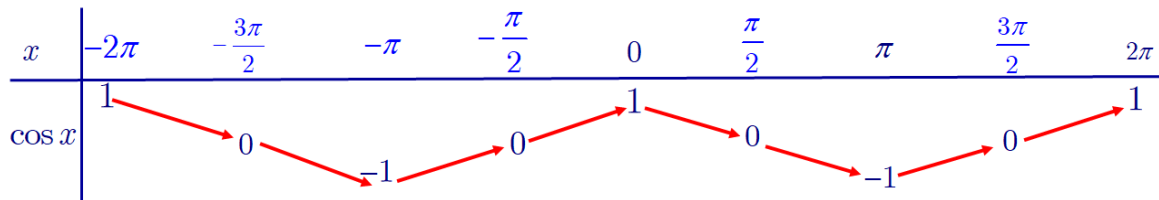
Chọn D

$$\text{Từ } 4f(\cos x) + 5 = 0 \Rightarrow f(\cos x) = -\frac{5}{4}(1).$$

Đặt $t = \cos x$ với $x \in [-2\pi; 2\pi]$ thì $t \in [-1; 1]$.

$$\text{Ta có } (1) \Leftrightarrow f(t) = -\frac{5}{4}.$$

Xét hàm số $h(x) = \cos x$; $x \in [-2\pi; 2\pi]$, ta có BBT:

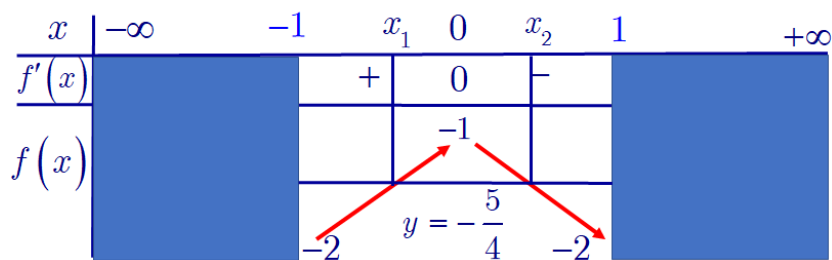


Với $t = -1$ thì phương trình có 2 nghiệm.

Với $-1 < t < 1$ thì phương trình có 4 nghiệm.

Với $t = 1$ thì phương trình có 3 nghiệm.

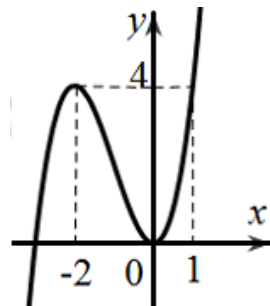
Xét $f(t) = -\frac{5}{4}$ với $t \in [-1; 1]$.



Nhìn vào BBT, khi đó phương trình $f(t) = -\frac{5}{4}$ có 2 nghiệm.

Vậy tất cả có 8 nghiệm.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x^2 + 2x - 2) = 3m + 1$ có nghiệm thuộc đoạn $[0; 1]$ là



A. $[0; 4]$.

B. $[-1; 0]$.

C. $[0; 1]$.

D. $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$.

Lời giải

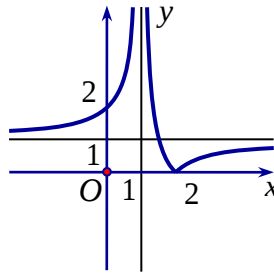
Chọn D

Đặt $t = x^2 + 2x - 2$. Với $x \in [0; 1] \Rightarrow t \in [-2; 1]$.

Phương trình $f(x^2 + 2x - 2) = 3m + 1$ có nghiệm thuộc đoạn $[0; 1]$ khi và chỉ khi phương trình

$$f(t) = 3m + 1 \text{ có nghiệm thuộc } [-2; 1] \Leftrightarrow 0 \leq 3m + 1 \leq 4 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq m \leq 1.$$

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$; $(1; +\infty)$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\log_2 x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(4; +\infty)$ là

- A.** $(1; +\infty)$. **B.** $(0; 2)$. **C.** $[0; 1)$. **D.** $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Lời giải

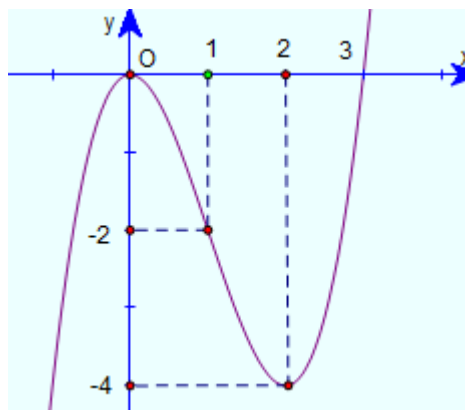
Chọn C

Đặt $t = \log_2 x$. Với $x \in (4; +\infty)$ thì $t \in (2; +\infty)$.

Do đó phương trình $f(\log_2 x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(4; +\infty)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(2; +\infty)$.

Quan sát đồ thị ta suy ra $f(t) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(2; +\infty)$ khi $m \in [0; 1)$.

Câu 10. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ dưới đây:



Tìm số nghiệm thực của phương trình $f(\sqrt{-x^2 + 4x - 3}) = -2$.

- A.** 1 **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Ta có $\sqrt{-x^2 + 4x - 3}$ xác định khi $1 \leq x \leq 3$.

$$\text{Từ đồ thị của hàm số, ta có } f\left(\sqrt{-x^2+4x-3}\right) = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{-x^2+4x-3} = a < 0 \text{ (loại)} \\ \sqrt{-x^2+4x-3} = 1 \\ \sqrt{-x^2+4x-3} = b \in (2;3) \end{cases}.$$

$$\bullet \sqrt{-x^2+4x-3} = 1 \Leftrightarrow x = 2.$$

$$\bullet \sqrt{-x^2+4x-3} = b \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 + b^2 = 0 \text{ có}$$

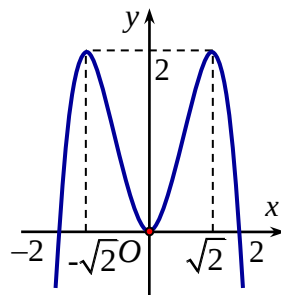
$$\Delta' = 4 - (3 + b^2) = 1 - b^2 < 0, \forall b \in (2;3).$$

Vậy phương trình $f\left(\sqrt{-x^2+4x-3}\right) = -2$ có đúng 1 nghiệm.

Cách 2: Đặt $t = \sqrt{-x^2+4x-3} \Rightarrow t \in [0;1], \forall x \in [1;3]$.

Ta có $f\left(\sqrt{-x^2+4x-3}\right) = -2$ trở thành $f(t) = -2$, khi đó phương trình có 1 nghiệm trên $[0;1]$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{2-x^2}\right) = m$ có nghiệm là:



A. $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

B. $(0; 2)$.

C. $(-2; 2)$.

D. $[0; 2]$.

Lời giải

Chọn D

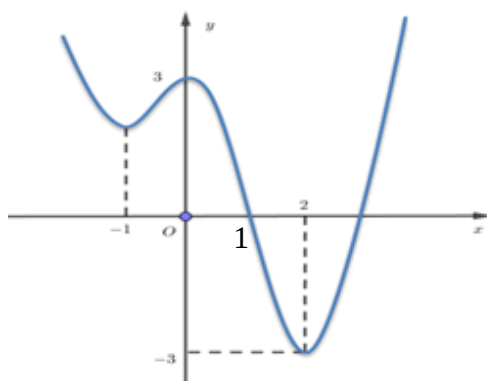
Điều kiện của phương trình: $x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

Đặt $t = \sqrt{2-x^2}$. Với $x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ thì $t \in [0; \sqrt{2}]$.

