

SỔ BÀI TẬP ĐIỀN KHUYẾT

HỌC KÌ 1

TOÁN 12

CHƯƠNG I. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM
ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

CHƯƠNG TRÌNH MỚI

2024 - 2025

HỌ VÀ TÊN:

TRƯỜNG:

LỚP:

GV: TRẦN BA SAO

YouTube @tranbasao

fb.com/thaytranbasao

0389.971.935

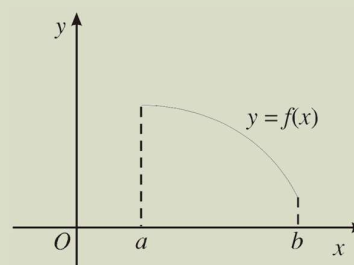
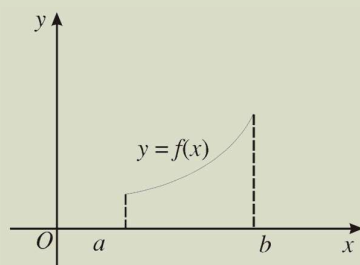


Bài 1.**TÍNH ĐƠN ĐIỀU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ****A. LÝ THUYẾT****I. TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ**

Dạng 1: Cho biết bảng biến thiên hoặc đồ thị của hàm số suy ra tính đơn điệu của hàm số đó

$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ thì hàm số đồng biến trên K .

$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ thì hàm số nghịch biến trên K .



Nếu hàm số đồng biến trên K thì đồ thị của nó đi lên từ trái sang phải, nếu hàm số nghịch biến trên K thì đồ thị của nó đi xuống từ trái sang phải.

Chú ý.

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K . Khi đó:

- Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số f đồng biến trên K .
- Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số f nghịch biến trên K .
- Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì hàm số f không đổi trên K .

Các bước xét tính đơn điệu của hàm số:

- Tìm tập xác định.
- Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.
- Lập bảng biến thiên.
- Kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	1	$-\infty$

a) Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

b) So sánh $f(-2)$ và $f(0)$.

Luyện tập 1.1. Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y						

$-\infty \rightarrow 3 \rightarrow -2 \rightarrow +\infty$

a) Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số.

b) So sánh $f(0)$ và $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Luyện tập 1.2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình sau.

Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y		3	-1	3	

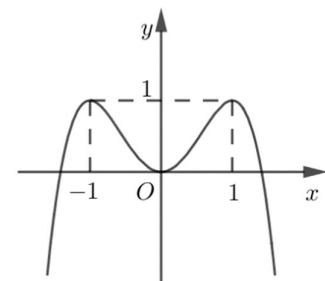
Luyện tập 1.3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình sau

Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	$-$		$-$
y	$2 \searrow$	$-\infty$	$+\infty \searrow$
			2

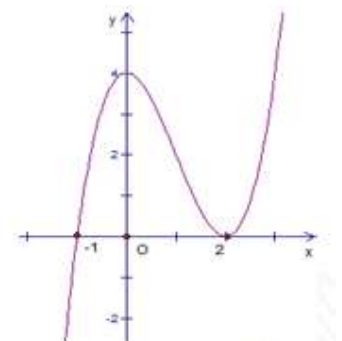
Ví dụ 2. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ.

Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số?



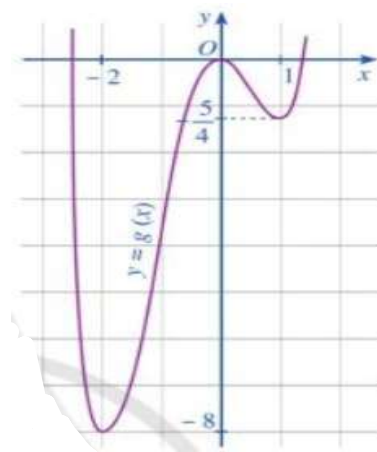
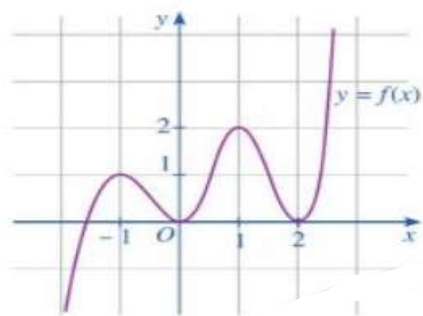
Luyện tập 2.1. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.

Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số?

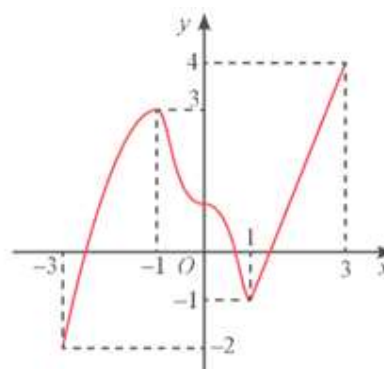
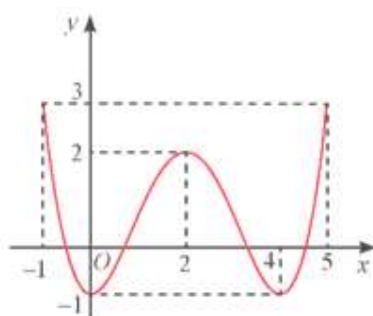


Luyện tập 2.2. Tìm các khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của các hàm số $y = f(x), y = g(x)$ có đồ thị như

sau:



Luyện tập 2.3. Tìm các khoảng đơn điệu và cực trị của các hàm số có đồ thị cho ở hình sau.



Ví dụ 3.1. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số:

a) $y = 2x - 1$;

b) $y = -x^2 + 2x$.

Ví dụ 3.2. Xét tính đồng biến, nghịch biến của các hàm số:

a) $y = 4 + 3x - x^2$;

b) $\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 7x - 2$;

c) $y = x^4 - 2x^2 + 3$;

d) $y = -x^3 + x^2 - 5$.

Ví dụ 3.3. Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số:

a) $\frac{3x+1}{1-x}$;

b) $y = \frac{x^2 - 2x}{1-x}$;

c) $y = \sqrt{x^2 - x - 20}$;

d) $y = \frac{2x}{x^2 - 9}$.

Luyện tập 3.1. Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 2$;

b) $y = x^4 - 2x^2$;

c) $y = -x^3 + 3x - 2$;

d) $y = x^4 - 4x^3 + 2$.

Luyện tập 3.2. Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của các hàm số sau:

a) $y = \frac{x+3}{x-1}$;

b) $y = \frac{3x+1}{x+1}$;

c) $y = x + \frac{4}{x}$;

d) $y = \frac{x^2 - x + 9}{x - 1}$.

Luyện tập 3.3. Chứng minh rằng hàm số $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$; nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.

Luyện tập 3.4. Chứng minh rằng hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

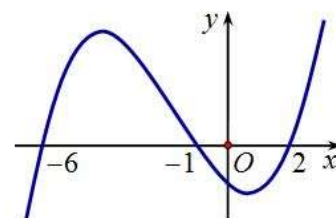
Luyện tập 3.5. Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{16 - x^2}$; b) $y = \sqrt{6x - x^2}$; c) $y = \sqrt{x^2 - 4x}$; d) $y = \sqrt{x^2 - 8x + 12}$.

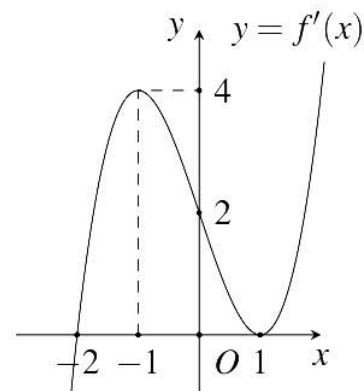
Luyện tập 3.6. Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của các hàm số sau:

a) $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$; b) $y = \sin x - 2x$; c) $y = x^3 + 4x - \sin x$; d) $y = \frac{-x^2 + x - 1}{x - 1}$.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến, nghịch biến trên khoảng nào?



Luyện tập 4. Cho hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến, nghịch biến trên khoảng nào?



Ví dụ 5. Hàm số $f(x)$ có $f'(x) = (x-1)(x-2), \forall x \in \mathbb{R}$. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số?

Luyện tập 5.1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (2-x)(x-3), \forall x \in \mathbb{R}$. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số?

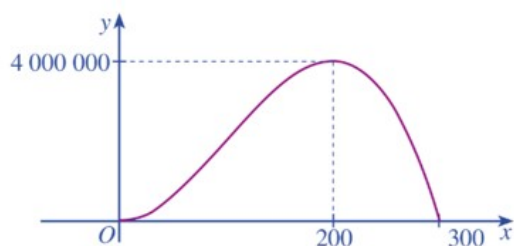
Luyện tập 5.2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-1)^3(2-x)$. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số?

Dạng 2: Vận dụng kiến thức về tính đơn điệu của hàm số để giải các bài toán thực tế

Ví dụ 1. Xét một chất điểm chuyển động trên một trục số nằm ngang, chiều dương từ trái sang phải. Giả sử vị trí $s(t)$ (mét) của chất điểm trên trục số đã chọn tại thời điểm t (giây) được cho bởi công thức $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t - 3 (t \geq 0)$. Hỏi trong khoảng thời gian nào thì chất điểm chuyển động sang phải, trong khoảng thời gian nào thì chất điểm chuyển động sang trái?



Ví dụ 2. Một doanh nghiệp dự kiến lợi nhuận khi sản xuất x sản phẩm ($0 \leq x \leq 300$) được cho bởi hàm số $y = -x^3 + 300x^2$ (đơn vị: nghìn đồng) và được minh họa bằng đồ thị ở hình sau.

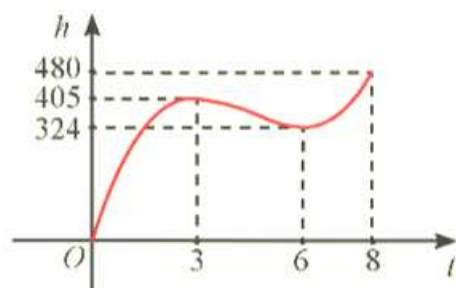


Hãy cho biết lợi nhuận theo số sản phẩm sản xuất tăng khi nào và giảm khi nào?

Luyện tập 1. Một doanh nghiệp dự kiến lợi nhuận khi sản xuất x sản phẩm ($0 \leq x \leq 300$) được cho bởi hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + 100x^2$ (đơn vị: nghìn đồng). Hãy cho biết lợi nhuận theo số sản phẩm sản xuất tăng khi nào và giảm khi nào?

Luyện tập 2. Trong 8 phút đầu kể từ khi xuất phát, độ cao h (tính bằng mét) của khinh khí cầu vào thời điểm t phút được cho bởi công thức $h(t) = 6t^3 - 8t^2 + 324t$. Đồ thị của hàm số $h(t)$ được biểu diễn trong hình bên.

Trong các khoảng thời gian nào thì khinh khí cầu tăng dần độ cao, giảm dần độ cao? Độ cao của khinh khí cầu vào các thời điểm 3 phút và 6 phút sau khi xuất phát có gì đặc biệt?



Luyện tập 4. Thể tích V (đơn vị: centimét khối) của 1 kg nước tại nhiệt độ T ($0^{\circ}\text{C} \leq T \leq 30^{\circ}\text{C}$) được tính bởi công thức sau: $V(T) = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000679T^3$.

Hỏi thể tích $V(T)$, $0^\circ\text{C} \leq T \leq 30^\circ\text{C}$, giảm trong khoảng nhiệt độ nào?

Luyện tập 5. Kính viễn vọng không gian Hubble được đưa vào vũ trụ ngày 24/4/1990 bằng tàu con thoi Discovery. Vận tốc của tàu con thoi trong sứ mệnh này, từ lúc cất cánh tại thời điểm $t = 0(s)$ cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi tại thời điểm $t = 126(s)$, cho bởi hàm số sau: $v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23$ (v được tính bằng ft/s , $1\text{ foot} = 0,3048\text{ m}$).



Hỏi gia tốc của tàu con thoi sẽ tăng trong khoảng thời gian nào tính từ thời điểm cất cánh cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi?

Luyện tập 6. Giả sử số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 2000 được mô tả bởi hàm số:

$$N(t) = \frac{25t+10}{t+5}; t \geq 0,$$

trong đó $N(t)$ được tính bằng nghìn người.

- a) Tính số dân của thị trấn đó vào các năm 2000 và 2025 .
b) Tính đạo hàm $N'(t)$ và $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$. Từ đó, giải thích tại sao số dân của thị trấn đó luôn tăng nhưng sẽ không vượt quá một ngưỡng nào đó.

Luyện tập 7. Kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam trong các năm từ 2010 đến 2017 có thể được tính xấp xỉ bằng công thức $f(x) = 0,01x^3 - 0,04x^2 + 0,25x + 0,44$ (tỉ USD) với x là số năm tính từ 2010 đến 2017 ($0 \leq x \leq 7$).

a) Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$.

b) Chứng minh rằng kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam tăng liên tục trong các năm từ 2010 đến 2017.

Luyện tập 8. Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox. Toạ độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $v(t)$; $v'(t)$ là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $a(t)$.

a) Tìm các hàm $v(t)$ và $a(t)$.

b) Trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm tăng, trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm giảm?

Dạng 3: Bài toán tính đơn điệu của hàm có tham số

Tìm điều kiện của tham số m để hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) đồng biến hoặc nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có:

- Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0 \ (\forall x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c \geq 0 \ (\forall x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} 3a > 0 \\ \Delta'_{y'} \leq 0 \end{cases}$.

- Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0 \ (\forall x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c \leq 0 \ (\forall x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} 3a < 0 \\ \Delta'_{y'} \leq 0 \end{cases}$.

Chú ý:

- Trong trường hợp hệ số a có chứa tham số m ví dụ: $y = (m-1)x^3 + mx^2 + 2x - 3$ ta cần xét $a = 0$ trước.
- Số giá trị nguyên trên đoạn $[a; b]$ bằng $b - a + 1$.

Tìm điều kiện của tham số m để hàm số $y = f(x; m)$ đồng biến hoặc nghịch biến trên D (trong đó D là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng, nửa đoạn).

Xét hàm số $f(x; m)$ ta tính $y' = f'(x; m)$.

Hàm số đồng biến trên $D \Leftrightarrow y' \geq 0 \ (\forall x \in D)$.

Hàm số nghịch biến trên $D \Leftrightarrow y' \leq 0 \ (\forall x \in D)$.

Cô lập tham số m và đưa bất phương trình $y' \geq 0$ hoặc $y' \leq 0$ về dạng $m \geq f(x)$ hoặc $m \leq f(x)$.

Sử dụng tính chất:

- Bất phương trình: $m \geq f(x) \quad \forall x \in D \Leftrightarrow m \geq \max_D f(x)$.
- Bất phương trình: $m \leq f(x) \quad \forall x \in D \Leftrightarrow m \leq \min_D f(x)$.

Chú ý: Với hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ thì nó đồng biến trên đoạn $[a; b]$.

Để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số các bạn xem chủ đề GTLN, GTNN của hàm số.

Xét hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. **TXĐ:** $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-d}{c} \right\}$.

Ta có $y = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

Nếu $ad = bc$ thì hàm số đã cho suy biến thành hàm hằng. Do đó:

Hàm số đồng biến trên **mỗi khoảng xác định của nó** $\Leftrightarrow ad - bc > 0$.

Hàm số nghịch biến trên **mỗi khoảng xác định của nó** $\Leftrightarrow ad - bc < 0$.

Hàm số đồng biến trên miền $D = (i; j) \Leftrightarrow y' > 0 \quad \forall x \in (i; j) \Leftrightarrow \begin{cases} ad - bc > 0 \\ \frac{-d}{c} \notin (i; j) \end{cases}$.

Hàm số nghịch biến trên miền $D = (i; j) \Leftrightarrow y' < 0 \quad \forall x \in (i; j) \Leftrightarrow \begin{cases} ad - bc < 0 \\ \frac{-d}{c} \notin (i; j) \end{cases}$.

Ví dụ 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = 2x^3 - 3mx^2 + 6mx + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Luyện tập 1.1. Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

Luyện tập 1.2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}(m+2)x^3 - (m+2)x^2 + (m-8)x + m^2 - 1$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Luyện tập 1.3. Hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - 2x^2 + (m+3)x + m$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì giá trị m nhỏ nhất là?

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

.....

.....

.....

Luyện tập 2. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx - 1$. Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

.....

.....

.....

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - mx + 1$. Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn $[-2; 0]$.

.....

.....

.....

Luyện tập 3.1. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m-2)x^2 + (2m+3)x$ nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$?

.....

.....

.....

Luyện tập 3.2. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - (2m-3)x^2 + 2(m^2-3m)x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$?

.....

.....

.....

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-2m}$

- a) Tìm m để hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định.
 b) Tìm m để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -10)$.

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 4.1. Cho hàm số $y = \frac{x+m-2}{x-m}$

- a) Tìm m để hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.
 b) Tìm m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(5; +\infty)$.

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 4.2. Cho hàm số $y = \frac{-mx-5m+4}{x+m}$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định. Tổng các phần tử của tập hợp S là?

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x^2 - 3x + m}{x-2}$.

Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

.....

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 5.1. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{2x^2 + (1-m)x + 1+m}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

.....

.....

.....

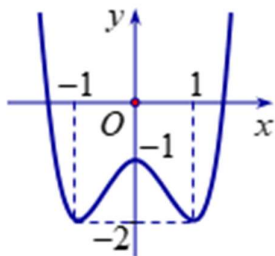
.....

.....

B. BÀI TẬP

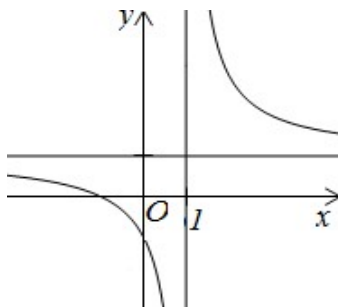
PHẦN 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



- A. $(0;1)$. B. $(-\infty;1)$. C. $(-1;1)$. D. $(-1;0)$.

Câu 2. Đường cong ở hình dưới là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. B. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. C. $y' > 0, \forall x \neq 1$. D. $y' < 0, \forall x \neq 1$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y						

$-\infty$

4

$-\infty$

4

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

-2

4

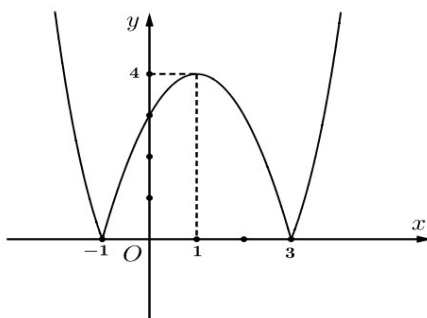
-2

</

Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

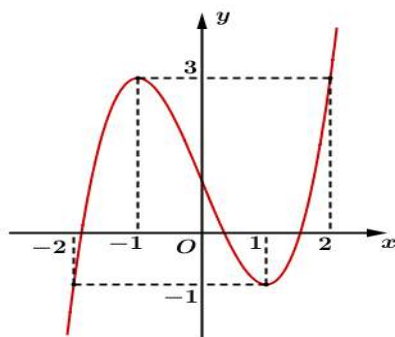
- A. $f(x) \geq -2, \forall x \in \mathbb{R}$. B. $f(-2) < f(-1)$. C. $f(3) < f(4)$. D. $f\left(-\frac{1}{2}\right) > -2$.

Câu 4. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số nghịch biến trên những khoảng nào?



- A. $(-\infty;-1)$ và $(1;3)$. B. $(-1;1)$ và $(3;+\infty)$. C. $(-1;3)$. D. $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Hàm số đồng biến trên khoảng

- A. $(-2; -1)$. B. $(-1; 0)$. C. $(0; 2)$. D. $(-2; 0)$.

Câu 6: Hàm số $y = x^4 - 4x^3 + 3$ đồng biến trên những khoảng nào sau đây?

- A. $(-\sqrt{2}; 0), (\sqrt{2}; +\infty)$. B. $(-\infty; -\sqrt{2}), (0; \sqrt{2})$.
C. $(3; +\infty)$. D. $(0; 3)$.

Câu 7: Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$, khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $f\left(\frac{4}{3}\right) > f\left(\frac{5}{4}\right)$. B. $f(1) > f(-1)$. C. $f(3) > f(\pi)$. D. $f(1) > f(2)$.

Câu 8: Hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ đồng biến trên khoảng nào trong những khoảng sau?

- A. $(-1; 3)$. B. $(4; 5)$. C. $(0; 4)$. D. $(-2; 2)$.

Câu 9: Hàm số $y = \frac{2}{x^2 + 1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; +\infty)$. B. $(-1; 1)$. C. $(-\infty; +\infty)$. D. $(-\infty; 0)$.

Câu 10: Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. $y = \frac{x+1}{x+3}$. B. $y = x^3 + x$. C. $y = \frac{x-1}{x-2}$. D. $y = -x^3 - 3x$.

Câu 11: Hàm số $y = \sqrt{x - x^2}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. B. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. C. $(-\infty; 0)$. D. $(1; +\infty)$.

Câu 12: Hàm số $y = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$ đồng biến trên khoảng

- A. $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. B. $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$. C. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. D. $(-\infty; +\infty)$.

PHẦN 2: Câu trắc nghiệm đúng sai

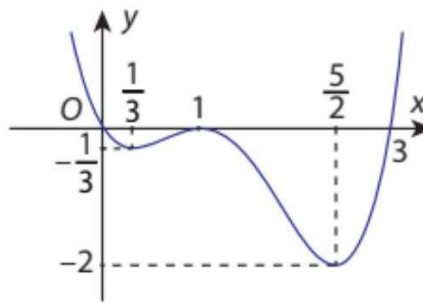
Câu 1: Hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		0	3		0		$+\infty$	

Các mệnh đề dưới đây đúng hay **sai**?

- a) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$.
- b) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-3; 0)$ và $(2; +\infty)$.
- c) Hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- d) $f\left(\frac{1}{2}\right) > f(1)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'\left(\frac{1}{3}\right) = f'(1) = f'\left(\frac{5}{2}\right) = 0$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ



Các mệnh đề sau đúng hay **sai**?

- a) Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$.
- b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- c) $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (-\infty; 0)$.
- d) $f(2) < f(4)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+2}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Với mọi $x \neq -2$, đạo hàm của hàm số $y' = \frac{-5}{(x+2)^2}$.
- b) Giá trị của hàm số tại $x = 1$ bằng $-\frac{1}{2}$.
- c) Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
- d) Hàm số đã cho đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x^2 - 1), \forall x \in \mathbb{R}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Tập nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ là $S = \{0; 1\}$.
- b) Có $f'(x) > 0, \forall x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.
- c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- d) $f(-3) < f(-2)$.

PHẦN 3: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 - x - 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Tập nghiệm của phương trình $f'(x) < 0$ là $(a; b)$. Giá trị $b - 3a$ bằng bao nhiêu?

Câu 2: Tìm số nguyên m bé nhất sao cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 6mx + m$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$?

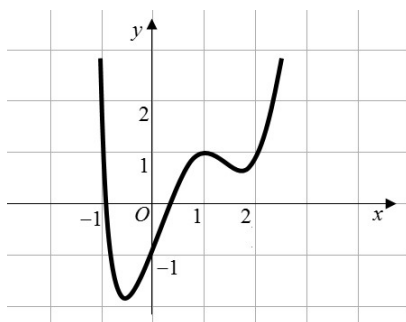
Câu 3: Tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = -x^4 + (2m - 3)x^2 + m$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$ là $\left(-\infty; \frac{p}{q}\right]$, trong đó phân số $\frac{p}{q}$ tối giản và $q > 0$. Hỏi tổng $p + q$ là bao nhiêu?

Câu 4: Xét một chất điểm chuyển động trên một trục số nằm ngang, chiều dương từ trái sang phải (H.1.1). Giả sử vị trí $s(t)$ (mét) của chất điểm trên trục số đã chọn tại thời điểm t (giây) được cho bởi công thức $s(t) = \frac{t^3}{3} - 4t^2 + 6t + 1 (t \geq 0)$. Hỏi thời điểm đầu tiên mà vận tốc của chuyển động bắt đầu tăng dần là bao nhiêu?



Câu 5: Theo thống kê tại một nhà máy Z, nếu áp dụng tuần làm việc 40 giờ thì mỗi tuần có 100 công nhân đi làm và mỗi công nhân làm được 120 sản phẩm trong một giờ. Nếu tăng thời gian làm việc thêm 2 giờ mỗi tuần thì sẽ có 1 công nhân nghỉ việc và năng suất lao động giảm 5 sản phẩm/1 công nhân/1 giờ (và như vậy, nếu giảm thời gian làm việc 2 giờ mỗi tuần thì sẽ có thêm 1 công nhân đi làm đồng thời năng suất lao động tăng 5 sản phẩm/1 công nhân/1 giờ). Ngoài ra, số phế phẩm mỗi tuần ước tính là $P(x) = \frac{95x^2 + 120x}{4}$, với x là thời gian làm việc trong một tuần. Nhà máy cần áp dụng thời gian làm việc mỗi tuần mấy giờ để số lượng sản phẩm thu được mỗi tuần là lớn nhất?

