

Câu 1 (2,0 điểm). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - y - 1} = -x^4 - 2x^3 + 2y^2 + 12y + 44 \\ \sqrt{x - 1} - \sqrt{y + 2} + x^2 - y^2 - 2x - 4y - 3 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 2 (3,0 điểm). Cho dãy số thực (u_n) xác định như sau: $u_1 = 2, u_n = \frac{n}{3^n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3^k}{k}, \forall n \geq 2$.

Chứng minh $u_{n+1} = \frac{n+1}{3n}(1 + u_n), \forall n \geq 2$ và tìm $\lim u_n$.

Câu 3 (2,0 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b)) \text{ với mọi } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Câu 4 (3,0 điểm).

a) Cho a là số tự nhiên thỏa mãn $a + 1$ và $2a + 1$ đều là các số chính phương. Chứng minh a chia hết cho 24.

b) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (m, n) thỏa mãn $m^n = n^{3m}$.

Câu 5 (5,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Ba đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại H .

a) Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K , I là trung điểm của AH , L là trung điểm của AB , IF cắt CK tại T . Đường thẳng qua T và vuông góc với OH cắt BK tại S . Chứng minh $AL \cdot BH = AO \cdot BD$ và ba điểm S, I, E thẳng hàng.

b) Lấy hai điểm M, N trên cạnh BC sao cho $BM = CN$ (M nằm giữa B và N). Đường thẳng BE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BFM tại điểm thứ hai là P , đường thẳng CF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác CEN tại điểm thứ hai là Q . Chứng minh ba đường thẳng AO, PF, QE đồng quy.

Câu 6 (2,0 điểm). Cho đa giác lồi T có diện tích bằng 5400 (đvdt) và một đường thẳng l tùy ý. Chứng minh tồn tại một tam giác có các đỉnh nằm trên các cạnh của T và có một cạnh song song với l mà diện tích của nó không nhỏ hơn 2025 (đvdt).

Câu 7 (3,0 điểm). Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = xyz$ và biểu thức $P = \sqrt{\frac{x}{x + yz}} + \sqrt{\frac{y}{y + zx}} + \sqrt{\frac{z}{z + xy}}$. Tìm giá trị lớn nhất của P và tìm số thực m lớn nhất sao cho bất đẳng thức $P \geq m$ đúng với mọi x, y, z dương thỏa mãn điều kiện trên.

———— HẾT ————

*Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay; cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

*Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ ĐÁP ÁN

Môn: TOÁN

(Hướng dẫn chấm này gồm có 09 trang)