Do đó phương trình $f\left(\sqrt{2-x^2}\right) = m$ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0; \sqrt{2}]$.

Quan sát đồ thị ta suy ra điều kiện của tham số m là $m \in [0; 2]$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(e^x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \ln 2)$.



A. $(-3; 0)$.

B. $(-3; 3)$.

C. $(0; 3)$.

D. $[-3; 0]$

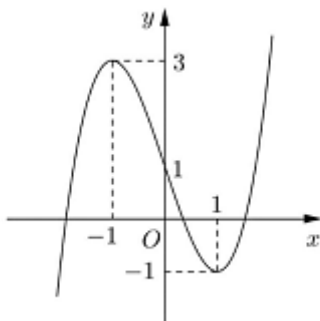
Lời giải

Chọn A

Đặt $t = e^x$. Với $x \in (0; \ln 2) \Rightarrow t \in (1; 2)$.

Phương trình $f(e^x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \ln 2)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(1; 2) \Leftrightarrow -3 < m < 0$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sin^2 x) = m$ có nghiệm.



A. $[-1; 1]$.

B. $(-1; 1)$.

C. $(-1; 3)$.

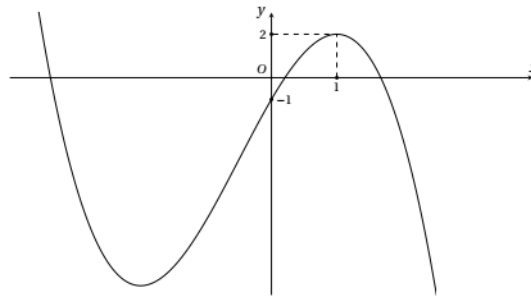
D. $[-1; 3]$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \sin^2 x \Rightarrow t \in [0; 1]$, khi đó yêu cầu bài toán trở thành tìm m để phương trình $f(t) = m$ có nghiệm t trên đoạn $[0; 1]$. Dựa vào đồ thị hàm số ta suy ra $m \in [-1; 1]$.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\log_2 x) = 2m + 1$ có nghiệm thuộc $[1; 2]$?



A. 3.

B. 1.

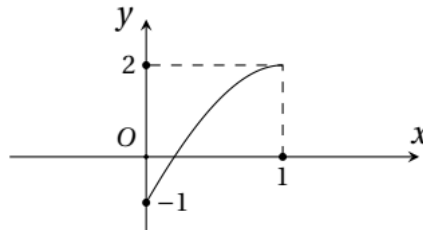
C. 2.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

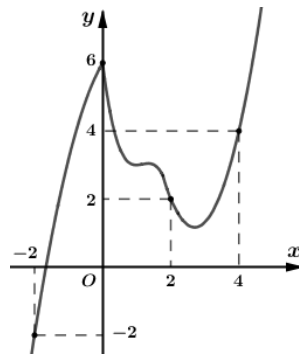
Đặt $t = \log_2 x \rightarrow t \in [0; 1] \Rightarrow f(t) \in [-1; 2]$. Ta có đồ thị hình vẽ như sau:



Để phương trình đã cho có nghiệm thỏa mãn yêu cầu thì $-1 \leq 2m + 1 \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq \frac{1}{2}$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-1; 0\}$.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(2\log_2 x) = m$ có nghiệm duy nhất trên $\left[\frac{1}{2}; 2\right)$?



A. 9.

B. 6.

C. 5.

D. 4.

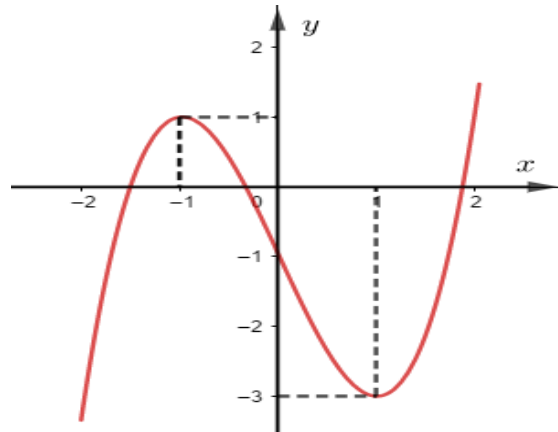
Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 2\log_2 x, x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right) \Rightarrow t \in [-2; 2)$. Với mỗi $t \in [-2; 2)$ thì phương trình $2\log_2 x = t$ có một nghiệm duy nhất trên $\left[\frac{1}{2}; 2\right)$.

Phương trình $f(2\log_2 x) = m$ có nghiệm duy nhất thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có nghiệm duy nhất thuộc $[-2; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq m \leq 2 \\ m = 6 \end{cases}$
 $\Rightarrow$ có 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình $f(2\cos x - 1) = m$ có hai nghiệm thuộc $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$?



A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

Đặt $2\cos x - 1 = t$; $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (-1; 1]$.

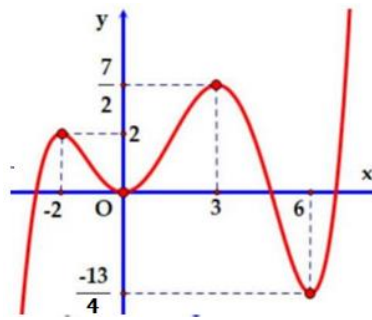
Ta có: $t \in (-1; 1)$ cho 2 nghiệm $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Do đó phương trình $f(2\cos x - 1) = m$ có hai nghiệm thuộc $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ khi phương trình $f(t) = m$ có một nghiệm thuộc $(-1; 1)$.

Từ đồ thị ta thấy $f(t) = m$ có một nghiệm thuộc $(-1; 1) \Rightarrow m \in (-3; 1)$.

Vậy tập hợp số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $S = \{-2; -1; 0\}$.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(2x^3 - 6x + 2) = m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$?

- A.** 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x) = 2x^3 - 6x + 2$ trên đoạn $[-1; 2]$, ta có bảng biến thiên như sau :

x	-1		1		2
$g'(x)$	0	-	0	+	
$g(x)$	6		-2		6

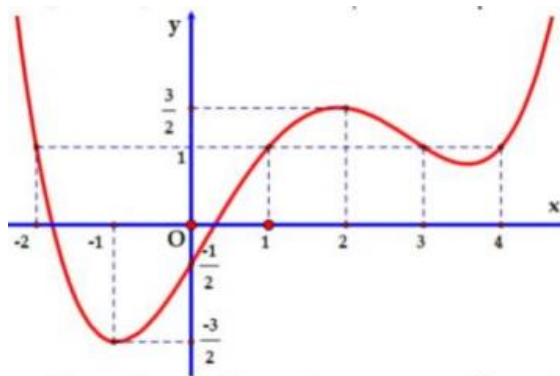
Đặt $t = 2x^3 - 6x + 2$, với $x \in [-1; 2]$ thì $t \in [-2; 6]$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có nhận xét với mỗi giá trị $t_0 \in (-2; 6]$ thì phương trình $t_0 = 2x^3 - 6x + 2$ có hai nghiệm phân biệt $x \in [-1; 2]$ và tại $t_0 = 2$ thì phương trình $t_0 = 2x^3 - 6x + 2$ có một nghiệm.