Câu 6 : Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ dưới đây :



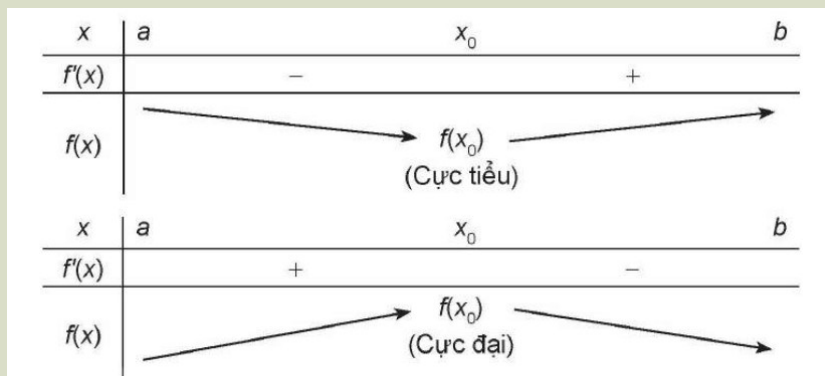
. Đặt $g(x) = f(x) - x$. Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại điểm nào?

II. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Dạng 1: Cho biết bảng biến thiên hoặc đồ thị của hàm số suy ra cực trị của hàm số đó

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $K = (x_0 - h; x_0 + h)$ và có đạo hàm trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$, với $h > 0$.

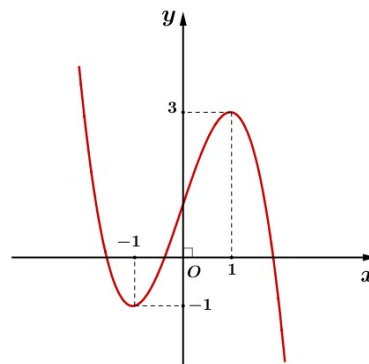
- Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.
- Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.



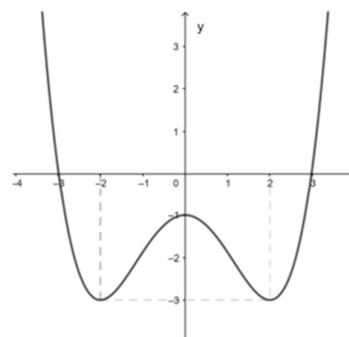
Các bước tìm cực trị của hàm số:

- + Tìm miền xác định D của hàm số đã cho.
- + Tính $f'(x)$. Tìm các điểm mà tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.
- + Dựa vào bảng xét dấu $f'(x)$ hoặc bảng biến thiên để kết luận.

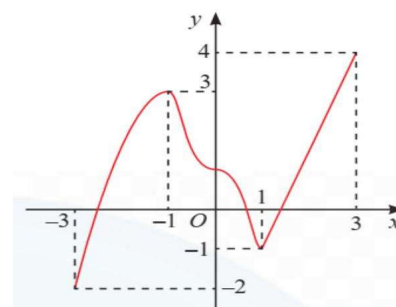
Ví dụ 1. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$



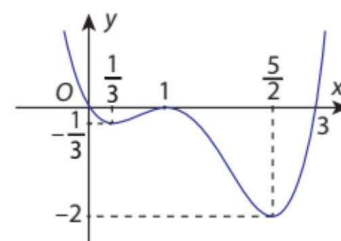
Luyện tập 1.1. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a; b; c \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong hình bên. Tìm các điểm cực trị của đồ thị hàm số.



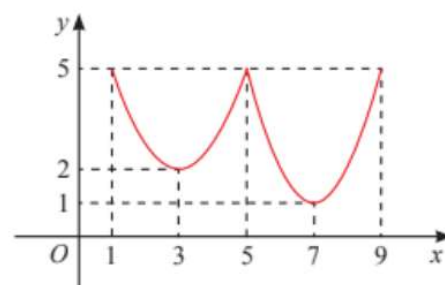
Luyện tập 1.2. Tìm cực trị của các hàm số có đồ thị cho ở hình vẽ



Luyện tập 1.3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 3]$ thỏa mãn $f'(\frac{1}{3}) = f'(1) = f'(\frac{5}{2}) = 0$ và có đồ thị là đường cong như hình. Tìm cực trị của hàm số đã cho trên khoảng $(0; 3)$.



Luyện tập 1.4. Tìm cực trị của các hàm số có đồ thị cho ở hình vẽ



Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	3	0	$+\infty$			

Tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$?

Luyện tập 2.1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

Tìm điểm cực trị của hàm số đã cho?

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$		3	0	3	

Luyện tập 2.2. Tìm điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình sau.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y			2		1		2		
	$-\infty$								$-\infty$

Luyện tập 2.3. Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

Tìm các điểm cực trị của hàm số $f(x)$.

Ví dụ 3. Tìm tọa độ các điểm cực trị của đồ thị các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$; b) $y = x^4 - 8x^2 + 2$; c) $y = \frac{2x-2}{x+1}$; d) $y = x + \frac{1}{x}$.

Luyện tập 3.1. Tìm tọa độ các điểm cực trị của đồ thị các hàm số sau:

a) $y = -x^3 + 3x - 4$; b) $y = -x^4 + 4x^2 + 2$; c) $y = \frac{x+1}{2x-3}$; d) $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$.

Luyện tập 3.2. Tìm tọa độ các điểm cực trị của đồ thị các hàm số sau:

a) $y = f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1};$

b) $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}.$

c) $y = \sqrt{-x^2 + 3x - 2}.$

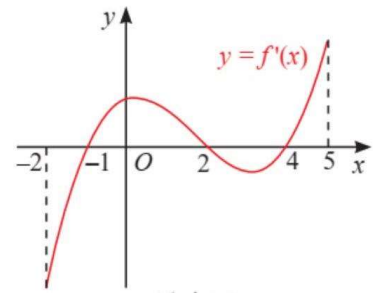
Ví dụ 4. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Gọi A và B là các điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho. Tính độ dài AB.

Luyện tập 4. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Gọi A và B là các điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho. Tính diện tích tam giác OAB.

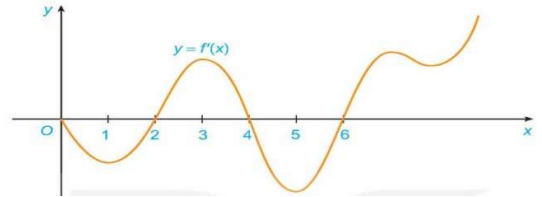
Ví dụ 5. Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có hai điểm cực trị A, B. Viết phương trình đường thẳng AB.

Luyện tập 5. Cho hàm số $y = \frac{3x^2 + 13x + 19}{x + 3}$. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị.

Ví dụ 6. Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm $y = f'(x)$ như Hình vẽ. Tìm điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.



Luyện tập 6. Đồ thị của đạo hàm $y = f'(x)$ của hàm số $y = f(x)$ được cho trong Hình vẽ. Tại giá trị nào của x thì $y = f(x)$ có cực đại hoặc cực tiểu? Giải thích.



Ví dụ 7. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+2)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Tại giá trị nào của x thì $y = f(x)$ có cực đại hoặc cực tiểu? Giải thích.

Luyện tập 7.1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-2)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Tìm các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

Luyện tập 7.2. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+4)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Tìm các điểm cực trị của hàm số $f(x)$.

Ví dụ 8. Hàm số $y = \log_2(x^3 - 4x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Luyện tập 8. Đồ thị hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$ có tọa độ điểm cực đại là $(a; b)$. Khi đó $a.b$ bằng bao nhiêu?

Dạng 2: Vận dụng kiến thức cực trị vào bài toán thực tế

Ví dụ 1. Một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ độ cao 3m với vận tốc ban đầu là 20,5 m/s. Trong Vật lí, ta biết rằng khi bỏ qua sức cản của không khí thì độ cao h (mét) của vật sau t (giây) được cho bởi công thức $h(t) = 3 + 20,5t - 4,9t^2$ ($t \geq 0$). Hỏi tại thời điểm nào thì vật đạt độ cao lớn nhất?

.....

.....

.....

Luyện tập 1. Một cửa hàng buôn giày nhập một đôi với giá là 40 đôla. Cửa hàng ước tính rằng nếu đôi giày được bán với giá x đôla thì mỗi tháng khách hàng sẽ mua $(120 - x)$ đôi. Hỏi cửa hàng bán một đôi giày giá bao nhiêu thì thu được nhiều lãi nhất?

.....

.....

.....

Luyện tập 2. Vận tốc chuyển động của một vật được biểu thị bởi hàm số $v(t) = at^2 + bt + c$, trong đó t là thời gian tính theo giây và a, b, c là các hằng số. Tại thời điểm 1 giây, 2 giây và 5 giây vận tốc của vật lần lượt là 16 (m/s), 21 (m/s) và 24 (m/s). Tại thời điểm nào vận tốc của vật lớn nhất?

.....

.....

.....

Luyện tập 3. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $H(x) = 0,025x^2(30 - x)$ trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân trên để huyết áp giảm nhiều nhất?

.....

.....

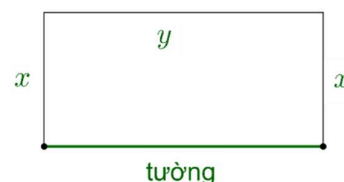
.....

Luyện tập 4. Trên một miếng đất, ông A dự định xây một mảnh vườn hình chữ nhật để thả gia súc. Một cạnh của mảnh vườn được xây tường, ông A dùng 100m dây rào để rào ba cạnh còn lại. Để diện tích của mảnh vườn lớn nhất thì các cạnh của hình chữ nhật bằng bao nhiêu?

.....

.....

.....



Luyện tập 5. Máng trượt của một cầu trượt cho trẻ em được uốn từ một tấm kim loại có bề rộng 200 cm. Nhà thiết kế khuyến cáo, diện tích của mặt cắt càng lớn thì càng đảm bảo an toàn cho trẻ em.

Với x đạt giá trị bằng bao nhiêu thì cầu trượt đảm bảo an toàn nhất cho trẻ em?



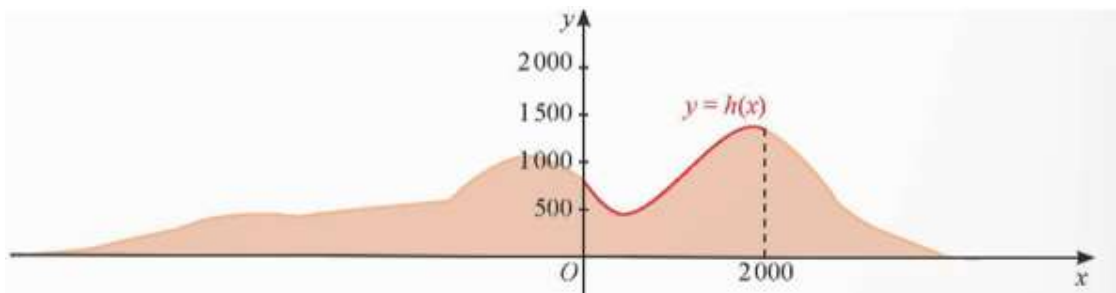
Luyện tập 6. Một công ty sản xuất nước khoáng dự kiến lợi nhuận khi sản xuất x chai nước khoáng ($0 \leq x \leq 500$) trong ngày được cho bởi hàm số $y = -x^3 + 300x^2$ (đơn vị: nghìn đồng). Hãy cho biết công ty cần sản xuất bao nhiêu chai nước khoáng trong ngày để lợi nhuận cao nhất?

Luyện tập 7. Trong 6 phút đầu kể từ khi xuất phát, độ cao h (tính bằng mét) của khinh khí cầu vào thời điểm t phút được cho bởi công thức $h(t) = 6t^3 - 81t^2 + 324t$ ($t \geq 0$). Khi nào thì khinh khí cầu đạt độ cao cực đại?

Luyện tập 8. Một phần lát cắt của dãy núi có độ cao tính bằng mét được mô tả bởi hàm số:

$$y = h(x) = -\frac{1}{1320000}x^3 + \frac{9}{3520}x^2 - \frac{81}{44}x + 840 \text{ với } 0 \leq x \leq 2000.$$

Tìm tọa độ các đỉnh của lát cắt dãy núi trên đoạn $[0; 2000]$.



Luyện tập 9. Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số:

$$f(t) = \frac{5000}{1 + 5e^{-t}}; t \geq 0,$$

trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất?

Dạng 3: Các bài toán cực trị có chứa tham số

Ví dụ 1. Tìm số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 12x + 1$ không có cực trị.

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Tìm số giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 - (1-2m)x + m + 2$ có cực đại và cực tiểu.

.....

.....

.....

Luyện tập 2. Cho hàm số $y = -x^3 + (2m-1)x^2 - 2(2-m)x - 2$. Tìm số giá trị nguyên của tham số $m \in [-20; 20]$ để hàm số có cực trị.

.....

.....

.....

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + mx - 2$. Tìm m để hàm số đạt cực trị tại điểm $x = 2$.

.....

.....

.....

Luyện tập 3.1. Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 + nx + 1(C)$. Tìm m, n biết đồ thị hàm số đạt cực trị tại điểm $A(2; 7)$.

.....

.....

.....

Luyện tập 3.2. Cho hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$. Tìm giá trị của $a + b$ để hàm số đạt cực trị tại các điểm $x = 1$ và $x = -2$.

.....

.....

.....

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4(C)$. Tìm m để hàm số 2 điểm cực trị tại A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 4.

.....

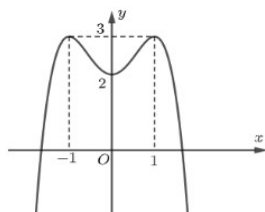
.....

.....

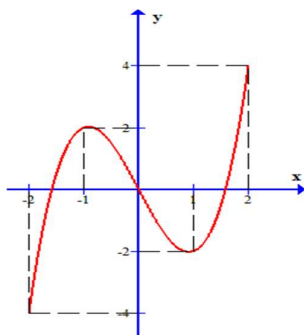
C. BÀI TẬP

Phần 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong như hình bên. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. $x = 1$.B. $x = 0$.C. $x = -1$.D. $x = 2$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?

A. $x = -2$.B. $x = -1$.C. $x = 1$.D. $x = 2$.

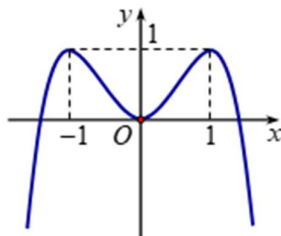
Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$		4		5		$-\infty$

Cực đại của hàm số là

A. $y_{CB} = 4$ B. $y_{CB} = 5$ C. $y_{CT} = 0$ D. $y_{CB} = 1$

Câu 4: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ là

A. $(-1; 1)$.B. $(0; 1)$.C. $(1; 1)$.D. $(0; 0)$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ:

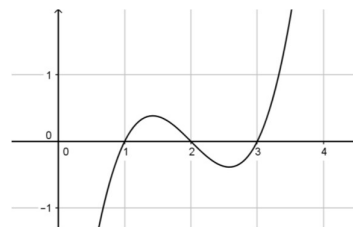
Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

C. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị.

D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực tiểu và có hai điểm cực đại.



Câu 6: Tìm giá trị cực đại của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 2$.

- A. -2 . B. 0 . C. 2 . D. 1 .

Câu 7: Hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 3x + 2019m$ ($m \in \mathbb{R}$) đạt cực tiểu tại điểm:

- A. $x = 3$. B. $x = -3$. C. $x = 1$. D. $x = -1$.

Câu 8: Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ là:

- A. $M(-1; -1)$. B. $N(0; 1)$. C. $P(2; -1)$. D. $Q(1; 3)$.

Câu 9: Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = x^4 - 2x^2$.

- A. 2 . B. 4 . C. 3 . D. 1 .

Câu 10: Hàm số nào trong bốn hàm số được liệt kê dưới đây không có cực trị?

- A. $y = \frac{2x-3}{x+2}$. B. $y = x^4$. C. $y = -x^3 + x$. D. $y = |x+2|$.

Câu 11: Điểm cực tiểu của hàm số $y = x\sqrt{4-x^2}$ là

- A. $x = \sqrt{2}$. B. $x = -2\sqrt{3}$. C. $x = 2$. D. $x = -\sqrt{2}$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-2)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 0 . B. 3 . C. 2 . D. 1 .

Phần 2: Câu trắc nghiệm đúng sai

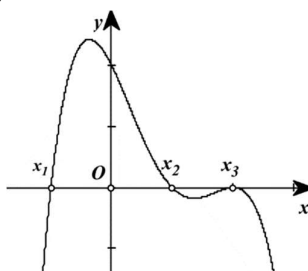
Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	0	-1	$+\infty$	

Các mệnh đề sau đây **đúng** hay **sai**?

- a) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.
 b) Giá trị cực tiểu bằng 1 .
 c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
 d) Hàm số có đúng một cực trị.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị trên một khoảng K như hình vẽ bên.



Các mệnh đề sau đây **đúng** hay **sai**?

- a) Hàm số đồng biến trên (x_1, x_2) .
 b) Trên K , hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị.
 c) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_3 .
 d) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_1 .

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$. Các mệnh đề sau đây **đúng** hay **sai**?

- a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- b) Đạo hàm của hàm số là $y' = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x + 2)^2}$.
- c) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên từng khoảng xác định.
- d) Giá trị cực tiểu của hàm số là -2 .

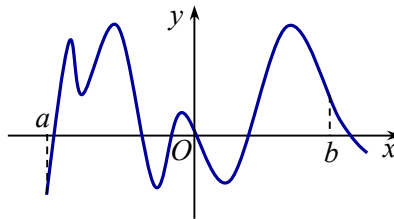
Câu 4: Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox . Vận tốc của chất điểm tại thời điểm t giây được xác định bởi hàm số $v(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$

Các mệnh đề sau đây **đúng** hay **sai**?

- a) Gia tốc của chuyển động là $a(t) = t^2 - 12t + 9$.
- b) Gia tốc tăng khi $t > 2$ (giây).
- c) Vận tốc của chất điểm giảm khi $t \in (1; 3)$.
- d) Vận tốc đạt cực đại khi $t = 2$ giây.

Phần 3: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số có bao nhiêu điểm cực tiểu trên khoảng $(a; b)$?



Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1$. Giả sử hàm số đạt cực đại tại điểm $x = a$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = b$, giá trị của biểu thức $2a - 5b$ bằng bao nhiêu?

Câu 3: Cho hàm số $y = -\frac{1}{4}x^4 + 8x^2 - 3$. Khi đó y_{CT} bằng bao nhiêu?

Câu 4: Tìm hoành độ các điểm cực đại của hàm số $y = e^{\frac{x^3 - 5}{2}x^2 + 2x - 1}$ là $x_{CD} = \frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) Giá trị $a + b$ bằng bao nhiêu?

Câu 5: Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ (C). Tìm m để hàm số có 3 điểm cực trị lập thành một tam giác vuông.

Câu 6: Trong 20 giây đầu kể từ khi xuất phát, độ cao h (tính bằng mét) của khinh khí cầu vào thời điểm t giây được cho bởi công thức $h(t) = t^3 - \frac{111}{2}t^2 + 900t$ ($0 \leq t$). Khinh khí cầu đạt độ cao cực đại ở giây thứ mấy trong 20 giây đầu tiên này?

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(0; 1)$. C. $(-1; 0)$. D. $(-1; +\infty)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$. B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1; 0)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(0; 1)$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; +\infty)$. B. $(0; 2)$. C. $(-2; 0)$. D. $(-\infty; -2)$.

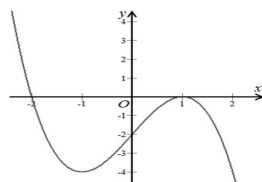
Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; 1)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(-\infty; 1)$. D. $(-1; 0)$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-1; 1)$. C. $(0; +\infty)$. D. $(-\infty; +\infty)$.

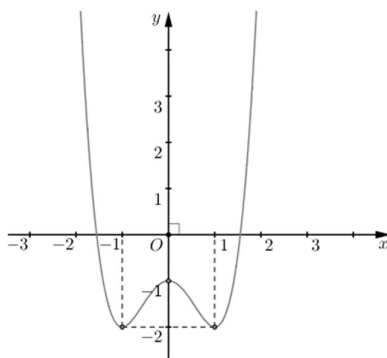
Câu 7: Hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y'			
y	-2	$+\infty$	-2

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

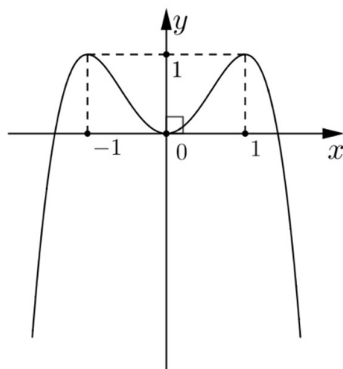
- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$, $(-2; +\infty)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty) \setminus \{2\}$.
- C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$, $(-2; +\infty)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



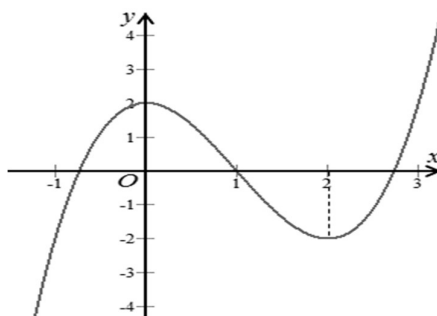
- A. $(-\infty; -1)$
- B. $(-1; 1)$
- C. $(-1; 0)$
- D. $(0; 1)$

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



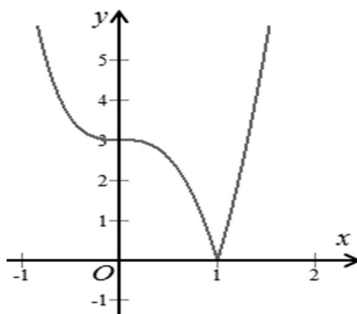
- A. $(-1; 0)$.
- B. $(-\infty; -1)$.
- C. $(0; 1)$.
- D. $(0; +\infty)$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



- A. $(-1; 1)$.
- B. $(-1; 2)$.
- C. $(1; 2)$.
- D. $(2; +\infty)$.

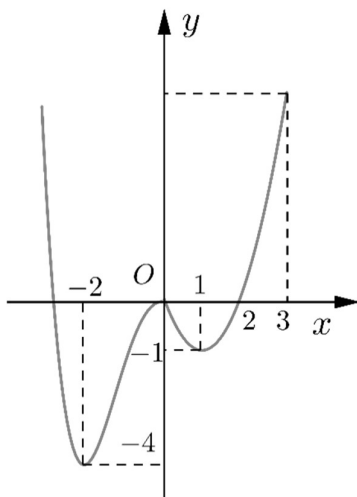
Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.
- B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.
- C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1; 2)$.
- D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng

- A. $(-1; 0)$.
- B. $(-2; -1)$.
- C. $(0; 1)$.
- D. $(1; 3)$.

Câu 13: Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. $y = \frac{x-1}{x-2}$.
- B. $y = x^3 + x$.
- C. $y = -x^3 - 3x$.
- D. $y = \frac{x+1}{x+3}$.

Câu 14: Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
- D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Câu 15: Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. $y = x^4 + 3x^2$.
- B. $y = \frac{x-2}{x+1}$.
- C. $y = 3x^3 + 3x - 2$.
- D. $y = 2x^3 - 5x + 1$.

Câu 16: Cho hàm số $y = \sqrt{2x^2 + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Câu 17: Hàm số $y = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$ đồng biến trên khoảng

- A. $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. B. $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$. C. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. D. $(-\infty; +\infty)$.

Câu 18: Hàm số $y = \frac{-x^2 + x - 1}{x - 1}$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A. $(0; 1)$. B. $(0; 1) \cup (1; 2)$. C. $(-\infty; 1)$. D. $(-\infty; 1), (2; +\infty)$.

Câu 19: Hàm số $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{1 - x}$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(0; 1)$ và $(1; 2)$. B. $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$. C. $(-\infty; 0)$ và $(1; 2)$. D. $(0; 1) \cup (1; 2)$.

Câu 20: Hàm số $y = \frac{x^2 + x - 3}{x + 1}$ đồng biến trên các khoảng (các khoảng) nào sau đây?

- A. $(-2; 1)$. B. $(-\infty; +\infty)$. C. $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$. D. $(-\infty; +\infty) \setminus \{-1\}$.

Câu 21: Trên các khoảng nghịch biến của hàm số $y = \frac{x^2 - 3x - 1}{2 + x}$ có chứa bao nhiêu số nguyên âm?

- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.

