



NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM

Tập san số 02

8 - 2021

Đổi mới kiểm tra đánh giá theo định hướng
phát triển năng lực người học

➤ Đề xuất cho kỳ thi tốt nghiệp THPT

Trao đổi kinh nghiệm dạy học theo định hướng
tiếp cận năng lực người học

➤ Bàn về một cách tiếp cận khác cho bài toán tính góc giữa đường
thẳng và mặt phẳng

Toàn cảnh đề thi tốt nghiệp THPT môn Toán

➤ Lời giải chi tiết các câu VD – VDC các mã đề gốc 101, 102, 103, 104

Ôn thi tốt nghiệp THPT đợt 2 môn Toán

➤ *Phân tích, định hướng tìm lời giải, xây dựng các bài tương tự
các câu VD – VDC*

ĐỀ THI TỐT NGHIỆP THPT ĐỢT 1 NĂM 2021

Lời nói đầu

Kỳ thi tốt nghiệp THPT đợt 1 năm 2021 đã diễn ra trong hai ngày 7,8/7/2021. Buổi thi môn Toán diễn ra vào chiều 7/7/2021, bài thi môn Toán gồm 24 mã đề được lấy từ 4 mã đề gốc là mã đề 101, 102, 103, 104. Để có góc nhìn đầy đủ về bài thi môn Toán đợt 1, đồng thời giúp các em học sinh tham gia kỳ thi tốt nghiệp THPT đợt 2 năm 2021 cùng quý thầy cô có thêm tài liệu ôn tập trong thời gian gấp rút này **Nhóm Giáo viên toán Việt Nam** xin trân trọng giới thiệu, ra mắt cùng quý thầy cô và các em ấn phẩm **Tập san số 02**.

Mhy vọng Tập san sẽ là sân chơi để quý thầy cô trao đổi kinh nghiệm dạy học cùng các đồng nghiệp thông qua các bài viết của mình; các em học sinh nắm chắc các kiến thức trong chương trình THPT; tiếp cận được với các bài toán mới, hay và lạ. Đặc biệt, rèn luyện tốt kỹ năng làm bài thi trắc nghiệm môn Toán.

Để hoàn thành Tập san, BQT chân thành cảm ơn tất cả các thành viên của nhóm, hai tổ phản biện đã rất tâm huyết tham gia, xây dựng Tập san.

Trân trọng cảm ơn TS Trần Nam Dũng, Ths Hoàng Quân đã tham gia viết bài cho Tập san và có nhiều đóng góp ý kiến xây dựng cho ban biên tập

Tài liệu tuy đã được nhóm tổ chức làm cẩn thận, phản biện nhiều lần, nhưng không thể tránh khỏi thiếu sót. Chúng tôi rất mong nhận được ý kiến đóng góp tích cực từ quý thầy cô cùng các em học sinh. Các ý kiến đóng góp chân thành của quý thầy cô là nguồn động lực để chúng tôi tiếp tục vững bước trên con đường mới và xây dựng tập san ngày càng chất lượng hơn. Mọi ý kiến đóng góp, bài viết gửi đăng xin gửi về theo địa chỉ:

mail: nhomGVTVN@gmail.com.

BQT Nhóm Giáo viên toán Việt Nam!

Các thành viên tham gia Tập san

Ban quản trị Nhóm Giáo viên toán Việt Nam

Cô giáo: Ngô Tú Hoa, Lại Nhật Hoan

*Thầy giáo: Trần Nam Dũng; Trương Quốc Toàn; Nguyễn Khải; Lê Thảo;
Tạ Minh Đức; Nguyễn Ngọc Chi; Lê Tài Thắng, Ngô Nguyễn Quốc Mẫn
Nam Phương; Hoàng Minh Quân; Song Minh Nguyễn.*

*Cùng các thầy, cô giáo tham gia viết và phân biên: Nguyễn Sỹ, Phong Do, Bình
Hoang, Võ Trọng Trí, Nguyễn Phú Hoàng Lâm, Huỳnh Văn Ánh,
Nguyễn Khắc Thành, Hoàng An Đình, Trần Đức Nội, Lê Thanh Bình,
Ngô Dung, Trương Đức Thịnh, Nguyễn Thanh Hải, Nguyễn Phương,
Chánh Lê Văn, Nguyễn Chiến, Vũ Minh Tư, Nguyễn Thị Hồng Gấm,
Nguyễn Văn Hải; Phạm Tuấn; Song Tử Mắt Nâu; Nguyễn Văn Viễn;
Thân Đức Minh; Phạm Quý; Đức Thanh Phạm; Dấu Vết Hát.*

Trân trọng!

