

ĐỊNH LÝ CƠ BẢN CỦA VI TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Thầy Aki Le – ĐH Pôn Pa

Trong bài viết nhỏ này, tôi sẽ trình bày định lý cơ bản của Vi tích phân và đưa ra một số ứng dụng của nó. Ở đây, tôi chỉ muốn đưa ra một góc nhìn liên quan định lý và không có định hướng đến việc hệ thống các kết quả theo một trật tự có hệ thống.

1. Định lý cơ bản của Vi tích phân

Để tránh sự phiền hà, trong bài viết này tôi không đưa ra định nghĩa tích phân xác định. Bạn đọc có thể tham khảo các cách tiếp cận khác nhau trong các giáo trình căn bản về giải tích, chẳng hạn sử dụng nguyên hàm; sử dụng tổng Riemann; sử dụng tổng Darboux. Trong bài viết này, tôi sẽ sử dụng một số ký hiệu sau:

$F(x)|_{x=a}$ để thay cho $F(a)$ và $\frac{d}{dx}F(x)$ để thay cho $F'(x)$ trong một số trường hợp cần thiết.

Ở đây, ngoài việc thừa nhận định nghĩa tích phân, ta còn thừa nhận một số tính chất của tích phân như:

Với f và g thỏa $\int_a^b f(x)dx, \int_a^b g(x)dx$ tồn tại và các số thực c, d , ta có các kết quả **bổ trợ**

1) $\int_a^b 0dx = 0,$

2) $\int_a^b (cf(x) + dg(x))(x)dx = c\int_a^b f(x)dx + d\int_a^b g(x)dx,$

3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ nếu $\int_a^c f(x)dx$ và $\int_c^b f(x)dx$ tồn tại.

4) Nếu $f(x) \geq g(x)$ với mọi $x \in [a; b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$

Các tính chất khác của tích phân nếu được sử dụng sẽ chứng minh lại. Ở đây, ta cũng qui ước:

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \text{ và } \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \text{ khi } a > b.$$

Trong lĩnh vực số học, định lý về sự phân tích một số tự nhiên ra thừa số nguyên tố chính là Định lý cơ bản của Số học. Trong Đại số, định lý về tồn tại nghiệm (phức) của đa thức bậc lớn hơn bằng một với hệ số phức chính là định lý cơ bản của Đại số. Tương tự như vậy, trong Giải tích/ Vi tích phân cũng có một định lý được gọi là Định lý cơ bản của Vi tích phân. Định lý là cầu nối hai vấn đề trung tâm của lĩnh vực Vi tích phân (đạo hàm và tích phân).

Định lý (Định lý cơ bản của Vi tích phân)

Cho $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục. Khi đó

i) $G(x) := \int_a^x f(t)dt, x \in [a,b]$ là một nguyên hàm của hàm f trên $[a;b]$, nghĩa là $G'(x) = f(x)$ với mọi $x \in [a;b]$.

ii) Với bất kỳ nguyên hàm F của f trên $[a;b]$, ta đều có

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a) \quad (*).$$

Chứng minh định lý được bỏ qua vì việc chứng minh tùy thuộc vào định nghĩa của tích phân. Thậm chí SGK Giải tích 12 đã sử dụng định lý này như định nghĩa của tích phân xác định.

Một số nhận xét:

- Ở đây đạo hàm tại $a(b)$ của G có thể hiểu là đạo hàm phải (đạo hàm trái) hoặc định nghĩa dựa vào sự mở rộng hàm G trên $(c;d) \supset [a;b]$.

- Phần thứ nhất, i), của Định lý cơ bản của Vi tích phân có thể viết lại dưới dạng

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t)dt \right) = f(x).$$

- Phần thứ hai, ii), của Định lý cơ bản của Vi tích phân được biết như công thức Newton- Leibniz và có thể phát biểu lại: Nếu F có đạo hàm liên tục trên $[a;b]$ thì

$$\int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a).$$

- “Định lý cơ bản của Vi tích phân” là tên gọi cho một định lý cụ thể chứ không phải là cách chung cho các định lý căn bản của Vi tích phân. Nó có vai trò quan trọng trong việc kết nối hai khái niệm quan trọng bậc nhất của Vi tích phân, đó là đạo hàm và tích phân. Đồng thời định lý cho ta sự liên hệ giữa tích phân xác định và tích phân bất định.