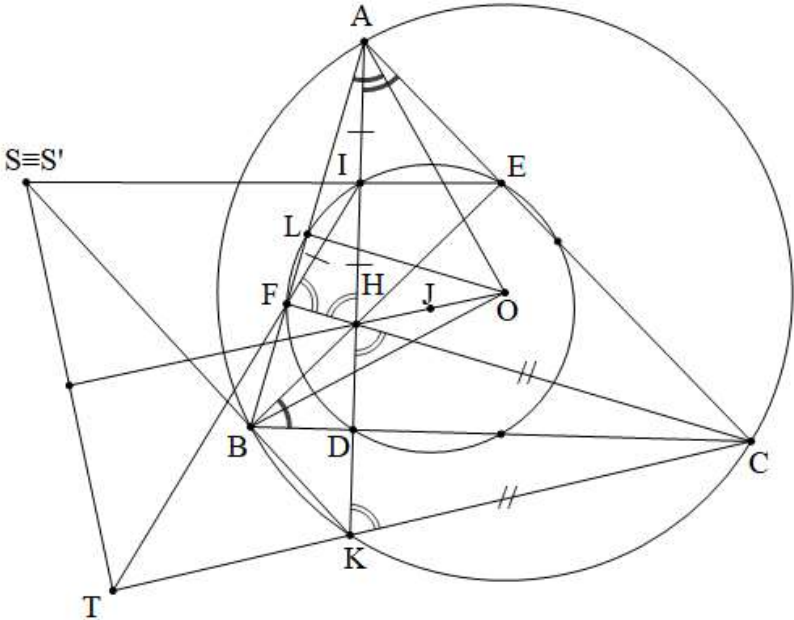
Câu	Nội dung	Điểm
	Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2 - y - 1} = -x^4 - 2x^3 + 2y^2 + 12y + 44 & (1) \\ \sqrt{x-1} - \sqrt{y+2} + x^2 - y^2 - 2x - 4y - 3 = 0 & (2) \end{cases}$	2,0
	ĐK: $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq -2 \\ x^2 - y - 1 \geq 0 \end{cases}.$	0,25
	+ Xét $\sqrt{x-1} + \sqrt{y+2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$ không thỏa mãn hệ.	0,25
	+ Xét $\sqrt{x-1} + \sqrt{y+2} \neq 0$, PT(2) $\Rightarrow \frac{x-1-(y+2)}{\sqrt{x-1} + \sqrt{y+2}} + x^2 - y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$ $\Leftrightarrow \frac{x-y-3}{\sqrt{x-1} + \sqrt{y+2}} + (x-y-3)(x+y+1) = 0$ $\Leftrightarrow (x-y-3) \left[\frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{y+2}} + x+y+1 \right] = 0$ $\Leftrightarrow y = x-3$ (do $\frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{y+2}} + x+y+1 > 0$)	0,5
Câu 1	Thay $y = x-3$ vào PT(1) ta được: $\sqrt{x^2 - (x-3) - 1} = -x^4 - 2x^3 + 2(x-3)^2 + 12(x-3) + 44$ $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 2} = -x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 26 \quad (3)$	0,25
	+ Hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 2}$ có $f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2 - x + 2}} > 0, \forall x \geq 1$ nên đồng biến trên $[1; +\infty)$. + Hàm số $g(x) = -x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 6$ có $g'(x) = -4x^3 - 6x^2 + 4x = -2x(2x-1)(x+2) < 0, \forall x \geq 1$ nên nghịch biến trên $[1; +\infty)$. PT(3) có nghiệm duy nhất $x = 2$. Với $x = 2 \Rightarrow y = -1$.	0,5
	Vậy hệ PT đã cho có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$.	0,25

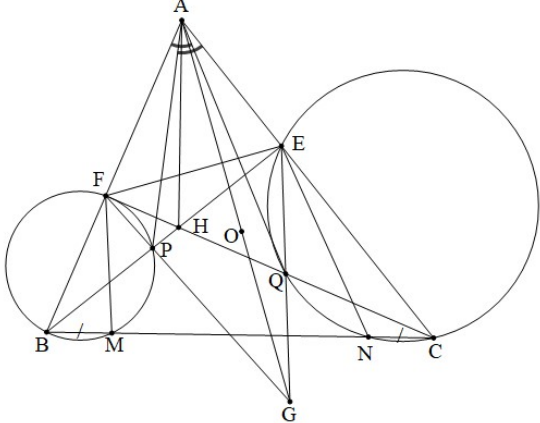
Câu	Nội dung	Điểm
Câu 2	Cho dãy số thực (u_n) xác định như sau: $u_1 = 2$; $u_n = \frac{n}{3^n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3^k}{k}$, $\forall n \geq 2$. Chứng minh $u_{n+1} = \frac{n+1}{3n}(1+u_n)$, $\forall n \geq 2$ và tìm $\lim u_n$.	3,0
	Nhận xét: $u_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.	0,25
	Ta có: $u_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}} \sum_{k=1}^n \frac{3^k}{k} = \frac{n+1}{3^{n+1}} \left(\frac{3^n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3^k}{k} \right) = \frac{n+1}{3n} + \frac{n+1}{3n} \cdot \frac{n}{3^n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3^k}{k}$	0,5
	$= \frac{n+1}{3n} + \frac{n+1}{3n} \cdot u_n = \frac{n+1}{3n}(1+u_n)$, với mọi $n \geq 2$.	0,25
	$u_{n+2} = \frac{n+2}{3(n+1)}(1+u_{n+1})$, với mọi $n \geq 2$.	0,25
	Khi đó: $u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{n+2}{3(n+1)}(1+u_{n+1}) - \frac{n+1}{3n}(1+u_n)$ $= \frac{n(n+2)(1+u_{n+1}) - (n+1)^2(1+u_n)}{3n(n+1)}$	0,5
	$= \frac{n^2 + 2n + (n^2 + 2n)u_{n+1} - (n^2 + 2n + 1) - (n^2 + 2n + 1)u_n}{3n(n+1)}$	
	$= \frac{(n^2 + 2n)(u_{n+1} - u_n) - u_n - 1}{3n(n+1)}$, với mọi $n \geq 2$. (1)	0,25
	Ta có: $u_4 - u_3 = \frac{22}{27} - \frac{5}{6} < 0$ nên từ (1) suy ra $u_5 - u_4 < 0$. Khi đó từ (1) suy ra $u_6 - u_5 < 0$. Lập luận tương tự, ta có: $u_{n+2} - u_{n+1} < 0$, với mọi $n \geq 2$.	0,5
	Do đó dãy số (u_n) là dãy số giảm kể từ số hạng thứ 3. Lại có dãy số (u_n) bị chặn dưới nên (u_n) tồn tại giới hạn hữu hạn. Giả sử $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \in \mathbb{R}$.	0,25
	Từ $u_{n+1} = \frac{n+1}{3n}(1+u_n)$, $\forall n \geq 2$, cho $n \rightarrow +\infty$ ta được $a = \frac{1}{3}(1+a) \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$. Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.	0,25