Đổi mới kiểm tra đánh giá theo định hướng phát triển năng lực người học

Đề xuất cho kỳ thi tốt nghiệp THPT

TS. TRẦN NAM DŨNG

Giảng viên khoa Toán – Tin học Trường Đại học KHTN, ĐHQG Tp HCM

Đợt 1 của kỳ thi tốt nghiệp THPT đã diễn ra đầu tháng 7 vừa qua, và đợt 2 dự kiến sẽ diễn ra vào đầu tháng 8. Bỏ qua những áp lực do dịch COVID-19 đem đến, chúng ta thử cùng đánh giá xem kỳ thi này có giải quyết tốt nhiệm vụ kép mà nó đang mang trên mình "vừa để xét tốt nghiệp, vừa để tuyển sinh đại học" không?

Tôi nghĩ chúng ta không có vấn đề gì về nhiệm vụ thứ nhất. Đề thi có 25 câu đầu rất căn bản, đủ để học sinh kiếm 5 điểm hay chí ít cũng không bị liệt. 13-15 câu tiếp theo có khó hơn, nhưng cũng nhẹ nhàng, dành cho học sinh khá, 10-12 câu cuối thách thức hơn dành cho học sinh giỏi.

Dưới đây tôi có chọn ngẫu nhiên một mã đề và phân tích 12 câu cuối cùng, tạm gọi là các câu vận dụng và vận dụng cao. Trong số các câu này, tôi nhận thấy là chỉ có vài câu (trong đó có 3 câu đầu, 39-41) phù hợp với đề thi trắc nghiệm, còn lại toàn là những câu tự luận được trắc nghiệm hóa. Học sinh bắt buộc phải giải bài toán, ra đáp số rồi kiểm tra, so khớp.

Dù sao thì trong số những câu này chỉ có một vài câu tôi đánh giá là không đạt yêu cầu, còn lại dù không phù hợp lắm nhưng cũng ổn. Rõ ràng là đề của Bộ ra, có quy trình, có phản biện nên tốt hơn các đề thi thử khá nhiều, ít có những câu trời ơi. Đó là một điểm cộng của đề thi của Bộ.

Tuy nhiên có một điểm trừ là đề thi của bộ không có bất cứ một câu nào về ứng dụng của toán học trong thực tiễn, điều làm cho toán khô khan hơn quá nhiều so với lý, hóa, sinh, nơi mà có rất nhiều những bài toán, bối cảnh thực tiễn. Thực ra thì toán đâu có xa rời thực tiễn, những bài toán về xác suất, những bài toán cực trị, những bài toán tính toán hình học. luôn rất thú vị, hấp dẫn, tự nhiên, nó đòi hỏi ở học sinh kỹ năng đọc hiểu, mô hình hóa, giải quyết vấn đề, đơn giản thôi nhưng cần thiết, thay vì kiểu học theo tư duy công thức như hiện nay (công thức tính nhanh hiện giờ đang mà mốt).

Bản thân tôi cho rằng đề thi này chỉ đạt được yêu cầu về phân loại ở tốp dưới và tốp giữa, còn ở tốp trên thì độ tin cậy không cao, do những bài toán quá khó sẽ tạo điều kiện cho sự may rủi (trong đề này có khoảng 3-5 bài, tùy đánh giá của mỗi cá nhân).

Do vậy, tôi có đề xuất sau để nâng cao chất lượng và khả năng phân loại của đề thi.

1. Nếu hướng tới chỉ dùng để xét tốt nghiệp thì vẫn giữ hình thức thi trắc nghiệm, nhưng bỏ hết những câu khó và không phù hợp trắc nghiệm (ví dụ trong đề đính kèm chỉ giữ lại các câu 39, 40, 41, 44, 45, 47, 48)

2. Nếu vẫn dùng kỳ thi này với mục tiêu kép thì nên pha trộn hình thức câu hỏi theo cấu trúc sau:

25 câu trắc nghiệm với độ khó như 25 câu đầu của đề hiện hành.

10 câu điền đáp số lấy các câu từ 26-40, có thể lấy một số câu chân phương như nói ở phần 1.

35 câu này mỗi câu 0.2 điểm.