Với nhận xét trên và đồ thị hàm số trên đoạn $[-2; 6]$ thì phương trình $f(2x^3 - 6x + 2) = m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có 3 nghiệm phân biệt trên nửa khoảng $(-2; 6]$.

Suy ra $0 < m < 2$. Vậy một giá trị nguyên $m = 1$ thỏa mãn.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2f(\sqrt{9-x^2}) = m - 2019$ có nghiệm?

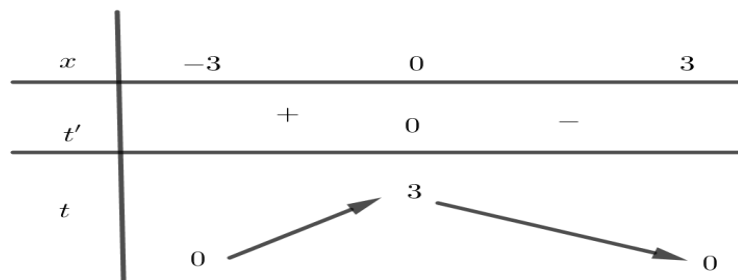
- A.** 5. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2f(\sqrt{9-x^2}) = m - 2019 \Leftrightarrow f(\sqrt{9-x^2}) = \frac{m-2019}{2} (*)$.

Đặt $t = \sqrt{9-x^2}$ với $x \in [-3; 3]$. Ta có $t' = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} \Rightarrow t' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.



Từ bảng biến thiên ta có $t \in [0; 3]$. Vậy phương trình $(*)$ có nghiệm khi và chỉ khi phương

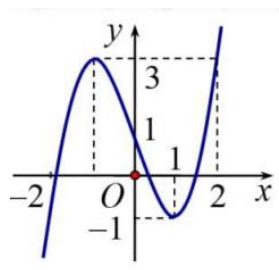
trình $f(t) = \frac{m-2019}{2}$ có nghiệm $t \in [0; 3]$ hay $\min_{[0;3]} f(t) \leq \frac{m-2019}{2} \leq \max_{[0;3]} f(t)$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{m-2019}{2} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow -1 \leq m-2019 \leq 3 \Leftrightarrow 2018 \leq m \leq 2022.$$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{2018; 2019; 2020; 2021; 2022\}$.

Vậy có 5 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(e^x) - \frac{m^2-1}{8} = 0$ có hai nghiệm phân biệt là

- A.** 5. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(e^x) - \frac{m^2-1}{8} = 0 \Leftrightarrow f(e^x) = \frac{m^2-1}{8} (*)$.

Đặt $e^x = t (t > 0)$. Khi đó $(*)$ trở thành $f(t) = \frac{m^2-1}{8} (1)$.

Ta có mỗi $t > 0$ cho duy nhất một giá trị $x = \ln t$.

Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow$ Đường thẳng $y = \frac{m^2-1}{8}$ cắt phần đồ thị hàm số $y = f(t)$ trên khoảng $(0; +\infty)$ tại hai điểm

phân biệt $\Leftrightarrow -1 < \frac{m^2-1}{8} < 1 \Leftrightarrow -7 < m^2 < 9 \Leftrightarrow -3 < m < 3$ mà $m \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\} \Rightarrow$ có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		1		-3		$+\infty$

Tìm số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f^2(x) = 3 - 2f(x)$.

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$f^2(x) = 3 - 2f(x) \Leftrightarrow f^2(x) + 2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \\ f(x) = -3 \end{cases}$$

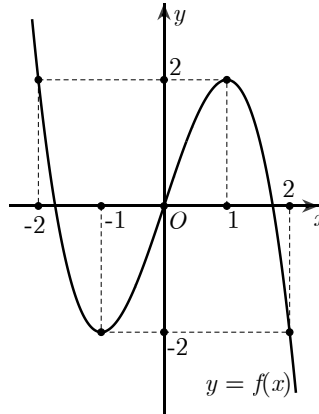
Dựa vào bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = 1$ tại hai điểm phân biệt nên phương trình $f(x) = 1$ có hai nghiệm phân biệt.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = -3$ tại hai điểm phân biệt nên phương trình $f(x) = -3$ có hai nghiệm phân biệt, không trùng với các nghiệm của phương trình $f(x) = 1$.

Vậy phương trình $f^2(x) = 3 - 2f(x)$ có 4 nghiệm phân biệt.

↳ **Mức độ 4**

Câu 1. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Hỏi phương trình $f(f(x)) = 2$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị của hàm số ta có:

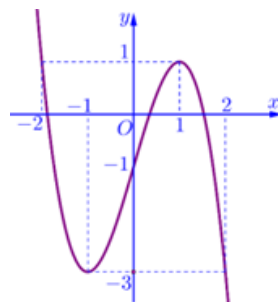
$$f(f(x)) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -2 \\ f(x) = 1 \end{cases}.$$

Số nghiệm của các phương trình $f(x) = -2$ và $f(x) = 1$ lần lượt là số giao điểm đồ thị hàm số $y = f(x)$ và các đường thẳng $y = -2$, $y = 1$.

Dựa vào đồ thị ta có $f(x) = -2$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -1$; $x_2 = 2$ và $f(x) = 1$ có ba nghiệm $x_3 = a$; $x_4 = b$; $x_5 = c$ sao cho $-2 < a < -1 < b < 1 < c < 2$.

Vậy phương trình $f(f(x)) = 2$ có 5 nghiệm phân biệt.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Phương trình $f(2 - f(x)) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm phân biệt?



- A. 4. B. 5. C. 6. D. 7.

Lời giải

Chọn B

Theo đồ thị:

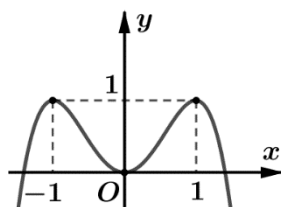
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a & (-2 < a < -1) \\ x = b & (0 < b < 1) \\ x = c & (1 < c < 2) \end{cases} \Rightarrow f(2 - f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - f(x) = a \\ 2 - f(x) = b \\ 2 - f(x) = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2 - a & (1) \\ f(x) = 2 - b & (2) \\ f(x) = 2 - c & (3) \end{cases}$$

Nghiệm của các phương trình (1); (2); (3) lần lượt là giao điểm của các đường thẳng $y = 2 - a$; $y = 2 - b$; $y = 2 - c$ với đồ thị hàm số $f(x)$.

- ☐ $a \in (-2; -1) \Rightarrow 2 - a \in (3; 4)$ suy ra phương trình (1) có đúng 1 nghiệm.
- ☐ $b \in (0; 1) \Rightarrow 2 - b \in (1; 2)$ suy ra phương trình (2) có đúng 1 nghiệm.
- ☐ $c \in (1; 2) \Rightarrow 2 - c \in (0; 1)$ suy ra phương trình (3) có 3 nghiệm phân biệt.

