

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. LŨY THỪA

1. Lũy thừa với số mũ nguyên

a) Định nghĩa

Cho  $n \in \mathbb{N}^*$  và  $a \in \mathbb{R}$ . **Lũy thừa bậc  $n$  của  $a$**  là tích của  $n$  thừa số  $a$ :  $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ số } a}$

Trong đó:  $a$  gọi là cơ số và  $n$  là số mũ.

Với  $a \neq 0$  thì  $\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^{-n} = \frac{1}{a^n} \end{cases}$  (Chú ý là  $0^0$  và  $0^{-n}$  không có nghĩa).

b) Tính chất lũy thừa với số mũ nguyên

**Định lý 1:** Cho  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  và  $m, n \in \mathbb{Z}$ , ta có:

$$\begin{aligned} +) a^m \cdot a^n &= a^{m+n} & +) \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n} \\ +) (a^m)^n &= a^{m \cdot n} & +) (a \cdot b)^n &= a^n \cdot b^n & +) \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n} \end{aligned}$$

**Định lý 2 [Tính chất bất đẳng thức]:**

Cho  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Khi đó:

- + Với  $a > 1$  thì  $a^m > a^n \Leftrightarrow m > n$ .
- + Với  $0 < a < 1$  thì  $a^m > a^n \Leftrightarrow m < n$ .

**Hệ quả 1:** Với  $0 < a < b$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  thì:

- +  $a^n < b^n \Leftrightarrow n > 0$ .
- +  $a^n > b^n \Leftrightarrow n < 0$ .

**Hệ quả 2:** Với  $n$  là số tự nhiên lẻ thì  $a < b \Leftrightarrow a^n < b^n$ .

2. Căn bậc  $n$  và lũy thừa với số mũ hữu tỉ

a) Căn bậc  $n$

**Định nghĩa:** Cho  $a \in \mathbb{R}$  và  $n \in \mathbb{N}^*$ , ta có:  $b \in \mathbb{R}$  là căn bậc  $n$  của  $a \Leftrightarrow b^n = a$ .

**Nhận xét:**

- + Nếu  $a \in \mathbb{R}$  thì  $a$  có duy nhất một căn bậc  $n$  lẻ là  $\sqrt[n]{a}$ .
- + Nếu  $a > 0$  thì  $a$  có đúng 2 căn bậc  $n$  chẵn là  $\sqrt[n]{a}$  và  $-\sqrt[n]{a}$  (trong đó  $\sqrt[n]{a} > 0$  và  $-\sqrt[n]{a} < 0$ ).

**Tính chất:** Cho  $a, b \geq 0$ ,  $m, n \in \mathbb{N}^*$  và  $p, q \in \mathbb{Z}$ . Khi đó:

$$\begin{aligned} + \sqrt[n]{ab} &= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} & \sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad (b > 0) \\ + \sqrt[n]{a^p} &= (\sqrt[n]{a})^p, \quad (a > 0) & \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[mn]{a} \\ + \text{Nếu } \frac{p}{n} &= \frac{q}{m} \text{ thì } \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q}, \quad (a > 0). \text{ Đặc biệt } \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}. \end{aligned}$$

**Chú ý:**

- + Nếu  $n$  là số nguyên dương lẻ và  $a < b$  thì  $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$ .
- + Nếu  $n$  là số nguyên dương chẵn và  $0 < a < b$  thì  $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$ .

**b) Lũy thừa với số mũ hữu tỉ**

**Định nghĩa:** Cho  $a$  là một số thực dương,  $r$  là một số hữu tỉ có dạng  $r = \frac{m}{n}$ , trong đó

$$m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*. \text{ Lũy thừa của } a \text{ với số mũ } r \text{ là số xác định bởi: } a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

**Tính chất:** Lũy thừa với số mũ hữu tỉ có đầy đủ các tính chất của lũy thừa với số mũ nguyên.

**3. Lũy thừa với số mũ thực****a) Khái niệm lũy thừa với số mũ thực**

Cho  $a > 0$  là một số thực dương và  $\alpha$  là một số vô tỉ.

Xét dãy số hữu tỉ  $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$  mà  $\lim r_n = \alpha$ . Khi đó người ta chứng minh được rằng dãy số thực  $a^{r_1}, a^{r_2}, \dots, a^{r_n}, \dots$  có giới hạn xác định.

Ta gọi giới hạn đó là lũy thừa của  $a$  với số mũ  $\alpha$ , kí hiệu là  $a^\alpha$ . Vậy  $a^\alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} a^{r_n}$ .

**b) Công thức lãi kép**

**Định nghĩa:** Lãi kép là phần lãi của kì sau được tính trên số tiền gốc kì trước cộng với phần lãi của kì trước.

**Công thức:** Giả sử số tiền gốc là  $A$ ; lãi suất  $r\%$ /kì hạn gửi (có thể là tháng, quý hay năm).

- + Số tiền nhận được cả gốc và lãi sau  $n$  kì hạn gửi là  $A(1+r)^n$ .
- + Số tiền lãi nhận được sau  $n$  kì hạn gửi là  $A(1+r)^n - A = A[(1+r)^n - 1]$ .

**Ví dụ:** Ông Tuấn gửi 100 triệu vào tài khoản định kỳ tính lãi kép với lãi suất là 8%/năm. Tính số tiền lãi thu được sau 10 năm.

**Lời giải:**

Số tiền lãi ông Tuấn thu về sau 10 năm là:

$$A(1+r)^n - A \approx 100tr \times [(1+0,08)^{10} - 1] = 115,892 \text{ tr.}$$

**GHI NHỚ** (về cơ sở của lũy thừa 0)

- + Khi xét lũy thừa với số mũ 0 và số mũ nguyên âm thì cơ sở phải khác 0.
- + Khi xét lũy thừa với số mũ không nguyên thì cơ sở phải dương.

**II. HÀM SỐ LŨY THỪA****1. Khái niệm hàm số lũy thừa**

**Định nghĩa:** Hàm số lũy thừa là hàm số có dạng  $y = x^\alpha$ , trong đó  $\alpha$  là một hằng số tùy ý.

Từ định nghĩa các lũy thừa, ta có:

| Hàm số         | Số mũ lũy thừa                  | Tập xác định                     |
|----------------|---------------------------------|----------------------------------|
| $y = x^\alpha$ | $\alpha$ nguyên dương           | $D = \mathbb{R}$                 |
| $y = x^\alpha$ | $\alpha$ nguyên âm hoặc $n = 0$ | $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ |
| $y = x^\alpha$ | $\alpha$ không nguyên           | $D = (0; +\infty)$               |

Người ta chứng minh được rằng hàm số lũy thừa liên tục trên tập xác định của nó.

**Chú ý:** Theo định nghĩa, đẳng thức  $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$  chỉ xảy ra nếu  $x > 0$ . Do đó, **hàm số**  $y = x^{\frac{1}{n}}$  **không đồng nhất với hàm số**  $y = \sqrt[n]{x}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ). Chẳng hạn, hàm số  $y = \sqrt[3]{x}$  là hàm số căn bậc ba, xác định với mọi  $x \in \mathbb{R}$ ; còn hàm số lũy thừa  $y = x^{\frac{1}{3}}$  chỉ xác định với mọi  $x > 0$ .

## 2. Đạo hàm của hàm số lũy thừa

**Định lí:**

- Hàm số lũy thừa  $y = x^\alpha$ , ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) có đạo hàm tại mọi điểm  $x > 0$  và  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ .
- Nếu hàm số  $u = u(x)$  nhận giá trị dương và có đạo hàm trên  $J$  thì hàm số  $y = u^\alpha(x)$  cũng có đạo hàm trên  $J$  và  $[u^\alpha(x)]' = \alpha \cdot u^{\alpha-1}(x) \cdot u'(x)$ .

**Hệ quả:**

- $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$  (với mọi  $x > 0$  nếu  $n$  chẵn, với mọi  $x \neq 0$  nếu  $n$  lẻ).
- Nếu  $u = u(x)$  là hàm số có đạo hàm trên  $J$  và thỏa mãn điều kiện  $u(x) > 0$  với mọi  $x \in J$  khi  $n$  chẵn,  $u(x) \neq 0$  với mọi  $x \in J$  khi  $n$  lẻ thì:  $(\sqrt[n]{u(x)})' = \frac{u'(x)}{n\sqrt[n]{u^{n-1}(x)}}$ .