3 câu tự luận, trong đó có một câu ở mức trung bình, một câu ở mức độ trung bình khó (ví dụ như một trong các câu 39, 40, 41, 44, 45, 47, 48) và một câu khó (ví dụ các câu 46, 49, 50). Tránh ra những câu sát thủ hay lắt léo, mẹo mực.

Trong các bài này, có thể là bài ở mức trung bình hay trung bình khó phần tự luận, hay phần bài toán điền đáp số có thể cho 1 vài bài toán có liên hệ thực tiễn, có sử dụng mô hình hóa (cấp số nhân, phương trình, hàm số).

Như vậy phần căn bản ta dùng trắc nghiệm còn phần nâng cao hơn ta dùng điền đáp số và tự luận, một mặt sẽ kiểm tra được rộng và căn bản, mặt khác sẽ tránh được sự may rủi trong đánh giá tổng trên. Bạn nào được 10 điểm sẽ thực sự là giỏi: cẩn thận không sai nhầm ở câu dễ và xử lý được các thách thức một cách thật sự ở câu khó.

Vài lời chia sẻ cùng anh chị em trên diễn đàn này. Rất mong nhận được các ý kiến trao đổi.

12 câu hỏi vận dụng, vận dụng cao trong đề thi tốt nghiệp THPT (mã đề 114)

Câu 39: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $(2^x - 4^x)[\log_3(x+25) - 3] \leq 0$

A. 24

B. 25

C. Vô số

D. 26

Câu này tốt, kiểm tra được các vấn đề về tính đơn điệu của hàm log, mũ, miền xác định của hàm log. Bài này các phương án nhiễu cũng hay vì các đáp án sai đều liên quan đến một lỗi nào đó (quên miền xác định, quên $x = 2$).

Câu 40: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$.

Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng.

A. 18

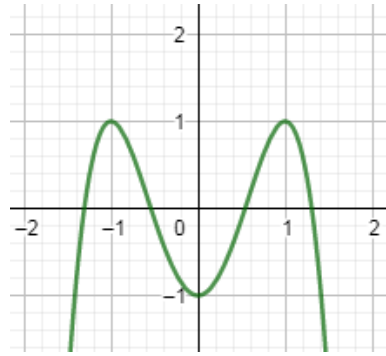
B. 20

C. 9

D. 24

Câu này tốt, kiểm tra được về nguyên hàm của hàm số cho trên từng đoạn. Điểm mấu chốt cần nắm là nguyên hàm phải là hàm liên tục. Có thể nhầm nếu thay nhầm công thức.

Câu 41: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình bên. Số nghiệm của phương trình $f(f(x))=0$ là



- A. 10** **B. 8** **C. 4** **D. 12**

Câu này tốt, kiểm tra khái niệm hàm hợp. Đây cũng là câu phù hợp với trắc nghiệm vì học sinh có thể nhầm được mà không cần đặt bút tính.

Câu 42: Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x \in \left(\frac{1}{3}; 6\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{18x}$

- A. 20** **B. 21** **C. 19** **D. 18**

Đây là câu dở, rất khó nhưng mà là cái khó không cần thiết, đặc biệt câu này không phù hợp với trắc nghiệm vì chắc chắn sẽ tạo ra sự may rủi.

Câu 43: Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -5 và 2 . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường $y=\frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng

- A. $\ln 10$** **B. $3\ln 2$** **C. $\ln 3$** **D. $\ln 7$**

Câu này hơi mẹo quá. Và các đặt vấn đề rất thiếu tự nhiên, không ăn nhập với nhau.

Câu 44: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD=4a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng 60° . Thể tích của khối hộp đã cho bằng

- A. $16\sqrt{3}a^3$** **B. $\frac{16\sqrt{3}}{9}a^3$** **C. $48\sqrt{3}a^3$** **D. $\frac{16\sqrt{3}}{3}a^3$**

Câu này ổn, căn bản, chân phương.

Câu 45: Cắt hình nón (N) bởi một mặt phẳng qua đỉnh và mặt phẳng chứa đáy một góc bằng 30° ta được thiết diện là tam giác đều cạnh $2a$. Diện tích xung quanh của (N) bằng

- A. $\sqrt{7}\pi a^2$** **B. $\sqrt{13}\pi a^2$** **C. $2\sqrt{7}\pi a^2$** **D. $2\sqrt{13}\pi a^2$**

Câu này ổn, căn bản, chân phương, kiểm tra tốt hiểu biết của học sinh về hình nón các các thiết diện.