Câu	Nội dung	Điểm
	Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn $f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)), \forall a, b \in \mathbb{Z}$.	2,0
	- Với $b = 0$ ta có $f(2a) + 2f(0) = f(f(a))$ - Với $a = 0$ ta có $f(0) + 2f(b) = f(f(b))$. Cho $b = a$ ta có $f(0) + 2f(a) = f(f(a))$ Suy ra $f(2a) + 2f(0) = f(0) + 2f(a) \Leftrightarrow f(2a) = 2f(a) - f(0)$	0,5
	Ta có: $f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)) \Leftrightarrow f(f(a+b)) = 2[f(a) + f(b)] - f(0)$ $\Leftrightarrow f(0) + 2f(a+b) = 2[f(a) + f(b)] - f(0)$ $\Leftrightarrow f(a+b) = f(a) + f(b) - f(0)$	0,25
	Khi đó, với mọi số nguyên n ta có $f(n+1) - f(n) = f(1) - f(0)$. Do đó, các giá trị $\dots, f(-1), f(0), f(1), f(2), \dots$ tạo thành một dãy vô hạn, hai số hạng kề nhau chênh lệch $k = f(1) - f(0)$. Do đó $f(x) = kx + m$, với $k = f(1) - f(0)$, $m = f(0)$.	0,25
Câu 3	Thay vào phương trình ban đầu ta được: $f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)) \Leftrightarrow k(2a) + m + 2(kb + m) = f(f(a+b))$ $\Leftrightarrow 2k(a+b) + 3m = f(f(a+b)) \quad (*)$	0,25
	Với $s = a+b$, khi đó (*) viết lại: $2ks + 3m = f(f(s)) \Leftrightarrow 2ks + 3m = k(ks + m) + m$ $\Leftrightarrow (2k - k^2)s + (2m - km) = 0 \quad (**)$	0,25
	Vì s là số nguyên tùy ý nên từ (**) suy ra $\begin{cases} 2k - k^2 = 0 \\ 2m - km = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ m = 0 \end{cases}$ hoặc $k = 2$.	0,25
	Suy ra $f(x) = 0$ hoặc $f(x) = 2x + m$, với $m = f(0)$. Thử lại thỏa mãn. Vậy có hai hàm số thỏa mãn yêu cầu: $f(x) = 0$ và $f(x) = 2x + m$, với $m = f(0)$.	0,25