Câu 22: Cho hàm số $y = \frac{x + 3}{x - 3}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.
 B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.
 C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$.
 D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y			↗ 4		↘ -5		↗ 2
	2						

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -5$. B. Hàm số có bốn điểm cực trị.
 C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$. D. Hàm số không có cực đại.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y		↘ $+\infty$		↗ 1		↘ 5	↘ $-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

- A. 5. B. 2. C. 0. D. 1.

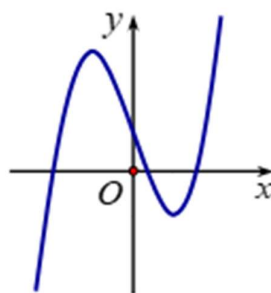
Câu 25: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗ $-\infty$		↘ 2		↗ $+\infty$	

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

- A. $x = 2$. B. $x = -2$. C. $x = 1$. D. $x = 3$.

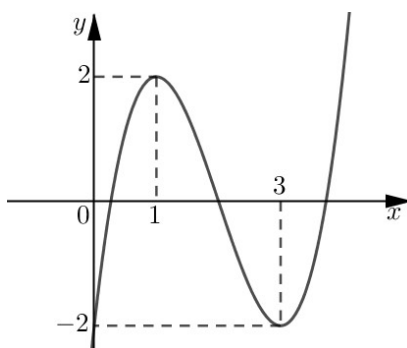
Câu 26: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên.



Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 2. B. 0. C. 3. D. 1.

Câu 27: Cho hàm số bậc ba $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên



Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

- A. 2. B. 3. C. 1. D. -2.

Câu 28: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Cực tiểu của hàm số bằng -3 B. Cực tiểu của hàm số bằng -6
C. Cực tiểu của hàm số bằng 1 D. Cực tiểu của hàm số bằng 2

Câu 29: Số điểm cực trị của hàm số $y = \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}$ là

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 30: Biết hàm số $y = \frac{2x^2 - 2x + 6}{x + 1}$ có hai điểm cực trị là x_1, x_2 . Tính $P = x_1 \cdot x_2$?

- A. $P = -4$ B. $P = 2$ C. $P = -2$ D. $P = -1$

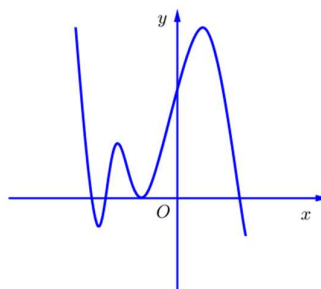
Câu 31: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+2)^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 1 B. 3 C. 2 D. 5

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+2)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong ở hình bên. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



- A. 5. B. 4. C. 3. D. 6.

Bài 2.

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A. LÝ THUYẾT

Dạng 1: Cho biết bảng biến thiên hoặc đồ thị, hãy tìm GTLN, GTNN của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

Số M gọi là **giá trị lớn nhất** của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu: $\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = M \end{cases}$. Kí hiệu: $M = \max_{x \in D} f(x)$.

Số m gọi là **giá trị nhỏ nhất** của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu: $\begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = m \end{cases}$. Kí hiệu: $m = \min_{x \in D} f(x)$.

Phương pháp tìm GTLN, GTNN

• Tìm GTLN, GTNN của hàm số bằng cách khảo sát trực tiếp

Bước 1: Tính $f'(x)$ và tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n \in D$ mà tại đó $f'(x) = 0$ hoặc hàm số không có đạo hàm.

Bước 2: Lập bảng biến thiên và từ đó suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.

• Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một đoạn

Bước 1:

- Hàm số đã cho $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$.
- Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ trên khoảng $(a; b)$, tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.

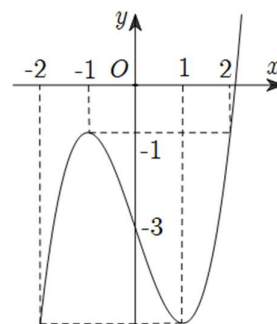
Bước 2: Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b)$.

Bước 3: Khi đó:

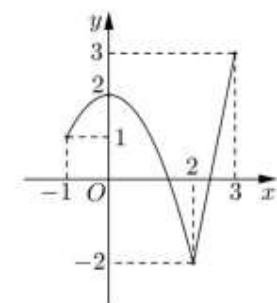
- $\max_{[a,b]} f(x) = \max \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)\}$.
- $\min_{[a,b]} f(x) = \min \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)\}$.

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 2]$.

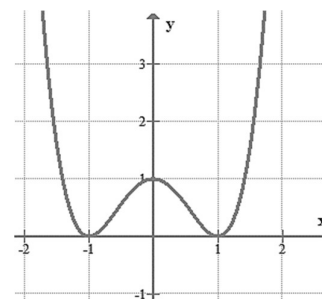


Luyện tập 1.1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 3]$. Tính giá trị của $M - m$?



Luyện tập 1.2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và có đồ thị như hình vẽ.

Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;1]$. Tính giá trị của $M - m$?



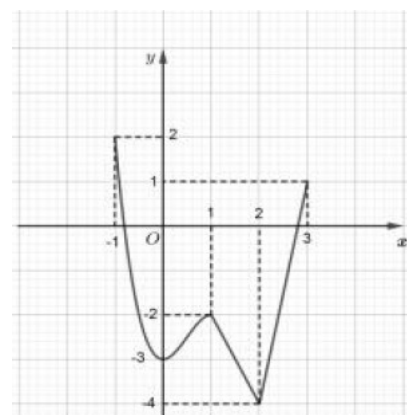
Luyện tập 1.3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3;2]$ và có bảng biến thiên như sau. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$. Tính $M + m$?

x	-3	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	3	0	2	1

Luyện tập 1.4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1;3]$ như hình vẽ. Tìm $\max_{[-1;3]} f(x)$?

x	-1	0	2	3		
y'		+	0	-	0	+
y	0	5	1	4		

Luyện tập 1.5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Tính giá trị của $M + m$?



Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn $[-3;3]$.

Luyện tập 2.1. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 3x^2$ trên đoạn $[-4; -1]$ bằng

.....

.....

.....

Luyện tập 2.2. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ trên đoạn $[-2; 4]$.

.....

.....

.....

Luyện tập 2.3. Tìm giá trị lớn nhất trên hàm số $y = (4 - x^2)^2 + 1$ trên đoạn $[-1; 1]$.

.....

.....

.....

Luyện tập 2.4. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 12x^2 - 1$ trên đoạn $[0; 9]$.

.....

.....

.....

Luyện tập 2.5. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $[0; \sqrt{3}]$.

.....

.....

.....

Ví dụ 3. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ trên $[0; 3]$. Tính giá trị $M - m$.

.....

.....

.....

Luyện tập 3. Cho hàm số $y = \frac{5x+6}{2x+3}$. Biết M là giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0; 1]$, m là giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0; 1]$, Tính giá trị của biểu thức $M + m$?

.....

.....

.....

Ví dụ 4. Tính giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[-2; \frac{1}{2}]$.

.....

.....

.....

Luyện tập 4.1. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 4]$.

.....

.....

.....

Luyện tập 4.2. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên đoạn $[\frac{1}{2}; 2]$.

.....

.....

.....

Ví dụ 5. Tìm tập giá trị của hàm số $y = \sqrt{x - 1} + \sqrt{9 - x}$.

.....

.....

.....

Luyện tập 5.1. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{3x - 2x - x^2}$.

.....

.....

.....

Luyện tập 5.2. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x\sqrt{1 - x^2}$. Giá trị của $M - 2m$ bằng?

.....

.....

.....

Luyện tập 5.3. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{x - 1} + \sqrt{3 - x} - 2\sqrt{-x^2 + 4x - 3}$.

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 6. Hàm số $y = x\sqrt{3} - 2\sin x$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0; 2\pi]$ tại x bằng:

.....

.....

.....

Luyện tập 6.1. Tìm tập giá trị của hàm số $y = \frac{\cos x + 1}{\sin x + 1}$ trên $[0; \frac{\pi}{2}]$.

.....

.....

.....

Luyện tập 6.2. Cho hàm số $y = \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.

.....

.....

.....

Luyện tập 6.3. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin^2 x + \cos x - 1$.

.....

.....

.....

Luyện tập 6.4. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x + \cos^2 x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là:

.....

.....

.....

Ví dụ 7. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ trên $[1; e^3]$.

.....

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 7.1. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x(2 - \ln x)$ trên đoạn $[2; 3]$ là:

.....

.....

.....

Luyện tập 7.2. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 \ln x$ trên đoạn $[1; 2]$.

.....

.....

.....

Ví dụ 8. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^2 e^x$ trên đoạn $[-1; 1]$?

.....

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 8. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = e^x (x^2 - x - 5)$ trên đoạn $[1; 3]$

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 2: Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên khoảng

- Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một khoảng

Bước 1: Tính đạo hàm $f'(x)$.

Bước 2: Tìm tất cả các nghiệm $x_i \in (a;b)$ của phương trình $f'(x) = 0$ và tất cả các điểm $\alpha_i \in (a;b)$ làm cho $f'(x)$ không xác định.

Bước 3: Tính $A = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, $B = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$, $f(x_i)$, $f(\alpha_i)$.

Bước 4: So sánh các giá trị tính được và kết luận $M = \max_{(a;b)} f(x)$, $m = \min_{(a;b)} f(x)$.

Nếu giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) là A hoặc B thì ta kết luận không có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).

Chú ý:

- Nếu $y = f(x)$ đồng biến trên $[a;b]$ thì
$$\begin{cases} \min_{[a;b]} f(x) = f(a) \\ \max_{[a;b]} f(x) = f(b) \end{cases}$$
- Nếu $y = f(x)$ nghịch biến trên $[a;b]$ thì
$$\begin{cases} \min_{[a;b]} f(x) = f(b) \\ \max_{[a;b]} f(x) = f(a) \end{cases}$$

- Hàm số liên tục trên một khoảng **có thể** không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên khoảng đó.

Ví dụ 1.1. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = -3x^4 + 4x^3 + 1$.

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 1.2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 2x^2$ trên khoảng $(-2;2)$.

.....

.....

.....

Luyện tập 1. Cho hàm số $y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $\left(-25; \frac{11}{10}\right)$.

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

.....

.....

.....

Luyện tập 2.1. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 1 + \frac{4}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$. Tìm m ?

.....

.....

.....

Luyện tập 2.2. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Tìm m .

Luyện tập 2.3. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x}$ trên nửa khoảng $[2; +\infty)$ là:

Ví dụ 3. Tìm GTLN, GTNN của hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 2}$ với x thuộc $D = (-\infty; -1] \cup \left[1; \frac{3}{2}\right]$.

Luyện tập 3. Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+5}}$ trên tập xác định của nó.

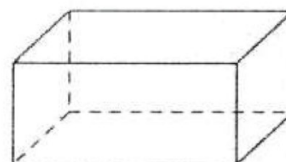
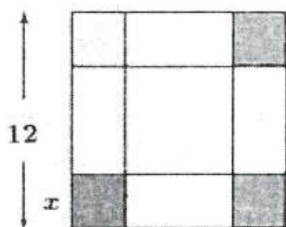
Ví dụ 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \cos^2 2x - \sin x \cos x + 4$ trên $\mathbb{R}$.

Luyện tập 4.1. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{5}{4}$ là:

Luyện tập 4.2. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3\sin x - 4\sin^3 x$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ bằng:

Dạng 3: Bài toán thực tế về GTLN, GTNN của hàm số

Ví dụ 1. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh x cm, rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



Ví dụ 2. Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hóa bằng hàm số $N(t) = -t^3 + 12t^2$ ($0 \leq t \leq 12$), trong đó N là số người bị nhiễm bệnh (tính bằng trăm người) và t là thời gian (tuần).

a) Hãy ước tính số người tối đa bị nhiễm tối đa ở địa phương đó.

b) Đạo hàm $N'(t)$ biểu thị tốc độ lây lan của virus. Hỏi virus lây nhanh nhất khi nào?

Luyện tập 1. Người ta giới thiệu một loại thuốc kích thích sự sinh sản của một loại vi khuẩn. Sau ít phút, số vi khuẩn được xác định theo công thức $N(t) = 1000 + 30t^2 - t^3$ ($0 \leq t \leq 30$). Hỏi sau bao nhiêu phút thì số vi khuẩn lớn nhất?

Luyện tập 2. Người ta tiêm một loại thuốc vào mạch máu ở cánh tay phải của một bệnh nhân. Sau thời gian là t giờ, nồng độ thuốc hấp thu trong máu của bệnh nhân đó được xác định theo công thức $C(t) = \frac{0,28t}{t^2 + 4}$ ($0 < t < 24$). Hỏi sau bao nhiêu giờ thì nồng độ thuốc hấp thu trong máu của bệnh nhân đó là cao nhất?

Luyện tập 3. Trong các hình chữ nhật có chu vi là 24 cm, hãy tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất?

Luyện tập 4. Ông A muốn mua một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích bằng 100m^2 để làm khu vườn. Hỏi người đó phải mua mảnh đất có kích thước như thế nào để chi phí xây dựng bờ rào là ít tốn kém nhất?

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 5. Khi làm nhà kho, bác An muốn cửa sổ có dạng hình chữ nhật với chu vi bằng 4 m . Tìm kích thước khung cửa sổ sao cho diện tích cửa sổ lớn nhất (để hứng được nhiều ánh sáng nhất)?

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Luyện tập 6. Khối lượng q (kg) của một mặt hàng mà cửa tiệm bán được trong một ngày phụ thuộc vào giá bán p (nghìn đồng/kg) theo công thức $p = 15 - \frac{1}{2}q$. Doanh thu từ việc bán mặt hàng trên của cửa tiệm được tính theo công thức $R = pq$.

- a) Viết công thức biểu diễn R theo p .
- b) Tìm giá bán mỗi kilôgam sản phẩm để đạt được doanh thu cao nhất và xác định doanh thu cao nhất đó.

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 7. Hộp sữa 1 l được thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông cạnh $x\text{ cm}$. Tìm x để diện tích toàn phần của hộp nhỏ nhất.

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 8. Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông và diện tích bề mặt bằng 108 cm^2 như Hình 1.17. Tìm các kích thước của chiếc hộp sao cho thể tích của hộp là lớn nhất.

.....

.....

.....

.....

.....

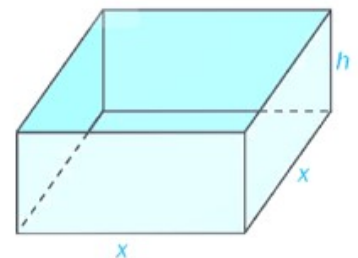
.....

.....

.....

.....

.....



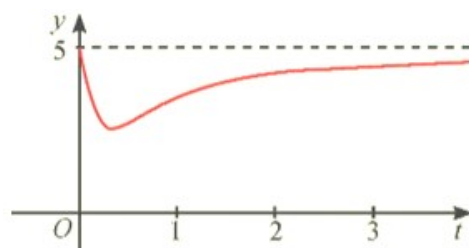
Luyện tập 9. Một công ty muốn thiết kế một loại hộp có dạng hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông sao cho thể tích khối hộp được tạo thành là 8dm^3 và diện tích toàn phần đạt giá trị nhỏ nhất. Độ dài cạnh đáy của mỗi hộp muốn thiết kế là

Luyện tập 10. Một nhà sản xuất cần làm ra những chiếc bình có dạng hình trụ với dung tích 1000 cm^3 . Mặt trên và mặt dưới của bình được làm bằng vật liệu có giá $1,2$ nghìn đồng/ cm^2 , trong khi mặt bên của bình được làm bằng vật liệu có giá $0,75$ nghìn đồng/ cm^2 . Tính các kích thước của bình để chi phí vật liệu sản xuất mỗi chiếc bình là nhỏ nhất.

Luyện tập 11. Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ hộp là ít nhất (diện tích toàn phần của lon là nhỏ nhất). Bán kính đáy vỏ lon là bao nhiêu khi ta muốn có thể tích lon là 314 cm^3 ?

Luyện tập 12. Ông B dự định dung hết 6 m^2 kính để làm một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng. Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu.

Luyện tập 13. Sự phân hủy của rác thải hữu cơ có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hòa tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước sau t giờ ($t \geq 0$) khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ được xấp xỉ bởi hàm số: $y = y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$. Vào các thời điểm nào nồng độ oxygen trong nước cao nhất và thấp nhất?



Luyện tập 14. Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình

$s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 5 giây đầu tiên đó?

Luyện tập 15. Người ta bơm xăng vào bình của một xe ô tô. Biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình xăng tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức: $V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4$ với $0 \leq t \leq 0,5$.

a) Ban đầu trong bình xăng có bao nhiêu lít xăng?

b) Sau khi bơm 30 giây thì bình xăng đầy. Hỏi dung tích của bình xăng trong xe là bao nhiêu lít?

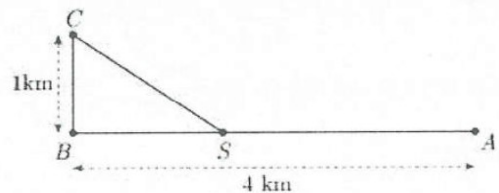
c) Khi xăng chảy vào bình xăng, gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0 \leq t \leq 0,5$. Xăng chảy vào bình xăng ở thời điểm nào có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất.

Luyện tập 16. Ho ép khí quản co lại, ảnh hưởng đến tốc độ của không khí đi vào khí quản. Tốc độ của không khí đi vào khí quản khi ho được cho bởi công thức: $V = k(R - r)r^2$ với $0 \leq r < R$,

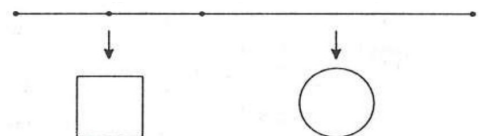
trong đó k là hằng số, R là bán kính bình thường của khí quản, r là bán kính khí quản khi ho.

Bán kính của khí quản khi ho bằng bao nhiêu thì tốc độ của không khí đi vào khí quản là lớn nhất?

Luyện tập 17. Một đường dây điện được nối từ nhà máy điện trên đất liền ở vị trí A đến vị trí C một hòn đảo. Khoảng cách ngắn nhất từ C đến đất liền là $BC = 1\text{ km}$, khoảng cách từ A đến B là 4 km. Người ta chọn một vị trí điểm S nằm giữa A và B để mắc đường dây điện đi từ A đến S, rồi từ S đến C như hình vẽ dưới đây. Chi phí mỗi km dây điện trên đất liền là 3000 USD, mỗi km trên điện đặt ngầm dưới biển mất 5000 USD, Hỏi điểm S phải cách A bao nhiêu km để chi phí mắc đường dây điện ít nhất?



Luyện tập 18. Một sợi dây kim loại dài 60 cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh a , đoạn dây thứ hai uốn thành đường tròn bán kính r . Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn nhỏ nhất thì tỉ số $\frac{a}{r}$ bằng?



Dạng 4: Các bài toán khác về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất**GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT HÀM CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI**

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = |-x^2 - 4x + 5|$ trên đoạn $[-6; 6]$.

.....

.....

.....

Luyện tập 1.1. Hàm số $y = |x^2 - 3x + 2|$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-3; 3]$ là.

.....

.....

.....

Luyện tập 1.2. Xét hàm số $f(x) = |x^2 + ax + b|$, với a, b là tham số. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1; 3]$. Khi M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính $a + 2b$.

.....

.....

.....

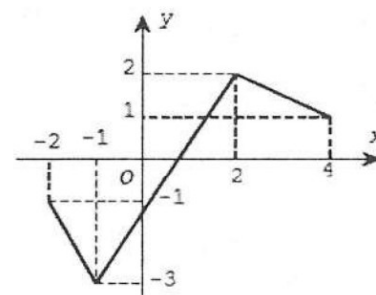
Luyện tập 1.3. Tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số : $y = f(x) = |x| + 3$ trên đoạn $[-1; 1]$ là?

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-2; 4]$ như hình vẽ. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = |f(x)|$ trên đoạn $[-2; 4]$?



.....

.....

.....

.....

.....

BÀI TOÁN CHỨA THAM SỐ

Ví dụ 1. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = -x^2 + 4x - m$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1; 3]$ bằng 10.

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 1. Tìm giá trị của tham số a để hàm số $f(x) = -x^3 - 3x^2 + a$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng 0.

Luyện tập 1.2. Cho hàm số $y = -x^3 + mx^2 - (m^2 + m + 1)x$. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng -6 . Tính tổng các phần tử của S .

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x) = \frac{x-m^2}{x+8}$ với m là tham số thực. Tìm giá trị lớn nhất của m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng -2 .

Luyện tập 2.1. Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ (với m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

Luyện tập 2.2. Cho hàm số $f(x) = \frac{x-m}{x+2}$ (với m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên m thuộc đoạn $[-10;10]$ thỏa mãn $\max_{[0;1]} y \geq 2 \min_{[0;1]} y$?

Ví dụ 3. Có bao nhiêu giá trị của m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - m^2 - 2}{x - m}$ trên đoạn $[0;4]$ bằng -1 .

Ví dụ 4. Hỏi tập hợp nào dưới đây chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^4 - 2x^2 + m|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 5?

.....

.....

.....

Luyện tập 4.1. Cho hàm số $f(x) = |2x^3 - 3x^2 + m|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để $\min_{[-1; 3]} f(x) \leq 3$?

.....

.....

.....

Luyện tập 4.2. Có bao nhiêu số thực m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có giá trị lớn nhất trên $[-3; 2]$ bằng 150?

.....

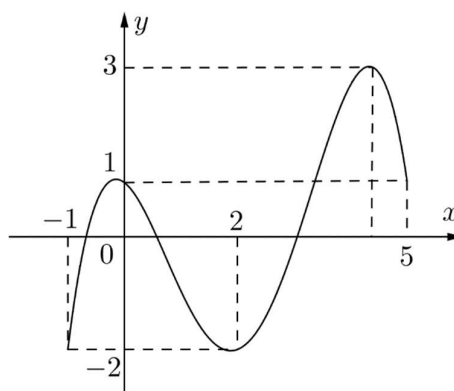
.....

.....

B. BÀI TẬP

Phần 1: Câu trắc nghiệm nhiều lựa chọn

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1; 5]$ và có đồ thị trên đoạn $[-1; 5]$ như hình vẽ bên dưới. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1; 5]$ bằng



A. -1

B. 4

C. 1

D. 2

Câu 2: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-1; 3]$ và có bảng biến thiên như sau

x	-1	2	3
y'	-	0	+
y	2	-2	5

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$ là

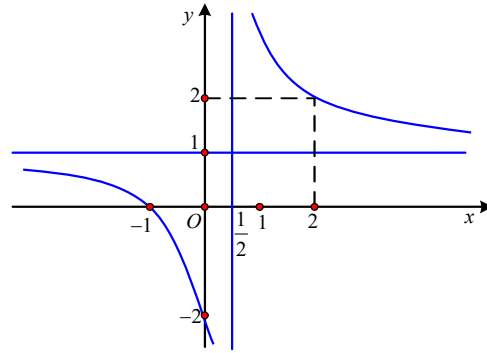
A. 1.

B. 5.

C. 2.

D. -2.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ và $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên.



Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. $\max_{[1;2]} f(x) = 2$.

B. $\max_{[-2;1]} f(x) = 0$.

C. $\max_{[-3;0]} f(x) = f(-3)$.

D. $\max_{[3;4]} f(x) = f(4)$.

Câu 4: Xét hàm số $y = f(x)$ với $x \in [-1; 5]$ có bảng biến thiên như sau:

x	-1	0	2	5	
y'	+	0	-	0	+
y	3	4	0	$+\infty$	

Khẳng định nào sau đây là đúng

A. Hàm số đã cho không tồn tại GTLN trên đoạn $[-1; 5]$

B. Hàm số đã cho đạt GTNN tại $x = -1$ và $x = 2$ trên đoạn $[-1; 5]$

C. Hàm số đã cho đạt GTNN tại $x = -1$ và đạt GTLN tại $x = 5$ trên đoạn $[-1; 5]$

D. Hàm số đã cho đạt GTNN tại $x = 0$ trên đoạn $[-1; 5]$

Câu 5: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^3 - 7x^2 + 11x - 2$ trên đoạn $[0; 2]$.

A. $m = 3$

B. $m = 0$

C. $m = -2$

D. $m = 11$

Câu 6: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

A. 85

B. $\frac{51}{4}$

C. 13

D. 25

Câu 7: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{3x-1}{x-3}$ trên $[0; 2]$ là

A. 5.

B. -5.

C. $-\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Câu 8: Trên đoạn $[1; 5]$, hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A. $x = 5$.

B. $x = 2$.

C. $x = 1$.

D. $x = 4$.

Câu 9: Gọi m , M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{x+1}$ trên đoạn $[0; 3]$.

Tính tổng $S = 2m + 3M$.

