

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 01 trang)

Câu 1: (2.0 điểm) Tính các giới hạn sau:

a/ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{6x-2} - \sqrt{3x+1}}{x-1}$

b/ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x)$

Câu 2: (1.0 điểm)

Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{2x^2 - x - 6} & \text{khi } x > 2 \\ mx + 1 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 2$.

Câu 3: (2.0 điểm)

Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a/ $y = x^4 - 3x^2 + 4$

b/ $y = (2\sin x + 3\cos x)^5$

c/ $y = \frac{\sqrt{x^2 + 4x - 1}}{2x + 1}$

Câu 4: (0.5 điểm)

Chứng minh rằng phương trình $m(x - 2019)^{2020} \cdot (x - 2020)^{2019} + 2x - 4039 = 0$ luôn có nghiệm với mọi tham số m .

Câu 5: (1.0 điểm)

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $(d): y = \frac{1}{3}x + 2020$.

Câu 6: (3.5 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O với độ dài cạnh là $2a$. Cạnh bên SA vuông góc đáy có độ dài $SA = 3a$.

a/ Chứng minh rằng: $BC \perp (SAB)$ và $(SBD) \perp (SAC)$.

b/ Xác định và tính góc giữa SO và mặt đáy $(ABCD)$.

c/ Xác định và tính khoảng cách từ điểm B đến (SCD) .

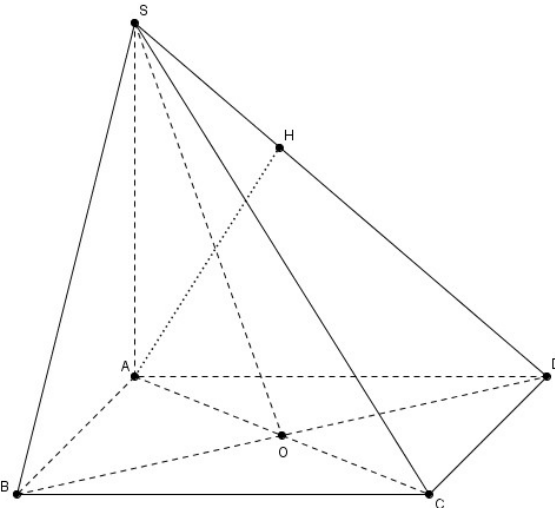
----- ❧ HẾT ❧ -----

Học sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên học sinh:

	NỘI DUNG TRẢ LỜI	ĐIỂM TỪNG PHẦN
Câu 1: (2.0 điểm) Tính các giới hạn sau:		
a/ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{6x-2} - \sqrt{3x+1}}{x-1}$		
a/ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{6x-2} - \sqrt{3x+1}}{x-1}$		0,25
$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x-2 - (3x+1)}{(x-1)(\sqrt{6x-2} + \sqrt{3x+1})}$		0,25
$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-3}{(x-1)(\sqrt{6x-2} + \sqrt{3x+1})}$		0,25
$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)}{(x-1)(\sqrt{6x-2} + \sqrt{3x+1})}$		0,25
$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{\sqrt{6x-2} + \sqrt{3x+1}} = \frac{3}{2+2} = \frac{3}{4}$		
b/ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x)$		
$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 4x + 5 - x^2}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x}$		0,25
$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(4 + \frac{5}{x^2} \right)}{-x \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} - x}$		0,25
$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + \frac{5}{x^2}}{-\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} - 1}$		0,25
$= \frac{4}{-2} = -2$		0,25
Câu 2: (1.0 điểm) Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{2x^2-x-6} & \text{khi } x > 2 \\ mx+1 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 2$.		
Ta có: $f(2) = 2m+1$		0,25
$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (mx+1) = 2m+1$		0,25