Câu	Nội dung	Điểm
	a) Cho a là số tự nhiên thỏa mãn $a+1$ và $2a+1$ đều là các số chính phương. Chứng minh a chia hết cho 24.	1,0
	Giả sử $\begin{cases} a+1=m^2 & (1) \\ 2a+1=n^2 & (2) \end{cases}$, với $m, n \in \mathbb{N}^*$. Từ (2) suy ra n lẻ $\Rightarrow n=2k+1, (k \in \mathbb{N})$. Khi đó (2) trở thành: $2a+1=(2k+1)^2 \Leftrightarrow a=2k(k+1) \Rightarrow a$ chẵn.	0,25
	Từ (1) suy ra m lẻ $\Rightarrow m=2l+1, (l \in \mathbb{N})$. Khi đó (1) trở thành $a+1=(2l+1)^2 \Rightarrow a=4l(l+1):8$ (3).	0,25
	Lại có: $m^2+n^2=3a+2$ (4). Do số chính phương đều có dạng $3t$ hoặc $3t+1$ với $t \in \mathbb{N}^*$, nên từ (4) suy ra m^2 và n^2 đều có dạng $3t+1$.	0,25
	$\Rightarrow (n^2-m^2):3$ hay $a:3$ (5). Mà $(3,8)=1$, nên từ (3) và (5) suy ra $a:24$.	0,25
	b) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (m, n) thỏa mãn $m^n = n^{3m}$ (1)	2,0
Câu 4	* Xét $m=0$ hoặc $n=0$: không thỏa mãn (1). * Xét $m=n \geq 1$: từ (1) suy ra $m=n=1$. * Xét $m > n \geq 1$: Phân tích m và n ra thừa số nguyên tố: $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}, n = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \dots p_s^{\beta_s} \quad (2)$ trong đó $p_1, p_2, \dots, p_s$ là các số nguyên tố đôi một khác nhau và $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}$. Khi $n=1$ thì $m > 1$: không thỏa mãn (1), do đó $n > 1$.	0,25
	Từ (1), (2) suy ra: $n\alpha_i = 3m\beta_i, \forall i \in \{1; 2; \dots; s\}$, trong đó α_i, β_i có thể đồng thời bằng 0. Ta chỉ xét khả năng $\alpha_i, \beta_i > 0$. Từ $\frac{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{3m}{n} > 1 \Rightarrow \alpha_i > \beta_i$, do đó m chia hết cho n, tức là $m=kn$ ($k \in \mathbb{N}, k > 1$). Thay $m=kn$ vào (1) ta được: $(kn)^n = n^{3kn} \Leftrightarrow (kn)^n = (n^{3k})^n \Leftrightarrow kn = n^{3k} \Leftrightarrow k = n^{3k-1}$. Vì $k \in \mathbb{N}, k > 1$ nên $3k-1 > 2$. Ta có: $k = n^{3k-1} = [1+(n-1)]^{3k-1} \geq 1+(3k-1)(n-1) \geq 1+3k-1=3k$ (vô lí).	0,25
	* Xét $1 \leq m < n$: Khi $m=1$ thì $n > 1$: không thỏa mãn (1), do đó $m > 1$. Từ (1) và $m < n$ suy ra $n > 3m$ (nếu $n=3m$ thì $m^{3m} = (3m)^{3m} \Rightarrow m=3m$ (vô lí), nếu $m < n < 3m$ thì $m^n < m^{3m} < n^{3m}$ (vô lí)). Tương tự như trường hợp đã xét ở trên, ta có: $n\alpha_i = 3m\beta_i, \forall i \in \{1; 2; \dots; s\}$. $\Rightarrow \frac{\beta_i}{\alpha_i} = \frac{n}{3m} > 1 \Rightarrow \beta_i > \alpha_i$, do đó n chia hết cho m, tức là $n=km$ ($k \in \mathbb{N}, k > 3$) (3).	0,25