## 3. Sự biến thiên của hàm số lũy thừa

Xét hàm số lũy thừa  $y = x^\alpha$  có tập xác định luôn chứa khoảng  $(0; +\infty)$  với mọi  $\alpha \neq 0$ . Trong trường hợp tổng quát, ta khảo sát hàm số  $y = x^\alpha$  trên khoảng này (gọi là tập khảo sát).

| $y = x^\alpha$ với $\alpha > 0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | $y = x^\alpha$ với $\alpha < 0$ |           |           |      |  |   |     |   |           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |     |   |           |      |  |   |     |           |   |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|-----------|-----------|------|--|---|-----|---|-----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|---|-----------|------|--|---|-----|-----------|---|
| <p>1. Tập khảo sát: <math>(0; +\infty)</math></p> <p>2. Sự biến thiên<br/><math>y' = \alpha x^{\alpha-1} &gt; 0</math> với <math>\forall x &gt; 0</math>.<br/>Hàm số đồng biến.<br/>Giới hạn: <math>\lim_{x \rightarrow 0^+} y = 0</math> và <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty</math></p> <p>3. Bảng biến thiên</p> <table><tr><td><math>x</math></td><td>0</td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>y'</math></td><td></td><td>+</td></tr><tr><td><math>y</math></td><td>0</td><td><math>+\infty</math></td></tr></table> | $x$                             | 0         | $+\infty$ | $y'$ |  | + | $y$ | 0 | $+\infty$ | <p>1. Tập khảo sát: <math>(0; +\infty)</math></p> <p>2. Sự biến thiên<br/><math>y' = \alpha x^{\alpha-1} &lt; 0</math> với <math>\forall x &gt; 0</math>.<br/>Hàm số nghịch biến.<br/>Giới hạn: <math>\lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty</math> và <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0</math></p> <p>3. Bảng biến thiên</p> <table><tr><td><math>x</math></td><td>0</td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>y'</math></td><td></td><td>-</td></tr><tr><td><math>y</math></td><td><math>+\infty</math></td><td>0</td></tr></table> | $x$ | 0 | $+\infty$ | $y'$ |  | - | $y$ | $+\infty$ | 0 |
| $x$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 0                               | $+\infty$ |           |      |  |   |     |   |           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |     |   |           |      |  |   |     |           |   |
| $y'$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                 | +         |           |      |  |   |     |   |           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |     |   |           |      |  |   |     |           |   |
| $y$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 0                               | $+\infty$ |           |      |  |   |     |   |           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |     |   |           |      |  |   |     |           |   |
| $x$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 0                               | $+\infty$ |           |      |  |   |     |   |           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |     |   |           |      |  |   |     |           |   |
| $y'$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                 | -         |           |      |  |   |     |   |           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |     |   |           |      |  |   |     |           |   |
| $y$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | $+\infty$                       | 0         |           |      |  |   |     |   |           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |     |   |           |      |  |   |     |           |   |
| <p>4. Đồ thị:</p> <p><b>Nhận xét:</b> Do <math>1^\alpha = 1</math> với <math>\forall \alpha</math> nên đồ thị của mọi hàm số lũy thừa đều đi qua điểm <math>I(1;1)</math>.</p> <p><b>Chú ý:</b> Khi khảo sát hàm số lũy thừa với số mũ cụ thể, ta phải xét hàm đó trên toàn bộ tập xác định.</p>                                                                                                                                                                                                                                                   |                                 |           |           |      |  |   |     |   |           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |     |   |           |      |  |   |     |           |   |

**B. MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ SỬ DỤNG KỸ THUẬT GIẢI NHANH**

**Ví dụ 1:** Rút gọn biểu thức  $A = \frac{a^{\frac{4}{3}} - 8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}} + 2\sqrt[3]{ab} + 4b^{\frac{2}{3}}} \cdot \left(1 - 2\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)^{-1} - a^{\frac{2}{3}}$  (giả thiết biểu thức có nghĩa)

được kết quả là

A. 1.

B.  $a+b$ .

C. 0.

D.  $2a-b$ .

**Lời giải:**

**Cách 1 [Theo phương pháp tự luận]:**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \frac{a^{\frac{1}{3}}(a-8b)}{a^{\frac{2}{3}} + 2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + 4b^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - 2b^{\frac{1}{3}}} - a^{\frac{2}{3}} = \frac{a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}}(a-8b)}{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(2b^{\frac{1}{3}}\right)^3} - a^{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{a^{\frac{2}{3}}(a-8b)}{a-8b} - a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0 \Rightarrow \text{Chọn đáp án C.} \end{aligned}$$

**Cách 2 [Phương pháp chuẩn hóa số liệu]:** Ta sẽ gán cho  $a$  và  $b$  những giá trị cụ thể (chú ý sao cho thỏa mãn điều kiện có nghĩa của biểu thức  $A$ ).

$$\text{Cụ thể, ở đây gán } \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}, \text{ khi đó: } A = \frac{1^{\frac{4}{3}} - 8 \cdot 1^{\frac{1}{3}} \cdot 1}{1^{\frac{2}{3}} + 2\sqrt[3]{1 \cdot 1} + 4 \cdot 1^{\frac{2}{3}}} \cdot \left(1 - 2\sqrt[3]{\frac{1}{1}}\right)^{-1} - 1^{\frac{2}{3}} = \frac{1-8}{7} \cdot (1-2) - 1 = 0.$$

$\Rightarrow$  Chọn đáp án C.

**Ví dụ 2:** Cho  $M = \sqrt{a^2 + \sqrt[3]{a^4b^2}} + \sqrt{b^2 + \sqrt[3]{a^2b^4}}$  và  $N = \sqrt{\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}\right)^3}$ . Ta có kết luận

A.  $M > N$ .

B.  $M+N=0$ .

C.  $M < N$ .

D.  $M=N$ .

**Lời giải:**

$$\text{Nhập } \sqrt{a^2 + \sqrt[3]{a^4b^2}} + \sqrt{b^2 + \sqrt[3]{a^2b^4}} - \sqrt{\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}\right)^3} \xrightarrow{\text{CALC}} a=1; b=1 \rightarrow 0 \Rightarrow M=N$$

$\Rightarrow$  Chọn đáp án D.

**Bình luận:** Trong bài toán này việc nhập biểu thức mất khá nhiều thời gian (do có nhiều loại căn và lũy thừa) nên ta nên tính tay luôn cho nhanh (vì  $a=1; b=1$  nên việc tính tay khá đơn giản). Cụ thể:

$$+ \xrightarrow{a=1; b=1} M = \sqrt{1^2 + \sqrt[3]{1^4 \cdot 1^2}} + \sqrt{1^2 + \sqrt[3]{1^2 \cdot 1^4}} = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

$$+ \xrightarrow{a=1; b=1} N = \sqrt{\left(\sqrt[3]{1^2} + \sqrt[3]{1^2}\right)^3} = \sqrt{(1+1)^3} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Vậy  $M=N=2\sqrt{2} \Rightarrow$  Chọn đáp án D.

**Ví dụ 3:** Rút gọn biểu thức  $C = \left(\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} + 1\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + 1\right)\left(x - \sqrt{x} + 1\right), (x \geq 0)$  ta được

A.  $x^2 + 1$ .

B.  $x^2 + x + 1$ .

C.  $x^2 - x + 1$ .

D.  $x^2 - 1$ .

**Lời giải:**

**Cách 1 [Theo phương pháp tự luận]:**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } M &= \left[\left(\sqrt{x} + 1\right) - \sqrt[4]{x}\right] \left[\left(\sqrt{x} + 1\right) + \sqrt[4]{x}\right] \left(x - \sqrt{x} + 1\right) \\ &= \left[\left(\sqrt{x} + 1\right)^2 - \sqrt{x}\right] \left(x - \sqrt{x} + 1\right) = \left(x + \sqrt{x} + 1\right) \left(x - \sqrt{x} + 1\right) \\ &= \left[(x+1) + \sqrt{x}\right] \left[(x+1) - \sqrt{x}\right] = (x+1)^2 - x = x^2 + x + 1 \Rightarrow \text{Chọn đáp án B.} \end{aligned}$$

**Cách 2:**

Nhập  $(\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} + 1)(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) \xrightarrow{\text{CALC}} x=100 \rightarrow 10101$

Ta có:  $10101 = 100^2 + 100 + 1 \xrightarrow{x=100} x^2 + x + 1 \Rightarrow$  **Chọn đáp án B.**

**Cách 3:**

Thử lần lượt với 4 đáp án. Cơ sở lý thuyết:  $A = B \Leftrightarrow \frac{A}{B} = 1, (B \neq 0)$

**Lần 1:** Nhập  $(\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} + 1)(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) : (x^2 + 1) \xrightarrow{\text{CALC}} \frac{3}{2} \rightarrow$  **loại A.**

**Lần 2:** Bấm  $\leftarrow$  để sửa biểu thức thành:

$(\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} + 1)(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) : (x^2 + x + 1) \xrightarrow{\text{CALC}} \frac{1}{1} \Rightarrow$  **Chọn đáp án B.**

**Ví dụ 4:** Rút gọn biểu thức  $D = \left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)^2 \left(1 - 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}\right)^{-1}, (x, y > 0, x \neq y)$  ta được

**A.**  $x$ .

**B.**  $2x$ .

**C.**  $x+1$ .

**D.**  $x-1$ .

**Lời giải:**

**Cách 1 [Theo phương pháp tự luận]:**

$$D = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \left(1 - \sqrt{\frac{y}{x}}\right)^{-2} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-2} = x \Rightarrow \text{Chọn đáp án A.}$$

**Cách 2:** Thử lần lượt với 4 đáp án.

Nhập  $D = \left(X^{\frac{1}{2}} - Y^{\frac{1}{2}}\right)^2 \left(1 - 2\sqrt{\frac{Y}{X}} + \frac{Y}{X}\right)^{-1} : X \xrightarrow{\text{CALC}} \frac{1}{1} \rightarrow$  **Chọn đáp án A.**

**Để chính xác hơn nên thử với cả 4 đáp án.**

**Ví dụ 5:** Cho  $f(x) = x^2 \sqrt[3]{x^2}$ . Khi đó  $f'(1)$  bằng

**A.**  $\frac{3}{8}$ .

**B.**  $\frac{8}{3}$ .

**C.** 2.

**D.** 4.

**Lời giải:**

Nhập vào MTCT:  $\frac{d}{dx}(x^2 \sqrt[3]{x^2}) \Big|_{x=1}$  và bấm  $\boxed{=}$  ta được kết quả:

$$2,666666667 = \frac{8}{3} \Rightarrow \text{Chọn đáp án B.}$$

**C. VÍ DỤ MINH HỌA**

**Ví dụ 1:** Tập xác định của hàm số  $y = (x^3 - 27)^{\frac{\pi}{2}}$  là

- A.  $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ .      B.  $D = \mathbb{R}$ .      C.  $D = [3; +\infty)$ .      D.  $D = (3; +\infty)$ .