Câu 46: Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z|=1$ và $|w|=2$. Khi $|z+i\bar{w}+6+8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z-w|$ bằng.

- A. 3** **B. $\frac{\sqrt{221}}{5}$** **C. $\sqrt{5}$** **D. $\frac{\sqrt{29}}{5}$**

Câu này tương đối khó, phải nắm vững bất đẳng thức tam giác với các điều kiện xảy ra dấu bằng mới giải được. Nếu giải bằng hình học thì cũng cần phải hiểu ý nghĩa hình học của phép toán phức liên hợp và nhân với i . Sẽ chân phương hơn nếu bài này bỏ bớt chữ i trước $\bar{w}$ đi.

Câu 47: Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$ và mặt phẳng (P): $x + 2y - 2z + 2 = 0$. Hình chiếu vuông góc của d lên (P) là đường thẳng có phương trình

A. $\frac{x}{-2} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{3}$

B. $\frac{x}{-2} = \frac{y}{4} = \frac{z+1}{3};$

C. $\frac{x}{14} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{8}$

D. $\frac{x}{14} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{8}.$

Câu này bình thường, căn bản, chân phương.

Câu 48: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0| = 6$?

A. 1

B. 3

C. 4

D. 2

Câu này ổn, kiểm tra về phương trình bậc hai, định lý Viet và hiểu biết về số phức. Vấn đề mấu chốt ở đây là biết phân hai trường hợp: trường hợp có hai nghiệm thực và trường hợp có hai nghiệm phức liên hợp.

Câu 49: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-9)(x^2-16), \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(|x^3+7x|+m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 9

B. 8

C. 16

D. 4

Bài này ổn, liên quan đến đạo hàm của hàm hợp và có thêm chút khó khăn ghi có dấu trị tuyệt đối.

Câu 50: Trong không gian Oxyz cho hai điểm $A(-2;1;-3)$ và $B(1;-3;2)$. Xét hai điểm M, N thay đổi thuộc mặt phẳng Oxy sao cho $MN = 3$. Giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng

A. $\sqrt{65}$

B. $\sqrt{29}$

C. $\sqrt{26}$

D. $\sqrt{91}$

Bài này hay và khó, khai thác các phép biến hình cơ bản như đối xứng, tịnh tiến và bất đẳng thức tam giác. Nhưng là ý tưởng chỉ dùng được một lần. Sẽ tốt hơn nếu bài này làm tự luận.

Trao đổi kinh nghiệm dạy học theo định hướng tiếp cận năng lực người học

Bàn về một cách tiếp cận khác cho bài toán tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Ths. HOÀNG MINH QUÂN

GV Trường THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Nội

Trong chương trình toán THPT, các bài toán về góc giữa đường thẳng và mặt phẳng tuy không mới. Song, nó vẫn mang tính thời sự trong các bài kiểm tra định kì, các kì thi học sinh giỏi, kì thi tốt nghiệp trung học phổ thông hằng năm. Bài viết sau đây khai thác một hướng tiếp cận khác **cho bài toán tính góc giữa đường thẳng với mặt phẳng**

1. Kiến thức cơ bản

1.1. Định nghĩa

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α) . Góc giữa đường thẳng a và hình chiếu a' của nó trên mặt phẳng (α) được gọi là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) .

1.2. Các xác định góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α)

➤ Cách 1:

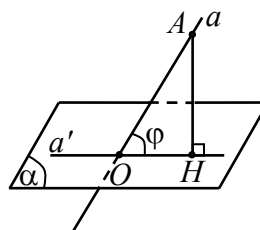
Bước 1. Tìm $O = a \cap (\alpha)$.

Bước 2. Lấy $A \in a$ và dựng $AH \perp (\alpha)$ tại H .

Khi đó $(a, (\alpha)) = (a, a') = \widehat{AOH}$.

Bước 3. Tính số đo của góc $\widehat{AOH}$

➤ **Chú ý:** $0^\circ \leq (a, (\alpha)) \leq 90^\circ$



➤ Cách 2: Tính gián tiếp theo một trong hai hướng sau:

Hướng 1: Chọn một đường thẳng $d \parallel a$ mà góc giữa d và (α) có thể tính được.

Từ đó ta có: $(a, (\alpha)) = (d, (\alpha))$

Hướng 2: Chọn một mặt phẳng $(\beta) \parallel (\alpha)$ mà góc giữa a và (β) có thể tính được.