A. $S = -\frac{7}{2}$.

B. $S = -\frac{3}{2}$.

C. -3.

D. $S = 4$.

Câu 10: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2 \cos x - \frac{4}{3} \cos^3 x$ trên $[0; \pi]$.

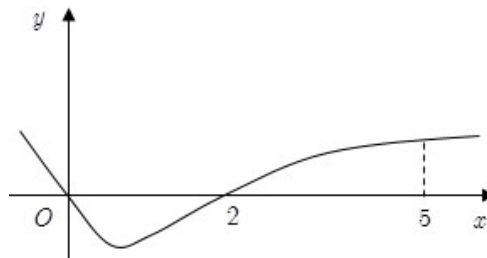
A. $\max_{[0; \pi]} y = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

B. $\max_{[0; \pi]} y = 0$.

C. $\max_{[0; \pi]} y = \frac{2}{3}$.

D. $\max_{[0; \pi]} y = \frac{10}{3}$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$ lần lượt là



A. $f(0), f(5)$.

B. $f(1), f(5)$.

C. $f(2), f(5)$.

D. $f(2), f(0)$.

Câu 12: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (20x^2 + 20x - 1283)e^{40x}$ trên tập hợp các số tự nhiên là

A. -1283 .

B. $-163.e^{280}$.

C. $157.e^{320}$.

D. $-8.e^{300}$.

Phần 2: Câu trắc nghiệm đúng sai:

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-2; 3]$, có bảng biến thiên như hình sau:

x	-2	-1	1	3	
y'	+	0	-	0	+
y		1		7	

0 $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$ 7
-3

Các mệnh đề sau **đúng** hay **sai** ?

a) Hàm số nghịch biến trên $(-1; 1)$.

b) $y_{CB} = -3$.

c) Hàm số có giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-2; 3]$ bằng 1 tại $x = -1$.

d) Hàm số có giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-2; 3]$ bằng -3 tại $x = 1$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ dưới đây.

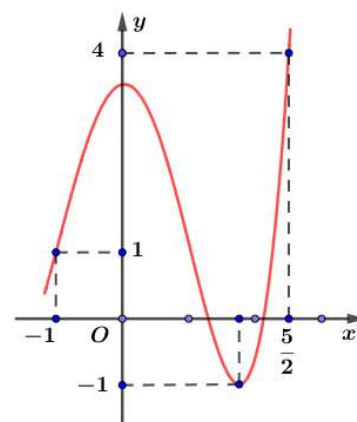
Các mệnh đề sau **đúng** hay **sai** ?

a) Hàm số đồng biến trên $(-1; 0)$.

b) $y_{CB} = -1$.

c) Hàm số có giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1; \frac{5}{2}]$ bằng 1 tại $x = 0$.

d) Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; \frac{5}{2}]$



bằng 3.

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}$, Các mệnh đề sau **đúng** hay **sai** ?

- a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- b) Đạo hàm của hàm số là $y' = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$.
- c) Điểm cực đại của hàm số là $x = 1$.
- d) Tập giá trị của hàm số là $[2; 4]$.

Câu 4: Một công ty đưa ra giá bán một mặt hàng với mức giá bán mỗi kilôgam sản phẩm là $p = 50 - \frac{1}{2}q$ (nghìn

đồng), với q là số kilôgam sản phẩm được bán ra. Các mệnh đề sau **đúng** hay **sai** ?

- a) Doanh thu từ việc bán mặt hàng trên của công ty được tính theo công thức $R = pq$.
- b) Công thức biểu diễn R theo p là $R = -2p^2 + 30p$.
- c) Công ty bán được 5 là số kilôgam sản phẩm thì doanh thu là 300 nghìn đồng.
- d) Giá bán mỗi kilôgam sản phẩm là 15 nghìn đồng thì doanh thu cao nhất.

Phần 3: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 2}$ trên $[3; 2 + 2\sqrt{2}]$.

Tính $M - m$ (làm tròn kết quả đến một chữ số thập phân)

Câu 2: Hàm số $y = 4\sqrt{x^2 - 2x + 3} + 2x - x^2$ đạt giá trị lớn nhất tại hai giá trị x mà tích của chúng là bao nhiêu

Câu 3: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 5 + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ bằng bao nhiêu?

Câu 4: Gọi M và m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\sin^2 x - \cos x + 1$. Khi đó giá trị của tích $M.m$ là bao nhiêu

Câu 5: Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 2\ln x$ trên $[e^{-1}; e]$ là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến một chữ số thập phân)

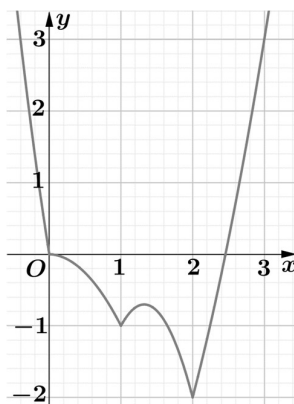
Câu 6: Người ta cần xây một hồ chứa nước với dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3} \text{ m}^3$. Đáy

hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây hồ là 500.000 đồng/m². Hãy xác định kích thước của hồ nước sao cho chi phí thuê nhân công thấp nhất và chi phí đó là bao nhiêu?

-----HẾT-----

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM GTLN-GTNN

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0;3]$. Giá trị của $M+m$ bằng?



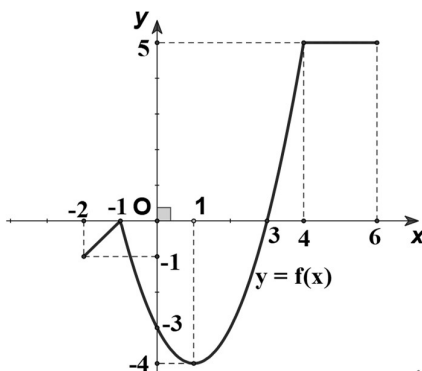
A. 5.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;6]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2;6]$. Giá trị của $M-m$ bằng.

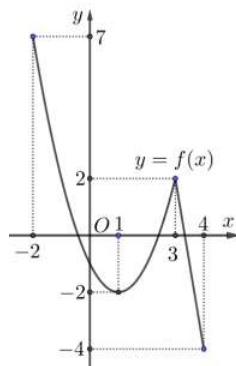
A. 9.

B. -8.

C. -9.

D. 8.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị trên đoạn $[-2;4]$ như hình vẽ bên. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;4]$ bằng



A. 5.

B. 3.

C. 0.

D. -2.

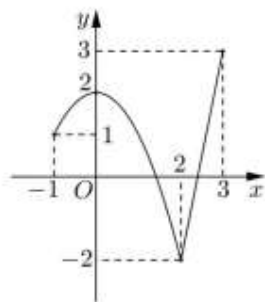
Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'		$-$	$-$	0	$+$	0	$-$

Mệnh đề nào sau đây đúng

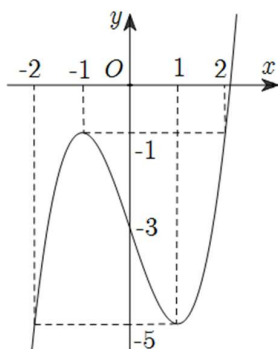
- A. $\max_{(-1;1]} f(x) = f(0)$. B. $\max_{(0;+\infty)} f(x) = f(1)$. C. $\min_{(-\infty;-1)} f(x) = f(-1)$. D. $\min_{(-1;+\infty)} f(x) = f(0)$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M - m$ bằng



- A. 1. B. 4. C. 5. D. 0.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;2]$.



- A. $m = -5; M = -1$. B. $m = -2; M = 2$. C. $m = -1; M = 0$. D. $m = -5; M = 0$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$
y					

Diagram illustrating the behavior of the function y as x approaches the boundaries of the domain:

- As $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow -\infty$.
- As $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$.
- As $x \rightarrow 1$, $y \rightarrow -1$.
- As $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow +\infty$.

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.
 B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1 .
 C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.
 D. Hàm số có đúng một cực trị.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3; 2]$ và có bảng biến thiên như sau. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$. Tính $M + m$.

x	-3	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	3	0	2	1

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$		
y'	-		+	0	+		-
y	$+\infty$						

Diagram showing the behavior of the function y as x approaches the critical points and boundaries:

- As $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow +\infty$.
- As $x \rightarrow -1$, $y \rightarrow -3$.
- As $x \rightarrow 1$, $y \rightarrow 2$.
- As $x \rightarrow 2$, $y \rightarrow -4$.
- As $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow -4$.

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

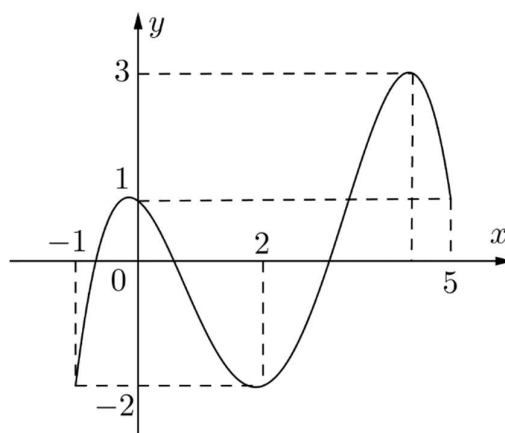
- A. Hàm số có hai điểm cực trị.
 B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -3.
 C. Đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận.
 D. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$, $(2; +\infty)$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$			
y'		+		0	-		0	+		0	-	
y												
	$-\infty$				4					4		
							0					$-\infty$

- A. Phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.
 B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
 C. Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 0.
 D. Hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1; 5]$ và có đồ thị trên đoạn $[-1; 5]$ như hình vẽ bên dưới. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1; 5]$ bằng



- A. -1. B. 4. C. 1. D. 2.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên trên $[-5; 7)$ như sau

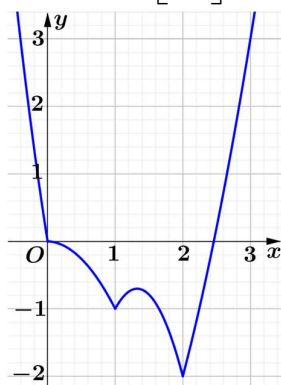
x	-5		1		7
y'		-	0	+	
y	6				9

$\swarrow$ 2 $\nearrow$

Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

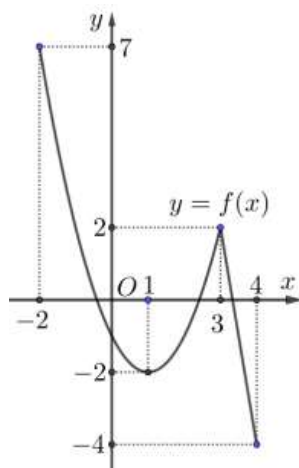
- A. $\min_{[-5; 7)} f(x) = 6$. B. $\min_{[-5; 7)} f(x) = 2$. C. $\max_{[-5; 7)} f(x) = 9$. D. $\max_{[-5; 7)} f(x) = 6$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0; 3]$. Giá trị của $M + m$ bằng?



- A. 5. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị trên đoạn $[-2; 4]$ như hình vẽ bên. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 4]$ bằng



- A. 5. B. 3. C. 0. D. -2.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1		0		1		$+\infty$
y'		-		0	+	0	-	

Mệnh đề nào sau đây đúng

- A. $\max_{(-1; 1)} f(x) = f(0)$. B. $\max_{(0; +\infty)} f(x) = f(1)$. C. $\min_{(-\infty; -1)} f(x) = f(-1)$. D. $\min_{(-1; +\infty)} f(x) = f(0)$.

Câu 16: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng

- A. -2. B. 18. C. 2. D. -18.

Câu 17: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 4]$.

- A. $\min_{[2;4]} y = -3$. B. $\min_{[2;4]} y = \frac{19}{3}$. C. $\min_{[2;4]} y = 6$. D. $\min_{[2;4]} y = -2$.

Câu 18: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

- A. $m = 5$. B. $m = 3$. C. $m = \frac{17}{4}$. D. $m = 10$.

Câu 19: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^3 - 7x^2 + 11x - 2$ trên đoạn $[0; 2]$.

- A. $m = 3$. B. $m = 0$. C. $m = -2$. D. $m = 11$.

Câu 20: Tìm x để hàm số $y = x + \sqrt{4 - x^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $x = \sqrt{2}$. B. $x = 1$. C. $x = -2$. D. $x = 2\sqrt{2}$.

Câu 21: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 6x - 5}$.

- A. $M = 1$. B. $M = 3$. C. $M = 5$. D. $M = 2$.

Câu 22: Cho hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 2x}$. Giá trị lớn nhất của hàm số bằng:

- A. $\sqrt{3}$. B. 0 . C. 2 . D. 1 .

Câu 23: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{5 - 4x}$ trên đoạn $[-1; 1]$. Khi đó $M - m$ bằng

- A. 9 . B. 3 . C. 1 . D. 2 .

Câu 24: Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = (x - 1)\sqrt{3 - x^2}$. Tìm M .

- A. $M = \frac{\sqrt{3}}{4}$. B. $M = \frac{\sqrt{6}}{4}$. C. $M = 0$. D. $M = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 25: Tìm tập giá trị của hàm số $y = \sqrt{x - 1} + \sqrt{9 - x}$

- A. $T = [2\sqrt{2}; 4]$. B. $T = (1; 9)$. C. $T = [0; 2\sqrt{2}]$. D. $T = [1; 9]$.

Câu 26: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\sin x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$.

Tính M, m .

- A. $M = 2, m = -2$. B. $M = 1, m = -2$. C. $M = 2, m = -1$. D. $M = 1, m = -1$.

Câu 27: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{3\sin x + 2}{\sin x + 1}$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Khi

đó giá trị của $M^2 + m^2$ là

- A. $\frac{31}{2}$. B. $\frac{11}{2}$. C. $\frac{41}{4}$. D. $\frac{61}{4}$.

Câu 28: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = xe^{-x}$ trên đoạn $[-2; 2]$.

- A. $\max_{[-2;2]} y = \frac{2}{e^2}$. B. $\max_{[-2;2]} y = -e$. C. $\max_{[-2;2]} y = 0$. D. $\max_{[-2;2]} y = \frac{1}{e}$.

Câu 29: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ trên đoạn $[-1; 1]$. Tính giá trị của $S = M + m \cdot e$.

- A. $S = \frac{1}{e}$. B. $S = e^2 + \frac{1}{e}$. C. $S = e$. D. $S = e + 1$.

Câu 30: (Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$). Tìm m

- A. $m = 4$. B. $m = 2$. C. $m = 1$. D. $m = 3$.

Câu 31: Ông A dự định dùng hết $6,5\text{m}^2$ kính để làm một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

- A. $2,26\text{m}^3$ B. $1,61\text{m}^3$ C. $1,33\text{m}^3$ D. $1,50\text{m}^3$

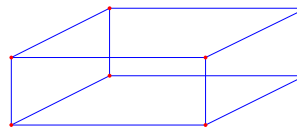
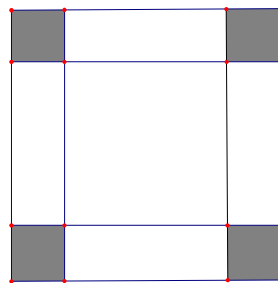
Câu 32: Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. 243 (m/s) B. 27 (m/s) C. 144 (m/s) D. 36 (m/s)

Câu 33: Ông A dự định sử dụng hết 5m^2 kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

- A. $1,01\text{m}^3$ B. $0,96\text{m}^3$ C. $1,33\text{m}^3$ D. $1,51\text{m}^3$

Câu 34: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



- A. $x = 3$ B. $x = 2$ C. $x = 4$ D. $x = 6$

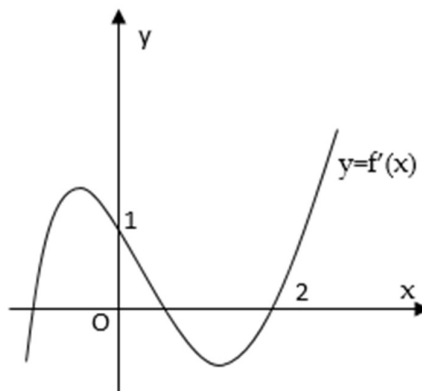
Câu 35: Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $m > 4$ B. $2 < m \leq 4$ C. $m \leq 0$ D. $0 < m \leq 2$

Câu 36: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 2]$ tại một điểm $x_0 \in (0; 2)$.

- A. $0 < m < 1$. B. $m > 1$. C. $m > 2$. D. $-1 < m < 1$.

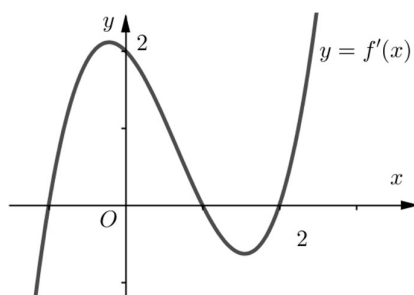
Câu 37: Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Bất phương trình $f(x) < x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi

- A. $m > f(2) - 2$. B. $m > f(0)$. C. $m \geq f(2) - 2$. D. $m \geq f(0)$.

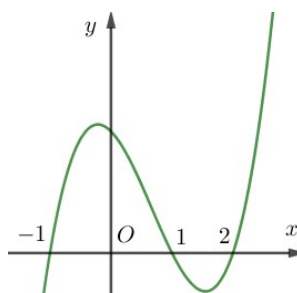
Câu 38: Cho hàm số $f(x)$, hàm số $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Bất phương trình $f(x) > 2x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi

- A. $m < f(2) - 4$. B. $m \leq f(2) - 4$. C. $m \leq f(0)$. D. $m < f(0)$.

Câu 39: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.

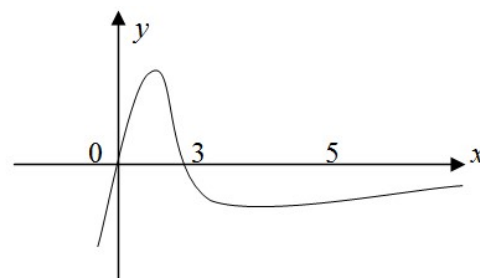


Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ là

- A. $f(1)$. B. $f(-1)$. C. $f(2)$. D. $f(0)$.

Câu 40: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0) + f(1) - 2f(3) = f(5) - f(4)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$.

- A. $m = f(5), M = f(3)$ B. $m = f(5), M = f(1)$
C. $m = f(0), M = f(3)$ D. $m = f(1), M = f(3)$



-----HẾT-----

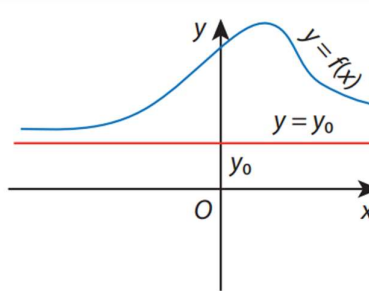
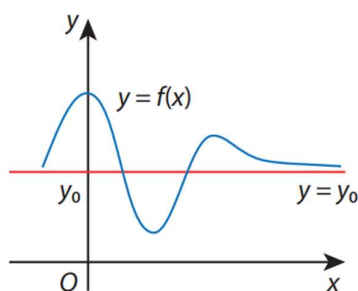
Bài 3.

ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. LÝ THUYẾT

I. ĐƯỜNG TIỆM CẬN NGANG CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (dạng $(a; +\infty)$; $(-\infty; b)$ hoặc $(-\infty; +\infty)$). Đường thẳng $y = y_0$ là đường tiệm cận ngang (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = y_0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = y_0$.



Cách tìm tiệm cận ngang: Tìm tập xác định, kiểm tra hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a; +\infty)$; $(-\infty; b)$ hoặc $(-\infty; +\infty)$). Tìm các giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ rồi kết luận.

Chú ý.

- Với đồ thị hàm phân thức dạng $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$; $ad-bc \neq 0$) luôn có tiệm cận ngang là $y = \frac{a}{c}$.
- Nếu $x \rightarrow +\infty \Rightarrow x > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x| = x$.
- Nếu $x \rightarrow -\infty \Rightarrow x < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x| = -x$.

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên.

Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho ?

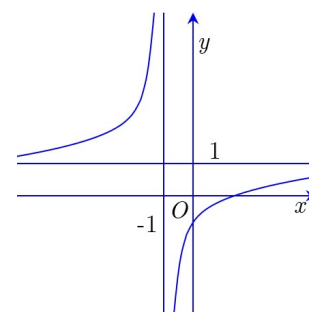
.....

.....

.....

.....

.....



Luyện tập 1. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên.

Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho ?

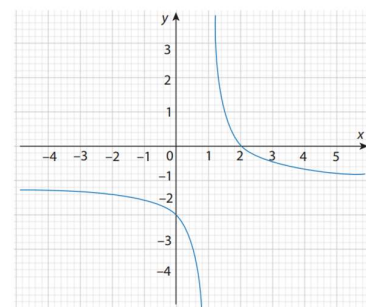
.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	$+$		$+$
y	3	$+\infty$	$-\infty$

Luyện tập 2.1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'	/		+	-
y	/		$-\infty \rightarrow +\infty$	$1 \rightarrow 0$

Tìm tiệm cận ngang của đồ thị của hàm số đã cho?

Luyện tập 2.2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-1; +\infty)$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	2	4	$+\infty$	
y'	+		-	0	+	-
y			$-\infty$ $\rightarrow$ 0	0 $\rightarrow$ -3	-3 $\rightarrow$ $+\infty$	$+\infty$ $\rightarrow$ 1

Tìm tiệm cận ngang của đồ thị của hàm số đã cho?

Ví dụ 3. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị các hàm số:

a) $y = \frac{2x+1}{x-1}$

$$\text{b) } y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1};$$

c) $y = \sqrt{x^2 + x + 1} - x.$

Luyện tập 3.1. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số:

a) $y = \frac{3}{x+1};$

b) $y = \frac{3-4x}{-2x+1};$

c) $y = \frac{-3x+4}{x^2-9}.$

Luyện tập 3.2. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị các hàm số

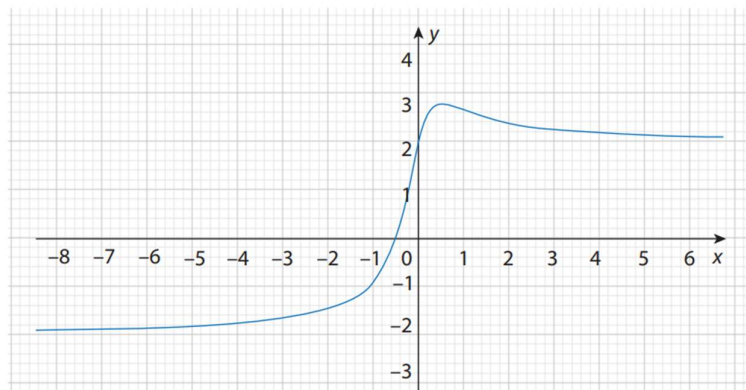
a) $y = x + \sqrt{x^2+1};$

b) $y = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-1}.$

Luyện tập 3.3. Cho hàm số $y = \frac{4x+2}{\sqrt{4x^2+1}}$ có đồ thị như hình dưới.

a) Dựa vào đồ thị, dự đoán các đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(x)$.

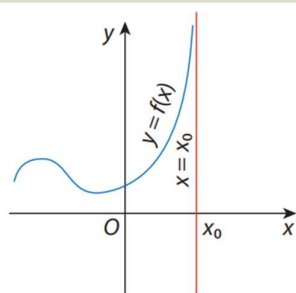
b) Tính các giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ để kiểm chứng kết quả câu a.



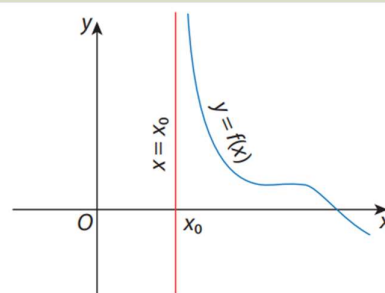
II. ĐƯỜNG TIỆM CẬN ĐỨNG CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Đường thẳng $x = x_0$ là đường tiệm cận đứng (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

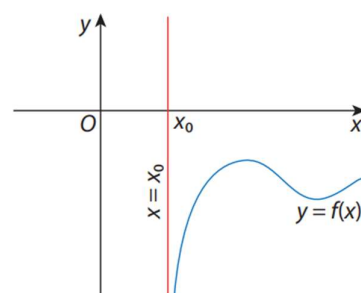
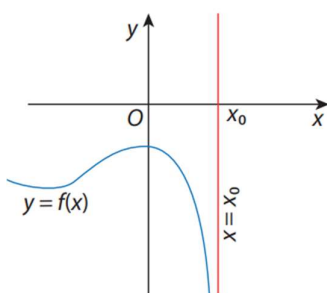
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} y = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} y = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} y = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} y = -\infty.$$



a)



b)



Cách tìm tiệm cận đứng:

Tìm tập xác định;

Tìm các giới hạn: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow x_0^-} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow x_0^+} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow x_0^-} y = -\infty$. Với x_0 là điểm mà hàm số không xác định.