**Lời giải:**

Áp dụng lý thuyết: “Lũy thừa với số mũ không nguyên thì cơ số phải dương”.

Do đó hàm số  $y = (x^3 - 27)^{\frac{\pi}{2}}$  xác định khi  $x^3 - 27 > 0 \Leftrightarrow x > 3 \Rightarrow D = (3; +\infty) \Rightarrow$  **Chọn đáp án D.**

**Ví dụ 2:** Tập xác định của hàm số  $y = (3x^2 - 2)^{-2}$  là

- A.  $D = \left(-\infty; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{2}{3}}; +\infty\right)$ .      B.  $D = \left(-\infty; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{2}{3}}; +\infty\right)$ .  
C.  $D = \left[-\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ .      D.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}$ .

**Lời giải:**

Áp dụng lý thuyết: “Lũy thừa với số mũ không và nguyên âm thì cơ số phải khác 0”.

Do đó hàm số  $y = (3x^2 - 2)^{-2}$  xác định khi  $3x^2 - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}$ .

$\Rightarrow$  **Chọn đáp án D.**

**Ví dụ 3:** Tập xác định của hàm số  $y = (-x^2 - 3x - 2)^{-e}$  là

- A.  $D = (-\infty; -2)$ .      B.  $D = (-1; +\infty)$ .      C.  $D = (-2; -1)$ .      D.  $D = [-2; -1]$ .

**Lời giải:**

Áp dụng lý thuyết: “Lũy thừa với số mũ không nguyên thì cơ số phải dương”.

Do đó hàm số  $y = (-x^2 - 3x - 2)^{-e}$  xác định khi  $-x^2 - 3x - 2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-2; -1) \Rightarrow D = (-2; -1)$ .

$\Rightarrow$  **Chọn đáp án C.**

**Ví dụ 4:** Với  $a, b$  là những số dương, biểu thức  $\frac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}}$  bằng

- A.  $2\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}$ .      B.  $-\sqrt[4]{b}$ .      C.  $\sqrt[4]{b}$ .      D.  $\sqrt[4]{a}$ .

**Lời giải:**

Ta có: 
$$\frac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} = \frac{(\sqrt[4]{a})^2 + \sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}} - \frac{(\sqrt[4]{a})^2 - (\sqrt[4]{b})^2}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}}$$
$$= \frac{\sqrt[4]{a}(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}} - \frac{(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} = \sqrt[4]{a} - (\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}) = -\sqrt[4]{b} \Rightarrow$$
 **Chọn đáp án B.**

**Ví dụ 5:** Cho  $m > 0$ . Biểu thức  $m^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{m}\right)^{\sqrt{3}-2}$  bằng

- A.  $m^2$ .      B.  $m^{2\sqrt{3}-3}$ .      C.  $m^{-2}$ .      D.  $m^{2\sqrt{3}-2}$ .

**Lời giải:**

Ta có:  $m^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{m}\right)^{\sqrt{3}-2} = \frac{m^{\sqrt{3}}}{m^{\sqrt{3}-2}} = m^{\sqrt{3}-(\sqrt{3}-2)} = m^2 \Rightarrow$  **Chọn đáp án A.**

**Ví dụ 6:** Với giá trị nào của  $a$  thì  $\sqrt{a \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a}} = \sqrt[24]{2^5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^{-1}}}$ ?

A.  $a = 1$ .

B.  $a = 2$ .

C.  $a = 0$ .

D.  $a = 3$ .

**Lời giải:**

$$\text{Ta có: } \sqrt{a \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a}} = \sqrt[24]{2^5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^{-1}}} \Leftrightarrow \left[ a \cdot \left( a \cdot a^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{24}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow a^{\frac{17}{24}} = 2^{\frac{17}{24}} \Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow \text{Chọn đáp án B.}$$

**Ví dụ 7:** Cho  $a, b > 0$  thỏa mãn  $a^{\frac{1}{2}} > a^{\frac{1}{3}}$ ,  $b^{\frac{2}{3}} > b^{\frac{3}{4}}$ . Khi đó

A.  $a > 1$ ,  $b > 1$ .

B.  $a > 1$ ,  $0 < b < 1$ .

C.  $0 < a < 1$ ,  $b > 1$ .

D.  $0 < a < 1$ ,  $0 < b < 1$ .

**Lời giải:**

Áp dụng lý thuyết: Cho  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Khi đó:

+ Với  $a > 1$  thì  $a^m > a^n \Leftrightarrow m > n$ .

+ Với  $0 < a < 1$  thì  $a^m > a^n \Leftrightarrow m < n$ .

Ta có:

$$+ a^{\frac{1}{2}} > a^{\frac{1}{3}} \xrightarrow{\frac{1}{2} > \frac{1}{3}} a > 1.$$

$$+ b^{\frac{2}{3}} > b^{\frac{3}{4}} \xrightarrow{\frac{2}{3} > \frac{3}{4}} 0 < b < 1.$$

$\Rightarrow$  Chọn đáp án B.

**Ví dụ 8:** Tập tất cả các giá trị của  $a$  để  $\sqrt[15]{a^7} > \sqrt[5]{a^2}$  là:

A.  $a = 0$ .

B.  $a < 0$ .

C.  $a > 1$ .

D.  $0 < a < 1$ .

**Lời giải:**

$$\text{Ta có } \sqrt[15]{a^7} > \sqrt[5]{a^2} \Leftrightarrow a^{\frac{7}{15}} > a^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{6}{15}} \Leftrightarrow a > 1 \Rightarrow \text{Chọn đáp án C.}$$

**Ví dụ 9:** Với điều kiện nào của  $a$  thì  $(a-1)^{-\frac{2}{3}} < (a-1)^{-\frac{1}{3}}$ ?

A.  $a > 2$ .

B.  $a > 1$ .

C.  $1 < a < 2$ .

D.  $0 < a < 1$ .

**Lời giải:**

$$\text{Ta có: } (a-1)^{-\frac{2}{3}} < (a-1)^{-\frac{1}{3}} \xrightarrow{-\frac{2}{3} < -\frac{1}{3}} a-1 > 1 \Leftrightarrow a > 2 \Rightarrow \text{Chọn đáp án A.}$$

**Ví dụ 10:** Nếu  $(\sqrt{2}-1)^m < (\sqrt{2}-1)^n$  thì ta kết luận gì về  $m$  và  $n$ ?

A.  $m > n$ .

B.  $m < n$ .

C.  $m = n$ .

D.  $m \leq n$ .

**Lời giải:**

$$\text{Ta có: } (\sqrt{2}-1)^m < (\sqrt{2}-1)^n \xrightarrow{\sqrt{2}-1 \in (0;1)} m > n \Rightarrow \text{Chọn đáp án A.}$$

**Ví dụ 11:** Một người lần đầu gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng với kì hạn 3 tháng, lãi suất 2% một quý theo hình thức lãi kép. Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 100 triệu đồng với kỳ hạn và lãi suất như trước đó. Tổng số tiền người đó nhận được 1 năm sau khi gửi tiền gần nhất với kết quả nào sau đây?

A. 210 triệu.

B. 220 triệu.

C. 212 triệu.

D. 216 triệu.

**Lời giải:**

Số tiền nhận về sau 1 năm của 100 triệu gửi trước là  $100(1+2\%)^4$  triệu đồng và số tiền nhận về

sau 6 tháng của 100 triệu gửi sau là  $100(1+2\%)^2$  triệu đồng.

Vậy tổng số tiền là  $100(1+2\%)^4 + 100(1+2\%)^2 = 212,283216 (\approx 212,283)$  triệu đồng.

$\Rightarrow$  Chọn đáp án C.

**Ví dụ 12:** Đạo hàm của hàm số  $y = (x^2 + x)^\alpha$  là

A.  $2\alpha(x^2 + x)^{\alpha-1}$ .

B.  $\alpha(2x+1)(x^2 + x)^{\alpha+1}$ .

C.  $\alpha(2x+1)(x^2 + x)^{\alpha-1}$ .

D.  $\alpha(x^2 + x)^{\alpha-1}$ .

**Lời giải:**

Ta có:  $y' = \left[ (x^2 + x)^\alpha \right]' = \alpha(x^2 + x)^{\alpha-1} (x^2 + x)' = \alpha(2x+1)(x^2 + x)^{\alpha-1} \Rightarrow$  Chọn đáp án C.