Câu	Nội dung	Điểm
	Thay (3) vào (1) ta được: $m^{km} = (km)^{3m} \Leftrightarrow \frac{m^{km}}{m^{3m}} = k^{3m} \Leftrightarrow m^{(k-3)m} = k^{3m} \Leftrightarrow m^{k-3} = k^3 \quad (4)$ Phân tích k ra thừa số nguyên tố: $k = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \dots p_s^{\gamma_s} \quad (\gamma_i \in \mathbb{N}) \quad (5)$ Từ (2), (4) và (5) suy ra: $(k-3)\alpha_i = 3\gamma_i, \forall i \in \{1; 2; \dots; s\} \quad (6)$	0,25
	Xét hai trường hợp: - TH1: k không chia hết cho 3 Từ (6) suy ra α_i chia hết cho 3, $\forall i \in \{1; 2; \dots; s\}$. Do đó $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s} = l^3$ với $l \in \mathbb{N}, l > 1$. Thay vào (4) ta được: $l^{3(k-3)} = k^3 \Leftrightarrow k = l^{k-3}$. $k = [1 + (l-1)]^{k-3} \geq 1 + (k-3)(l-1) + \frac{(k-3)(k-4)}{2}(l-1)^2 \text{ (khai triển nhị thức Niuton)}$ $> 1 + (k-3) + \frac{(k-3)(k-4)}{2}$	0,25
	$\Rightarrow k^2 - 7k + 8 < 0 \Rightarrow \frac{7 - \sqrt{17}}{2} < k < \frac{7 + \sqrt{17}}{2}, \text{ do } k > 3 \text{ nên } k \in \{4; 5\}.$ + Với $k = 4 \Rightarrow m = 64; n = 256$ (nhận). + Với $k = 5 \Rightarrow m^2 = 125$ (loại).	0,25
	- TH2: k chia hết cho 3, đặt $k = 3q, (q \in \mathbb{N}, q > 1)$. Thay vào (4) ta được: $m^{3q-3} = (3q)^3 \Leftrightarrow m^{q-1} = 3q$. $3q = m^{q-1} = [1 + (m-1)]^{q-1} \geq 1 + (q-1)(m-1) + \frac{(q-1)(q-2)}{2}(m-1)^2 \text{ (khai triển Niuton)}$ $> 1 + (q-1) + \frac{(q-1)(q-2)}{2}$	0,25
	$\Rightarrow q^2 - 7q + 2 < 0 \Rightarrow \frac{7 - \sqrt{41}}{2} < q < \frac{7 + \sqrt{41}}{2} \Rightarrow q \in \{2; 3; 4; 5; 6\}$ + Với $q = 2 \Rightarrow k = 6; m = 6; n = 36$ (nhận). + Với $q = 3 \Rightarrow k = 9; m = 3; n = 27$ (nhận). + Với $q = 4, q = 5, q = 6$: không thỏa mãn $m \in \mathbb{N}^*, m^{q-1} = 3q$. Vậy các cặp giá trị $(m; n)$ cần tìm là: $(1; 1), (3; 27), (6; 36), (64; 256)$.	0,25

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 5	Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Ba đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại H .	5,0
	a) Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K , I là trung điểm của AH , L là trung điểm của AB , IF cắt CK tại T . Đường thẳng qua T và vuông góc với OH cắt BK tại S . Chứng minh $AL.BH = AO.BD$ và ba điểm S, I, E thẳng hàng.	2,0
		0,25
	(Nếu không có hình vẽ thì không chấm điểm)	
	Xét hai tam giác ALO và BDH có: $\widehat{ALO} = \widehat{BDH} = 90^\circ$ (1) $\widehat{HBD} = 90^\circ - \widehat{ACB} = 90^\circ - \widehat{AOL} = \widehat{OAL}$ (2)	0,5
	Từ (1) và (2) suy ra hai tam giác ALO và BDH đồng dạng. Suy ra $AL.BH = AO.BD$	0,25
	Gọi J là tâm đường tròn Euler của tam giác ABC . Khi đó (J) qua E, I, L, F, D và J là trung điểm của OH .	0,25
	Ta có $\widehat{IFH} = \widehat{IHF} = \widehat{KHC} = \widehat{HKC}$ nên tứ giác $CKFI$ nội tiếp, suy ra $TK.TC = TF.TI$. Do đó T nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn (O) và (J) . Lại có $TS \perp OJ$ nên TS là trục đẳng phương của hai đường tròn (O) và (J) .	0,5
	Gọi S' là giao điểm của BK và IE . Tương tự, chứng minh được $S'I.S'E = S'B.S'K$. Do đó S' thuộc trục đẳng phương TS . Vậy $S \equiv S'$, hay S, I, E thẳng hàng.	0,25