Chú ý.

Với đồ thị hàm phân thức dạng $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$; $ad-bc \neq 0$) luôn có tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$.

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Tiệm cận đứng của đồ thị lần lượt là?

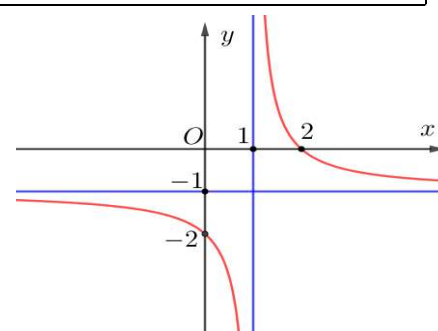
.....

.....

.....

.....

.....



Luyện tập 1. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Tiệm cận đứng của đồ thị lần lượt là?

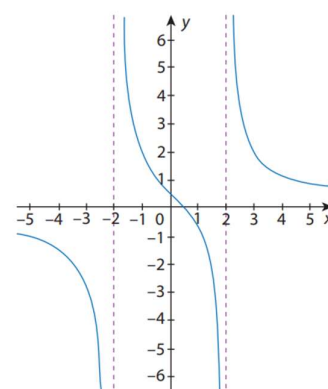
.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Hỏi đồ thị của hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
y'			+		
y			$-\infty$	$+\infty$	
				1	0

Luyện tập 2.1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1	$+\infty$
y		2	3	5

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là bao nhiêu

Luyện tập 2.2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1	$+\infty$
y'		-		-	0	+
y	2		$+\infty$		-2	$+\infty$

Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số?

Ví dụ 3. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số các hàm số

a) $y = \frac{x-1}{x-3}$;

b) $y = \frac{-x^2}{x+2}$;

c) $y = \frac{x-2}{x^2-3x+2}$.

Luyện tập 3. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số các hàm số:

a) $y = \frac{2x-2}{x+1};$

b) $y = \frac{3x}{2-x};$

c) $y = \frac{x^2-5x+4}{x^2-1}.$

Ví dụ 4. Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{\sqrt{16-x^4}}.$

Luyện tập 4.1. Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số :

$$y = \frac{2x - \sqrt{4x^2 - 3x + 2}}{3x^2 - 8x + 4}.$$

Luyện tập 4.2. Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+8}{x^3-8}.$

Ví dụ 5. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

a) $y = \frac{11}{x-3};$

b) $y = \frac{x-2}{x^2-4};$

c) $y = \frac{x^2-5x+4}{x^2-1}.$

Luyện tập 5. Tìm đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

a) $y = \frac{2x-1}{x+1};$

b) $y = -1 - \frac{2}{x+2};$

c) $y = \frac{2x-1}{x^2+1};$

d) $y = \frac{2x^2+4x-1}{x^2+2x-3}.$

Luyện tập 6. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của các đồ thị hàm số sau:

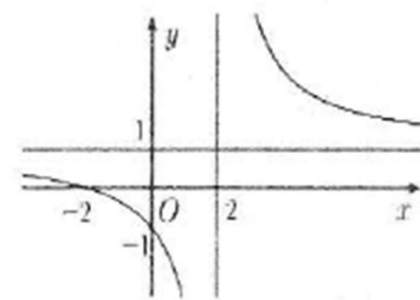
a) $y = \frac{2-x}{1-x^2};$

b) $y = \frac{2x^2+5x+1}{x^2-5x+4};$

c) $y = \frac{\sqrt{x+3}-2x}{x^2-1};$

d) $y = \frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x^2+7}-4}.$

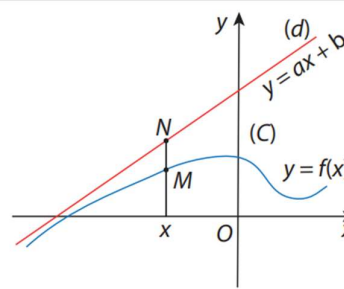
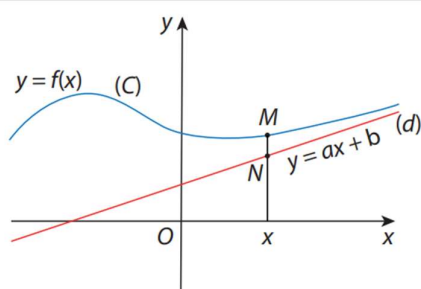
Ví dụ 10: Cho hàm số $y = \frac{ax+2}{cx+b}$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Tính tổng $T = a + 2b + 3c$.



III. ĐƯỜNG TIỆM CẬN XIÊN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) được gọi là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$



Chú ý.

Cách tìm các hệ số a, b của đường tiệm cận xiên $y = ax + b$ ($a \neq 0$):

Ta có $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ hoặc $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$ hoặc $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng đường thẳng $y = 3x - 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số: $y = f(x) = 3x - 1 - \frac{1}{x^2 + 1}$.

Ví dụ 2. Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x - 2}$.

Luyện tập 2.1. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị mỗi hàm số sau:

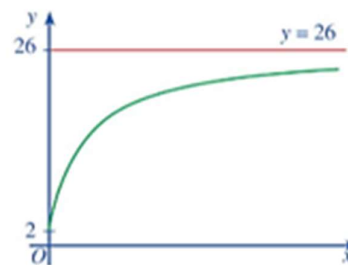
a) $y = x^3 - 2x^2 + x - 9$; b) $y = \frac{2x-1}{2-x}$; c) $y = \frac{x^2-3x+5}{2x+1}$;

Luyện tập 2.2. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị mỗi hàm số sau:

a) $y = 2x - 1 + \frac{3}{x+1}$; b) $y = \frac{2x^2+4x-1}{x^2+2x-3}$; c) $y = \frac{x-2}{x^2-4}$; d) $y = \frac{x^3}{x^2-4}$.

Ví dụ 1. Số dân của một thị trấn sau x năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức: $y=f(x)=\frac{26x+10}{x+5}$.

Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là đường thẳng nào?



Ví dụ 2. Một bể chứa 6000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 30 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 20 lit/phút. Nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là một hàm số có phương trình $f(t) = \frac{30t}{300+t}$ ($t \geq 0$).

a) Xét $f(t) = \frac{30t}{300+t}$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$.

b) Nêu nhận xét về nồng độ muối trong bể sau thời gian t ngày càng lớn.

Luyện tập 1. Số lượng sản phẩm bán được của một công ty trong x (tháng) được tính theo công thức:

$$S(x) = 200 \left(5 - \frac{9}{2+x} \right), \text{ trong đó } x \geq 1.$$

a) Xem $y = S(x)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[1; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

b) Nêu nhận xét về số lượng sản phẩm bán được của công ty đó trong x (tháng) khi x đủ lớn.

Luyện tập 2. Giả sử khối lượng còn lại của một chất phóng xạ (gam) sau t ngày phân rã được cho bởi hàm số:

$$m(t) = 15e^{-0,012t}.$$

a) Xem $y = m(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

b) Khối lượng $m(t)$ thay đổi ra sao khi $t \rightarrow +\infty$?

Luyện tập 3. Một công ty sản xuất đồ gia dụng ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là $C(x) = 2x + 50$ (triệu đồng). Khi đó $y = f(x) = \frac{C(x)}{x}$ là chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm. Chứng tỏ rằng hàm số $y = f(x)$ giảm và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Tính chất này nói lên điều gì?

b) Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $P(x)$.

Luyện tập 5. Để loại bỏ p% một loài tảo độc khỏi một hồ nước, người ta ước tính chi phí bỏ ra là $C(p) = \frac{45p}{100-p}$ (triệu đồng), với $0 \leq p < 100$. Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $C(p)$ và nêu ý nghĩa thực tiễn của đường tiệm cận này.

Luyện tập 6. Nồng độ oxygen trong hồ theo thời gian t cho bởi công thức $y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$, với y được tính theo mg / l và t được tính theo giờ, $t \geq 0$. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y(t)$. Từ đó, có nhận xét gì về nồng độ oxygen trong hồ khi thời gian t trở nên rất lớn?

V. CÁC BÀI TOÁN NÂNG CAO

1. Tiệm cận chứa tham số

Ví dụ 1. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số: $y = \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có 2 tiệm cận ngang.

.....

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 1.1. Tìm các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{(m^2-1)x^2+x+2}}{x+1}$ có đúng một tiệm cận ngang.

.....

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 1.2. Cho hàm số $y = \sqrt{mx^2+2x} - x$. Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang.

.....

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 1.3. Cho Điều kiện cần và đủ của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{2x+\sqrt{mx^2+4}}$ có đúng 1 tiệm cận ngang là?

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 1.4. Tìm giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = 2x + \sqrt{mx^2 - x + 1} + 1$ có tiệm cận ngang.

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$ không có tiệm cận đứng.

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 2.1. Tìm tất cả giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2 - mx + m}$ có đúng một tiệm cận đứng.

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 2.2. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x + m}$ có hai tiệm cận đứng.

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 2.3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx+2}{x-1}$ có tiệm cận đứng.

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 2.4. Tìm tất cả các giá trị m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + m}{x^2 - 3x + 2}$ có đúng một tiệm cận đứng.

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 2.5. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{(x-m)^2(2x-m)}{\sqrt{4x-x^2}-2}$ có tiệm cận đứng.

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Tập hợp các giá trị thực của m để hàm số $y = \frac{2x-1}{4x^2+4mx+1}$ có đúng một đường tiệm cận là?

.....

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 3.1. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x}-m}{x-1}$ có đúng hai đường tiệm cận.

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 3.2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-4}{\sqrt{x^2+m}}$ có 3 tiệm cận.

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 4. Biết đồ thị $y = \frac{(a-2b)x^2+bx+1}{x^2+x-b}$ có đường tiệm cận đứng là $x=1$ và đường tiệm cận ngang là $y=0$.

Tính $a+2b$.

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 4. Biết đồ thị $y = \frac{(a-3b)x^2+bx-1}{x^2+ax-a}$ có đường tiệm cận đứng là $x=2$ và đường tiệm cận ngang là

$y=1$. Tính $a+b$.

.....

.....

.....

.....

2. Tiệm cận hàm ẩn

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	+		+	0	-
y	1	$+\infty$	$-\infty$	0	3

Tìm số tiệm cận (đứng và ngang) đồ thị hàm số $y = \frac{4}{f(x)+2}$.

Luyện tập 1.1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	+		-	0	+
y	5	$+\infty$	$+\infty$	3	5

Tìm số tiệm cận (đứng và ngang) đồ thị hàm số $y = \frac{2}{f(x)-2018}$.

Luyện tập 1.2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
y'	+		- 0 +	
y	2 $\nearrow +\infty$	$+\infty \searrow 1 \nearrow +\infty$		

Tìm số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{f^2(x)-5f(x)+4}$.

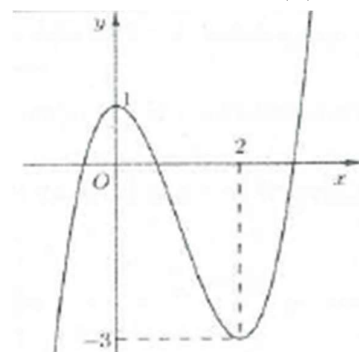
Luyện tập 1.3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
y'	$+$	$-$	0	$+$	$-$
y	$2 \rightarrow 9$	$-\infty \rightarrow 0 \rightarrow -3$	$5 \rightarrow 2$		

Biết số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = \frac{1}{f(x)+1}$ lần lượt là m và n . Khi đó tổng $m+n$ bằng?

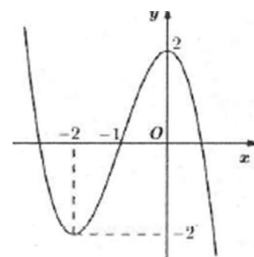
Ví dụ 2. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{f(x)+3}$

là:



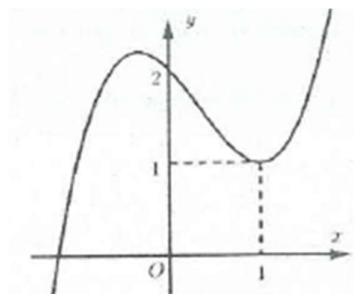
Luyện tập 2.1. Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ như hình vẽ bên. Tổng số đường tiệm cận đứng và ngang

của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x}{f(x) + 2}$.



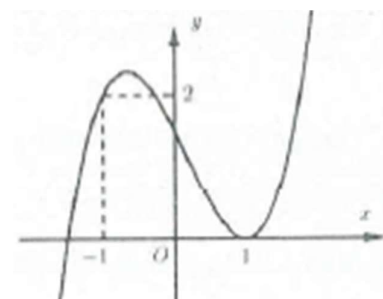
Luyện tập 2.2. Cho hàm số bậc 3 có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$y = \frac{x^2 - x}{f^2(x) - 3f(x) + 2}$.



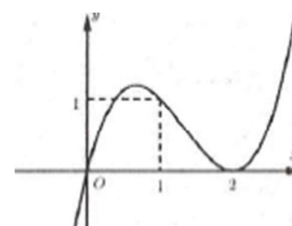
Luyện tập 2.3. Cho hàm số bậc 3 có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$$y = \frac{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 + x}}{x[f^2(x) - 2f(x)]}.$$



Luyện tập 2.4. Cho hàm số bậc 3 có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$$y = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x^2 - x}}{f^2(x) - f(x)}$$



B. ĐỀ ÔN TẬP CUỐI BÀI

Phần 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn:

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 1$ và $x = -1$.
- B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
- C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
- D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.

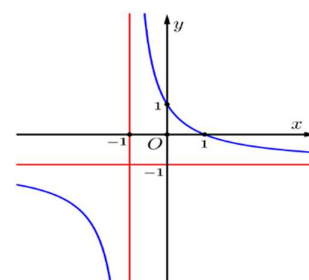
Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận đứng.
- B. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.
- C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x = 1$ và $x = -1$.
- D. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.

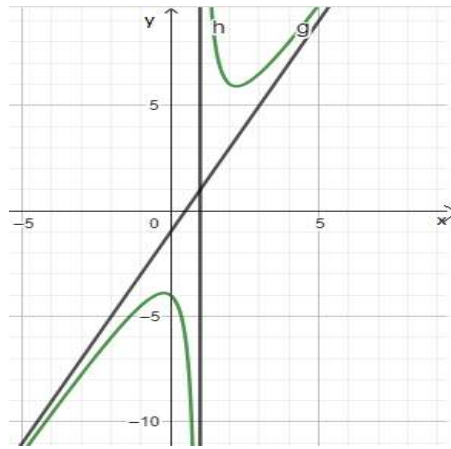
Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên.

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho có phương trình là

- A. $x = 1$.
- B. $x = -1$.
- C. $x = 0$.
- D. $y = -1$.



Câu 4: Chọn hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang
- B. Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng và một tiệm cận xiên
- C. Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận ngang và một tiệm cận xiên
- D. Đồ thị hàm số đã chỉ có một tiệm cận đứng

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
y'	$-$	$-$	0	$+$
y	1	2	3	

Arrows indicate the function values at the boundaries: from 1 to $-\infty$ at $x=0$, from 2 to $-\infty$ at $x=3$, and from 3 to $+\infty$ at $x=3$.

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

- A. 2.
- B. 3.
- C. 4.
- D. 1.

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{2}{x-2}$. Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

- A. $y = 2$.
- B. $y = 0$.
- C. $y = -1$.
- D. $x = 2$.

Câu 7: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình:

- A. $x = 1$.
- B. $x = -1$.
- C. $x = 2$.
- D. $x = \frac{1}{2}$.

Câu 8: Tổng số các đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x^2}$ là

- A. 1.
- B. 4.
- C. 2.
- D. 3.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x) = x + \frac{1}{x+2}$. Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

- A. $y = x$.
- B. $y = -x$.
- C. $y = x + 2$.
- D. $y = -x + 2$.

Câu 10: Đồ thị hàm số nào dưới đây có tiệm cận xiên

- A. $y = \frac{2-2x}{x+2}$.
- B. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.
- C. $y = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x - 3}$.
- D. $y = x - 3 + \frac{1}{x^2}$.

Câu 11: Tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + m}{x^2 - 3x + 2}$ có đúng hai đường tiệm cận là

- A. $m = -1$ B. $m \in \{1; 4\}$ C. $m = 4$ D. $m \in \{-1; -4\}$

Câu 12: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 2}}$. Đồ thị hàm số đã cho có tất cả số đường tiệm cận là

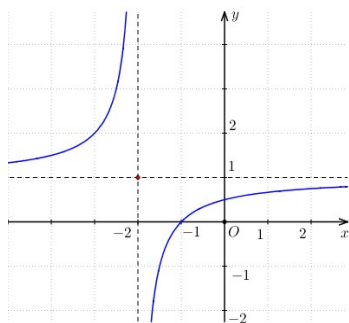
- A. 4. B. 5. C. 3. D. 6.

Phần 2: Câu trắc nghiệm đúng sai:

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Các mệnh đề sau **đúng** hay **sai**?

- a) Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.
b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$.
c) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.
d) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là $x = 0$ và $y = 2$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$.
b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.
c) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x$.
d) Đồ thị hàm số có đúng ba đường tiệm cận.

Câu 15: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x - 2}{x - 2}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$.
b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.
c) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x$.
d) Đồ thị hàm số có đúng ba đường tiệm cận.

Câu 16: Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích bằng 180 m^2 . Biết độ dài một cạnh của mảnh vườn là x (m). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Cạnh còn lại của mảnh vườn là $\frac{180}{x}$ (m).
b) Biểu thức tính chu vi $P(x)$ (mét) của mảnh vườn là $P(x) = x + \frac{180}{x}$.
c) Nếu chu vi $P(x)$ là một hàm số xác định trên $(0; +\infty)$ thì đồ thị của nó có tiệm cận đứng $x = 0$.
d) Nếu chu vi $P(x)$ là một hàm số xác định trên $(0; +\infty)$ thì đồ thị của nó có tiệm cận xiên $y = -x$.

Phần 3: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 17: Đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-4}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

Câu 18: Cho các hàm số

$$1) y = \frac{x^2+1}{x-1}.$$

$$2) y = \frac{x-1}{x^2+1}.$$

$$3) y = \frac{x-1}{x+2}.$$

$$4) y = \frac{1}{x+1}.$$

Có bao nhiêu hàm số mà đồ thị của nó có tiệm cận ngang?

Câu 19: Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+9}+3}{x^2+x}$ là?

Câu 20: Đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{-x^2+x+3}{x-1}$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = ax + b$ giá trị của $2a + b$ bằng bao nhiêu?

Câu 21: Biết rằng đồ thị của hàm số $y = \frac{(n-3)x+n-2017}{x+m+3}$ (m, n là các số thực) nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung là tiệm cận đứng. Tổng $m+n$ bằng bao nhiêu?

Câu 22: Giả sử số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 2000 được mô tả bởi hàm số:

$$N(t) = \frac{20t+30}{t+2}; t \geq 0,$$

trong đó $N(t)$ được tính bằng nghìn người. Khi t càng lớn thì số dân của thị trấn đó gần như bằng bao nhiêu nghìn người?

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

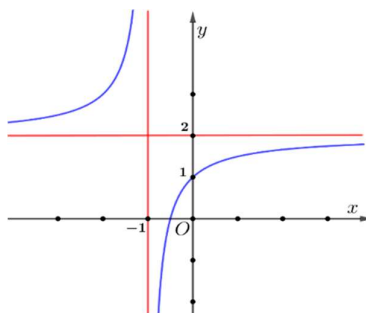
Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \pm\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm\infty$. Chọn mệnh đề đúng?

- A. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận đứng.
- B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.
- C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $y = 2$ và $y = -2$.
- D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x = 2$ và $x = -2$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
- B. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 3$ và $x = -3$.
- C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 3$ và $y = -3$.
- D. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

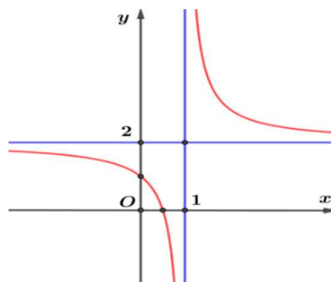
Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Tiệm cận **ngang** của đồ thị hàm số đã cho có phương trình là

- A. $y = 1$.
- B. $y = -1$.
- C. $x = 2$.
- D. $y = 2$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Tiệm cận **đứng** và tiệm cận **ngang** của đồ thị lần lượt là

- A. $x = 2$ và $y = 1$.
- B. $x = 2$ và $y = 2$.
- C. $x = 1$ và $y = 2$.
- D. $x = 1$ và $y = 1$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
y'		$-$	$-$	0	$+$
y	1	2	3		

$\swarrow$ $\searrow$ $\nearrow$
 $-\infty$ -3

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

- A. 2.
- B. 3.
- C. 4.
- D. 1.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'		-	0	
y	0	2	-2	$+\infty$

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
y'		-	-	0	+	+
y	1	-1	5	$+\infty$	-4	-1

Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai** ?

- A. Đường thẳng $x = 1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.
 B. Đường thẳng $y = -1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.
 C. Đường thẳng $x = 3$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.
 D. Đường thẳng $y = 1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

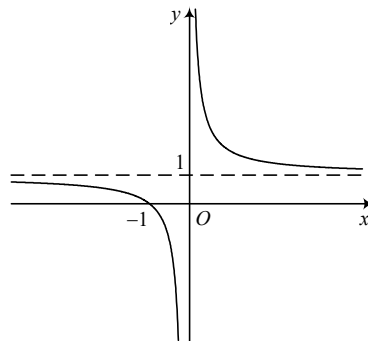
Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	2	$+\infty$	5

Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 3 B. 2 C. 4 D. 1

Câu 9: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



- A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 0$, tiệm cận ngang $y = 1$.
 B. Hàm số có hai cực trị.
 C. Đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận.
 D. Hàm số đồng biến trong khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

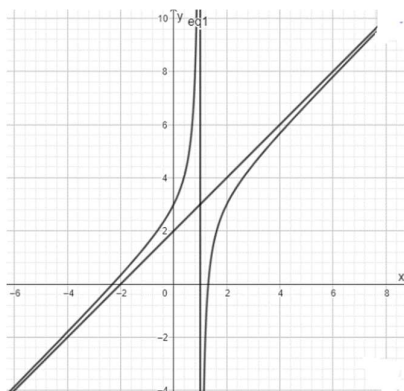
Câu 10: Cho hàm số có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$		$+$	$-$	$+$
y	-4	$+\infty$	2	$-\infty$	-1

Tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số 0 là

- A. 3. B. 2. C. 4. D. 1.

Câu 11: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



- A. Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang
 B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.
 C. Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận ngang và một tiệm cận xiên
 D. Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng và một tiệm cận xiên

Câu 12: Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{1-3x}{x+2}$ là

- A. $x = -2$. B. $x = -3$. C. $y = -2$. D. $y = -3$.

Câu 13: Tìm phương trình đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{2-x}$.

- A. $x = 2, y = -2$. B. $x = 1, y = 2$. C. $x = 2, y = 1$. D. $x = -2, y = -2$.

Câu 14: Cho hàm số $y = \frac{3}{x+1}$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề sai?

- A. Hàm số không có điểm cực trị.
 B. Đồ thị (C) nhận $I(-1;0)$ làm tâm đối xứng.
 C. Đồ thị (C) không có tiệm cận ngang.
 D. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.

Câu 15: Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = x - 2 + \frac{2}{x+1}$?

- A. $y = x - 2$. B. $y = -x + 2$. C. $y = x$. D. $y = -x$.

Câu 16: Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$. Khi đó $2a + b$ bằng

- A. -2 . B. 2 . C. 0 . D. 4 .

Câu 17: Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + 3}{2x - 1}$. Khi đó $a.b$ bằng

- A. -2 . B. 2 . C. -1 . D. 4 .

Câu 18: Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{x^2 + 3}$?

- A. $y = x - 2$. B. $y = -x + 2$. C. $y = x$. D. $y = -x$.

Câu 19: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

- A. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$. B. $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$. C. $y = \sqrt{x^2 - 1}$. D. $y = \frac{x}{x + 1}$.

Câu 20: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận ngang?

- A. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$. B. $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$. C. $y = \sqrt{x^2 - 1}$. D. $y = \frac{x}{x + 1}$.

Câu 21: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận xiên?

- A. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$. B. $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$. C. $y = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$. D. $y = \frac{x}{x + 1}$.

Câu 22: Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1}$.

- A. 2 . B. 3 . C. 0 . D. 1 .

Câu 23: Cho hàm số $y = \frac{2x - 6}{x^2 - 4x + 3}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận là các đường thẳng $x = -1$; $x = -3$ và $y = 0$.
 B. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$ và tiệm cận ngang $y = 0$.
 C. Đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận là các đường thẳng $x = 1$; $x = 3$ và $y = 0$.
 D. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng $x = 1$; $x = 3$ và không có tiệm cận ngang.