- Theo phần thứ nhất của Định lý, ta có $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ là một nguyên hàm của f trên $[a;b]$ và $G(b) = \int_a^b f(t)dt$. Điều này có vẻ mâu thuẫn với phần thứ hai của Định lý: $G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)dt$.

Tuy nhiên điều này không có điều gì bất ổn. Ta có $G(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$. Do đó,

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a) = G(b).$$

- Đẳng thức (*) không phụ thuộc vào nguyên hàm được chọn. Thật vậy, giả sử H là một nguyên hàm khác của f trên $[a; b]$; khi đó, theo định lý giá trị trung bình, ta nhận được $H = F + C$ trên $[a; b]$ với C là một hằng số thực (có thể xem như hàm hằng), và

$$H(b) - H(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt.$$

2. Một số hệ quả Định lý cơ bản của Vi tích phân

Hệ quả 1. Mọi hàm liên tục trên một đoạn thì có nguyên hàm trên đoạn đó.

Ví dụ 1. Tính $f'(0)$ với $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$.

Bình luận. Phần thứ nhất của Định lý cơ bản của Vi tích phân dẫn đến $g(x) = e^{x^2}$ có nguyên hàm. Tuy nhiên, như ta đã biết hàm này không có nguyên hàm sơ cấp. Chính vì thế, ta không cố gắng bỏ công sức để tìm công thức tường minh, ở hình thức đơn giản, của $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$ rồi từ đó ta tính đạo hàm của hàm f . Tuy vậy, ta có thể dễ dàng tìm được $f'(0)$ nhờ vào Định lý cơ bản của Vi tích phân.

Lời giải.

Áp dụng phần thứ nhất của Định lý cơ bản của Vi tích phân, ta nhận được $f'(x) = e^{x^2}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó $f'(0) = e^0 = 1$.

Ví dụ 2. Cho hàm $f(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{khi } x \neq 0, \\ 0 & \text{khi } x = 0. \end{cases}$

Chứng minh rằng f không liên tục tại 0 và f có nguyên hàm (trên $\mathbb{R}$) là

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{khi } x \neq 0, \\ 0 & \text{khi } x = 0. \end{cases}$$

Lời giải.

Ta có $f\left(\frac{1}{2k\pi}\right) = -1$, $f\left(\frac{1}{(2k+1)\pi}\right) = 1$ đồng thời các dãy $\left\{\frac{1}{2k\pi}\right\}$, $\left\{\frac{1}{(2k+1)\pi}\right\}$ đều hội tụ về 0. Tuy

nhien, $\lim_{k \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{2k\pi}\right) = -1 \neq 1 = \lim_{k \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{(2k+1)\pi}\right)$. Vì thế f không liên tục tại 0.

Mặt khác, hàm $g(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ chính là đạo hàm của $h(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Do đó

F là một nguyên hàm của f trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Để hoàn tất chứng minh ta cần kiểm tra $F'(0) = 0 = f(0)$.

Thật vậy, với $x \neq 0$, ta có $\left| \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \right| = |x| \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$. Điều này dẫn đến

$$-|x| \leq \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \leq |x|, \forall x \neq 0.$$

Hơn nữa, $\lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$.

Khi đó, áp dụng định lý kẹp, ta nhận được $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = 0$. Do đó, theo định nghĩa đạo hàm, $F'(0)$

tồn tại và $F'(0) = 0 = f(0)$. ■

Ví dụ này cho thấy điều kiện liên tục trong hệ quả 1 chỉ là điều kiện đủ và không là điều kiện cần.

Hệ quả 2. Nếu f' có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$ thì $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$ với mọi $x \in [a; b]$.

Hệ quả 3. Cho hàm số u khả vi trên khoảng I và hàm số f liên tục trên khoảng K chứa $\{a\} \cup u(I)$.

Khi đó $\frac{d}{dx} \left(\int_a^{u(x)} f(t)dt \right) = f(u(x))u'(x)$ với mọi $x \in I$.