Câu	Nội dung	Điểm
	b) Lấy hai điểm M, N trên cạnh BC sao cho $BM = CN$ (M nằm giữa B và N). Đường thẳng BE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BFM tại điểm thứ hai là P, đường thẳng CF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác CEN tại điểm thứ hai là Q. Chứng minh ba đường thẳng AO, PF, QE đồng quy.  (Nếu không có hình vẽ thì không chấm điểm)	3,0
	$\widehat{FPB} = \widehat{FMB} \Rightarrow \widehat{FPE} = \widehat{FMC}$, lại có $\widehat{FEP} = \widehat{FCM}$ nên hai tam giác EPF, CMF đồng dạng. Suy ra $PE.CF = MC.EF$ (3)	0,5
	Tương tự, chứng minh được $FQ.BE = BN.EF$ (4)	0,5
	Từ (3) và (4) suy ra $\frac{PE.CF}{FQ.BE} = \frac{MC}{BN} = 1 \Rightarrow \frac{BE}{CF} = \frac{PE}{QF}$,	0,5
	Lại có $\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CF} \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{PE}{QF}$. Do đó hai tam giác AEP, AFQ đồng dạng.	0,5
	Suy ra $\widehat{FAQ} = \widehat{EAP}$, vậy AP, AQ đẳng giác đối với $\widehat{BAC}$.	
	Gọi $H = PE \cap QF, G = PF \cap QE$.	
	Theo tính chất đường đẳng giác ta có AH, AG đẳng giác đối với $\widehat{BAC}$. (Học sinh nêu ra, không cần chứng minh)	0,5
	Lại có $\widehat{OAB} = \widehat{HAC}$. Suy ra AH, AO đẳng giác đối với $\widehat{BAC}$.	0,25
	Do đó AO và AG trùng nhau. Vậy ba đường thẳng AO, PF, QE đồng quy tại G.	0,25

* **Lưu ý:** Gọi AG' là đường đẳng giác với AH ($AG' \equiv AO$). Áp dụng định lý Ceva dạng sin để chứng minh FP, EQ, AG' đồng quy.

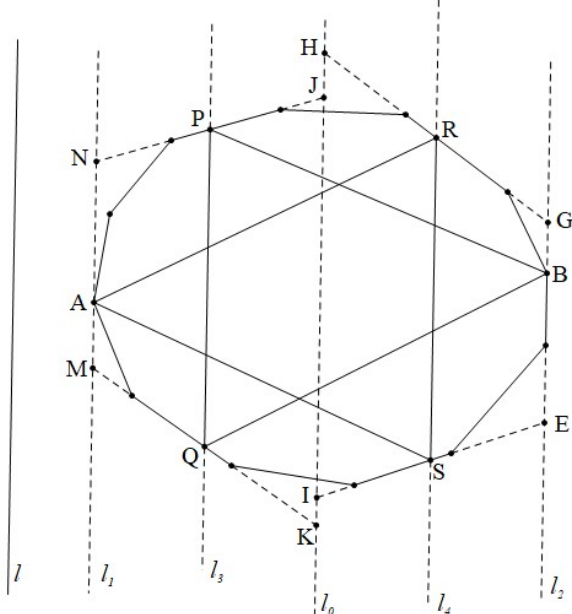
$$\frac{\sin \widehat{G'AF}}{\sin \widehat{G'AE}} = \frac{\sin \widehat{HAE}}{\sin \widehat{HAF}} = \frac{\frac{HE}{AH} \sin \widehat{PEA}}{\frac{HF}{AH} \sin \widehat{QFA}} = \frac{HE \cdot \sin \widehat{PEA}}{HF \cdot \sin \widehat{QFA}} = \frac{\sin \widehat{QFE} \cdot \sin \widehat{PEA}}{\sin \widehat{PEF} \cdot \sin \widehat{QFA}}$$