Kết luận: Có tất cả 5 nghiệm phân biệt.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Hỏi có bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn nghiệm của phương trình $f[f(\cos 2x)] = 0$?

- A.** 1 điểm. **B.** 3 điểm. **C.** 4 điểm. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị ta thấy khi $x \in [-1; 1]$ thì $y \in [0; 1]$.

Do đó nếu đặt $t = \cos 2x$ thì $t \in [-1; 1]$, khi đó $f(\cos 2x) \in [0; 1]$.

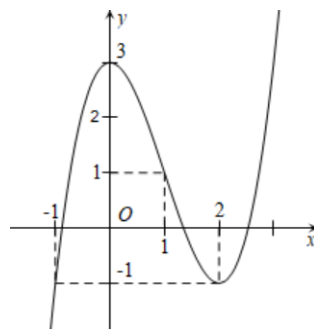
$$\text{Dựa vào đồ thị, ta có } f[f(\cos 2x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(\cos 2x) = 0 \\ f(\cos 2x) = a \ (a < -1) \text{ (loại)} \\ f(\cos 2x) = b \ (b > 1) \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{Phương trình } f(\cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = a \ (a < -1) \text{ (loại)} \\ \cos 2x = b \ (b > 1) \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có 4 điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Số nghiệm của phương trình $[f(x^2 + 1)]^2 - f(x^2 + 1) - 2 = 0$ là

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = x^2 + 1 \Rightarrow t \geq 1$.

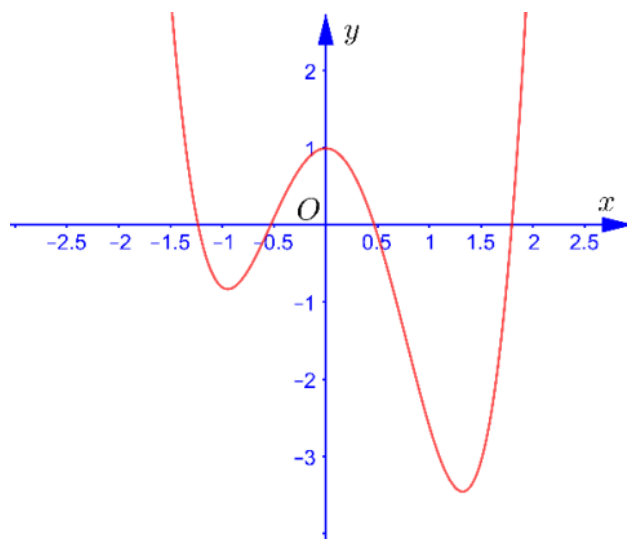
Ta thấy ứng với $t = 1$ cho ta một giá trị của x và ứng với mỗi giá trị $t > 1$ cho ta hai giá trị của x .

Phương trình đã cho trở thành: $[f(t)]^2 - f(t) - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) = -1 \\ f(t) = 2 \end{cases}$.

Từ đồ thị hàm số $y = f(t)$ trên $[1; +\infty)$ suy ra phương trình $f(t) = -1$ có 1 nghiệm $t = 2$ và phương trình $f(t) = 2$ có 1 nghiệm $t > 2$ do đó phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Câu 5. Đồ thị hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ có dạng như hình vẽ sau:



Phương trình $a(f(x))^4 + b(f(x))^3 + c(f(x))^2 + df(x) + e = 0$ (*) có số nghiệm là

A. 2.

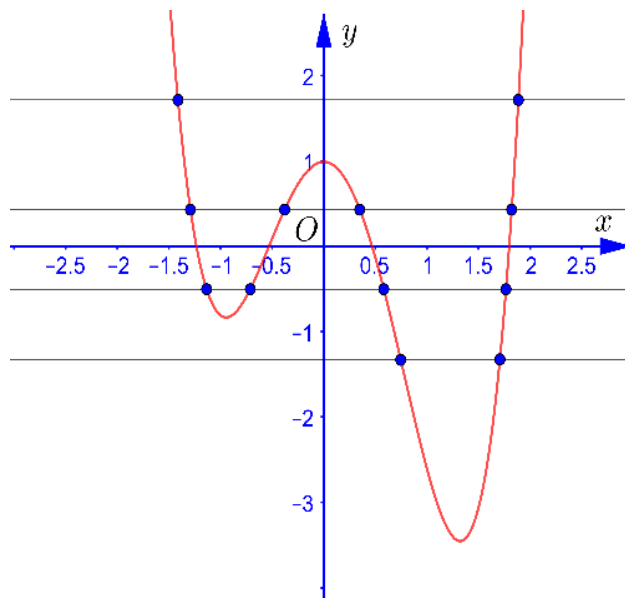
B. 6.

C. 12.

D. 16.

Lời giải

Chọn C.



Ta thấy đồ thị $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt nên phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt: $x_1 \in (-1,5; -1)$, $x_2 \in (-1; -0,5)$, $x_3 \in (0; 0,5)$, $x_4 \in (1,5; 2)$.

Kẻ đường thẳng $y = m$, khi đó:

Với $m = x_1 \in (-1,5; -1)$ có 2 giao điểm nên phương trình $f(x) = x_1$ có 2 nghiệm.

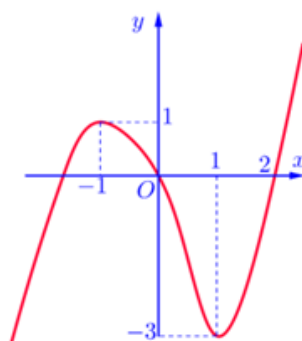
Với $m = x_2 \in (-1; -0,5)$ có 4 giao điểm nên phương trình $f(x) = x_2$ có 4 nghiệm.

Với $m = x_3 \in (0; 0,5)$ có 4 giao điểm nên phương trình $f(x) = x_3$ có 4 nghiệm.

Với $m = x_4 \in (1,5; 2)$ có 2 giao điểm nên phương trình $f(x) = x_4$ có 2 nghiệm.

Vậy phương trình (*) có 12 nghiệm.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(2 + f(e^x)) = 1$ là



A. 1.

B. 2.

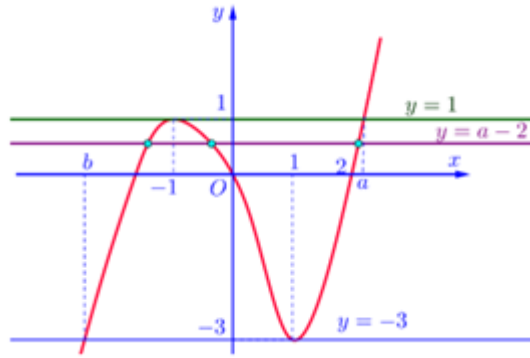
C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có:



Theo đồ thị :