**Ví dụ 13:** Trên đồ thị (C) của hàm số  $y = x^{\frac{\pi}{2}}$  lấy điểm  $M_0$  có hoành độ  $x_0 = 1$ . Tiếp tuyến của (C) tại điểm  $M_0$  có phương trình là

A.  $y = \frac{\pi}{2}x + 1$ .

B.  $y = \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} + 1$ .

C.  $y = \pi x - \pi + 1$ .

D.  $y = -\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2} + 1$ .

**Lời giải:**

Áp dụng lý thuyết: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm  $M(x_0, y_0)$  có dạng:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Ta có:  $y' = \frac{\pi}{2}x^{\frac{\pi}{2}-1}$ . Tiếp tuyến của (C) tại điểm  $M_0$  có phương trình là:

$$y = y'(1)(x - 1) + y(1) \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2} \cdot 1^{\frac{\pi}{2}-1} (x - 1) + 1^{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} + 1 \Rightarrow \text{Chọn đáp án B.}$$

**Ví dụ 14 [THPT Ngô Quyền – 2017]:** Cho hàm số  $f(a) = \frac{a^{\frac{2}{3}}(\sqrt[3]{a^{-2}} - \sqrt[3]{a})}{a^{\frac{1}{8}}(\sqrt[8]{a^3} - \sqrt[8]{a^{-1}})}$  với  $a > 0, a \neq 1$ . Giá trị

$M = f(2017^{2018})$  bằng

A.  $2017^{2018} + 1$ .

B.  $2017^{1009}$ .

C.  $2017^{1009} + 1$ .

D.  $-2017^{1009} - 1$ .

**Lời giải:**

$$\text{Ta có: } f(a) = \frac{a^{\frac{2}{3}} \left( a^{\frac{-2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} \right)}{a^{\frac{1}{8}} \left( a^{\frac{3}{8}} - a^{\frac{-1}{8}} \right)} = \frac{a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{-2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{8}} \times a^{\frac{3}{8}} - a^{\frac{1}{8}} \times a^{\frac{-1}{8}}} = \frac{a^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{8}+\frac{3}{8}} - a^{\frac{1}{8}-\frac{1}{8}}} = \frac{a^0 - a}{a^1 - a^0} = -\frac{a-1}{\sqrt{a}-1} = -\sqrt{a} - 1.$$

Suy ra:  $M = f(2017^{2018}) = -\sqrt{2017^{2018}} - 1 = -2017^{1009} - 1 \Rightarrow$  Chọn đáp án D.

**Ví dụ 15:** Đường thẳng  $x = \alpha$  ( $\alpha$  là số thực dương) cắt đồ thị các hàm số  $y = f(x) = x^{\frac{1}{4}}$  và  $y = g(x) = x^{\frac{1}{5}}$  lần lượt tại hai điểm A và B. Biết rằng tung độ điểm A bé hơn tung độ điểm B. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A.  $0 < \alpha < 1$ .

B.  $\alpha > 1$ .

C.  $\frac{1}{5} < \alpha < 4$ .

D.  $\frac{1}{4} < \alpha < 5$ .

Lời giải:

Vì tung độ điểm  $A$  bé hơn tung độ điểm  $B$  nên  $f(\alpha) < g(\alpha) \Leftrightarrow \alpha^{\frac{1}{4}} < \alpha^{\frac{1}{5}} \xrightarrow{\frac{1}{4} > \frac{1}{5}} 0 < \alpha < 1$ .

$\Rightarrow$  Chọn đáp án A.

**Ví dụ 16:** Cho hàm số  $y = x^{\frac{1}{4}}(10-x), x > 0$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(0; 2)$ .
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(5; +\infty)$ .
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ .
- D. Hàm số không có điểm cực trị nào.

Lời giải:

Ta có:  $y = 10x^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{5}{4}} \Rightarrow y' = 10 \cdot \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} - \frac{5}{4} x^{\frac{1}{4}} = \frac{5(2-x)}{4x^{\frac{3}{4}}}$ .

Khi đó:  $y' = \frac{5(2-x)}{4x^{\frac{3}{4}}} < 0 \Leftrightarrow x > 2$ . Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ .

Do đó, hàm số nghịch biến trên khoảng  $(5; +\infty) \Rightarrow$  Chọn đáp án B.

**Ví dụ 17:** Tìm các điểm cực trị của hàm số  $y = x^{\frac{3}{4}} - 2x^{\frac{1}{4}}, x > 0$ .

- A.  $x = 1$ .
- B.  $x = \frac{2}{3}$ .
- C.  $x = \frac{4}{9}$ .
- D.  $x = -\frac{2}{3}$ .

Lời giải:

Ta có:  $y' = \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} - \frac{2}{4} x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} (3x^{\frac{1}{2}} - 2) = \frac{3\sqrt{x} - 2}{4\sqrt[4]{x^3}}$ .

Khi đó:  $y' = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{9}$ .

Vì  $y'$  đổi dấu khi đi qua điểm  $x = \frac{4}{9}$  nên hàm số có một điểm cực trị là  $x = \frac{4}{9} \Rightarrow$  Chọn đáp án C.

**Ví dụ 18:** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1+x}$ .

- A.  $\max y = 2\sqrt{2}; \min y = \sqrt[4]{2}$ .
- B.  $\max y = 2; \min y = 0$ .
- C.  $\max y = 2\sqrt{2}; \min y = 0$ .
- D.  $\max y = 2; \min y = \sqrt[4]{2}$ .

Lời giải:

TXĐ:  $D = [-1; 1]$ .

Ta có:  $y = \sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1+x} = (1-x)^{\frac{1}{4}} + (1+x)^{\frac{1}{4}}$ .

Đạo hàm:  $y' = \frac{1}{4}(1-x)^{-\frac{3}{4}} \cdot (-1) + \frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{4}} = \frac{-1}{4\sqrt[4]{(1-x)^3}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{(1+x)^3}}, x \in (-1; 1)$ .

Khi đó:  $y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt[4]{(1-x)^3} = \sqrt[4]{(1+x)^3} \Leftrightarrow (1-x)^3 = (1+x)^3 \Leftrightarrow 1-x = 1+x \Leftrightarrow x = 0$ .

Ta lại có:  $y(-1) = y(1) = \sqrt[4]{2}; y(0) = 2 \Rightarrow \begin{cases} \max y = 2 \\ \min y = \sqrt[4]{2} \end{cases} \Rightarrow$  Chọn đáp án D.



**Ví dụ 19 [THPT Chuyên Sơn La – 2017]:** Cho  $4^x + 4^{-x} = 7$ . Biểu thức  $P = \frac{5 + 2^x + 2^{-x}}{8 - 4 \cdot 2^x - 4 \cdot 2^{-x}}$  có giá trị bằng

A.  $P = \frac{3}{2}$ .

B.  $P = -\frac{5}{2}$ .

C.  $P = 2$ .

D.  $P = -2$ .

**Lời giải:**

Ta có:  $4^x + 4^{-x} = 7 \Leftrightarrow (2^x)^2 + 2 + (2^{-x})^2 = 9 \Leftrightarrow (2^x)^2 + 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} + (2^{-x})^2 = 9$

$$\Leftrightarrow (2^x + 2^{-x})^2 = 9 \xrightarrow{2^x + 2^{-x}} 2^x + 2^{-x} = 3.$$

Khi đó:  $P = \frac{5 + 2^x + 2^{-x}}{8 - 4 \cdot 2^x - 4 \cdot 2^{-x}} = \frac{5 + (2^x + 2^{-x})}{8 - 4(2^x + 2^{-x})} = \frac{5 + 3}{8 - 4 \cdot 3} = -2 \Rightarrow$  Chọn đáp án D.

**Bài tập tương tự [THPT Chuyên Lương Thế Vinh – Hà Nội – Lần 2 – 2017]:** Biết rằng  $3^x - 3^{-x} = 4$ .

Tính giá trị của biểu thức  $T = \frac{27^x - 3^{-3x} - 4}{9^x + 9^{-x}}$ .

A.  $T = 4$ .

B.  $T = 9$ .

C.  $T = \frac{15}{4}$ .

D.  $T = 4$ .

Chọn đáp án A.

**Ví dụ 20:** Biết rằng biểu thức  $P = \sqrt[1.2.3]{a} \sqrt[2.3.4]{a} \sqrt[3.4.5]{a} \dots \sqrt[n(n+1)(n+2)]{a}$  (trong đó  $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$ ) được biểu diễn dưới dạng lũy thừa là  $a^{\frac{65}{264}}$ . Tính giá trị của  $n$ ?

A.  $n = 100$ .

B.  $n = 10$ .

C.  $n = 90$ .

D.  $n = 20$ .

**Lời giải:**

Ta có:  $P = a^k$  với  $k = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ .

Suy ra:  $2k = \frac{3-1}{1.2.3} + \frac{4-2}{2.3.4} + \dots + \frac{n+2-n}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

Khi đó:  $P = a^k = a^{\frac{65}{264}} \Leftrightarrow k = \frac{65}{264} \Leftrightarrow 2k = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{130}{264}$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{(n+1)(n+2)} = \frac{130}{264} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{132} \Leftrightarrow (n+1)(n+2) = 132 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 10 & (tm) \\ n = -13 & (loại) \end{cases}$$

Vậy  $n = 10 \Rightarrow$  Chọn đáp án B.

**Cách khác:**

Ta có:  $P = a^k$  với  $k = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{X=1}^n \frac{1}{X(X+1)(X+2)}$ .

+ Nhập vào máy tính cầm tay:  $\sum_{X=1}^{100} \frac{1}{X(X+1)(X+2)}$  ta được

kết quả:  $\frac{2575}{10302} \neq \frac{65}{264} \Rightarrow$  Loại A.

+ Bấm  $\leftarrow$  và sửa biểu thức lại thành:  $\sum_{X=1}^{100} \frac{1}{X(X+1)(X+2)}$

ta được kết quả:  $\frac{65}{264} \Rightarrow$  Chọn đáp án B.

**Ví dụ 21 [Sở GD & ĐT Hà Nội – Lần 1 – 2017]:**

Cho  $f(x) = e^{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}}}$ . Biết rằng  $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \dots f(2017) = e^{\frac{m}{n}}$  với  $m, n$  là các số tự nhiên và  $\frac{m}{n}$  tối giản. Tính  $m - n^2$ .

- A.  $m - n^2 = 2018$ . B.  $m - n^2 = 1$ . C.  $m - n^2 = -2018$ . D.  $m - n^2 = -1$ .