Áp dụng định lý Ceva dạng sin cho các đường AP, FP, EP trong tam giác AEF , ta có

$$\frac{\sin \widehat{PFE}}{\sin \widehat{PFA}} = \frac{\sin \widehat{PEF} \cdot \sin \widehat{PAE}}{\sin \widehat{PEA} \cdot \sin \widehat{PAF}}. \text{ Tương tự, ta cũng có } \frac{\sin \widehat{QEA}}{\sin \widehat{QEF}} = \frac{\sin \widehat{QFA} \cdot \sin \widehat{QAE}}{\sin \widehat{QFE} \cdot \sin \widehat{QAF}}$$

$$\text{Chú ý } \widehat{PAE} = \widehat{QAF} \text{ và } \widehat{PAF} = \widehat{QAE}, \text{ suy ra } \frac{\sin \widehat{G'AF}}{\sin \widehat{G'AE}} \cdot \frac{\sin \widehat{PFE}}{\sin \widehat{PFA}} \cdot \frac{\sin \widehat{QEA}}{\sin \widehat{QEF}} = 1.$$

Do đó FP, EQ, AG' đồng quy. Suy ra AG trùng với AG' hay AG đẳng giác với AH .

Câu	Nội dung	Điểm
	Cho đa giác lồi T có diện tích bằng 5400 (đvdt) và một đường thẳng l tùy ý. Chứng minh tồn tại một tam giác có các đỉnh nằm trên các cạnh của T và có một cạnh song song với l mà diện tích của nó không nhỏ hơn 2025 (đvdt).	2,0
		0,25
Câu 6	Ta vẽ hai đường thẳng l_1, l_2 song song với l và ở hai phía đối với đa giác T, rồi tịnh tiến chúng cho đến khi chúng đi qua các đỉnh của đa giác mà ta kí hiệu là A, B. Như vậy toàn bộ đa giác nằm giữa hai đường thẳng đó. Ta lại vẽ đường thẳng l_0 song song với l và cách đều hai đường thẳng l_1, l_2; tiếp tục vẽ hai đường thẳng l_3, l_4 song song với l và tương ứng cách đều l_0 và l_1, l_2. Hai đường thẳng l_3, l_4 cắt các cạnh của T lần lượt tại P, Q, R, S. Ta sẽ chứng minh một trong hai tam giác ASR, BPQ thỏa mãn điều kiện của bài toán.	0,5
	Ta vẽ hai hình thang $EGHI, JKMN$ có cạnh đáy tương ứng nằm trên l_0, l_2 và l_0, l_1 và có cạnh bên tương ứng là kéo dài của các cạnh của đa giác T đi qua các điểm tương ứng R, S và P, Q. Gọi d là khoảng cách giữa l_1 và l_2, S_T là diện tích của T. Ta có: $S_{EGHI} + S_{JKMN} = RS \cdot \frac{d}{2} + PQ \cdot \frac{d}{2} = (RS + PQ) \frac{d}{2} \geq S_T$.	0,5
	Mặt khác $S_{ARS} = \frac{1}{2} \cdot RS \cdot \frac{3}{4}d$, $S_{BPQ} = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot \frac{3}{4}d$.	0,25
	Nên $S_{ARS} + S_{BPQ} = (RS + PQ) \frac{3}{8}d = \frac{3}{4} (RS + PQ) \frac{d}{2} \geq \frac{3}{4} S_T$.	0,25
	Do đó $S_{ARS} \geq \frac{3}{8} S_T = 2025$ hoặc $S_{BPQ} \geq \frac{3}{8} S_T = 2025$. Suy ra điều cần chứng minh.	0,25