Câu 24: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{x + 1}{\sqrt{mx^2 + 1}}$ có hai tiệm cận ngang

- A. $m < 0$. B. $m = 0$. C. $m > 0$.
 D. Không có giá trị thực nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 25: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + m}{x^2 - 3x + 2}$ có đúng hai đường tiệm cận.

- A. $m = -1$. B. $m \in \{1; 4\}$. C. $m = 4$. D. $m \in \{-1; -4\}$.

Câu 26: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{5x - 3}{x^2 - 2mx + 1}$ không có tiệm cận đứng.

- A. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases}$. B. $-1 < m < 1$. C. $m = -1$. D. $m = 1$.

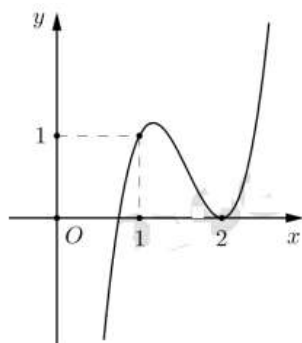
Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	1	-3	1

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 28: Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{2x-1}}{x[f^2(x) - f(x)]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- A. 5 B. 4 C. 6 D. 3

Bài 4.

KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. LÝ THUYẾT

I. SƠ ĐỒ KHẢO SÁT HÀM SỐ

1. Tìm tập xác định của hàm số.
2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số:
 - Tính đạo hàm y' . Tìm các điểm tại đó y' bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.
 - Xét dấu y' để chỉ ra các khoảng đơn điệu của hàm số.
 - Tìm cực trị của hàm số.
 - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).
 - Lập bảng biến thiên của hàm số.
3. Vẽ đồ thị
 - Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ.
 - Xác định tính đối xứng của đồ thị (nếu có).
 - Xác định tính tuần hoàn (nếu có) của hàm số.
 - Dựa vào bảng biến thiên và các yếu tố xác định ở trên để vẽ.

II. HÀM SỐ BẬC BA: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

Dạng 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số:

1. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

2. Sự biến thiên

Giới hạn:

- Với $a > 0$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$.- Với $a < 0$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$.Đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Bảng biến thiên

TH1: Hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 .

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	CĐ		CT	$+\infty$

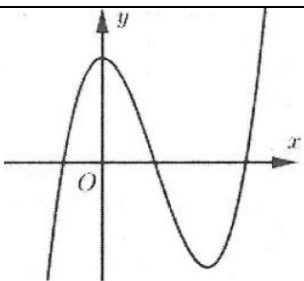
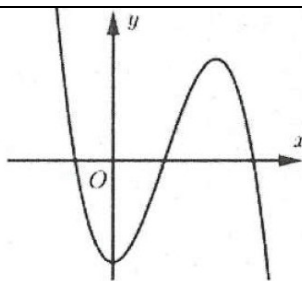
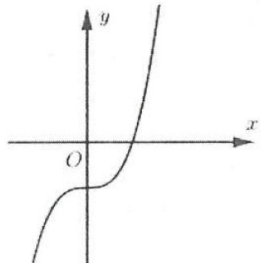
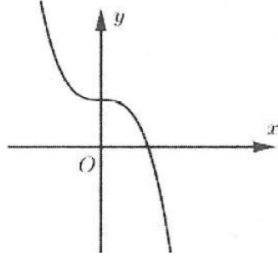
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	CĐ			$-\infty$
		CT			

TH2: Hàm số không có điểm cực trị

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

3. Đồ thị hàm số

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta'_{y'} > 0$	 $x_{CN} < x_{CT}$	 $x_{CN} > x_{CT}$
$\Delta'_{y'} \leq 0$		

Ví dụ 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y = x^3 + 3x^2 - 4$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y = -x^3 + 3x - 2$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 2$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 2: Một số bài toán liên quan đến khảo sát hàm số bậc ba

Bài toán : Tìm giao điểm hai đồ thị:

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đồ thị là (C) và (C') .

Để tìm hoành độ giao điểm ta giải phương trình: $f(x) = g(x)$ (1)

Chú ý:

+) Nếu pt (1) có các nghiệm $x_1, x_2, \dots$ thì các giao điểm của (C) và (C') là $(x_1; f(x_1)), (x_2; f(x_2)), \dots$

+) Số nghiệm của pt (1) là số giao điểm của (C) , (C') và ngược lại.

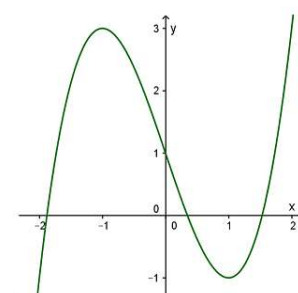
Ví dụ 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ.

Số nghiệm phân biệt của phương trình $f(x) = \frac{1}{2}$ là :

.....

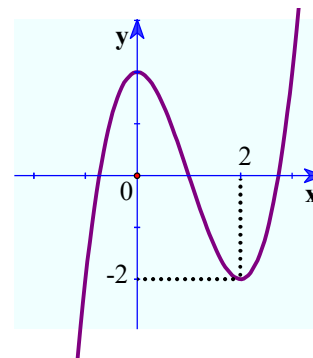
.....

.....



Luyện tập 1. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.

Số nghiệm của phương trình $f(x) + 1 = 0$ là



Ví dụ 2. Hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		2		-1		$+\infty$

Phương trình $f(x) = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

Luyện tập 2.1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		0		-4		$+\infty$

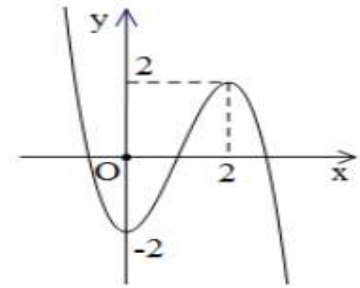
Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $f(x) = m - 1$ có ba nghiệm thực phân biệt.

Luyện tập 2.2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		4		-2		$+\infty$

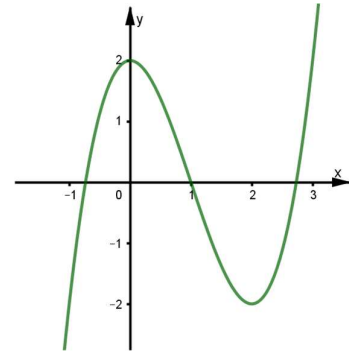
Số nghiệm của phương trình $f^2(x) - 4 = 0$ là

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trong hình bên. Phương trình $f(x) = 1$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt lớn hơn 2.



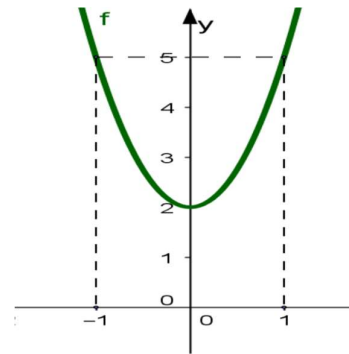
Luyện tập 3.1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.

Tìm số nghiệm của phương trình $f(f(x)) = 1$.



Luyện tập 3.2. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) đi qua $A(1; 4)$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ.

Tìm giá trị $f(3) - 2f(1)$?



Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$:

Đồ thị hàm số trên có tâm đối xứng là điểm $I(x_0; f(x_0))$, với x_0 là nghiệm của phương trình $y'' = 0$.

Ví dụ 4. Tìm tọa độ tâm đối xứng của đồ thị hàm số: $y = -x^3 + 3x + 1$.

Luyện tập 4. Tìm tọa độ tâm đối xứng của đồ thị hàm số: $y = 2x^3 - 5x^2 + x - 1$.

Ví dụ 5. Số giao điểm của đường cong $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$ và đường thẳng $y = 1 - 2x$ bằng.

Luyện tập 5.1. Tọa độ giao điểm của đường cong $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$ và đường thẳng $y = 1 - 2x$ là?

Luyện tập 5.2. Đường thẳng $y = 4x - 2$ và đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 3x$ có tất cả bao nhiêu giao điểm?

Ví dụ 6. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x^3 - 6x^2 + m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Luyện tập 6.1. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = 2x^3 - (2 + m)x + m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Luyện tập 6.2. Đường thẳng $(d): y = 12x + m (m < 0)$ là tiếp tuyến của đường cong $(C): y = x^3 + 2$. Khi đó đường thẳng (d) cắt trục hoành và trục tung tại hai điểm A, B . Tính diện tích ΔOAB .

Luyện tập 6.3. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C) . Gọi d là đường thẳng đi qua $A(3; 20)$ và có hệ số góc m . Giá trị của m để đường thẳng d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt.

Luyện tập 6.4. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2m$. Có bao nhiêu giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng?

II. HÀM SỐ PHÂN THỨC $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0; ad-bc \neq 0$)

Dạng 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

1. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$

2. Sự biến thiên

Giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và các đường tiệm cận

$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{d}{c}\right)^+} y = ; \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{d}{c}\right)^-} y = \dots$ Do đó tiệm cận đứng của đồ thị là đường thẳng $x = -\frac{d}{c}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{a}{c}; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \frac{a}{c}$ Do đó tiệm cận ngang của đồ thị là đường thẳng $y = \frac{a}{c}$

Đạo hàm $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

- Nếu $ad-bc < 0$ thì $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} < 0, \forall x \neq -\frac{d}{c}$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{d}{c}\right), \left(-\frac{d}{c}; +\infty\right)$.

Hàm số không có cực trị

- Nếu $ad-bc > 0$ thì $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} > 0, \forall x \neq -\frac{d}{c}$.

Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{d}{c}\right), \left(-\frac{d}{c}; +\infty\right)$.

Hàm số không có cực trị

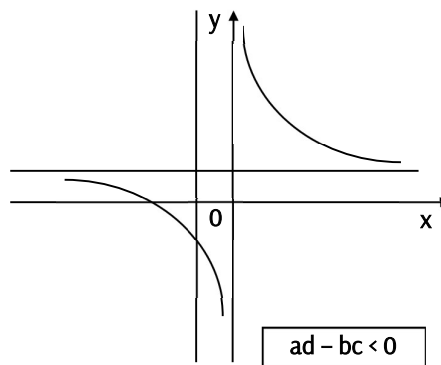
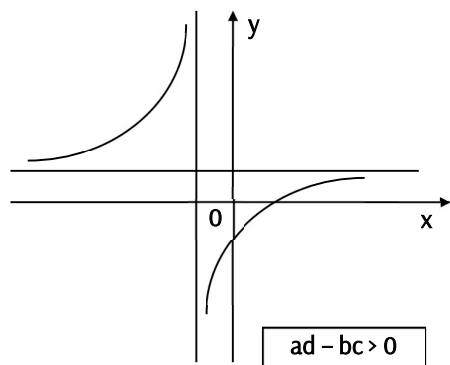
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$\frac{a}{c}$	$+\infty$	$\frac{a}{c}$

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	$\frac{a}{c}$	$+\infty$	$\frac{a}{c}$

3. Đồ thị hàm số

Đồ thị hàm phân thức chỉ có 2 dạng sau:



Đồ thị hàm số nhận giao điểm hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng

Ví dụ 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y = \frac{x-2}{2x+1}$.

Luyện tập 1.1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y = \frac{-2x+1}{x+1}$.

Luyện tập 1.2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số sau: $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 1.3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau: $y = \frac{x+3}{1-x}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 2: Một số bài toán liên quan đến khảo sát hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0; ad-bc \neq 0$)

Ví dụ 1: Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực.

Viết phương trình tiệm cận đứng, tiệm cận ngang và tọa độ tâm đối xứng của đồ thị?

.....

.....

.....

.....

.....

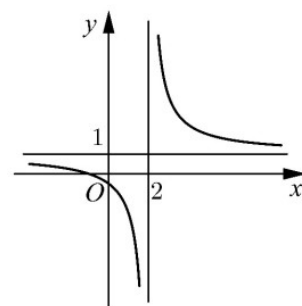
.....

.....

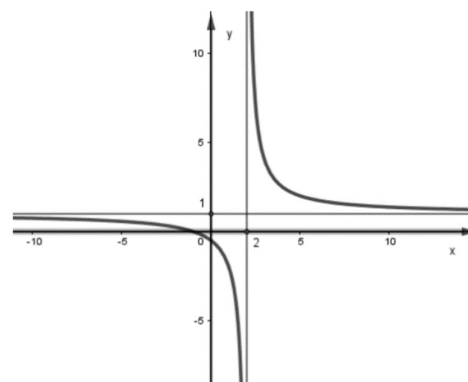
.....

.....

.....



Luyện tập 1.1. Cho hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ có đồ thị như hình vẽ. Tính $T = a + b$?



Luyện tập 1.2. Tìm tọa độ tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

Ví dụ 2. Tìm tọa độ giao điểm của (C): $y = \frac{x-1}{2x+1}$ và (d): $y = -x + 1$.

Luyện tập 2.1. Tìm giao điểm của đồ thị (C): $y = \frac{4x}{x+1}$ và đường thẳng $\Delta: y = x + 1$.

Luyện tập 2.2. Vậy tọa độ giao điểm là $(1; 2)$. Gọi M, N là các giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = x - 2$ và $y = \frac{7x-14}{x+2}$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng MN. Tìm hoành độ điểm I.

Luyện tập 2.3. Biết đường thẳng $y = x + 1$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{7x-17}{2x-5}$ tại 2 điểm phân biệt, gọi A là giao điểm thuộc nhánh bên phải đường tiệm cận đứng của (C) , kí hiệu $(x_A; y_A)$ là tọa độ của điểm A . Tìm $x_A + y_A$?

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 2.4. Gọi A, B là các giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ và đường thẳng $y = -x - 1$. Tính AB .

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3. Xác định m để đường thẳng $y = mx - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2-x}{2+x}$ tại hai điểm phân biệt.

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 3.1. Biết rằng đường thẳng $d: y = -x + m$ luôn cắt đường cong $(C): y = \frac{2x+1}{x+2}$ tại hai điểm phân biệt A, B . Độ dài đoạn AB đạt giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 3.2. Gọi S là tập các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = x + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{4x-m^2}{x-1}$ tại đúng một điểm. Tìm tích các phần tử của S .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 4. Trên đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+4}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên?

.....

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 4.1. Tìm tọa độ điểm M có hoành độ dương thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$ sao cho khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của đồ thị (C) đạt giá trị nhỏ nhất.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 4.2. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của đồ thị với trục tung.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 4.3. Hỏi có bao nhiêu cặp số nguyên dương (a;b) để hàm số $y = \frac{2x-a}{4x-b}$ có đồ thị trên $(1;+\infty)$ như hình vẽ dưới đây?

.....

.....

.....

.....

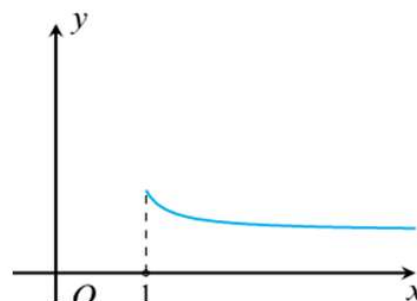
.....

.....

.....

.....

.....



III. HÀM PHÂN THỨC HỮU TỈ: $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px + q}$ ($a \neq 0, p \neq 0$)

Dạng 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

1. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{q}{p} \right\}$

2. Sự biến thiên:

Giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và các đường tiệm cận

Ta có: $y = mx + n + \frac{d}{px + q}$.

$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{q}{p}\right)^+} y = \infty$; $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{q}{p}\right)^-} y = -\infty$. Do đó tiệm cận đứng của đồ thị là đường thẳng $x = -\frac{q}{p}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - (mx + n)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{d}{px + q} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - (mx + n)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{d}{px + q} = 0.$$

Do đó tiệm cận xiên của đồ thị là đường thẳng $y = mx + n$.

$$\text{Đạo hàm } y' = \frac{apx^2 + 2aqx + bq - pc}{(px + q)^2}.$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow apx^2 + 2aqx + bq - pc = 0.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_1	$-\frac{q}{p}$	x_2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	↖ ↘		↖ ↘	$+\infty$	

	$-\frac{q}{p}$				
x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+	0 -
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$		$-\infty$
		CT		CĐ	

Kết luận đơn điệu, cực trị

3. Đồ thị hàm số

- Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ.
- Tìm thêm một vài điểm khác
- Đồ thị hàm số nhận giao điểm hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng

Ví dụ 1. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 1. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 3}$.

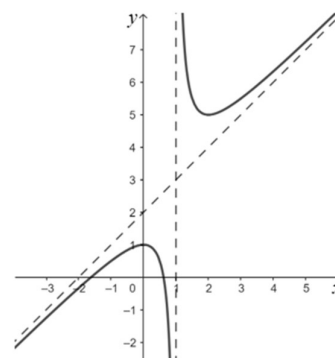
Luyện tập 2. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{1 - x}$.

Luyện tập 3. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 2}$.

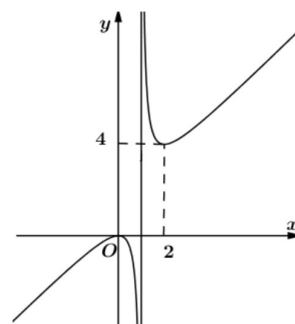
Luyện tập 4. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x + 1 + \frac{1}{x-2}$.

Dạng 2: Một số bài toán liên quan đến khảo sát hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px + q}$ ($a \neq 0, p \neq 0$)

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) + 4 = 0$ là:



Luyện tập 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Hỏi với giá trị thực nào của m thì đường thẳng $y = 2m$ cắt đồ thị hàm số đã cho tại hai điểm phân biệt.



Ví dụ 2. Đường thẳng $y = 2x - 1$ có bao nhiêu điểm chung với đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1}$.

Luyện tập 2. Cho hai hàm số $y = x^2 - 2x$ và $y = \frac{2x^2 - 7x + 6}{x - 2}$. Tổng tung độ các giao điểm của hai đồ thị hàm số đã cho bằng?

Ví dụ 3. Tìm m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x}{x - 1}$ tại hai điểm phân biệt?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{-x^2 + mx - 2}{x - 1}$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 4. Số điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 + 3x + 10}{x + 2}$ là?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 4. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm trên trục tung, có tọa độ nguyên thỏa mãn $x^2 + y^2 < 144$, mà từ đó vẽ được ít nhất một tiếp tuyến tới (C) ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

IV. ĐỒ THỊ HÀM SỐ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Các giá trị của tham số m để phương trình $|f(x)| = m$ có 6 nghiệm thực phân biệt là

.....

.....

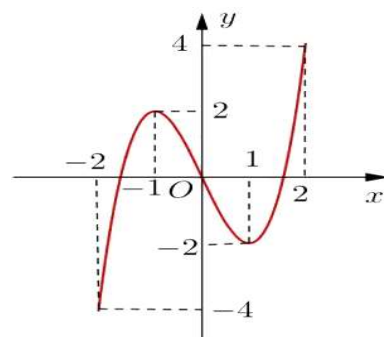
.....

.....

.....

.....

.....



Luyện tập 1.1. Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị là đường cong như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $|f(x)| = m$ có nhiều nghiệm thực nhất.

.....

.....

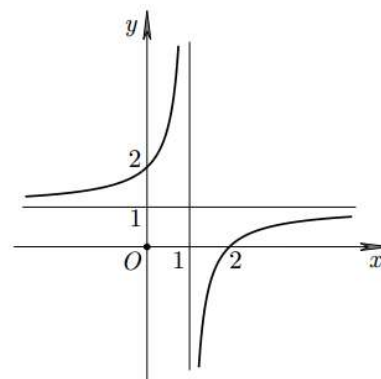
.....

.....

.....

.....

.....



Luyện tập 1.2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trong hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $|f(x)| = m$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

.....

.....

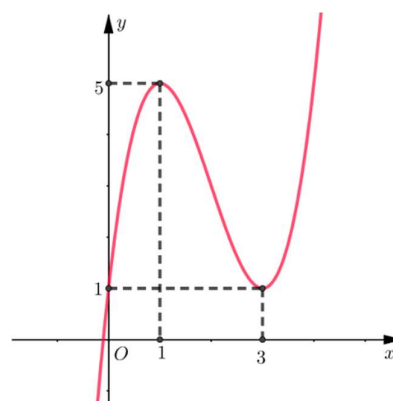
.....

.....

.....

.....

.....



Luyện tập 1.3. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tham số m để hàm số $y = |f(x) + m|$ có ba điểm cực trị?

.....

.....

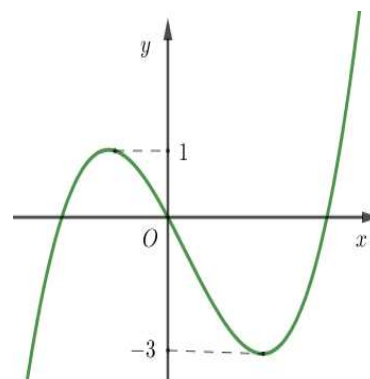
.....

.....

.....

.....

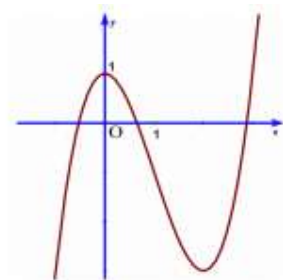
.....



B. ĐỀ ÔN TẬP CUỐI BÀI

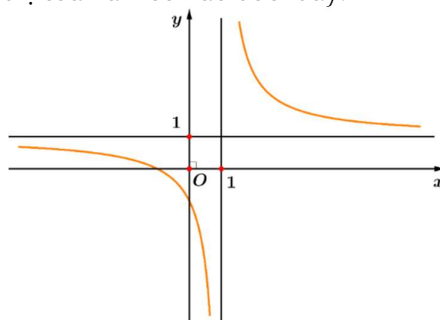
Phần 1: Câu trắc nghiệm nhiều lựa chọn:

Câu 1: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?



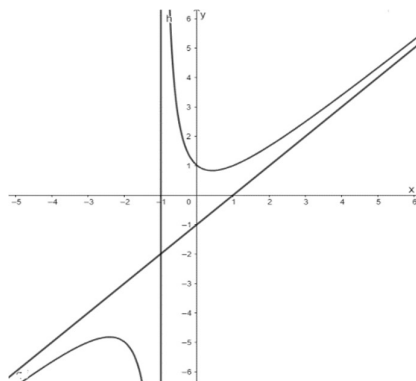
- A. $y = 3x^2 + 2x + 1$. B. $y = x^3 - 3x^2 + 1$. C. $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 1$. D. $y = x^4 + 3x^2 + 1$.

Câu 2: Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



- A. $y = -x^3 + 2x + 1$. B. $y = \frac{x-1}{x+1}$. C. $y = \frac{x+1}{x-1}$. D. $y = x^3 - x^2 + 1$.

Câu 3: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?



- A. $y = \frac{x-1}{x+1}$. B. $y = x - 1 + \frac{2}{x+1}$. C. $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 1$. D. $y = x + 1 + \frac{2}{x-1}$.

Câu 4: Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 4$ có tọa độ là

- A. $(3, 32)$. B. $(0; -4)$. C. $(-3; 14)$. D. $(-6, 32)$.

Câu 5: Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có tọa độ là

A. $(-1, -2)$.

B. $(-1; 1)$.

C. $(-1; 2)$.

D. $(2, -1)$.

Câu 6: Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$ có tọa độ là

A. $(-2, 0)$.

B. $(2; 2)$.

C. $(2; 0)$.

D. $(-2, -2)$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	7	1	$+\infty$	

Số nghiệm của phương trình $f(x) - 2 = 0$ là

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Câu 8: Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - x - 3}{x + 1}$ với trục tung là

A. $(-2, 0)$.

B. $(0; 2)$.

C. $(0; -3)$.

D. $(0, -2)$.

Câu 9: Cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ là (C). Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(-2; 0)$ là

A. $y = 9x + 18$.

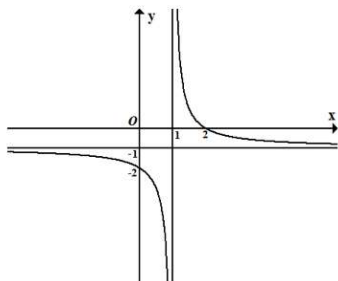
B. $y = 9x - 22$.

C. $y = 9x - 18$.

D. $y = -9x - 18$.

Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{ax + b}{x + c}$ có đồ thị như hình bên dưới, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức

$$T = a + 2b + 3c?$$



A. $T = -8$.

B. $T = 2$.

C. $T = 6$.

D. $T = 0$.

Câu 11: Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x + \frac{2}{x-1}$ và đường thẳng $y = 2x$.

A. 2.

B. 0.

C. 1.

D. 3.

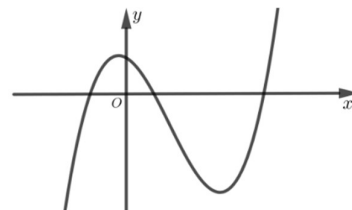
Câu 12: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **đúng**?