Chứng minh. Phần thứ nhất của Định lý cơ bản của vi tích phân dẫn đến tồn tại hàm F là một nguyên hàm của hàm f trên khoảng K , nghĩa là $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$. Áp dụng phần thứ hai của Định lý cơ bản của vi tích phân dẫn đến $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$ với mọi $x \in K$. Hơn nữa, vì

$\int_a^{u(x)} f(t)dt = F(u(x)) - F(a)$ nên áp dụng công thức đạo hàm hàm hợp, ta nhận được

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^{u(x)} f(t)dt \right) = F'(u(x))u'(x) = f(u(x))u'(x). \quad \blacksquare$$

Hệ quả 4. Cho hàm $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in [a; b]$ và $\int_a^b f(t)dt = 0$. Khi đó $f(x) = 0$ với mọi $x \in [a; b]$.

Chứng minh. Xét hàm số $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ trên $[a; b]$. Ta có $F'(x) = f(x) \geq 0$ với mọi $x \in [a; b]$. Chính vì thế F là hàm không giảm. Do đó, $0 = F(a) \leq F(x) \leq F(b) = 0$ với mọi $x \in [a; b]$. Từ đó, ta thấy

$F(x) = 0$ với mọi $x \in [a; b]$. Vì vậy $f(x) = F'(x) = 0$. ■

Nhận xét. Kết quả này có thể suy ra từ kết quả bổ trợ 4) cùng phương pháp phản chứng.

Hệ quả 5. Cho hàm $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục và thỏa $f(x) > 0$ với mọi $x \in [a;b]$. Khi đó $\int_a^b f(x)dx > 0$.

Hệ quả 6 (Định lý giá trị trung bình cho tích phân) Cho hàm f liên tục trên $[a,b]$. Khi đó có số thực $c \in (a,b)$ sao cho

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt = f(c).$$

Chứng minh. Điều cần chứng minh tương đương $\int_a^b f(t)dt = f(c)(b-a)$.

Ta xét hàm $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ trên $[a;b]$. Hiển nhiên hàm này có đạo hàm trên $[a;b]$. Vì thế, theo định lý

Lagrange, tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $F(b) - F(a) = F'(c)(b-a)$. Điều này dẫn đến $\int_a^b f(t)dt = f(c)(b-a)$. ■

Nhận xét. Đại lượng $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$ được “gán” ý nghĩa là giá trị trung bình của hàm f trên $[a;b]$.

3. Một số ứng dụng của Định lý cơ bản của Vi tích phân

Bài toán 1. Cho hàm số f xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^{x^2-x} f(t)dt$.

Lời giải.

Xét $F(x) = \int_0^{x^2-x} f(t)dt$. Ta có hàm F khả vi trên $\mathbb{R}$, $F(0) = 0$, $F'(x) = f(x^2-x)(2x-1)$. Áp dụng nghĩa đạo hàm cùng Hệ quả 2, ta nhận được

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^{x^2-x} f(t)dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(0) = -f(0).$$

Bài toán 2. Cho hàm số $f:[0;1] \rightarrow \mathbb{R}$ được xác định bởi $f(x) = \int_0^{x^2-x} \sqrt{1+t^2}dt$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm f .

Lời giải.

Ta có $f'(x) = (2x-1)\sqrt{1-(x^2-x)^2}$.

Trên khoảng $(0;1)$, phương trình $f'(x) = 0$ chỉ có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{2}$.

Hàm liên tục f sẽ đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0;1]$. Hơn nữa, ta có

$$\min_{[0;1]} f = \min \left\{ f(0), f\left(\frac{1}{2}\right), f(1) \right\}.$$

Mặt khác $f(0) = f(1) = 0 < f\left(\frac{1}{2}\right)$. Do đó $\min_{[0;1]} f = f(0) = 0$.

Bài toán 3. Cho các số thực a, b và c thỏa $\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0$. Chứng minh phương trình

$ax^2 + bx + c = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $[0;1]$.

Lời giải. Xét hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$. Áp dụng Hệ quả 6, ta có ít nhất một số thực $x_0 \in (0;1)$

sao cho $\frac{1}{1-0} \int_0^1 f(t)dt = f(x_0)$.

Do đó $f(x_0) = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0$. Từ đó, ta thu được điều cần chứng minh.

Bài toán 4. Cho $f : [0;1] \rightarrow [0;1]$ là hàm liên tục trên $[0;1]$. Chứng minh rằng phương trình

$2x - \int_0^x f(t)dt = 1$ có duy nhất nghiệm trên $[0;1]$.

Lời giải.

Xét hàm số $G(x) = 2x - \int_0^x f(t)dt - 1$ trên $[0;1]$. Ta có hàm G khả vi trên $(0;1)$ và liên tục trên $[0;1]$.