Câu	Nội dung	Điểm
	Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = xyz$ và biểu thức $P = \sqrt{\frac{x}{x+yz}} + \sqrt{\frac{y}{y+zx}} + \sqrt{\frac{z}{z+xy}}$ Tìm giá trị lớn nhất của P và tìm số thực m lớn nhất sao cho bất đẳng thức $P \geq m$ đúng với mọi x, y, z dương thỏa mãn điều kiện trên.	3,0
	Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$, khi đó ta có $a + b + c = 1$ ($a, b, c > 0$) Khi đó, biểu thức được viết lại: $P = \sqrt{\frac{ab}{ab+c}} + \sqrt{\frac{bc}{bc+a}} + \sqrt{\frac{ca}{ca+b}}$	0,25
	Ta có: $ab + c = ab + c(a + b + c) = (c + a)(c + b)$ Tương tự: $bc + a = (a + b)(a + c)$, $ca + b = (b + c)(b + a)$ $P = \sqrt{\frac{ab}{ab+c}} + \sqrt{\frac{bc}{bc+a}} + \sqrt{\frac{ca}{ca+b}} = \sqrt{\frac{ab}{(c+a)(c+b)}} + \sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}} + \sqrt{\frac{ca}{(b+c)(b+a)}}$	0,25
	$\leq \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a}{c+a} + \frac{b}{c+b} \right) + \left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{a+c} \right) + \left(\frac{c}{b+c} + \frac{a}{b+a} \right) \right] = \frac{3}{2}$	0,25
	Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$. Vậy $\max P = \frac{3}{2}$.	0,25
Câu 7	Trước tiên, ta chứng minh $P \geq m$ (1) đúng khi $m = 1$. Khi $m = 1$: $P \geq 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{a+b} + \sqrt{bc} \cdot \sqrt{b+c} + \sqrt{ca} \cdot \sqrt{c+a}}{\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{b+c} \cdot \sqrt{c+a}} \geq 1$	0,25
	Ta đi chứng minh $\sqrt{ab} \cdot \sqrt{a+b} + \sqrt{bc} \cdot \sqrt{b+c} + \sqrt{ca} \cdot \sqrt{c+a} \geq \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{b+c} \cdot \sqrt{c+a}$. Ta có: $\sqrt{ab} \cdot \sqrt{a+b} + \sqrt{bc} \cdot \sqrt{b+c} + \sqrt{ca} \cdot \sqrt{c+a} \geq \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{b+c} \cdot \sqrt{c+a}$ $\Leftrightarrow \sqrt{a^2bc(c+a)(a+b)} + \sqrt{ab^2c(a+b)(b+c)} + \sqrt{abc^2(b+c)(c+a)} \geq abc \text{ (2)}$	0,5
	Nhận xét: Mỗi hạng tử ở vế trái của (2) luôn lớn hơn abc. Thật vậy: $\sqrt{a^2bc(c+a)(a+b)} = \sqrt{a^2bc[bc+a(a+b+c)]} = \sqrt{a^2bc(bc+a)} > \sqrt{a^2bc \cdot bc} = abc$ Do đó (2) đúng (dấu “=” không xảy ra).	0,25
	Ta đi chứng minh: Với $m > 1$, bất đẳng thức (1) không đúng với mọi số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Vì $P \leq \frac{3}{2}$ nên ta chỉ cần xét $1 < m \leq \frac{3}{2}$.	0,25
	Giả sử $m = 1 + 2t$ ($0 < t \leq \frac{1}{4}$). Khi đó với $a = b = \frac{1-t^2}{2}, c = t^2$, ta có: $\sqrt{\frac{ab}{ab+c}} + \sqrt{\frac{bc}{bc+a}} + \sqrt{\frac{ca}{ca+b}} < \sqrt{\frac{ab}{ab}} + \sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}} = 1 + 2t = m$	0,5
	Do đó $m > 1$, bất đẳng thức (1) không đúng với mọi số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Vậy $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.	0,25

----- HẾT -----

Chú ý: Nếu học sinh có lời giải đúng, khác với đáp án, Giám khảo căn cứ thang điểm câu tương ứng cho điểm phù hợp.