Từ đó ta có: $(a, (\alpha)) = (a, (\beta))$

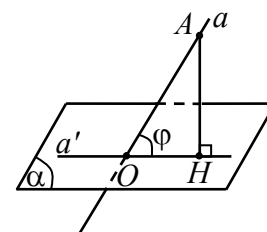
Tuy nhiên việc xác định hình chiếu của một điểm lên mặt phẳng không phải lúc nào cũng thuận lợi. Chính vì vậy, việc đưa ra một cách tiếp cận khác là sử dụng khoảng cách để tính góc giữa đường thẳng với mặt phẳng nhằm khắc phục khó khăn đó.

1.3. Định hướng tiếp cận

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α) . Để tính góc φ giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) , ta tiếp cận thông qua ý tưởng đơn giản khác như sau :

Bước 1: Tìm $O = a \cap (\alpha)$.

Bước 2: Tính $\sin \varphi = \frac{d(A, (\alpha))}{OA}$



Cách tiếp cận này thích hợp cho học sinh nắm chắc việc tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

Sau đây chúng tôi đưa ra một số ví dụ minh họa với lời giải theo hướng tiếp cận sử dụng khoảng cách để tính góc giữa đường thẳng với mặt phẳng

2. Ví dụ minh họa

2.1. Áp dụng cho các bài toán khối chóp.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Gọi G là trọng tâm tam giác ACD , I là trung điểm của SB . Biết độ dài các đoạn $SA = a$, $AB = a\sqrt{3}$, $AD = \frac{3a}{2}$. Góc giữa đường thẳng IG và mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{13}}$.

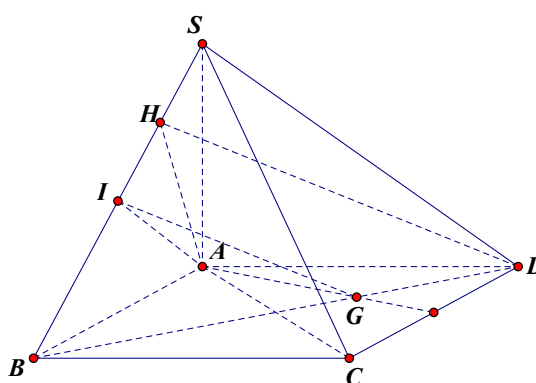
B. $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$.

C. $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{16}$.

D. $\arcsin \frac{3}{16}$.

Lời giải

Chọn A



Có $SB = 2a$ nên tam giác SAI đều cạnh a .

Gọi H là trung điểm của SI thì $\frac{BI}{BH} = \frac{BG}{BD}$ nên $IG \parallel HD$, hay $(IG, (SCD)) = (HD, (SCD))$

Có $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AD = \frac{3a}{2}$ và tam giác AHD vuông tại A , suy ra $HD = a\sqrt{3}$

Vì $HS = \frac{1}{4}BS$ nên $d(H, (SCD)) = \frac{1}{4}d(B, (SCD)) = \frac{1}{4}d(A, (SCD)) = \frac{1}{4}d$

$$\text{Mà } \frac{1}{d^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{9a^2} = \frac{13}{9a^2} \Rightarrow d = \frac{3a}{\sqrt{13}} \Rightarrow d(H, (SCD)) = \frac{3a}{4\sqrt{13}}$$

$$\text{Suy ra } \sin(HD, (SCD)) = \frac{d(H, (SCD))}{HD} = \frac{3a}{4\sqrt{13} \cdot a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{13}}.$$

Câu 2: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SD và BO . Gọi α là góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SCD) thì giá trị $\sin \alpha$ bằng

A. $\frac{3\sqrt{3}}{7}$.

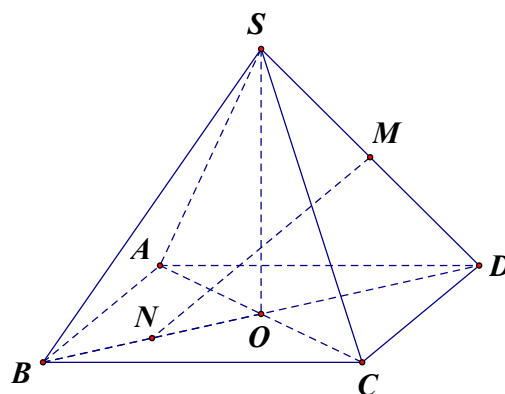
B. $\frac{2\sqrt{3}}{7}$.