**Lời giải:**

$$\text{Ta có: } g(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + (x+1)^2 + x^2(x+1)^2}}{x(x+1)} = \frac{x^2 + x + 1}{x(x+1)} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

$$\text{Suy ra: } g(1) + g(2) + g(3) + \dots + g(2017) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + 1 + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2018} = 2018 - \frac{1}{2018}.$$

$$\text{Khi đó } f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \dots f(2017) = e^{g(1) + g(2) + g(3) + \dots + g(2017)} = e^{2018 - \frac{1}{2018}} = e^{\frac{2018^2 - 1}{2018}} = e^{\frac{m}{n}} \Rightarrow \begin{cases} m = 2018^2 - 1 \\ n = 2018 \end{cases}.$$

Vậy  $m - n^2 = 2018^2 - 1 - 2018^2 = -1 \Rightarrow$  Chọn đáp án D.

**Ví dụ 22:** Giả sử  $a$  và  $b$  là các số thực thỏa mãn  $3 \cdot 2^a + 2^b = 7\sqrt{2}$  và  $5 \cdot 2^a - 2^b = 9\sqrt{2}$ . Tính  $a + b$ .

- A. 3. B. 2. C. 4. D. 1.

**Lời giải:**

$$\text{Đặt: } \begin{cases} 2^a = x \\ 2^b = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 7\sqrt{2} \\ 5x - y = 9\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^a = 2\sqrt{2} \\ 2^b = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a + b = 2 \Rightarrow \text{Chọn đáp án B.}$$

**Ví dụ 23:** Cho  $x, y, z$  là ba số thực khác 0 thỏa mãn  $2^x = 5^y = 10^{-z}$ . Tính  $A = xy + yz + zx$ .

- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

**Lời giải:**

$$\text{Ta có: } 2^x = 5^y = 10^{-z} = t. \Rightarrow \begin{cases} 2 = t^{\frac{1}{x}} \\ 5 = t^{\frac{1}{y}} \\ 10 = t^{-\frac{1}{z}} \end{cases}. \text{ Và: } 2 \cdot 5 = 10 \Rightarrow t^{\frac{1}{x}} \cdot t^{\frac{1}{y}} = t^{-\frac{1}{z}} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \Leftrightarrow xy + yz + zx = 0.$$

$\Rightarrow$  Chọn đáp án B.

**Ví dụ 24:** Cho hai số thực  $a, b$  thỏa mãn  $a > 0, 0 < b < 2$ . Tìm giá trị nhỏ nhất  $P_{\min}$  của biểu thức

$$P = \frac{(2b)^a}{(2^a - b^a)^2} + \frac{2^a + 2b^a}{2b^a}.$$

- A.  $P_{\min} = \frac{9}{4}$ . B.  $P_{\min} = \frac{7}{4}$ . C.  $P_{\min} = \frac{13}{4}$ . D.  $P_{\min} = 4$ .

**Lời giải:**

$$\text{Đặt } x = 2^a > 1, y = b^a < x \text{ khi đó ta có } P = \frac{xy}{(x-y)^2} + \frac{x+2y}{2y} = \left(\frac{x}{y}\right) \frac{1}{\left(\frac{x}{y} - 1\right)^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{y}\right) + 1.$$

$$\text{Đặt } \frac{x}{y} = t > 1 \text{ ta có } P = f(t) = \frac{t}{(t-1)^2} + \frac{t}{2} + 1 \text{ và ta tìm được } P_{\min} = \frac{13}{4} \Rightarrow \text{Chọn đáp án C.}$$

**Ví dụ 25:** Cho các số thực  $a, b$  thỏa mãn điều kiện:  $\sqrt{a^2 + \sqrt[3]{a^4 b^2}} + \sqrt{b^2 + \sqrt[3]{a^2 b^4}} = 1$ . Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của  $P = a + b$ . Xác định tích  $Mm$ ?

A.  $-\frac{1}{2}$ .

B.  $-2$ .

C.  $-1$ .

D.  $\frac{1}{2}$ .

*Lời giải:*

Ta có:  $\sqrt{a^2 + \sqrt[3]{a^4 b^2}} + \sqrt{b^2 + \sqrt[3]{a^2 b^4}} = 1$

$$\Leftrightarrow a^2 + \sqrt[3]{a^4 b^2} + b^2 + \sqrt[3]{a^2 b^4} + 2\sqrt{a^2 b^2 + a^2 \sqrt[3]{a^2 b^4} + b^2 \sqrt[3]{a^4 b^2} + a^2 b^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow a^2 + \sqrt[3]{a^4 b^2} + b^2 + \sqrt[3]{a^2 b^4} + 2\sqrt{\left(\sqrt[3]{a^4 b^2} + \sqrt[3]{a^2 b^4}\right)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 3\sqrt[3]{a^4 b^2} + b^2 + 3\sqrt[3]{a^2 b^4} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}\right)^3 = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \text{ với } x = \sqrt[3]{a}; y = \sqrt[3]{b}.$$

Khi đó:  $-(x^2 + y^2) \leq P = a + b = x^3 + y^3 \leq x^2 + y^2$ .

Do đó  $\begin{cases} M=1 \\ m=-1 \end{cases} \Rightarrow Mm = -1 \Rightarrow \text{Chọn đáp án C.}$

**D. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM RÈN LUYỆN**

**Câu 1. [THPT Chuyên ĐH Vinh – Lần 1 – 2017]** Cho các số thực  $a, b, \alpha (a > b \geq 0, \alpha \neq 1)$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$ . B.  $(a+b)^\alpha = a^\alpha + b^\alpha$ . C.  $(a-b)^\alpha = a^\alpha - b^\alpha$ . D.  $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$ .

**Câu 2. [THPT Ngô Gia Tự – Lần 1 – 2017]** Cho  $a, b > 0; m, n \in \mathbb{N}^*$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ . B.  $\sqrt[n]{ab^m} = a.b^{\frac{m}{n}}$ . C.  $\sqrt[n]{a^m} = a^{m-n}$ . D.  $\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = a^{\frac{1}{m.n}}$ .

**Câu 3. [Sở GDĐT Hà Nam – Lần 1 – 2017]** Với các số thực  $a, b$  bất kỳ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $e^{ab} = e^a.e^b$ . B.  $e^{a+b} = e^a + e^b$ . C.  $e^{a+b} = e^a.e^b$ . D.  $e^{ab} = e^a + e^b$ .

**Câu 4. [THPT Ngô Gia Tự – Lần 1 – 2017]** Cho  $a, b > 0; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Mệnh đề nào sau đây sai?

A.  $(a.b)^\alpha = a^\alpha.b^\alpha$ . B.  $a^\alpha.b^\beta = (ab)^{\alpha+\beta}$ . C.  $(a^\alpha)^\beta = a^{\frac{\alpha}{\beta}}, \beta \neq 0$ . D.  $\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$ .

**Câu 5. [THPT Chuyên ĐH Vinh – Lần 4 – 2017]** Cho  $a, b$  là các số thực dương và  $x, y$  là các số thực bất kỳ. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A.  $a^{x+y} = a^x + a^y$ . B.  $\left(\frac{a}{b}\right)^x = a^x.b^{-x}$ . C.  $a^x.b^y = (ab)^{xy}$ . D.  $(a+b)^x = a^x + b^x$ .

**Câu 6. [THPT Lạng Giang – Lần 1 – 2017]** Khẳng định nào sau đây đúng :

A.  $a^{-n}$  xác định với mọi  $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \forall n \in \mathbb{N}$ .  
B.  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \forall a \in \mathbb{R}$ . C.  $a^0 = 1, \forall a \in \mathbb{R}$ .  
D.  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \forall a \in \mathbb{R}; \forall m, n \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 7. [THPT Lê Thánh Tông – Quảng Nam – Lần 1 – 2017]** Cho các đẳng thức thức sau:

$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}, (x \geq 0)$   $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} (x > 0)$   $\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, (x \neq 0)$

A. Có ba đẳng thức đúng. B. Có hai đẳng thức đúng.  
C. Có một đẳng thức đúng. D. Không có đẳng thức nào đúng.

**Câu 8.** Với số dương  $a$  và các số nguyên dương  $m, n$  bất kỳ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A.  $a^{m^n} = (a^m)^n$ . B.  $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ . C.  $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$ . D.  $a^m.a^n = a^{m.n}$ .

**Câu 9.** Cho mệnh đề “Với mọi  $a, b, x \in \mathbb{R}$ , nếu  $0 < a < b$  thì  $a^x > b^x$ ”. Mệnh đề đúng khi

A.  $x < 0$ . B.  $0 < x < 1$ . C.  $x > 1$ . D.  $x > 0$ .

**Câu 10.** Cho  $a \in \left(0; \frac{2}{e}\right), \alpha, \beta$  là những số thực tùy ý. Khẳng định nào sau đây là sai?

A.  $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$ . B.  $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$ . C.  $a^\alpha.a^\beta = a^{\alpha+\beta}$ . D.  $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$ .

**Câu 11.** Cho  $(a-1)^{\frac{2}{3}} < (a-1)^{\frac{1}{3}}$ . Khi đó, ta có thể kết luận gì về  $a$ ?

A.  $a > 2$ . B.  $a > 1$ . C.  $1 < a < 2$ . D.  $0 < a < 1$ .

**Câu 12.** Phát biểu nào sau đây là đúng?

A.  $a^m > a^n \Leftrightarrow m > n$ . B.  $a^m < a^n \Leftrightarrow m < n$ .  
C. Nếu  $a < b$  thì  $a^m < b^m \Leftrightarrow m > 0$ . D. Cả 3 đáp án trên đều sai.

**Câu 13.** Cho các kết luận sau:

I.  $\sqrt{17} > \sqrt[3]{28}$ . II.  $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$ . III.  $4^{\sqrt{5}} < 4^{\sqrt{7}}$ . IV.  $\sqrt[4]{13} < \sqrt[5]{23}$ .