A. $ab < 0, bc > 0, cd < 0$.

B. $ab < 0, bc < 0, cd > 0$.

C. $ab > 0, bc > 0, cd < 0$.

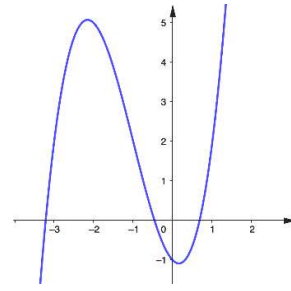
D. $ab > 0, bc > 0, cd > 0$.



Phần 2: Câu trắc nghiệm đúng sai

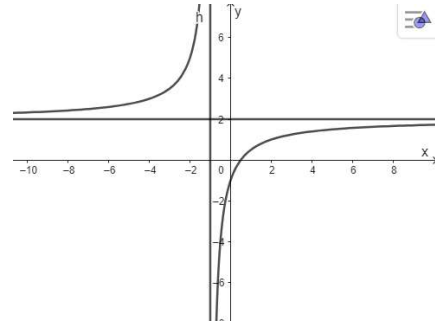
Câu 13: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.
- b) Đạo hàm của hàm số là $y' = -3x^2 + 3x$.
- c) $y' > 0$ khi $x \in (-1; 1)$ và $y' < 0$ khi $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.
- d) Hàm số đã cho có đồ thị như Hình bên.



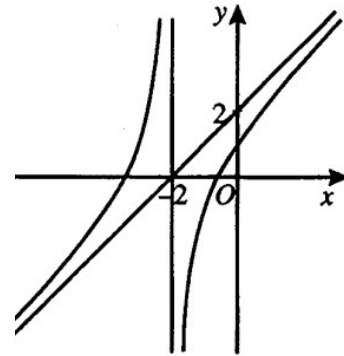
Câu 14: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- b) Đạo hàm của hàm số là $y' = \frac{-1}{(x+1)^2}$.
- c) Tiệm cận ngang của đồ thị là đường thẳng $x = -1$.
- d) Hàm số đã cho có đồ thị như Hình bên.



Câu 15: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 4x + 2}{x + 2}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

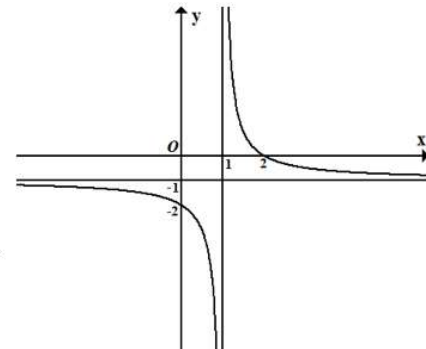
- a) $y = x - 2 - \frac{2}{x+2}$.
- b) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x = 2$
- c) Tiệm cận ngang của đồ thị là đường thẳng $y = x + 2$
- d) Hàm số đã cho có đồ thị như Hình 1



Câu 16: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình bên dưới, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$.
- b) Giá trị $c = 1$.
- c) Tâm đối xứng của đồ thị là $I(1; 0)$
- d) Giá trị của biểu thức $T = a + 2b + 3c$ bằng 0

**Phần 3: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn:**

Câu 17: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+2}$ có đồ thị (C). Tâm đối xứng của đồ thị là $I(a; b)$. Giá trị $a + b$ bằng bao nhiêu?

Câu 18: Đường thẳng $y = 4x - 2$ và đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 3x$ có tất cả bao nhiêu giao điểm?

Câu 19: Gọi A, B là các giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ và đường thẳng $y = -x - 1$. Tính AB..

Câu 20: Biết rằng đường thẳng $d: y = -x + m$ luôn cắt đường cong (C): $y = \frac{2x+1}{x+2}$ tại hai điểm phân biệt A, B.

Độ dài đoạn AB đạt giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến một chữ số thập phân)

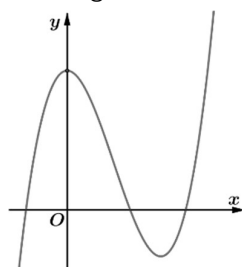
Câu 21: Cho hai hàm số $y = x^2 - 2x$ và $y = \frac{2x^2 - 7x + 6}{x - 2}$. Tổng tung độ các giao điểm của hai đồ thị hàm số đã cho bằng?

Câu 22: Đường thẳng $(d): y = 12x + m (m < 0)$ là tiếp tuyến của đường cong $(C): y = x^3 + 2$. Khi đó đường thẳng (d) cắt trục hoành và trục tung tại hai điểm A, B. Tính diện tích ΔOAB .

Câu 22: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ (C) và đường thẳng $d_m: y = x + m$. Tìm m để (C) cắt d_m tại hai điểm phân biệt A, B sao cho ΔOAB vuông tại O.

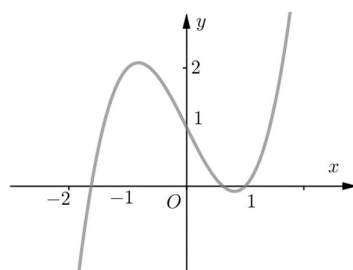
C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Đường cong ở hình bên dưới là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



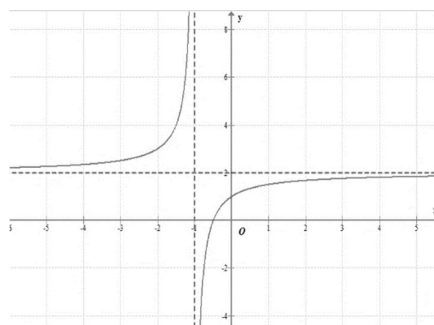
- A. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$. B. $y = x^3 - 3x^2 + 3$. C. $y = \frac{2x^2 + 1}{x + 1}$. D. $y = \frac{x + 1}{x}$.

Câu 2: Hình vẽ sau đây là đồ thị của một trong bốn hàm số cho ở các đáp án A,B,C,D. Hỏi đó là hàm số nào?



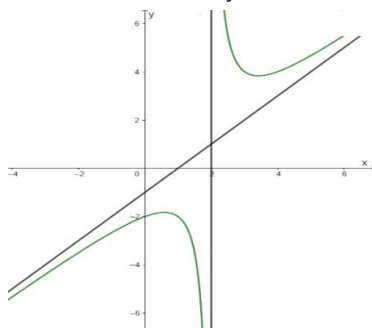
- A. $y = x^3 + 2x + 1$. B. $y = x^3 - 2x^2 + 1$. C. $y = x^3 - 2x + 1$. D. $y = -x^3 + 2x + 1$.

Câu 3: Hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số nào



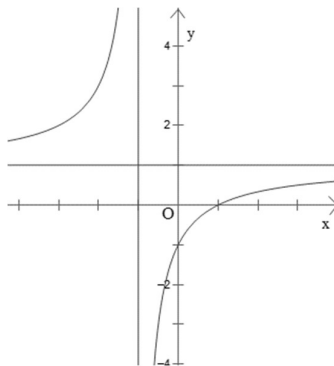
- A. $y = \frac{x-1}{x+1}$. B. $y = \frac{2x+1}{x+1}$. C. $y = \frac{2x-3}{x+1}$. D. $y = \frac{2x+5}{x+1}$.

Câu 4: Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



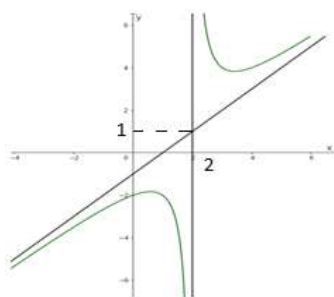
- A. $y = \frac{x-1}{x-2}$. B. $y = \frac{-2x+1}{2x+2}$. C. $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{x-2}$. D. $y = x^3 - 3x^2$.

Câu 5: Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



- A. $y = \frac{x-1}{x+1}$. B. $y = \frac{-2x+1}{2x+2}$. C. $y = \frac{-3x^2+2x-1}{x-1}$. D. $y = x^3 - 3x^2$.

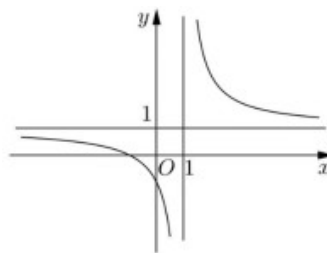
Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{ex + f}$ ($a, e \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên



Tọa độ tâm đối xứng của đồ thị là

- A. $(2, 2)$. B. $(1; 3)$. C. $(2; 1)$. D. $(-2, -2)$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên



Tọa độ tâm đối xứng của đồ thị là

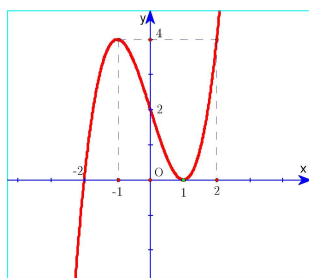
- A. $(2, 2)$. B. $(1; 3)$. C. $(1; 1)$. D. $(-2, -2)$.

Câu 8: Bảng biến thiên sau đây là của một trong 4 hàm số được liệt kê dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?

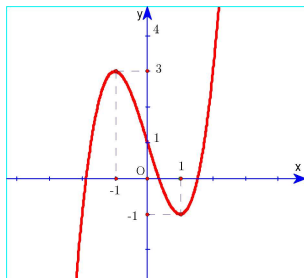
x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	-	0	+	0	-
y	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$-\infty$
		-1	3		

- A. $y = x^3 + 3x^2 - 1$. B. $y = x^3 - 3x^2 - 1$.
C. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$. D. $y = -x^3 - 3x^2 - 1$.

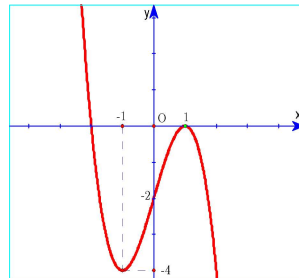
Câu 9: Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ là hình nào trong 4 hình dưới đây?



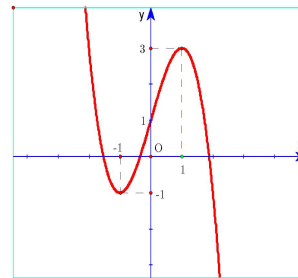
A. Hình 1.



B. Hình 2.

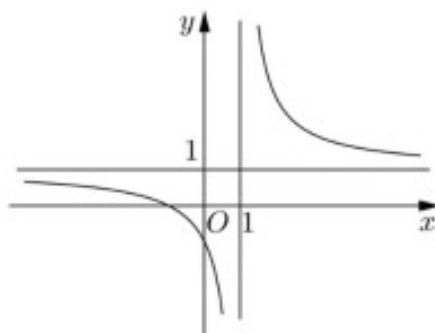


C. Hình 3.



D. Hình 4.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên



Phương trình trục đối xứng của đồ thị là

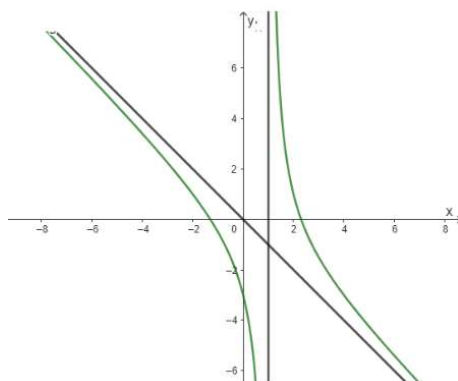
A. $x = 1$.

B. $y = 1$.

C. $y = x$.

D. $y = -x$.

Câu 11: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y = \frac{x^2 + 3x - 2}{x + 1}$.

B. $y = \frac{x + 1}{x + 1}$.

C. $y = \frac{-x^2 + x + 3}{x - 1}$.

D. $y = x^3 - 3x - 1$.

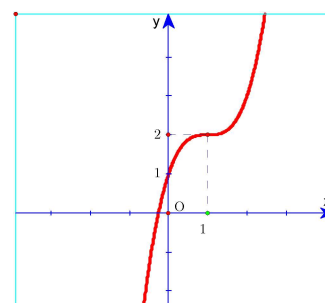
Câu 12: Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = x^3 - 3x + 1$.

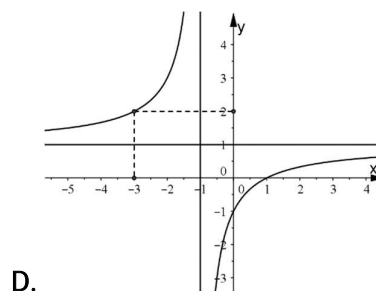
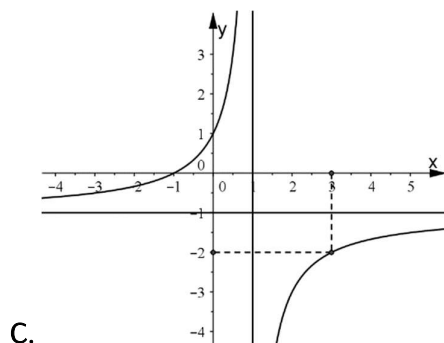
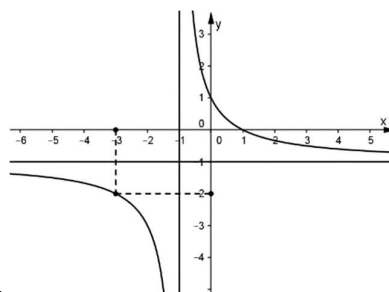
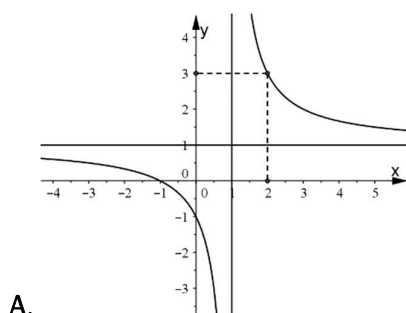
B. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.

C. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$.

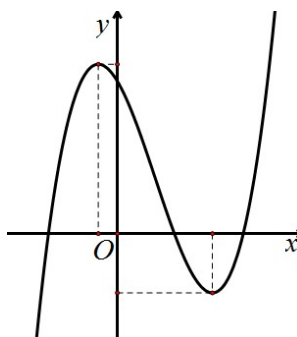
D. $y = -x^3 - 3x^2 - 1$.



Câu 13: Tìm đồ thị của hàm số $y = \frac{1-x}{x+1}$ trong các đồ thị hàm số dưới đây:



Câu 14: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Chọn khẳng định đúng về dấu của a, b, c, d ?



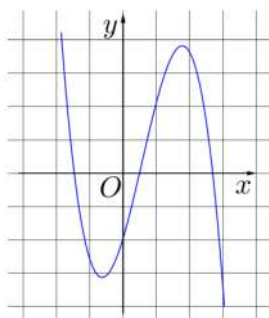
A. $a > 0, b > 0, d > 0, c > 0$.

C. $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

B. $a > 0, c > 0 > b, d < 0$.

D. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

Câu 15: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



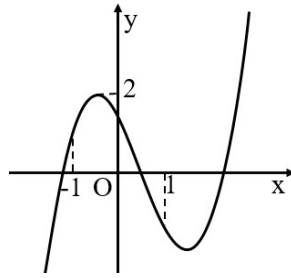
A. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

C. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

B. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.

D. $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.

Câu 16: Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Khẳng định nào là đúng?

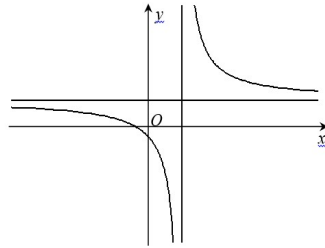
A. $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$.

B. $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

C. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

D. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

Câu 17: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như sau.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

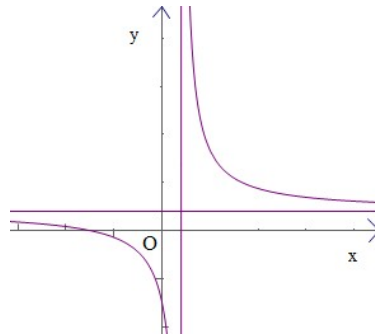
A. $ac > 0; bd > 0$.

B. $ab < 0; cd < 0$.

C. $bc > 0; ad < 0$.

D. $ad > 0; bd < 0$.

Câu 18: Cho hàm số $y = \frac{(a-1)x+b}{(c-1)x+d}$, $d < 0$ có đồ thị như hình trên. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



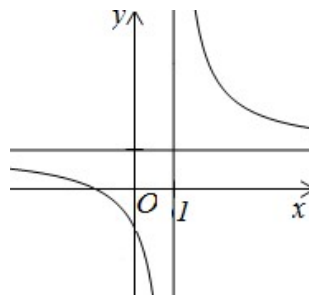
A. $a > 1, b > 0, c < 1$.

B. $a > 1, b < 0, c > 1$.

C. $a < 1, b > 0, c < 1$.

D. $a > 1, b > 0, c > 1$.

Câu 19: Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

B. $y' > 0, \forall x \neq 1$.

C. $y' < 0, \forall x \neq 1$.

D. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+1}{bx+c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	
$f(x)$			$+\infty$		1
	1			$-\infty$	

Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

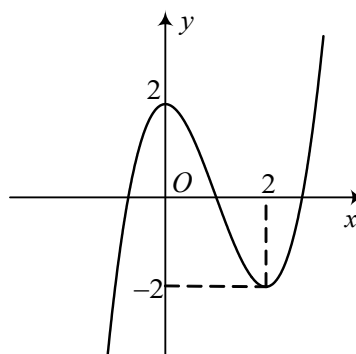
Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$	+		-	0		0	-
$f(x)$	$+\infty$			-1		2	$-\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là

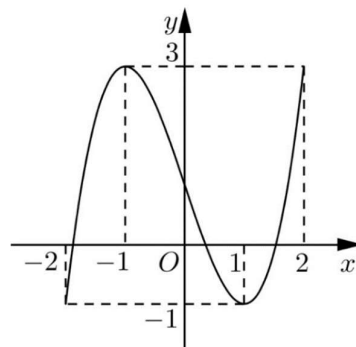
- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 22: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$). Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) + 4 = 0$ là



- A. 2. B. 0. C. 1 D. 3

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-2; 2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 4 = 0$ trên đoạn $[-2; 2]$ là



- A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 24: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			2		-2		$+\infty$
	$-\infty$						

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) + 3 = 0$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 25: Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = x^3 + 6x^2 + 2x - 1$ có tọa độ là

- A. $(2, 35)$. B. $(0; -1)$. C. $(-2; 11)$. D. $(-6, -13)$.

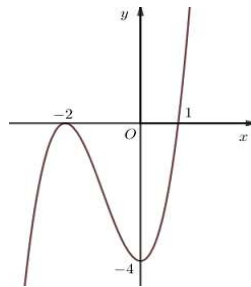
Câu 26: Biết rằng đường thẳng $y = -2x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 2$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0

- A. $y_0 = 4$. B. $y_0 = 0$. C. $y_0 = 2$. D. $y_0 = -1$.

Câu 27: Biết rằng đường thẳng $y = 4x + 5$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2x + 1$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0 .

- A. $y_0 = 10$. B. $y_0 = 13$. C. $y_0 = 11$. D. $y_0 = 12$.

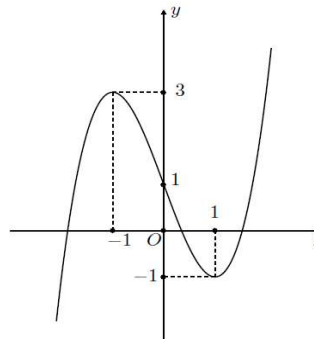
Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Tìm số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(x) = 1 + m^2$.

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như sau.



Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2f(x) + 3m - 3 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

- A. $-1 < m < \frac{5}{3}$. B. $-\frac{5}{3} < m < 1$. C. $-\frac{5}{3} \leq m \leq 1$. D. $-1 \leq m \leq \frac{5}{3}$.

Câu 30: Tất cả giá trị của m sao cho phương trình $x^3 - 3x = 2m$ có ba nghiệm phân biệt là

- A. $-1 < m < 1$. B. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases}$. C. $-2 < m < 2$. D. $m < 1$.

Câu 31: Tìm các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $-x^3 - 3x^2 + 2 = m$ có ba nghiệm thực phân biệt?

- A. $m \in (-2; 1)$. B. $m \in [-2; 2]$. C. $m \in (-2; 2)$. D. $m \in \emptyset$.

Câu 32: Tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3 - 12x + m - 2 = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt.

- A. $-14 < m < 18$. B. $-4 < m < 4$. C. $-16 < m < 16$. D. $-18 < m < 14$.

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên các khoảng $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
y'		$+$	0	$+$	0	$-$
y			$+\infty$	0		$-\infty$

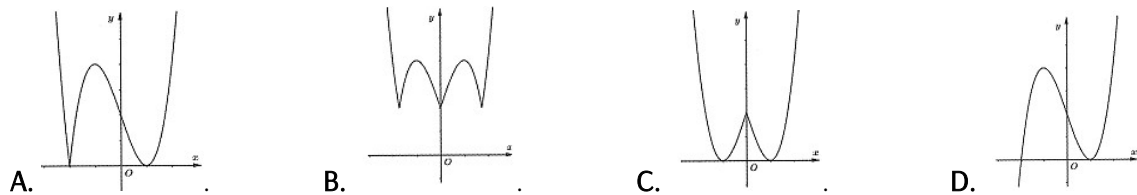
Tìm tất cả các giá trị thực của m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt.

- A. $-4 < m < 0$. B. $-4 < m \leq 0$. C. $-7 < m < 0$. D. $-4 \leq m < 0$.

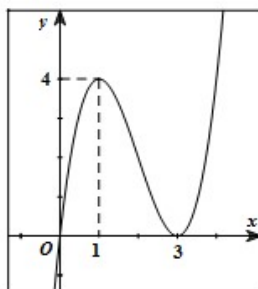
Câu 34: Cho hàm số $y = \frac{2x+3}{x+3}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = 2x - 3$. Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm A và B . Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .

- A. $I\left(-\frac{1}{4}; -\frac{11}{4}\right)$. B. $I\left(-\frac{1}{4}; -\frac{7}{2}\right)$. C. $I\left(-\frac{1}{4}; -\frac{13}{4}\right)$. D. $I\left(-\frac{1}{8}; -\frac{13}{4}\right)$.

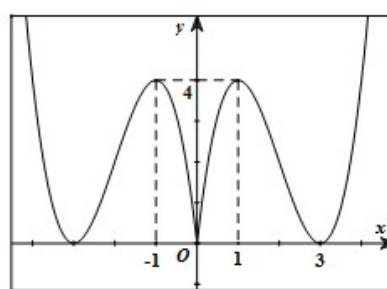
Câu 35: Hàm số $y = |x^3 - 3x + 2|$ có đồ thị nào dưới đây:



Câu 36: Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ có đồ thị như Hình 1. Khi đó đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

- A. $y = |x^3 - 6x^2 + 9x|$. B. $y = |x|^3 - 6x^2 + 9|x|$.
 C. $y = -x^3 + 6x^2 - 9x$. D. $y = |x|^3 + 6|x|^2 + 9|x|$.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

PHẦN 1: CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU LỰA CHỌN

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$. Phát biểu nào dưới đây là đúng?

- A. Nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi x thuộc $(a;b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$.
- B. Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc $(a;b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$.
- C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ khi và chỉ khi $f'(x) \geq 0$ với mọi x thuộc $(a;b)$.
- D. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ khi và chỉ khi $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc $(a;b)$.

Câu 2: Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = -x^3 + 3x^2 - 9x$.
- B. $y = -x^3 + x + 1$.
- C. $y = \frac{x-1}{x-2}$.
- D. $y = 2x^2 + 3x + 2$.

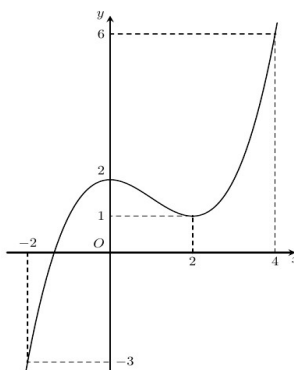
Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					
	$-\infty$	3	-2	$+\infty$	

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

- A. $x = -2$.
- B. $x = 3$.
- C. $x = 1$.
- D. $x = 2$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ sau:



Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;4]$ là

- A. -3 .
- B. 2 .
- C. 1 .
- D. -2 .

Câu 5: Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x + 2}$ là

- A. $y = -2$.
- B. $y = 1$.
- C. $y = x + 2$.
- D. $y = x$.

Câu 6: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.
- D. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$.

Số tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

- A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

Câu 8: Hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x - 2$ nghịch biến trên khoảng nào?

- A. $(5; +\infty)$. B. $(2; 3)$. C. $(-\infty; 1)$. D. $(1; 5)$.