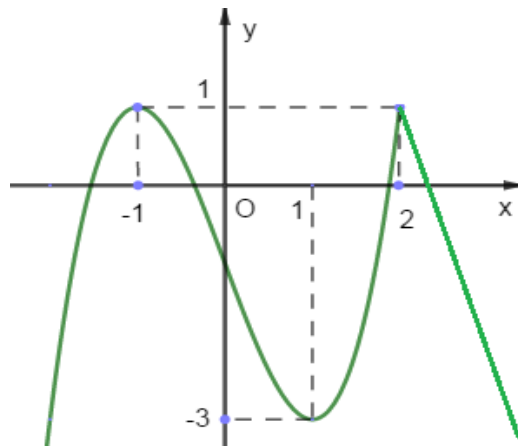
$$f(2 + f(e^x)) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + f(e^x) = -1 \\ 2 + f(e^x) = a, (2 < a < 3) \end{cases}$$

$$2 + f(e^x) = -1 \Leftrightarrow f(e^x) = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 1 \\ e^x = b < -1(L) \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

$$2 + f(e^x) = a \Leftrightarrow f(e^x) = a - 2, (0 < a - 2 < 1) \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = c < -1(L) \\ e^x = d < 0(L) \\ e^x = t > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \ln t$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ và có đồ thị như hình dưới đây:



Với giả thiết, phương trình $f(1 - \sqrt{x^3 + x}) = a$ có nghiệm. Giả sử khi tham số a thay đổi, phương trình đã cho có nhiều nhất m nghiệm và có ít nhất n nghiệm. Giá trị của $m + n$ bằng

A. 4.

B. 6.

C. 3.
Lời giải

D. 5.

Chọn C

Dễ thấy điều kiện của phương trình đã cho là $x \geq 0$.

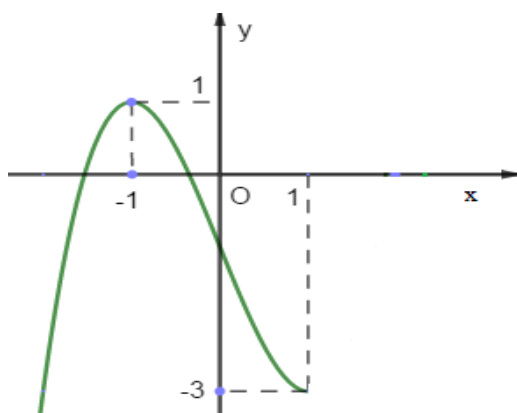
Đặt $t = 1 - \sqrt{x^3 + x}$ (1) $\Rightarrow t \in (-\infty; 1]$.

Để thấy phương trình (1) luôn có nghiệm duy nhất $\forall t \in (-\infty; 1]$.

Phương trình đã cho có dạng: $f(t) = a$ (2), $t \leq 1$.

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số nghiệm của (2).

Đồ thị hàm số $y = f(t)$, $t \leq 1$ có dạng:



Do đó:

(2) vô nghiệm khi $a > 1$.

(2) có hai nghiệm khi $-3 \leq a < 1$.

(2) có nghiệm duy nhất khi $a = 1$ hoặc $a < -3$.

Vậy $m = 2, n = 1 \Rightarrow m + n = 3$.

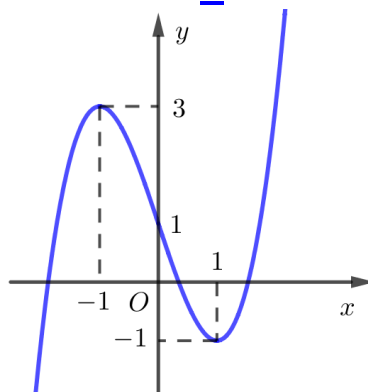
Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập các giá trị nguyên của m để cho phương trình $f(\sin x) = 3\sin x + m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$. Tổng các phần tử của S bằng

A. -5.

B. -8.

C. -10.

D. -6.



Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \sin x$, do $x \in (0; \pi) \Rightarrow \sin x \in (0; 1] \Rightarrow t \in (0; 1]$.

Phương trình đã cho trở thành $f(t) = 3t + m \Leftrightarrow f(t) - 3t = m$ (*).

Đặt $g(t) = f(t) - 3t$. Ta có: $g'(t) = f'(t) - 3$ (1).

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta có: $\forall t \in (0;1]: f'(t) < 0$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $\forall t \in (0;1]: g'(t) < 0$.

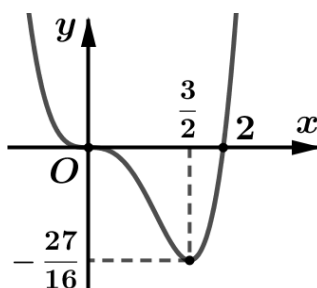
Do đó hàm số $g(t)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

PT (*) có nghiệm $t \in (0;1] \Leftrightarrow \min_{[0;1]} g(t) \leq m < \max_{[0;1]} g(t) \Leftrightarrow g(1) \leq m < g(0)$

$$\Leftrightarrow f(1) - 3 \leq m < f(0) \Leftrightarrow -4 \leq m < 1.$$

Vậy m nguyên là: $m \in \{-4; -3; -2; -1; 0\} \Rightarrow S = -10$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(2|\sin x|) = f\left(\frac{m}{2}\right)$ có đúng 12 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$?

A. 3.

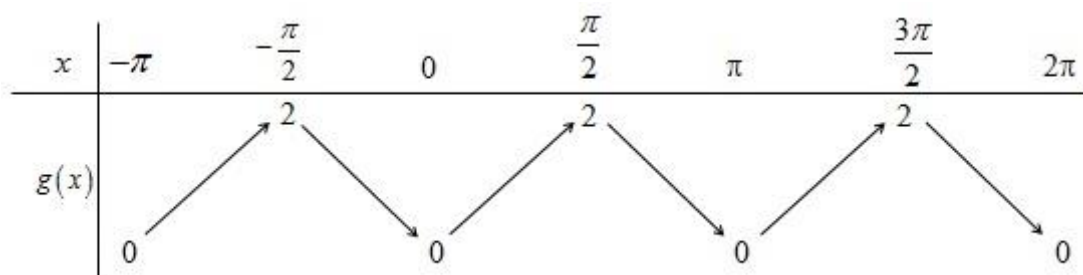
B. 4.

C. 2.
Lời giải

D. 5.

Chọn C

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = g(x) = 2|\sin x|$ trên đoạn $[-\pi; 2\pi]$



Phương trình $f(2|\sin x|) = f\left(\frac{m}{2}\right)$ có đúng 12 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = f\left(\frac{m}{2}\right)$ có 2 nghiệm phân biệt $t \in (0; 2)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra phương trình $f(t) = f\left(\frac{m}{2}\right)$ có 2 nghiệm phân biệt

$$t \in (0; 2) \text{ khi và chỉ khi } -\frac{27}{16} < f\left(\frac{m}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \frac{m}{2} < 2 \\ \frac{m}{2} \neq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 4 \\ m \neq 3 \end{cases}.$$

Do m nguyên nên $m \in \{1; 2\}$. Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		-2	-1	-2		$+\infty$		

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; \pi]$ của phương trình $f\left(\frac{1}{3}\sin x - \frac{1}{4}\cos x\right) = -2$ là

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

Nhìn vào đồ thị ta xét phương trình $f(x) = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

Nên từ đó ta có : $f\left(\frac{1}{3}\sin x - \frac{1}{4}\cos x\right) = -2 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\sin x - \frac{1}{4}\cos x = \pm 1$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{12}\left(\frac{4}{5}\sin x - \frac{3}{5}\cos x\right) = \pm 1 \Leftrightarrow \frac{5}{12}\sin(x - \alpha) = \pm 1 \Leftrightarrow \sin(x - \alpha) = \pm \frac{12}{5}$$

Để thấy rằng phương trình trên vô nghiệm.