Kết luận nào *sai*?

- A. I. B. II và III. C. III. D. II và IV.

**Câu 14.** Khẳng định nào sau đây *sai*?

A.  $2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}}$ . B.  $(\sqrt{2}-1)^{2016} > (\sqrt{2}-1)^{2017}$ .  
C.  $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018} < \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2017}$ . D.  $(\sqrt{3}-1)^{2017} > (\sqrt{3}-1)^{2016}$ .

**Câu 15.** Nếu  $m = (a-1)^{\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{5}}}$ ,  $n = (a-1)^{\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}}$ ,  $p = (a-1)^{\frac{1}{9}}$ , ( $1 < a < 2$ ) thì kết luận nào sau đây là đúng?

- A.  $m > n > p$ . B.  $m < n < p$ . C.  $m < p < n$ . D.  $n < m < p$ .

**Câu 16.** Cho biểu thức  $(a-1)^{\frac{2}{3}} < (a-1)^{\frac{1}{3}}$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $a > 1$ . B.  $a > 2$ . C.  $0 < a < 1$ . D.  $1 < a < 2$ .

**Câu 17.** Cho biểu thức  $(a-1)^{-\frac{2}{3}} \leq (a-1)^{-\frac{1}{3}}$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $a \geq 2$ . B.  $1 \leq a \leq 2$ . C.  $\begin{cases} a < 1 \\ a > 2 \end{cases}$ . D.  $\begin{cases} a < 1 \\ a \geq 2 \end{cases}$ .

**Câu 18. [THPT Chuyên ĐH Vinh – Lần 2 – 2017]** Giả sử  $a$  là số thực dương, khác 1. Biểu thức  $\sqrt{a^3 a}$  được viết dưới dạng  $a^a$ . Khi đó

- A.  $a = \frac{2}{3}$ . B.  $a = \frac{11}{6}$ . C.  $a = \frac{1}{6}$ . D.  $a = \frac{5}{3}$ .

**Câu 19.** Viết dưới dạng lũy thừa thì số  $\sqrt[5]{2^3 \sqrt{2} \sqrt{2}}$  bằng

- A.  $2^{\frac{3}{10}}$ . B.  $2^{\frac{7}{10}}$ . C.  $2^{\frac{17}{10}}$ . D.  $2^{\frac{7}{30}}$ .

**Câu 20.** Biểu thức  $K = \sqrt[3]{\frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}}}}$  viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là

- A.  $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{12}}$ . B.  $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ . C.  $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{8}}$ . D.  $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}}$ .

**Câu 21.** Biến đổi  $\sqrt[3]{x^5 \cdot \sqrt[4]{x}}$ , ( $x > 0$ ) thành dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ ta được

- A.  $x^{\frac{20}{3}}$ . B.  $x^{\frac{23}{12}}$ . C.  $x^{\frac{21}{12}}$ . D.  $x^{\frac{12}{5}}$ .

**Câu 22.** Biểu thức  $Q = \sqrt{a^4 \sqrt[3]{a^2}}$ ,  $\forall a > 0$ ;  $a \neq 1$  đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.  $Q = a^{\frac{5}{4}}$ . B.  $Q = a^{\frac{5}{2}}$ . C.  $Q = a^{\frac{7}{3}}$ . D.  $Q = a^{\frac{8}{3}}$ .

**Câu 23. [THPT Chuyên Quốc Học Huế – Lần 1 – 2017]** Cho  $x > 0$ . Hãy biểu diễn biểu thức  $\sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}}$  dưới dạng lũy thừa của  $x$  với số mũ hữu tỉ?

- A.  $x^{\frac{1}{8}}$ . B.  $x^{\frac{7}{8}}$ . C.  $x^{\frac{3}{8}}$ . D.  $x^{\frac{5}{8}}$ .

**Câu 24. [Đề minh họa – Bộ GD & ĐT – 2017]** Cho biểu thức  $P = \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x^3}}$  với  $x > 0$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $P = x^{\frac{1}{2}}$ . B.  $P = x^{\frac{13}{24}}$ . C.  $P = x^{\frac{1}{4}}$ . D.  $P = x^{\frac{2}{3}}$ .

**Câu 25. [THPT Nguyễn Quang Diệu – Lần 1 – 2017]** Cho biểu thức  $P = x \cdot \sqrt[5]{x \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x}}$ , ( $x > 0$ ). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $P = x^{\frac{2}{3}}$ . B.  $P = x^{\frac{3}{10}}$ . C.  $P = x^{\frac{13}{10}}$ . D.  $P = x^{\frac{1}{2}}$ .

**Câu 26.** Rút gọn biểu thức  $\sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}}} : x^{\frac{11}{16}}$ , ( $x > 0$ ) được kết quả là

- A.  $\sqrt[6]{x}$ . B.  $\sqrt[4]{x}$ . C.  $\sqrt[8]{x}$ . D.  $\sqrt{x}$ .

**Câu 27. [THPT Lạng Giang – Lần 1 – 2017]** Viết biểu thức  $\sqrt[5]{\frac{b}{a} \sqrt[3]{\frac{a}{b}}}$ , ( $a, b > 0$ ) về dạng lũy thừa  $\left(\frac{a}{b}\right)^m$  ta được  $m = ?$ .

- A.  $\frac{2}{15}$ . B.  $\frac{4}{15}$ . C.  $\frac{2}{5}$ . D.  $\frac{-2}{15}$ .

**Câu 28. [THPT Nguyễn Thị Minh Khai – Lần 1 – 2017]** Biểu thức  $\sqrt[3]{\frac{a}{b} \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^5}} : \left(\frac{a}{b}\right)^{-3}$  được viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là

- A.  $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{5}{2}}$ . B.  $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{5}{4}}$ . C.  $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{5}{12}}$ . D.  $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{5}{6}}$ .

**Câu 29. [THPT Lê Thánh Tông – Quảng Nam – Lần 1 – 2017]**

Cho biểu thức  $P = \sqrt{x^k \sqrt{x^2 \sqrt{x^3}}}$ , ( $x > 0$ ). Xác định  $k$  sao cho biểu thức  $P = x^{\frac{23}{24}}$ .

- A.  $k = 3$ . B.  $k = 2$ . C.  $k = 4$ . D. Không tồn tại  $k$ .

**Câu 30.** Cho  $a, b > 0$  viết  $a^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{a}$  và  $\sqrt[3]{b \sqrt{b \sqrt{b}}}$  về dạng  $a^x, b^y$ ;  $x, y \in \mathbb{R}$ . Khi đó  $6x + 12y$  là

- A. 17. B.  $\frac{7}{12}$ . C. 14. D.  $\frac{7}{6}$ .

**Câu 31.** Giá trị của biểu thức  $M = 81^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} - 36^{0,5}$  là

- A. 7. B. 5. C. 6. D. 8.

**Câu 32.** Giá trị của biểu thức  $P = \frac{2^3 \cdot 2^{-1} + 5^{-3} \cdot 5^4}{10^{-3} : 10^{-2} - (0,1)^0}$  là

- A. -9. B. 9. C. -10. D. 10.

**Câu 33.** Giá trị của biểu thức  $4^{2+2\sqrt{5}} : 16^{\sqrt{5}}$  là

- A. 16. B. 8. C. 1. D.  $16^{\sqrt{5}}$ .

**Câu 34.** Cho các khẳng định

- (I):  $(-27)^{\frac{1}{3}} = -3$ . (II):  $(-2)^{-5} = -32$ .  
(III):  $a^0 = 1, \forall a \in \mathbb{R}$ . (IV):  $\sqrt[5]{a^2} = a^{\frac{5}{2}}, \forall a \in \mathbb{R}$ .

Khẳng định đúng là

- A. (I) B. (I) và (II).  
C. (I), (II) và (IV). D. (I), (II), (III) và (IV).

**Câu 35. [Đề tham khảo – Bộ GD & ĐT – 2017]**

Tính giá trị của biểu thức  $P = (7 + 4\sqrt{3})^{2017} \cdot (4\sqrt{3} - 7)^{2016}$ .

- A.  $P = 1$ . B.  $P = 7 - 4\sqrt{3}$ . C.  $P = 7 + 4\sqrt{3}$ . D.  $P = \frac{1}{3}$ .

**Câu 36.** Cho biểu thức  $\sqrt{(a^\pi + b^\pi)^2 - \left(4^{\frac{1}{\pi}} ab\right)^\pi}$  với  $0 < a < b$ . Khi đó, biểu thức có thể rút gọn là

- A.  $b^\pi - a^\pi$ . B.  $a^\pi$ . C.  $a^\pi - b^\pi$ . D.  $a^\pi + b^\pi$ .

**Câu 37. [THPT Chuyên Lê Quý Đôn – Lần 1 – 2017]** Cho  $x, y$  là các số thực dương và  $x \neq y$ .

Biểu thức  $A = \sqrt{(x^{2x} + y^{2x})^2 - \left(4^{\frac{1}{2x}} xy\right)^{2x}}$  bằng

- A.  $y^{2x} - x^{2x}$ . B.  $|x^{2x} - y^{2x}|$ . C.  $(x - y)^{2x}$ . D.  $x^{2x} - y^{2x}$ .

**Câu 38. [THPT Kim Liên – Hà Nội – 2017]** Cho  $a$  là số thực dương. Rút gọn biểu thức

$$P = a^{2\sqrt{2}} \left( \frac{1}{a^{\sqrt{2}+1}} \right)^{\sqrt{2}+1}.$$

- A.  $P = a^{-3}$ . B.  $P = a^3$ . C.  $P = a^{2\sqrt{2}}$ . D.  $P = a^{\sqrt{2}}$ .