C. $\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{7}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\triangle SBD$ là tam giác đều nên $\widehat{SDB} = 60^\circ$ và $SO = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

$$\text{Suy ra } MN^2 = MD^2 + ND^2 - 2MD \cdot ND \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2} + \frac{9a^2}{8} - 2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7a^2}{8}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{14}}{4}$$

$$\text{Mặt khác } d(N, (SCD)) = \frac{3}{2} d(O, (SCD))$$

$$\text{Mà } \frac{1}{d^2(O, (SCD))} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OS^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{2}{a^2} + \frac{2}{3a^2} = \frac{14}{3a^2}$$

$$\Rightarrow d^2(O, (SCD)) = \frac{3a^2}{14} \Rightarrow d(O, (SCD)) = \frac{a\sqrt{42}}{14} \Rightarrow d(N, (SCD)) = \frac{3a\sqrt{42}}{28}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{d(N, (SCD))}{MN} = \frac{3a\sqrt{42}}{28} \cdot \frac{4}{a\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{3}}{7}.$$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $\widehat{BAC} = 60^\circ$, $SA = a$. Tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi β là góc tạo bởi đường thẳng SB và mặt phẳng (SCD) . Khi đó $\sin \beta$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

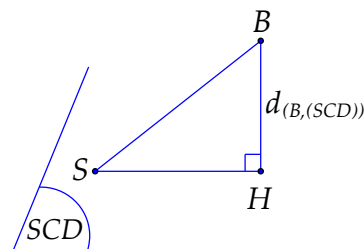
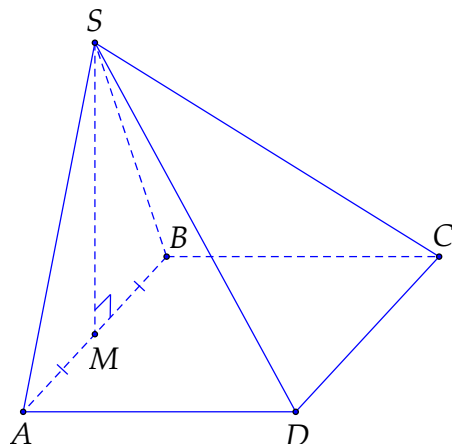
D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi M là trung điểm của AB . Vì tam giác SAB là tam giác đều nên $SM \perp AB$.

Ta có:
$$\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \Rightarrow SM \perp (ABCD). \\ SM \perp AB, SM \subset (SAB) \end{cases}$$



Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng (SCD) . Suy ra $BH \perp (SCD)$.
Suy ra HS là hình chiếu vuông góc của BS lên mặt phẳng (SCD) , do đó:

$$(\widehat{SB, (SCD)}) = (\widehat{SB, SH}) = \widehat{BSH}.$$

Ta có: $\sin \beta = \sin \widehat{BSH} = \frac{BH}{SB} = \frac{d_{B,(SCD)}}{SB}.$

Do $BM \parallel (SCD)$

$$\Rightarrow d_{B,(SCD)} = d_{M,(SCD)} = \frac{SM \cdot d_{M,CD}}{\sqrt{SM^2 + d_{M,CD}^2}} = \frac{SM \cdot d_{B,CD}}{\sqrt{SM^2 + d_{B,CD}^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{6}a}{4}$$

Vậy $\sin \beta = \sin \widehat{BSH} = \frac{BH}{SB} = \frac{d_{B,(SCD)}}{SB} = \frac{\frac{\sqrt{6}a}{4}}{\frac{a}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$

2.2. Áp dụng cho các bài toán khối lăng trụ.

Câu 4: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Góc giữa đường thẳng AD' và mặt phẳng $(A'BD)$ bằng

A. $\arcsin \frac{\sqrt{5}}{3}.$

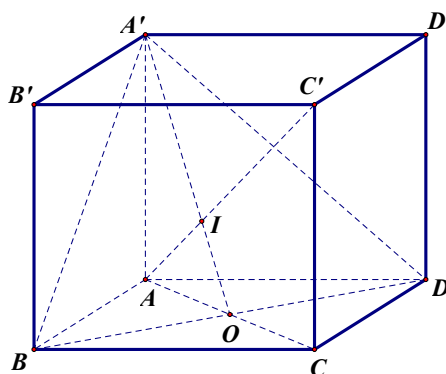
B. $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{3}.$

C. $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{3}.$

D. $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}.$

Lời giải

Chọn B



+ Do $AD' // BC'$ nên góc giữa đường thẳng AD' và mặt phẳng $(A'BD)$ bằng góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(A'BD)$.