Vậy phương trình đã vô nghiệm trên đoạn $[0; 2\pi]$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		-2	-1	-2		$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-2\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ của phương trình $3f(\sin x + \cos x) + 4 = 0$ là

A. 4.

B. 5.

C. 3.

D. 8.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $3f(\sin x + \cos x) + 4 = 0$.

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, ta được phương trình $3f(t) + 4 = 0 \Leftrightarrow f(t) = -\frac{4}{3}$.

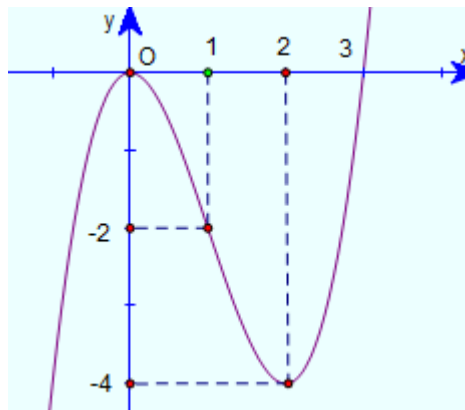
Dựa vào bảng biến thiên kết hợp điều kiện của ẩn t ta có:

$$f(t) = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} t = a \in (-\sqrt{2}; 0) \\ t = b \in (0; \sqrt{2}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}} \in (-1; 0) & (1) \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{b}{\sqrt{2}} \in (0; 1) & (2) \end{cases}.$$

Ta có: trên đoạn $\left[-2\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ phương trình (1) có 2 nghiệm, còn phương trình (2) có 3 nghiệm khác 2 nghiệm của phương trình (1).

Vì vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm trên đoạn $\left[-2\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như sau:



Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; \pi]$ của phương trình $3f(2|\cos x|) + 2 = 0$ là

A. 4.

B. 5.

C. 2.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 2|\cos x|$. Vì $x \in [-\pi; \pi]$ nên $t \in [0; 2] \Rightarrow 3f(t) + 2 = 0 \Leftrightarrow f(t) = -\frac{2}{3}$.

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $f(t) = -\frac{2}{3}$ có 1 nghiệm $t_0 \in (0;1)$.

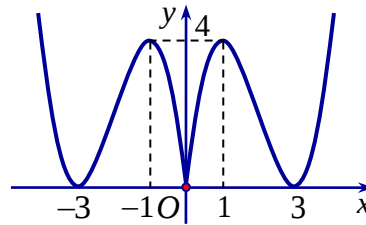
Suy ra $|\cos x| = \frac{t_0}{2} \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

➤ Với $\cos x = \frac{t_0}{2}$ thì phương trình đã cho có 2 nghiệm $-\frac{\pi}{2} < x_1 < 0 < x_2 < \frac{\pi}{2}$.

➤ Với $\cos x = -\frac{t_0}{2}$ thì phương trình đã cho có 2 nghiệm $-\pi < x_3 < -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} < x_4 < \pi$.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi; \pi]$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2f(2|\sin x| + 1) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ là



A. $[0;4)$.

B. $(0;4)$.

C. $(1;3)$.

D. $[0;8)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = 2|\sin x| + 1$. Với $x \in (0; \pi)$ thì $t \in (1;3]$.

Do đó phương trình $2f(2|\sin x| + 1) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = \frac{m}{2}$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $(1;3]$.

Quan sát đồ thị ta suy ra điều kiện của tham số m là $\frac{m}{2} \in [0;4) \Leftrightarrow m \in [0;8)$.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên

x	$-\infty$	-1	0	2	3	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-2	2	-2	2	$+\infty$

Có bao nhiêu số nguyên dương m để phương trình $f(2\sin x + 1) = f(m)$ có nghiệm thực?

A. 2.

B. 5.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Đặt $2\sin x + 1 = t \Rightarrow t \in [-1; 3]$ phương trình $f(2\sin x + 1) = f(m)$ trở thành $f(t) = f(m)$.

Phương trình $f(2\sin x + 1) = f(m)$ có nghiệm khi phương trình $f(t) = f(m)$ có nghiệm $t \in [-1; 3]$.

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $f(t) = f(m)$ có nghiệm $t \in [-1; 3]$ khi $-2 \leq f(m) \leq 2$.

Cũng từ bảng biến thiên suy ra $-2 \leq f(m) \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 3$.

Do m nguyên dương nên $m \in \{1, 2, 3\}$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	0	-	
f(x)	$+\infty$					-3	
							$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ của phương trình $3f(-2|\sin x|) + 10 = 0$ là

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 7.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = -2|\sin x|$, $t \in [-2; 0]$ thì $3f(-2|\sin x|) + 10 = 0$ (1) trở thành

$$3f(t) + 10 = 0 \Leftrightarrow f(t) = -\frac{10}{3} \quad (2).$$

Nhận xét: Số nghiệm của phương trình là (2) số giao điểm của hai đồ thị: $(C): y = f(t)$ và đường thẳng $(d): y = -\frac{10}{3}$.

Bảng biến thiên hàm số $y = f(t)$ trên đoạn $[-2; 0]$:

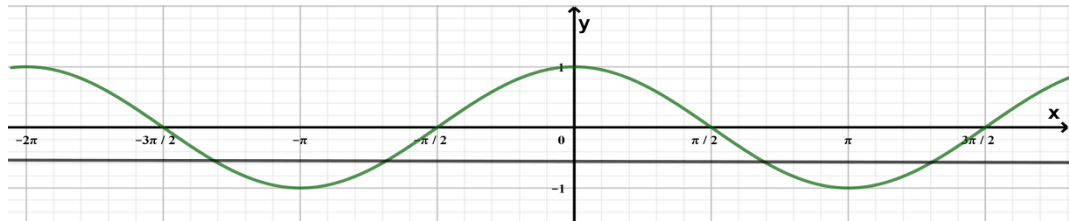
x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
f'(t)	-	0	+	0
f(t)	$+\infty$	-4	-3	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, số nghiệm $t \in [-2; 0]$ của (2) là 1 nghiệm $t \in (-2; 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = t_1 \in (-1; 0) \\ \sin x = t_2 \in (0; 1) \end{cases}.$$

- Trường hợp 1: $\sin x = t_1 \in (-1; 0)$

Đồ thị hàm số: $y = \sin x$ trên đoạn $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$



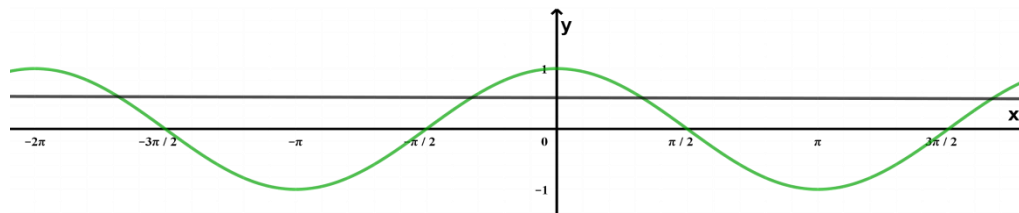
Nhận xét: Số nghiệm của phương trình $\sin x = t_1 \in (-1; 0)$ là số giao điểm của hai đồ thị $y = \sin x$ và đường thẳng $d: y = t_1, t_1 \in (-1; 0)$.