**Câu 39.** Rút gọn biểu thức  $\frac{x^{\frac{5}{4}}y + xy^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}}$ ,  $(x, y > 0)$  được kết quả là

- A.  $2xy$ . B.  $xy$ . C.  $\sqrt{xy}$ . D.  $2\sqrt{xy}$ .

**Câu 40.** Rút gọn biểu thức  $\frac{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{9}{4}}}{\frac{1}{a^{\frac{1}{4}}} - a^{\frac{5}{4}}}$ ,  $(0 < a \neq 1)$  được kết quả là

- A.  $1 + a$ . B.  $1 - a$ . C.  $2a$ . D.  $a$ .

**Câu 41.** Rút gọn biểu thức  $\frac{a^{\sqrt{7}+1} \cdot a^{2-\sqrt{7}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}}$ ,  $(a > 0)$  được kết quả là

- A.  $a^4$ . B.  $a$ . C.  $a^5$ . D.  $a^3$ .

**Câu 42.** Rút gọn biểu thức  $\frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}}$ ,  $(a, b > 0, a \neq b)$  được kết quả là

- A.  $\frac{1}{\sqrt[3]{(ab)^2}}$ . B.  $\sqrt[3]{(ab)^2}$ . C.  $\frac{1}{\sqrt[3]{ab}}$ . D.  $\sqrt[3]{ab}$ .

**Câu 43. [THPT Nho Quan A – Lần 1 – 2017]** Cho  $D = \left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)^2 \left(1 - 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}\right)^{-1}$ . Biểu thức rút gọn của  $D$  là

- A.  $x$ . B.  $2x$ . C.  $x + 1$ . D.  $x - 1$ .

**Câu 44. [THPT Lam Kinh – Thanh Hóa – Lần 1 – 2017]**

Rút gọn biểu thức  $P = \frac{(a^{\sqrt{2}-1})^{\sqrt{2}+1}}{a^{\sqrt{3}-3} \cdot a^{1-\sqrt{3}}}$ , ( $0 < a \neq 1$ ) được kết quả là

- A.  $a^4$ . B.  $\frac{1}{a^4}$ . C. 1. D.  $a^3$ .

**Câu 45.** Cho  $a$  là số thực dương. Đơn giản biểu thức  $P = \frac{a^{\frac{4}{3}} \left( a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}} \right)}{a^{\frac{1}{4}} \left( a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}} \right)}$  ta được kết quả là

- A.  $P = a$ . B.  $P = a(a+1)$ . C.  $P = a+1$ . D.  $P = a-1$ .

**Câu 46.** Rút gọn biểu thức  $A = \frac{a^{\frac{4}{3}} - 8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}} + 2\sqrt[3]{ab} + 4b^{\frac{2}{3}}} \cdot \left( 1 - 2\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \right)^{-1} - a^{\frac{2}{3}}$  (giả thiết biểu thức có nghĩa)

được kết quả là

- A. 1. B.  $a+b$ . C. 0. D.  $2a-b$ .

**Câu 47.** Với  $0 < x < 1$  thì  $(1-x)\sqrt[4]{\frac{1}{1-x^2}}$  bằng

- A.  $-\sqrt[4]{\frac{(1-x)^3}{1+x}}$ . B.  $-\sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}}$ . C.  $\sqrt[4]{\frac{(1-x)^3}{1+x}}$ . D.  $\sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}}$ .

**Câu 48.** Với  $x \geq 0$ , đơn giản biểu thức  $\sqrt[3]{\sqrt{x^6 y^{12}}} - \left( \sqrt[5]{\sqrt{xy^2}} \right)^5$  ta được kết quả

- A.  $-2xy^2$ . B. 0. C.  $-xy^2$ . D.  $2xy^2$ .

**Câu 49.** Cho  $M = \sqrt{a^2 + \sqrt[3]{a^4 b^2}} + \sqrt{b^2 + \sqrt[3]{a^2 b^4}}$  và  $N = \sqrt{\left( \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} \right)^3}$ . Ta có kết luận

- A.  $M > N$ . B.  $M+N=0$ . C.  $M < N$ . D.  $M=N$ .

**Câu 50.** Cho hàm số  $f(a) = \frac{a^{-\frac{1}{3}} \left( \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a^4} \right)}{a^{\frac{1}{8}} \left( \sqrt[8]{a^3} - \sqrt[8]{a^{-1}} \right)}$  với  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ . Tính giá trị  $M = f(2017^{2016})$ .

- A.  $M = 2017^{1008} - 1$ . B.  $M = -2017^{1008} - 1$ .  
C.  $M = 2017^{2016} - 1$ . D.  $M = 1 - 2017^{2016}$ .

**Câu 51.** Cho  $a$  là số thực dương khác 1 và thỏa mãn  $\frac{1}{2}(a^\alpha + a^{-\alpha}) = 1$ . Tìm  $\alpha$

- A.  $\alpha \in \mathbb{R}$ . B.  $\alpha = 1$ . C.  $\alpha = 0$ . D.  $\alpha = -1$ .

**Câu 52.** Cho  $9^x + 9^{-x} = 23$ . Khi đó biểu thức  $K = \frac{5+3^x+3^{-x}}{1-3^x-3^{-x}}$  có giá trị bằng

- A.  $-\frac{5}{2}$ . B.  $\frac{1}{2}$ . C.  $\frac{3}{2}$ . D. 2.

**Câu 53.** Cho  $a$  và  $b$  là hai số thực thỏa mãn đồng thời hai điều kiện  $a+b=1$  và  $4^{-2a} + 4^{-2b} = \frac{1}{2}$ .

Tính giá trị của biểu thức  $T = 2a - b$ .

- A.  $T = -\frac{1}{2}$ . B.  $T = -\frac{1}{4}$ . C.  $T = \frac{1}{4}$ . D.  $T = \frac{1}{2}$ .

**Câu 54.** Cho biểu thức  $A = (a+1)^{-1} + (b+1)^{-1}$ . Nếu  $a = (2+\sqrt{3})^{-1}$ ,  $b = (2-\sqrt{3})^{-1}$  thì giá trị của  $A$  là

- A. 1.                                      B. 2.                                      C. 3.                                      D. 4.

**Câu 55.** Theo hình thức lãi kép một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo kỳ hạn một năm với lãi suất 1,75% (giả sử lãi suất hàng năm không thay đổi) thì sau hai năm người đó thu được một số tiền là

- A. 103,351 triệu đồng.                                      B. 103,530 triệu đồng.  
C. 103,531 triệu đồng.                                      D. 103,500 triệu đồng.

**Câu 56.** Hàm số  $y = (x^2 + 1)^{-25}$  có tập xác định là

- A.  $\mathbb{R}$ .                                      B.  $(1; +\infty)$ .                                      C.  $(0; +\infty)$ .                                      D.  $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ .

**Câu 57.** Hàm số nào sau đây có tập xác định là  $\mathbb{R}$ ?

- A.  $y = (x^2 + 4)^{0,1}$ .                                      B.  $y = (x + 4)^{\frac{1}{2}}$ .                                      C.  $y = \left(\frac{x+2}{x}\right)^3$ .                                      D.  $y = (x^2 + 2x - 3)^{-2}$ .

**Câu 58.** Tập xác định của hàm số  $y = (x - 2)^{-3}$  là

- A.  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ .                                      B.  $\mathbb{R}$ .                                      C.  $(-\infty; 2)$ .                                      D.  $(2; +\infty)$ .

**Câu 59. [THPT Chuyên Thái Bình – Lần 3 – 2017]** Tìm tập xác định  $D$  của hàm số  $f(x) = (4x - 3)^{\frac{1}{2}}$ .

- A.  $D = \mathbb{R}$ .                                      B.  $D = \mathbb{R} \setminus \left(\frac{3}{4}\right)$ .                                      C.  $D = \left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$ .                                      D.  $D = \left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$ .

**Câu 60. [THPT Chuyên KHTN Hà Nội – Lần 4 – 2017]** Tập xác định của hàm số  $y = (x^2 - x)^{\sqrt{2}}$  là

- A.  $D = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$ .                                      B.  $D = (-\infty; +\infty)$ .  
C.  $D = (1; +\infty)$ .                                      D.  $D = (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$ .

**Câu 61. [THPT Chuyên Bãi Cháy – Hạ Long – 2017]** Tìm tập xác định của hàm số  $y = (x - 2)^{-\sqrt{3}}$ .

- A.  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ .                                      B.  $(0; +\infty)$ .                                      C.  $\mathbb{R}$ .                                      D.  $(2; +\infty)$ .

**Câu 62. [THPT Chuyên ĐH Vinh – Lần 1 – 2017]** Tập xác định của hàm số  $y = (2x - x^2)^{-\pi}$  là:

- A.  $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ .                                      B.  $(0; 2)$ .                                      C.  $[0; 2]$ .                                      D.  $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ .

**Câu 63.** Tập xác định của hàm số  $y = (x^3 - 27)^{\frac{\pi}{3}}$  là

- A.  $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ .                                      B.  $D = [3; +\infty)$ .                                      C.  $D = (3; +\infty)$ .                                      D.  $D = \mathbb{R}$ .

**Câu 64.** Tìm tập xác định  $D$  của hàm số  $y = (x^2 + 2x - 3)^{\sqrt{2}}$ .

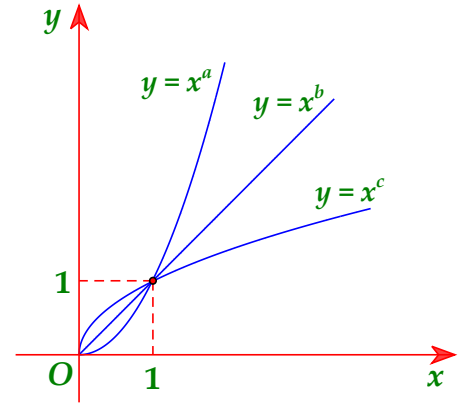
- A.  $D = \mathbb{R}$ .                                      B.  $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$ .                                      C.  $D = (0; +\infty)$ .                                      D.  $D = (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$ .