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 8}{2x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)(2x+3)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 2x + 4}{2x+3} = \frac{12}{7}$ Hàm số liên tục tại $x_0 = 2$ nên $2m+1 = \frac{12}{7} \Leftrightarrow m = \frac{5}{14}$.	0,25 0,25
Câu 3: (2.0 điểm) Tính đạo hàm của các hàm số sau:	
a/ $y = x^4 - 3x^2 + 4$ b/ $y = (2\sin x + 3\cos x)^5$ c/ $y = \frac{\sqrt{x^2 + 4x - 1}}{2x + 1}$	
a/ $y = x^4 - 3x^2 + 4$ $\Rightarrow y' = 4x^3 - 6x$	0.25 0.25
b/ $y = (2\sin x + 3\cos x)^5$ $\Rightarrow y' = 5(2\sin x + 3\cos x)^4 (2\sin x + 3\cos x)'$ $\Rightarrow y' = 5(2\sin x + 3\cos x)^4 (2\cos x - 3\sin x)$	0,25 0,25 0,25
c/ $y = \frac{\sqrt{x^2 + 4x - 1}}{2x + 1}$ $\Rightarrow y' = \frac{(\sqrt{x^2 + 4x - 1})' (2x + 1) - (2x + 1)' \sqrt{x^2 + 4x - 1}}{(2x + 1)^2}$ $\Rightarrow y' = \frac{\frac{2x + 4}{2\sqrt{x^2 + 4x - 1}} (2x + 1) - 2\sqrt{x^2 + 4x - 1}}{(2x + 1)^2}$ $\Rightarrow y' = \frac{(x + 2)(2x + 1) - 2(x^2 + 4x - 1)}{(2x + 1)^2 \sqrt{x^2 + 4x - 1}}$ $\Rightarrow y' = \frac{2x^2 + 5x + 2 - 2x^2 - 8x + 2}{(2x + 1)^2 \sqrt{x^2 + 4x - 1}} = \frac{-3x + 4}{(2x + 1)^2 \sqrt{x^2 + 4x - 1}}$	0.25 0.25 0.25
Câu 4: (0.5 điểm) Chứng minh rằng phương trình $m(x - 2019)^{2020} \cdot (x - 2020)^{2019} + 2x - 4039 = 0$ luôn có nghiệm với mọi tham số m .	
Xét $f(x) = m(x - 2019)^{2020} \cdot (x - 2020)^{2019} + 2x - 4039$ TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $\begin{cases} f(2019) = -1 \\ f(2020) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(2019) \cdot f(2020) = -1 < 0$ Vì hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $[2019; 2020]$	0,25

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm thuộc (2019; 2020). Cuối cùng phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm với mọi m.	0,25
Câu 5: (1.0 điểm) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $(d): y = \frac{1}{3}x + 2020$.	
Đạo hàm $y' = 3x^2 - 6x$ Vì tiếp tuyến vuông góc với $(d): y = \frac{1}{3}x + 2020$ nên $k_{tt} \cdot k_{(d)} = -1 \Leftrightarrow y'(x_0) \cdot \frac{1}{3} = -1 \Leftrightarrow y'(x_0) = -3 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = -3 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 + 3 = 0$ $\Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 0$ Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $M(1; 0)$ $(\Delta): y = y'(1)(x - 1) + 0$ $\Leftrightarrow (\Delta): y = -3x + 3$	0,25 0,25 0,25
Câu 6: (3.5 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O với độ dài cạnh là $2a$. Cạnh bên SA vuông góc đáy và độ dài $SA = 3a$. a/ Chứng minh rằng: $BC \perp (SAB)$ và $(SBD) \perp (SAC)$. b/ Xác định và tính góc giữa SO và mặt đáy $(ABCD)$. c/ Xác định và tính khoảng cách từ điểm B đến (SCD).	
	
a/ Chứng minh rằng: $BC \perp (SAB)$ và $(SBD) \perp (SAC)$. Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp AB \end{cases}$ $\Rightarrow BC \perp (SAB)$	0,25 0,25 0,25

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases}$ $\Rightarrow BD \perp (SAC)$ Ma' $BD \subset (SBD)$ $\Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$	0,25 0,25 0,25
b/ Xác định và tính góc giữa SO và mặt đáy $(ABCD)$. Ta có: hình chiếu vuông góc của SO lên $(ABCD)$ là AO. $\Rightarrow [SO; (ABCD)] = \angle SOA$ Xét tam giác SAO vuông tại A có $\tan \angle SOA = \frac{SA}{AO} = \frac{3a}{a\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow \angle SOA \approx 64,76^\circ$	0,25 0,25 0,25 0,25
c/ Xác định và tính khoảng cách từ điểm B đến (SCD). Vì $AB \parallel (SCD)$ suy ra $d[B; (SCD)] = d[A; (SCD)]$. Trong mp($SAD$), kẻ $AH \perp SD$ tại H. Khi đó $\begin{cases} AH \perp SD \\ AH \perp CD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow AH = d[A; (SCD)]$ Xét tam giác SAD vuông tại A có $AH \cdot SD = SA \cdot AD \Leftrightarrow AH = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{3a \cdot 2a}{\sqrt{(3a)^2 + (2a)^2}} = \frac{6\sqrt{13}}{13}a$ Vậy $d[B; (SCD)] = \frac{6\sqrt{13}}{13}a$	0,25 0,25 0,25 0,25

HẾT