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $\sin x = t_1 \in (-1; 0)$ có 4 nghiệm phân biệt

$$-\frac{3\pi}{2} < x_1 < -\pi; -\pi < x_2 < -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} < x_3 < \pi; \pi < x_4 < \frac{3\pi}{2}.$$

- Trường hợp 2: $\sin x = t_2 \in (0; 1)$ PT ⁽¹⁾

Đồ thị hàm $y = \sin x$ trên đoạn $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$



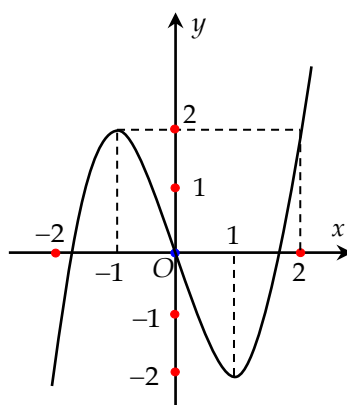
Nhận xét: Số nghiệm của phương trình $\sin x = t_2 \in (0; 1)$ là số giao điểm của hai đồ thị $y = \sin x$ và đường thẳng $d: y = t_2, t_2 \in (0; 1)$.

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $\sin x = t_2 \in (0;1)$ có 3 nghiệm phân biệt

$$-2\pi < x_5 < -\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2} < x_6 < 0; 0 < x_7 < \frac{\pi}{2}.$$

Vậy số nghiệm thuộc đoạn $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ của phương trình $3f(-2|\sin x|) + 10 = 0$ là 7 nghiệm.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tổng tất cả giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt{2f(\cos x)}) = m$ có nghiệm $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.



A. -1.

B. 0.

C. 1.

D. -2.

Lời giải

Chọn D

+) Đặt $t = \cos x$, do $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ nên suy ra $t \in (-1; 0]$.

Trên khoảng $(-1; 0)$ hàm số nghịch biến nên suy ra

Với $t \in (-1; 0]$ thì $f(0) \leq f(t) < f(-1)$ hay $0 \leq f(t) < 2$.

+) Đặt $u = \sqrt{2f(\cos x)}$ thì $u = \sqrt{2f(t)}, u \in [0; 2)$. Khi đó bài toán trở thành:

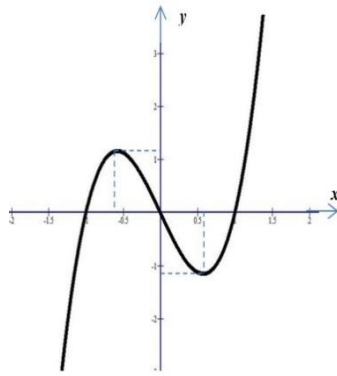
Tìm m để phương trình $f(u) = m$ có nghiệm $u \in [0; 2)$.

Quan sát đồ thị ta thấy rằng với $u \in [0; 2)$ thì $f(u) \in [-2; 2) \Rightarrow -2 \leq m < 2$.

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1\}$. Vậy có 4 giá trị của m .

Tổng các giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là -2.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như sau:



Số nghiệm thuộc đoạn $[0; 3\pi]$ của phương trình $2|f(\cos x)| - 1 = 0$ là:

A. 12.

B. 6.

C. 10.

D. 8

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \cos x$ với $x \in [0; 3\pi] \Rightarrow t \in [-1; 1]$.

$$\text{Phương trình } 2|f(\cos x)| - 1 = 0 \text{ trở thành } \begin{cases} f(t) = \frac{1}{2} & (1) \\ f(t) = -\frac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

Căn cứ đồ thị hàm số $f(x)$ ta thấy:

$$+ (1) \Leftrightarrow \begin{cases} t = t_1 \in (-1; 0) \\ t = t_2 \in (-1; 0) \end{cases} \quad (t_1 \neq t_2)$$

Với $t = t_1 \in (-1; 0) \Rightarrow \cos x = t_1$ có 3 nghiệm thuộc $[0; 3\pi]$.

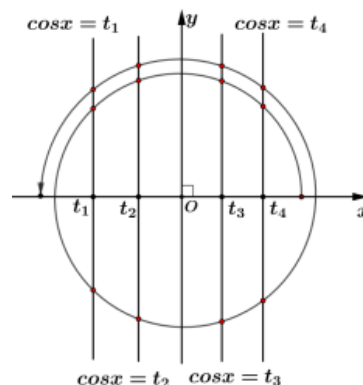
Với $t = t_2 \in (-1; 0) \Rightarrow \cos x = t_2$ có 3 nghiệm thuộc $[0; 3\pi]$.

$$+ (2) \Leftrightarrow \begin{cases} t = t_3 \in (0; 1) \\ t = t_4 \in (0; 1) \end{cases} \quad (t_3 \neq t_4)$$

Với $t = t_3 \in (0; 1) \Rightarrow \cos x = t_3$ có 3 nghiệm thuộc $[0; 3\pi]$.

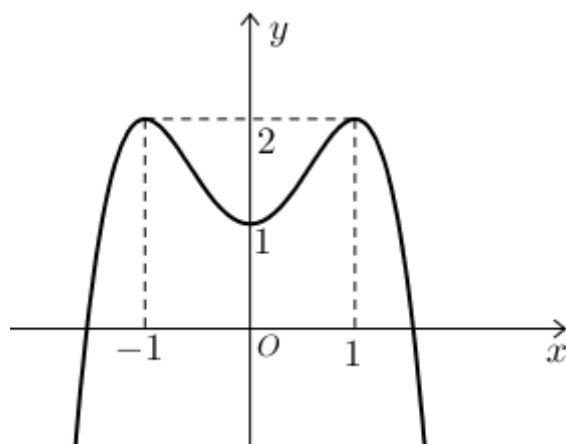
Với $t = t_4 \in (0; 1) \Rightarrow \cos x = t_4$ có 3 nghiệm thuộc $[0; 3\pi]$.

Các nghiệm trên không có nghiệm nào trùng nhau.



Vậy phương trình đã cho có 12 nghiệm thuộc $[0; 3\pi]$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$, $a \neq 0$ và có đồ thị như sau:



Tính tổng các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(2f(\sin x) - 3) = m$ có nghiệm $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\sin x = t$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [0; 1] \Rightarrow 2f(\sin x) = 2f(t) \in [2; 4]$.

Đặt $u = 2f(\sin x) - 3 \Rightarrow u \in [-1; 1]$.

Phương trình trở thành: $f(u) = m$.

Phương trình đã cho có nghiệm $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số tại các điểm có hoành độ thuộc $[-1; 1]$.

Dựa vào đồ thị suy ra $1 \leq m \leq 2$.

Vậy tổng các giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn là 3.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$								$+\infty$

$\swarrow$ $\searrow$ $\swarrow$ $\searrow$
 -2 -1 -2

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(2\sin x + m) + 2 = 0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc $[0; 3\pi]$?