**Câu 65. [THPT Xuân Trường – Lần 1 – 2017]** Tập xác định của hàm số  $y = (x + 3)^{\frac{3}{2}} - \sqrt[4]{5 - x}$  là

- A.  $D = (-3; 5]$ .                                      B.  $D = (-3; +\infty)$ .                                      C.  $D = (-3; 5)$ .                                      D.  $D = (-3; +\infty) \setminus \{5\}$ .

**Câu 66.** Hình vẽ bên là đồ thị các hàm số  $y = x^a$ ,  $y = x^b$ ,  $y = x^c$  trên miền  $(0; +\infty)$ . Hỏi trong các số  $a$ ,  $b$ ,  $c$  số nào nhận giá trị trong khoảng  $(0; 1)$ ?

- A. Số  $a$ .
- B. Số  $a$  và số  $c$ .
- C. Số  $b$ .
- D. Số  $c$ .



**Câu 67.** Cho hàm số  $y = x^{\frac{\pi}{4}}$ . Trong các kết luận sau, kết luận nào *sai*?

- A. Tập xác định  $D = (0; +\infty)$ .
- B. Hàm số luôn luôn đồng biến với mọi  $x$  thuộc tập xác định.
- C. Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm  $I(1; 1)$ .
- D. Hàm số không có tiệm cận.

**Câu 68.** Cho hàm số  $y = x^{\frac{1}{3}}$ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào *sai*?

- A. Hàm số đồng biến trên tập xác định.
- B. Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm  $I(1; 1)$ .
- C. Tập xác định của hàm số là  $D = (0; +\infty)$ .
- D. Đồ thị hàm số nhận trục tung làm trục đối xứng.

**Câu 69.** Cho hàm số  $y = x^a$  với  $x > 0, a \in \mathbb{R}$ . Phát biểu nào sau đây đúng về hàm số đã cho?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ .
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ .
- C. Tập giá trị của hàm số là  $(0; +\infty)$ .
- D. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận khi  $a < 0$ .

**Câu 70.** Cho hàm số  $y = x^{-4}$ . Tìm mệnh đề *sai* trong các mệnh đề sau.

- A. Đồ thị hàm số có một trục đối xứng.
- B. Đồ thị hàm số đi qua điểm  $(1; 1)$ .
- C. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.
- D. Đồ thị hàm số có một tâm đối xứng.

**Câu 71.** Trên đồ thị của hàm số  $y = x^{\frac{\pi}{2}+1}$  lấy điểm  $M_0$  có hoành độ  $x_0 = 2^{\frac{2}{\pi}}$ . Tiếp tuyến của (C) tại điểm  $M_0$  có hệ số góc bằng

- A.  $\pi + 2$ .
- B.  $2\pi$ .
- C.  $2\pi - 1$ .
- D. 3.

**Câu 72.** Đạo hàm của hàm số  $y = (3x - 1)^\pi$  là

- A.  $3\pi(3x - 1)^{\pi-1}$ .
- B.  $3(3x - 1)^\pi \ln(3x - 1)$ .
- C.  $(3x - 1)^\pi \ln(3x - 1)$ .
- D.  $\pi(3x - 1)^{\pi-1}$ .

**Câu 73.** Đạo hàm của hàm số  $y = \sqrt[5]{x}$  là

- A.  $\frac{1}{5\sqrt[5]{x}}$ .
- B.  $\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$ .
- C.  $\frac{4}{5\sqrt[5]{x^4}}$ .
- D.  $\frac{5}{\sqrt[5]{x^4}}$ .

**Câu 74.** Cho hàm số  $y = (2x+1)^{\frac{2}{5}}$ . Đạo hàm của hàm số là :

A.  $y' = \frac{2}{5}(2x+1)^{-\frac{3}{5}}$ .

B.  $y' = \frac{4}{5}(2x+1)^{-\frac{3}{5}}$ .

C.  $y' = 2(2x+1)^{\frac{2}{5}} \ln(2x+1)$ .

D.  $y' = (2x+1)^{\frac{2}{5}} \ln(2x+1)$ .

**Câu 75.** Xác định hàm số  $y = f(x)$ , biết  $f'(x) = \sqrt[3]{x} + x^3 + 1$  và  $f(1) = 2$ .

A.  $f(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}} + \frac{x^4}{4} + x - \frac{7}{2}$ .

B.  $f(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + \frac{x^4}{4} + x - \frac{7}{2}$ .

C.  $f(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{x^4}{4} + x$ .

D.  $f(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}} + \frac{x^4}{4} + x - \frac{7}{2}$ .

**Câu 76.** Cho  $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x-2}{x+1}}$ . Khi đó  $f'(0)$  bằng

A. 1.

B.  $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ .

C.  $\sqrt[3]{2}$ .

D. 4.

**Câu 77.** Cho hàm số  $y = (x+2)^{-2}$ . Hệ thức giữa  $y$  và  $y''$  không phụ thuộc vào  $x$  là

A.  $y'' + 2y = 0$ .

B.  $y'' - 6y^2 = 0$ .

C.  $2y'' - 3y = 0$ .

D.  $(y'')^2 - 4y = 0$ .

**Câu 78.** Tính đạo hàm của hàm số  $y = (1 - \cos 3x)^6$ .

A.  $y' = 6 \sin 3x (1 - \cos 3x)^5$ .

B.  $y' = 6 \sin 3x (\cos 3x - 1)^5$ .

C.  $y' = 18 \sin 3x (1 - \cos 3x)^5$ .

D.  $y' = 18 \sin 3x (\cos 3x - 1)^5$ .

**Câu 79.** Đạo hàm của hàm số  $y = (5x^2 - x + 2)^{\frac{1}{3}}$  là

A.  $y' = \frac{10x-1}{3\sqrt[3]{5x^2-x+2}}$ .

B.  $y' = \frac{10x-1}{\sqrt[3]{(5x^2-x+2)^2}}$ .

C.  $y' = \frac{10x-1}{3\sqrt[3]{(5x^2-x+2)^2}}$ .

D.  $y' = \frac{1}{\sqrt[3]{(5x^2-x+2)^2}}$ .

**Câu 80.** Cho  $\alpha$  là một số thực và hàm số  $y = \frac{1}{x^\alpha}$  đồng biến trên  $(0; +\infty)$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A.  $\alpha < 0$ .

B.  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ .

C.  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ .

D.  $\alpha > 0$ .

**Câu 81.** Cho hai hàm số  $f(x) = x^2$  và  $g(x) = x^{\frac{1}{2}}$ . Biết rằng  $\alpha > 0$  và  $f(\alpha) < g(\alpha)$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A.  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ .

B.  $0 < \alpha \leq 1$ .

C.  $\frac{1}{2} < \alpha < 2$ .

D.  $\alpha > 1$ .

**Câu 82.** Hàm số  $y = \sqrt{x} - \sqrt[4]{x}$ ,  $x > 0$  đồng biến trên khoảng

A.  $\left(0; \frac{1}{16}\right)$ .

B.  $\left(0; \frac{1}{4}\right)$ .

C.  $\left(\frac{1}{16}; +\infty\right)$ .

D.  $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$ .

**Câu 83.** Tìm các điểm cực trị của hàm số  $y = x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}} + 4x^{-\frac{2}{3}}$ , ( $x > 0$ ).

- A.  $x = 1$ . B.  $x = 1$  và  $x = -2$ . C.  $x = 2$ . D.  $x = 2$  và  $x = -1$ .

**Câu 84.** Tìm các điểm cực trị của hàm số  $y = x^{\frac{3}{5}}(4 - x)$ , ( $x > 0$ ).

- A.  $x = 2$ . B.  $x = \frac{3}{2}$ . C.  $x = 6$ . D.  $x = 4$ .

**Câu 85.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x^{\frac{2}{3}}(20 - x)$  trên đoạn  $[1; 10]$ .

- A.  $\max_{[1;10]} y = 10^{\frac{5}{3}}$ ;  $\min_{[1;10]} y = 0$ . B.  $\max_{[1;10]} y = 48$ ;  $\min_{[1;10]} y = 10^{\frac{5}{3}}$ .  
C.  $\max_{[1;10]} y = 15.5^{\frac{2}{3}}$ ;  $\min_{[1;10]} y = 19$ . D.  $\max_{[1;10]} y = 48$ ;  $\min_{[1;10]} y = 19$ .

**Câu 86.** Cho  $\alpha$  là một số thực dương và hàm số  $y = \frac{x^{\sqrt{\alpha}}}{x^{2\alpha}}$  nghịch biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.  $\alpha > 2\sqrt[3]{2}$ . B.  $\alpha > \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$ . C.  $0 < \alpha < 2\sqrt[3]{2}$ . D.  $0 < \alpha < \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$ .

**Câu 87.** Cho  $a, b$  là hai số dương. Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = x^a(1 - x)^b$  trên đoạn  $[0; 1]$  là

- A.  $\frac{a^a b^b}{(a+b)^{ab}}$ . B.  $\frac{a^b b^a}{(a+b)^{ab}}$ . C.  $\frac{a^a b^b}{(a+b)^{a+b}}$ . D.  $\frac{a^b b^a}{(a+b)^{a+b}}$ .