Ta có $G(0) = -1 < 0$, $G(1) = 1 - \int_0^1 f(t)dt \geq 1 - \int_0^1 1dt = 0$ (vì $f(x) \in [0;1]$ với mọi $x \in [0;1]$). Do đó,

theo định lý giá trị trung gian, tồn tại $c \in [0;1]$ sao cho $G(c) = 0$. Hơn nữa, trên $(0;1)$, ta có

$G'(x) = 2 - f(x) > 0$ với mọi $x \in (0;1)$. Do đó hàm liên tục G đơn điệu trên $[0;1]$. Từ đó, ta suy ra nghiệm c của phương trình $G(x) = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình này trên $[0;1]$.

Bài toán 5. Tìm tất cả các hàm số thực f xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $2x - \int_0^x f(t)dt = 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Giả sử tồn tại một hàm f thỏa đề. Vì $2x - \int_0^x f(t)dt = 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên đạo hàm 2

vế ta nhận được $2 - f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Khi đó, $2x - \int_0^x f(t)dt = 2x - \int_0^x 2dt = 0 \neq 1$ trên $\mathbb{R}$. Do

đó, không tồn tại hàm f nào thỏa đề.

Bài toán 6. Cho $a \in \mathbb{R}$ và hàm f khả vi trên $[0, +\infty)$ thỏa mãn các điều kiện: $f(0) \geq 0$ và

$f'(x) + af(x) \geq 0$ với mọi $x \in [0; +\infty)$. Chứng minh rằng $f(x) \geq 0$ với mọi $x \geq 0$.

Lời giải. Ta xét $g(t) = e^{at} f(t)$ trên $[0; \infty)$. Ta có $g'(t) = e^{at} (f'(t) + af(t)) \geq 0$ với mọi $t \in [0; +\infty)$.

Ta có $g(x) - g(0) = \int_0^x g'(t) dt \geq 0$ với mọi $x \geq 0$. Do đó $e^{ax} f(x) \geq f(0) \geq 0$ với mọi $x \geq 0$. Từ đó, ta nhận được điều cần chứng minh.

Bài toán 7. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[0,1]$ và thỏa mãn điều kiện

$$\int_x^1 f(t) dt \geq \frac{1-x^2}{2}, \forall x \in [0,1]. \text{ Hãy chứng minh } \int_0^1 [f(x)]^2 dx \geq \int_0^1 xf(x) dx.$$

Lời giải. Xét hàm số $F : [0;1] \rightarrow \mathbb{R}$ với $F(x) = \int_x^1 f(t) dt$ với mọi $x \in [0;1]$. Khi đó $F(1) = 0$,

$F'(x) = -f(x)$ và $F(x) \geq \frac{1-x^2}{2}$ với mọi $x \in [0,1]$. Ta cần chứng minh

$$\int_0^1 \left[(F'(x))^2 + xF'(x) \right] dx \geq 0.$$

Vì $(F'(x))^2 + xF'(x) = (F'(x) + x)^2 - xF'(x) - x^2 \geq -xF'(x) - x^2$ với mọi $x \in [0;1]$ nên

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[(F'(x))^2 + xF'(x) \right] dx &\geq \int_0^1 (-xF'(x) - x^2) dx = -xF(x) \Big|_0^1 + \int_0^1 F(x) dx - \frac{1}{3} \\ &\geq \int_0^1 F(x) dx - \frac{1}{3} \geq \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x^2) dx - \frac{1}{3} = 0. \end{aligned}$$

Bài toán 8. Cho hàm số liên tục $f : [0,1] \rightarrow [0; +\infty)$ thỏa mãn điều kiện $[f(x)]^2 \leq 1 + 2 \int_0^x f(t) dt$ với mọi

$x \in [0,1]$. Chứng minh rằng $\int_0^x f(t) dt \leq x + \frac{x^2}{2}, \forall x \in [0,1]$.

Lời giải. Đặt $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ với $x \in [0,1]$. Ta có $F(0) = 0, F'(x) = f(x) \geq 0$ với mọi $x \in [0,1]$.

Do đó $F'(x) \leq \sqrt{1+2F(x)}$ với mọi $x \in [0,1]$. Từ đó, ta nhận được $\frac{F'(x)}{\sqrt{1+2F(x)}} \leq 1$ với mọi $x \in [0,1]$.