A. 0.

B. 2.

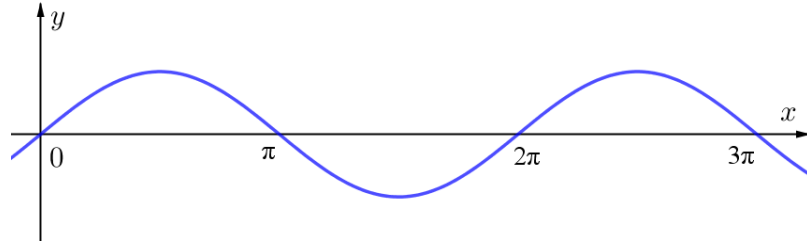
C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

$$f(2\sin x + m) + 2 = 0 \Leftrightarrow f(2\sin x + m) = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin x + m = -1 \\ 2\sin x + m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{-m-1}{2} \\ \sin x = \frac{-m+1}{2} \end{cases}.$$



Nhận xét $\frac{-m+1}{2} - \frac{-m-1}{2} = 1$.

Để phương trình $f(2\sin x + m) + 2 = 0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc $[0; 3\pi]$ thì

$$\begin{cases} \sin x = \frac{-m-1}{2} & (1) \\ \sin x = \frac{-m+1}{2} & (2) \end{cases} \text{ có 6 nghiệm phân biệt thuộc } [0; 3\pi].$$

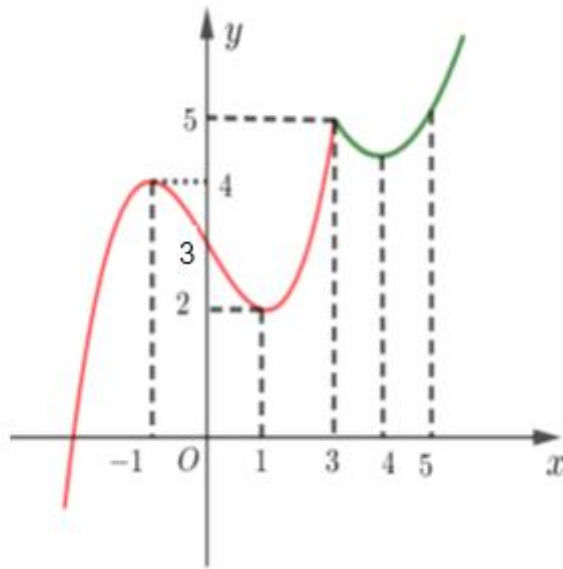
$\Leftrightarrow$ (1) có 4 nghiệm phân biệt và (2) có 2 nghiệm phân biệt thuộc $[0; 3\pi]$ hoặc (1) có 2 nghiệm phân biệt và (2) có 4 nghiệm phân biệt thuộc $[0; 3\pi]$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = \sin x$, để (1) có 4 nghiệm phân biệt và (2) có 2 nghiệm phân biệt thuộc $[0; 3\pi]$ hoặc (1) có 2 nghiệm phân biệt và (2) có 4 nghiệm phân biệt thuộc $[0; 3\pi]$ thì

$$\begin{cases} \begin{cases} \frac{-m-1}{2} = 0 \\ \frac{-m+1}{2} = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} -1 < \frac{-m-1}{2} < 0 \\ 0 \leq \frac{-m+1}{2} < 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ -1 < m < 1 \Leftrightarrow -1 \leq m < 1. \end{cases}$$

Vậy có 2 giá trị nguyên của m là $m = 0; m = -1$ để phương trình $f(2\sin x + m) + 2 = 0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc $[0; 3\pi]$.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới đây:



Tìm m để phương trình $f(|x^2 - 2x|) = m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$.

A. $2 < m < 3$ hoặc $f(4) < m < 5$.

B. $2 < m \leq 3$ hoặc $f(4) < m < 5$.

C. $2 \leq m < 3$ hoặc $f(4) < m < 5$.

D. $2 < m < 3$ hoặc $f(4) < m \leq 5$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = |x^2 - 2x|$, với $x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$.

Ta thấy hàm số $u(x) = x^2 - 2x$ liên tục trên đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$ và $u' = 2x - 2$; $u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\frac{3}{2}$	0	1	2	$\frac{7}{2}$
$u'(x)$		-	0	+	
$u(x)$	$\frac{21}{4}$				$\frac{21}{4}$
	↘ 0			↗ 0	
			-1		
$t = u(x) $	$\frac{21}{4}$				$\frac{21}{4}$
	↘ 0			↗ 0	
			1		

Ta có nhận xét:

Với $t = 0$ hoặc $1 < t \leq \frac{21}{4}$ thì phương trình $t = |x^2 - 2x|$ có 2 nghiệm phân biệt;

Với $t = 1$ thì phương trình $t = |x^2 - 2x|$ có 3 nghiệm phân biệt;

Với mỗi $t \in (0;1)$ thì phương trình $t = |x^2 - 2x|$ có 4 nghiệm phân biệt.

Với $t = |x^2 - 2x|$ phương trình $f(|x^2 - 2x|) = m$ thành $f(t) = m, \left(t \in \left[0; \frac{21}{4}\right]\right)$.

Dựa vào đồ thị, ta biện luận số nghiệm của phương trình $f(t) = m, \left(t \in \left[0; \frac{21}{4}\right]\right)$ trong các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $m = 2$

$f(t) = 2 \Leftrightarrow t = 1$. Khi đó phương trình $f(|x^2 - 2x|) = m$ có 3 nghiệm phân biệt.

Trường hợp 2: $2 < m < 3$

$f(t) = m \Leftrightarrow \begin{cases} t = a \in (0;1) \\ t = b \in (1;3) \end{cases}$. Khi đó phương trình $f(|x^2 - 2x|) = m$ có 6 nghiệm phân biệt.

Trường hợp 3: $m = 3$

$f(t) = m \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = b \in (1;3) \end{cases}$. Khi đó phương trình $f(|x^2 - 2x|) = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

Trường hợp 4: $3 < m < f(4)$

$f(t) = m \Leftrightarrow t = a \in (1;4)$. Khi đó phương trình $f(|x^2 - 2x|) = m$ có 2 nghiệm phân biệt.

Trường hợp 5: $m = f(4)$

$f(t) = m \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = b \in (1;4) \end{cases}$. Khi đó phương trình $f(|x^2 - 2x|) = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

Trường hợp 6: $f(4) < m < 5$

$f(t) = m$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $(1;5)$. Khi đó phương trình $f(|x^2 - 2x|) = m$ có 6 nghiệm phân biệt.

Trường hợp 7: $m = 5$

$f(t) = m$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc $(1;5)$. Khi đó phương trình $f(|x^2 - 2x|) = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

Trường hợp 8: $5 < m < f\left(\frac{21}{4}\right)$

$f(t) = m$ có 1 nghiệm thuộc $\left(1; \frac{21}{4}\right)$. Khi đó phương trình $f(|x^2 - 2x|) = m$ có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $f(|x^2 - 2x|) = m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$ khi
và chỉ khi $2 < m < 3$ hoặc $f(4) < m < 5$.

----- HẾT -----

<https://toanmath.com/>