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$, giá trị cực tiểu là $y = 2$.
 B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 5$, giá trị cực tiểu là $y = 6$.
 C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$, giá trị cực tiểu là $y = 6$.
 D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 5$, giá trị cực tiểu là $y = 2$.

Câu 10: Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có hai điểm cực trị A, B. Khi đó phương trình đường thẳng AB là:

- A. $y = x - 2$. B. $y = 2x - 1$. C. $y = -2x + 1$. D. $y = -x + 2$.

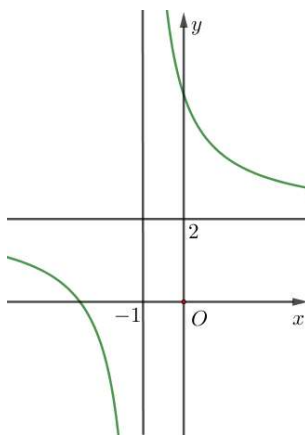
Câu 11: Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^3 + 3x^2 - 3}{x^2 - 1}$ là đường thẳng có phương trình

- A. $y = x - 2$. B. $y = 2x - 1$. C. $y = 2x + 3$. D. $y = -x + 2$.

Câu 12: Gọi M, n lần lượt là giá trị cực đại, giá trị cực tiểu của hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$. Khi đó giá trị của biểu thức $M^2 - 2n$ bằng:

- A. 8. B. 7. C. 9. D. 6.

Câu 13: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

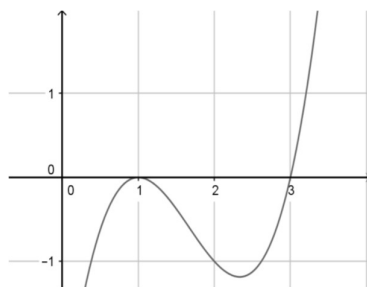


- A. $y = \frac{2x + 5}{x + 1}$. B. $y = x^3 + 3x^2 + 1$. C. $y = \frac{2x + 1}{x + 1}$. D. $y = x^4 - x^2 + 1$.

Câu 14: Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = \frac{2x - 1}{x + 3}$. B. $y = x^3 + 2x$. C. $y = 2x^2 + 1$. D. $y = 2x^4 + x^2$.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



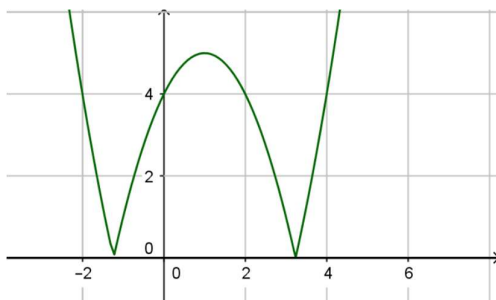
Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.
- B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực tiểu.
- C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-\infty; 1)$.
- D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

Câu 16: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Hàm số $y = f(x)$ có mấy cực trị?

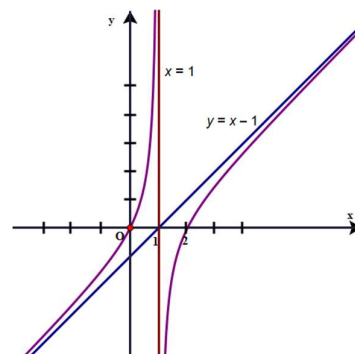
- A. 4.
- B. 1.
- C. 3.
- D. 2.

Câu 18: Đồ thị hàm số nào sau đây không có tiệm cận đứng?

- A. $y = \frac{1}{x^2 + 2x + 1}$.
- B. $y = \frac{\sqrt{x-3}}{x+2}$.
- C. $y = -\frac{1}{x}$.
- D. $y = \frac{3x-1}{x^2-1}$.

Câu 19: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- a) $y = \frac{x^2 - 2x}{x - 1} = x - 1 - \frac{1}{x - 1}, \forall x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
- b) Tiệm cận xiên của đồ thị là $y = x - 1$.
- c) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1), (1; +\infty)$.
- d) Hàm số đã cho có đồ thị như hình bên.



Câu 20: Tìm phương trình tất cả các tiệm cận của đồ thị hàm số: $y = \frac{3x-1}{x-2}$.

- A. $x = -2$ và $y = 3$. B. $x = 3$ và $y = 2$. C. $x = 2$ và $y = -\frac{1}{2}$. D. $x = 2$ và $y = 3$.

Câu 21: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là:

- A. $\min_{(1;+\infty)} y = -1$. B. $\min_{(1;+\infty)} y = 3$. C. $\min_{(1;+\infty)} y = 5$. D. $\min_{(2;+\infty)} y = \frac{-7}{3}$.

Câu 22: Một vật chuyển động theo quy luật $S = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$, với t là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng

- A. 400. B. 216. C. 30. D. 54.

Câu 23: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 12x^2 - 1$ trên đoạn $[0; 9]$ bằng

- A. -36. B. -1. C. -37. D. -28.

Câu 24: Hàm số $y = \sin x + 1$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ bằng:

- A. 2. B. $\frac{\pi}{2}$. C. 0. D. 1.

Câu 25: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x \cdot e^{-2x}$ trên đoạn $[0; 1]$ bằng

- A. $\max_{[0;1]} y = 1$. B. $\max_{[0;1]} f(x) = \frac{1}{e^2}$. C. $\max_{[0;1]} f(x) = 0$. D. $\max_{[0;1]} f(x) = \frac{1}{2e}$.

Câu 26: Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^2 - \ln(1 - 2x)$ trên đoạn $[-2; 0]$. Khi đó $M + m$ bằng

- A. $\frac{17}{4} - \ln 10$. B. $\frac{17}{4} - \ln 7$. C. $\frac{17}{4} - \ln \frac{5}{2} \frac{28}{27}$. D. $\frac{15}{4} - \ln 102$.

Câu 27: Trong số các hình chữ nhật có cùng chu vi 16 cm, hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng:

- A. 64 cm². B. 4 cm². C. 16 cm². D. 8 cm².

Câu 28: Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 45t^2 - t^3$, $t = 0, 1, 2, \dots, 25$. Nếu coi $f(t)$ là hàm số xác định trên đoạn $[0; 25]$ thì đạo hàm $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t . Xác định ngày mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất?

- A. Ngày thứ 19. B. Ngày thứ 5. C. Ngày thứ 16. D. Ngày thứ 15.

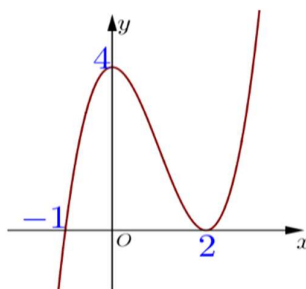
Câu 29: Hàm số nào dưới đây không có cực trị?

- A. $y = |x|$. B. $y = x^4$. C. $y = -x^3 + x$. D. $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

Câu 30: Giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^2 \ln x$ là

- A. $\frac{1}{e}$. B. $-\frac{1}{e}$. C. $-\frac{1}{2e}$. D. $\frac{1}{2e}$.

Câu 31: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình sau



Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; 2)$. B. $(-\infty; -1)$. C. $(2; 4)$. D. $(-1; 2)$.

Câu 32: Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là

- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.

Câu 33: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = (x-2)^2 \cdot e^x$ trên đoạn $[1; 3]$ là

- A. 0. B. e^3 . C. e^4 . D. e.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
 B. Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
 C. Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
 D. Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 35: Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$. Khi đó $2a + b$ bằng

- A. -2. B. 2. C. 0. D. 4.

Câu 36: Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{-x - 1}$ là

- A. $y = -1$. B. $y = -x + 1$. C. $y = -x - 1$. D. $y = x$.

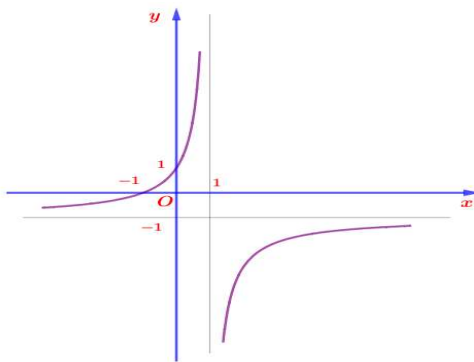
Câu 37: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	+
$f(x)$	1	7	5	$+\infty$	-1

Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.
 B. Đường thẳng $y = -1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.
 C. Đường thẳng $x = 3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.
 D. Đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 38: Đồ thị nào sau đây có hình dạng như hình vẽ bên.



A. $y = \frac{-x-2}{x-1}$.

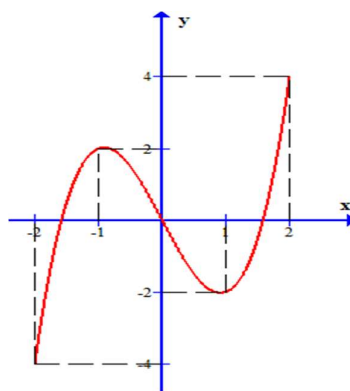
B. $y = \frac{-x-1}{x-1}$.

C. $y = \frac{-x+1}{x+1}$.

D. $y = \frac{-x+2}{x-1}$.

Câu 39: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.

Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?



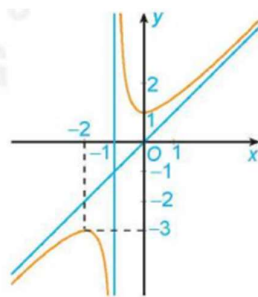
A. $x = -2$.

B. $x = -1$.

C. $x = 1$.

D. $x = 2$.

Câu 40: Đồ thị trong Hình 1.38 là đồ thị của hàm số:



Hình 1.38

A. $y = x - \frac{1}{x+1}$.

B. $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

C. $y = \frac{x^2-x+1}{x+1}$.

D. $y = \frac{x^2+x+1}{x+1}$.

Câu 41: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 3x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Câu 42: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (2-x)(x-3), \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

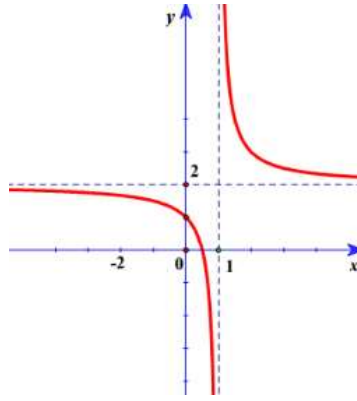
A. $(2; 3)$.

B. $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

C. $(-\infty; 2)$.

D. $(2; 6)$.

Câu 43: Xác định a, b, c để hàm số $y = \frac{ax-1}{bx+c}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn đáp án đúng?



- A. $a=2, b=2, c=-1$. B. $a=2, b=1, c=1$. C. $a=2, b=-1, c=1$. D. $a=2, b=1, c=-1$.

Câu 44: Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 961m^2 , người ta muốn mở rộng thêm 4 phần đất sao cho tạo thành hình tròn ngoại tiếp mảnh vườn. Biết tâm hình tròn trùng với tâm của hình chữ nhật. Tìm diện tích nhỏ nhất $S_{\min}$ của 4 phần đất mở rộng.

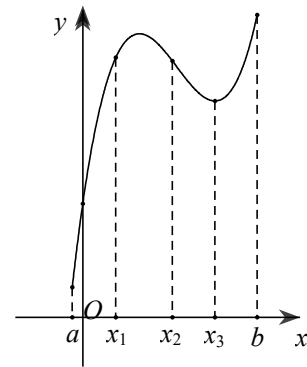
- A. $S_{\min} = 480,5\pi - 961(\text{m}^2)$. B. $S_{\min} = 1922\pi - 961(\text{m}^2)$.
C. $S_{\min} = 1892\pi - 961(\text{m}^2)$. D. $S_{\min} = 961\pi - 961(\text{m}^2)$.

PHẦN 2: CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 45: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong khoảng $(a; b)$ và có đồ thị như hình bên dưới.

Các mệnh đề sau **đúng** hay **sai** ?

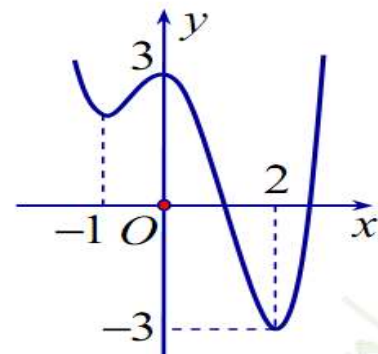
- a) $f(x) \geq 0, \forall x \in (a; b)$
b) $f'(x_2) > 0$.
c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1; x_2)$
d) Trên khoảng $(a; b)$ hàm số có hai cực trị.



Câu 46: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Các mệnh đề sau **đúng** hay **sai** ?

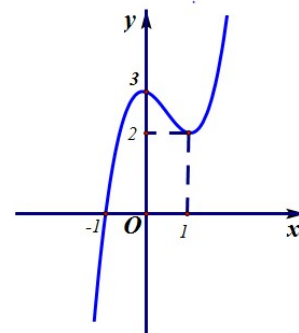
- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.
b) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; 3)$
c) Đạo hàm $f'(x) > 0, \forall x \in (3; +\infty)$.
d) Giá trị cực đại của hàm số là $y_{\text{CD}} = -3$.



Câu 47: Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Các mệnh đề sau **đúng** hay **sai**?

- a) Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.
- b) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.
- c) Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.
- d) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-1; +\infty)$.

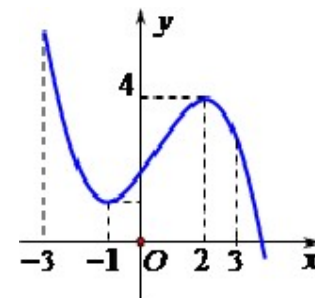


Câu 48: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-3; 3]$ và có đồ thị là đường cong ở hình vẽ bên.

Mệnh đề nào dưới đây đúng trên đoạn $[-3; 3]$.

Các mệnh đề sau **đúng** hay **sai**?

- a) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2; 3)$.
- b) Điểm cực đại của đồ thị là $(2; 4)$.
- c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(-3; 2)$ bằng -1 .
- d) Không tồn tại giá trị lớn nhất của hàm số trên $(0; 3)$.



Câu 49: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) và các $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x + 2) = 0$. Các

mệnh đề sau đúng hay sai?

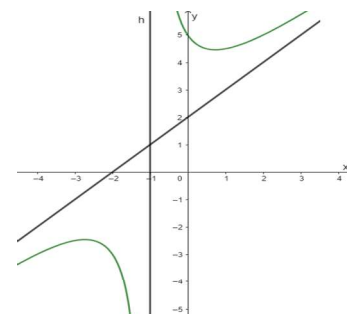
- a) Đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của (C) .
- b) Đường thẳng $y = 3$ là tiệm cận ngang của (C) .
- c) Đường thẳng $y = -x + 2$ là tiệm cận xiên của (C) .
- d) Đường thẳng $y = x - 2$ là tiệm cận xiên của (C) .

Câu 50: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$. có đồ thị (C) . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- b) Đồ thị (C) nhận $x = -2$ làm tiệm cận đứng.
- c) Đường thẳng $y = 2$ không phải là tiệm cận ngang của đồ thị.
- d) Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y = x + 2$ làm tiệm cận xiên.

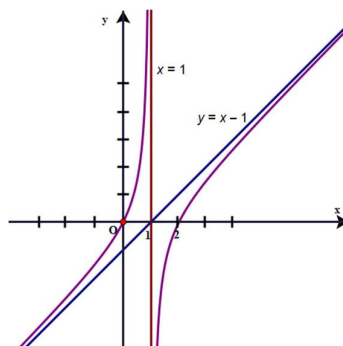
Câu 51: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- a) $y = x + 2 + \frac{1}{x+1}, \forall x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.
- b) Tiệm cận xiên của đồ thị là $y = x - 2$.
- c) Tâm đối xứng của đồ thị là $I(-1; 2)$.
- d) Hàm số đã cho có đồ thị như Hình vẽ.



Câu 52: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$ Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- a) $y = \frac{x^2 - 2x}{x - 1} = x - 1 - \frac{1}{x - 1}, \forall x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
 b) Tiệm cận xiên của đồ thị là $y = x - 1$.
 c) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1), (1; +\infty)$.
 d) Hàm số đã cho có đồ thị như Hình vẽ.



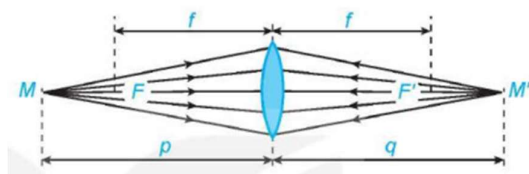
PHẦN 3: CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 53: Giá trị cực đại của hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ là bao nhiêu?

Câu 54: Tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3x - 2}{x + 1}$ là $x = a; y = b$. Giá trị $a + b$ bằng bao nhiêu?

Câu 55: Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{2x - 1}$ là $y = ax + b$. Giá trị $a + b$ bằng bao nhiêu?

Câu 56: Xét một thấu kính hội tụ có tiêu cự f . Khoảng cách p từ vật đến thấu kính liên hệ với khoảng cách q từ ảnh đến thấu kính bởi hệ thức: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$.



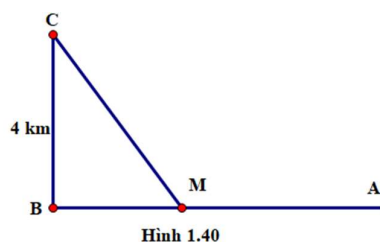
- a) Viết công thức tính $q = g(p)$ như một hàm số của biến $p \in (f; +\infty)$.
 b) Tính các giới hạn $\lim_{p \rightarrow +\infty} g(p); \lim_{p \rightarrow f^+} g(p)$ và giải thích ý nghĩa các kết quả này.
 c) Lập bảng biến thiên của hàm số $q = g(p)$ trên khoảng $(f; +\infty)$.

Câu 57: Dân số của một quốc gia sau t (năm) kể từ năm 2023 được ước tính bởi công thức:

$$N(t) = 100e^{0,012t} \quad (N(t) \text{ được tính bằng triệu người } 0 \leq t \leq 50).$$

- a) Ước tính dân số của quốc gia này vào các năm 2030 và 2035 (kết quả tính bằng triệu người, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba).
 b) Xem $N(t)$ là hàm số của biến số t xác định trên đoạn $[0; 50]$. Xét chiều biến thiên của hàm số $N(t)$ trên đoạn $[0; 50]$.
 c) Đạo hàm của hàm số $N(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của quốc gia đó (tính bằng triệu người/năm). Vào năm nào tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/năm?

Câu 58: Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo ở C như Hình 1.40. Khoảng cách từ C đến B là 4km. Bờ biển chạy thẳng từ A đến B với khoảng cách là 10km. Tổng chi phí lắp đặt cho 1 km dây điện trên biển là 50 triệu đồng, còn trên đất liền là 30 triệu đồng. Xác định vị trí điểm M trên đoạn AB (điểm nối dây từ đất liền ra đảo) để tổng chi phí lắp đặt là nhỏ nhất.



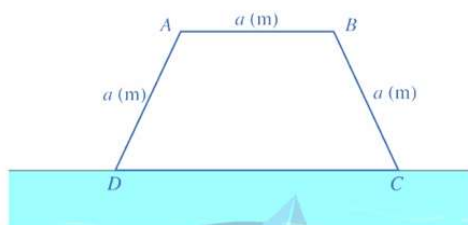
Câu 59: Một trang sách có dạng hình chữ nhật với diện tích là 384 cm^2 . Sau khi để lề trên và lề dưới đều là 3 cm , để lề trái và lề phải đều là 2 cm . Phần còn lại của trang sách được in chữ. Kích thước tối ưu của trang sách là bao nhiêu để phần in chữ trên trang sách có diện tích lớn nhất?

Câu 60: Một người nông dân có $15\,000\,000$ đồng để làm một hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông bao quanh hai khu đất trồng rau có dạng hai hình chữ nhật bằng nhau (Hình vẽ). Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là $60\,000$ đồng/mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là $50\,000$ đồng/mét, mặt giáp với bờ sông không phải rào. Tìm diện tích lớn nhất của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào.

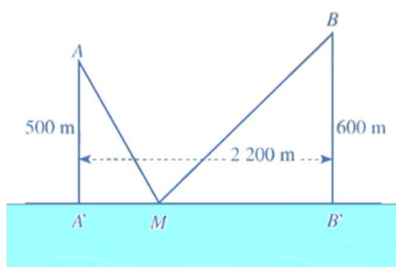


Câu 61: Một công ty kinh doanh bất động sản có 20 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng/1 tháng thì tất cả các căn hộ đều có người thuê. Nhưng cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 200 nghìn đồng/1 tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Hỏi công ty nên cho thuê mỗi căn hộ bao nhiêu tiền một tháng để tổng số tiền thu được là lớn nhất?

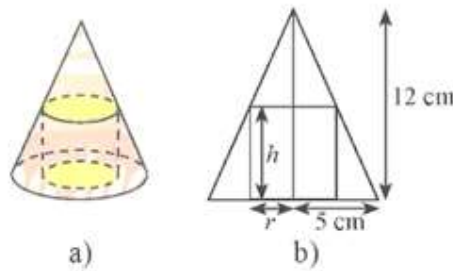
Câu 62: Một bác nông dân có ba tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài $a \text{ (m)}$ và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân ABCD như Hình 36 (bờ sông là đường thẳng CD không phải rào). Hỏi bác đó có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu mét vuông?



Câu 63: Có hai xã cùng ở một bên bờ sông. Người ta đo được khoảng cách từ trung tâm A, B của hai xã đó đến bờ sông lần lượt là $AA' = 500 \text{ m}$, $BB' = 600 \text{ m}$ và $A'B' = 2\,200 \text{ m}$ (Hình vẽ). Các kĩ sư muốn xây một trạm cung cấp nước sạch nằm bên bờ sông cho người dân hai xã. Để tiết kiệm chi phí, các kĩ sư cần phải chọn vị trí M của trạm cung cấp nước sạch đó trên đoạn $A'B'$ sao cho tổng khoảng cách từ hai vị trí A, B đến vị trí M là nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách đó.



Câu 64: Cho một hình trụ nội tiếp trong hình nón có chiều cao bằng 12cm và bán kính đáy bằng 5 cm (Hình 4a). Người ta cắt hình nón, trụ này theo mặt phẳng chứa đường thẳng nối đỉnh và tâm hình tròn đáy của hình nón thì thu được một hình phẳng như hình dưới.



a) Chứng minh rằng công thức tính bán kính r của đáy hình trụ theo chiều cao h của nó là: $r = \frac{5(12-h)}{12}$.

b) Chứng minh biểu thức sau biểu thị thể tích khối trụ theo h là $V(h) = \frac{25\pi h(12-h)^2}{144}$.

c) Tìm h để khối trụ có thể tích lớn nhất.

Câu 65: Trong một nhà hàng, mỗi tuần để chế biến x phần ăn (x lấy giá trị trong khoảng từ 30 đến 120) thì chi phí trung bình (đơn vị: nghìn đồng) của một phần ăn được cho bởi công thức:

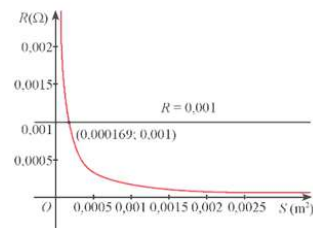
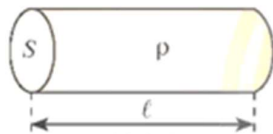
$$\bar{C}(x) = 2x - 230 + \frac{7200}{x}$$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $\bar{C}(x) = 2x - 230 + \frac{7200}{x}$ trên $[30; 120]$.

b) Từ kết quả trên, tìm số phần ăn sao cho chi phí trung bình của một phần ăn là thấp nhất.

Câu 66: Điện trở $R(\Omega)$ của một đoạn dây dẫn hình trụ được làm từ vật liệu có điện trở suất $\rho(\Omega m)$, chiều dài

$\ell(m)$ và tiết diện $S(m^2)$ được cho bởi công thức $R = \rho \frac{\ell}{S}$.



Giả sử người ta khảo sát sự biến thiên của điện trở R theo tiết diện S (ở nhiệt độ $20^\circ C$) của một sợi dây điện dài 10 m làm từ kim loại có điện trở suất ρ và thu được đồ thị hàm số như hình trên.

a) Có nhận xét gì về sự biến thiên của điện trở R theo tiết diện S ?

b) Từ đồ thị, hãy giải thích ý nghĩa của tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số với đường thẳng $R = 0,001$.

c) Tính điện trở suất ρ của dây điện. Từ đó, hãy cho biết dây điện được làm bằng kim loại nào trong số các kim loại được cho ở bảng sau:

Kim loại	Điện trở suất ở $20^\circ C$ (Ωm)
Bạc	$1,62 \cdot 10^{-8}$
Đồng	$1,69 \cdot 10^{-8}$
Vàng	$2,44 \cdot 10^{-8}$
Nhôm	$2,75 \cdot 10^{-8}$
Sắt	$9,68 \cdot 10^{-8}$