Sử dụng bất đẳng thức tích phân (kết quả bổ trợ 4)), ta nhận được $\int_0^x \frac{F'(t) dt}{\sqrt{1+2F(t)}} \leq \int_0^x 1 dt$ với mọi

$x \in [0,1]$. Điều này tương đương $\sqrt{1+2F(x)} - 1 \leq x$ với mọi $x \in [0,1]$. Chính vì thế, ta nhận được

$$\int_0^x f(t)dt \leq x + \frac{x^2}{2}, \forall x \in [0,1]. \blacksquare$$

4. Một số bài toán liên quan

Bài toán 1. Chứng minh hàm số $g(x) = \int_x^{x^2} \frac{ds}{\ln s}$ là hàm tăng trên $[1; \infty)$.

Bài toán 2. Cho hàm số f liên tục và dương trên $[0; +\infty)$. Chứng minh rằng hàm số $F(x) = \frac{\int_0^x t f(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Bài toán 3. Cho hàm f xác định trên $\mathbb{R}$ được xác định bởi $f(y) = \int_y^{1-y} (\sqrt{x^2 - 2x + 2} - \sqrt{x^2 + 1})dx$ với mọi $y \in \mathbb{R}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm f trên $[0;1]$.

Bài toán 4. Tìm các hàm số thực f xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(x) = \int_0^x f(t)dt + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 5. Cho hàm $f : [a; b] \rightarrow [0; \infty)$ liên tục và có $x_0 \in [a; b]$ thỏa $f(x_0) > 0$. Khi đó $\int_a^b f(x)dx > 0$.

Bài toán 6. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[0,1]$ và thỏa mãn điều kiện $\int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2 dx \leq \frac{x_2^3 - x_1^3}{3}$ với mọi $x_1, x_2 \in [1,2]$ sao cho $x_1 \leq x_2$. Chứng minh rằng $\int_1^2 f(x)dx \leq \frac{3}{2}$.

Bài toán 7. Tìm các hàm số thực f xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $2x - \int_1^x f(t)dt = 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 8. Cho hàm f khả vi trên đoạn $[a, b]$ đồng thời thỏa $f(a) = 0$ và có hằng số không âm C sao cho $|f'(x)| \leq C|f(x)|$ với mọi $x \in [a, b]$. Chứng minh $f(x) = 0$ với mọi $x \in [a, b]$.

Bài toán 9. Cho hàm số liên tục $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ và tồn tại số thực α sao cho

$$0 \leq f(x) \leq \alpha \int_0^x f(t)dt, \forall x \geq 0.$$

Chứng minh rằng $f(x) = 0$ với mọi $x \geq 0$.

NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM

Bài toán 10. Tìm tất cả các hàm số xác định và liên tục trên $(-\infty, +\infty)$ và thỏa mãn điều kiện sau:

$$f(x) - f(y) = \int_{x+2y}^{2x+y} f(t)dt, \forall x, y \in (-\infty; +\infty).$$

Bài toán 11. Cho f là một hàm số thực xác định trên $[1; \infty)$ thỏa $f(1) = 1$ và $f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)}$ với mọi $x \geq 1$. Chứng minh rằng $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ tồn tại và nhỏ hơn $1 + \frac{\pi}{4}$.

Bài toán 12. Cho $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ liên tục sao cho: $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho: $f(c) = \int_0^c f(x)dx$.

Bài toán 13. Cho hàm số f xác định và liên tục trên đoạn $[a, b]$ và thỏa mãn điều kiện $\int_a^b f(x)dx = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = 2005 \int_a^c f(x)dx$.

Bài toán 14. Cho hàm số $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^1 xf(x)dx = 0$. Chứng minh rằng $\int_0^1 f^2(x)dx \geq 4 \left(\int_0^1 f(x)dx \right)^2$.

Bài toán 15. Cho hàm số f có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$ và $f(a) = f(b) = 0$, $|f'(x)| \leq 1, \forall x \in [a, b]$. Chứng minh rằng

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq \frac{(b-a)^2}{4}.$$

Tài liệu tham khảo.

[1] Văn Phú Quốc, Bài tập Giải tích dành cho Olympic Toán, Trường Đại Học Quảng Nam

[2] Kaczor, W. J., and M. T. Nowak. *Problems in mathematical analysis. 3, Integration*. American Mathematical Society.