+ Do $AA'BD$ là tứ diện vuông nên $\frac{1}{d^2(A, (A'BD))} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{3}{a^2}$

$$\Rightarrow d(A, (A'BD)) = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

+ Gọi α là góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(A'BD)$.

$$\text{Ta có } \sin \alpha = \frac{d(C', (A'BD))}{BC'} = \frac{2d(A, (A'BD))}{BC'} = \frac{\frac{2a}{\sqrt{3}}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 5: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a , $AA' = a\sqrt{3}$. Giá trị sin của góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{15}}{10}$.

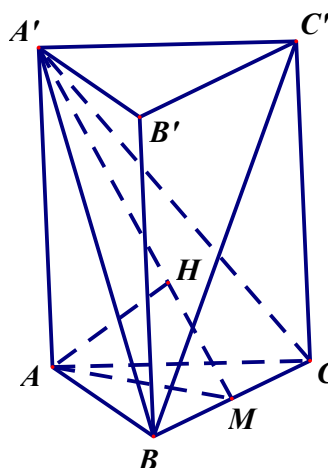
B. $\frac{\sqrt{5}}{10}$.

C. $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

D. $\frac{\sqrt{65}}{10}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi φ là góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(A'BC)$.

Ta có: $\sin \varphi = \frac{d(C', (A'BC))}{C'B} = \frac{d(A, (A'BC))}{C'B}$ (vì $AC' \cap (A'BC) = O$ với O là trung điểm AC').

Gọi M là trung điểm của BC , H là hình chiếu của A lên $A'M$.

$$\left. \begin{array}{l} AM \perp BC \\ AA' \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (AA'M) \text{ hay } BC \perp AH.$$

Mặt khác $AH \perp A'M$ nên $AH \perp (A'BC)$ hay $d(A, (A'BC)) = AH$.

$$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}; AH = \frac{AA' \cdot AM}{\sqrt{AA'^2 + AM^2}} = \frac{a\sqrt{15}}{5}; C'B = \sqrt{BB'^2 + B'C'^2} = 2a.$$

$$\Rightarrow \sin \varphi = \frac{\sqrt{15}}{10}.$$

Câu 6: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 1$, $AD = 2$, $AA' = 3$. (α) là mặt phẳng đi động đi qua B và song song với $A'C'$. Gọi φ là góc giữa (α) với đường thẳng CD' . Giá trị lớn nhất của $\sin \varphi$ bằng

A. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

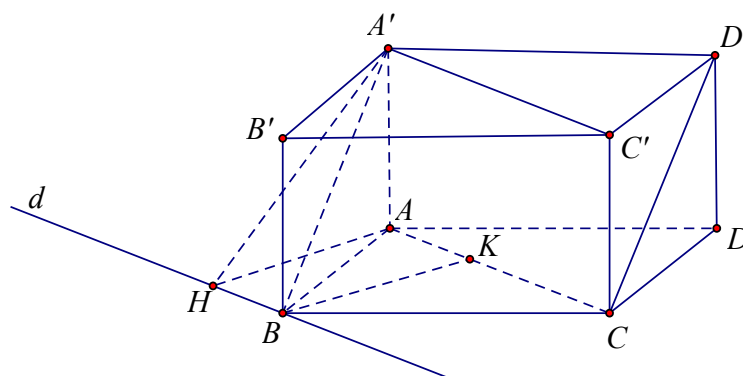
B. 1.

C. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

D. $\frac{3\sqrt{5}}{7}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $CD' \parallel BA' \Rightarrow (\widehat{CD', (\alpha)}) = (\widehat{BA', (\alpha)})$.

Do $(\alpha) \parallel A'C'$ nên (α) chứa đường thẳng d qua B và song song với $A'C'$.

$$\Rightarrow \sin \varphi = \frac{d_{(A'; (\alpha))}}{A'B} \leq \frac{d_{(A'; d)}}{A'B}.$$

$$A'B = \sqrt{AA'^2 + AB^2} = \sqrt{10}.$$

Dựng $A'H \perp d$ tại $H \Rightarrow A'H = d_{(A'; d)}$.

Ta có $\begin{cases} d \perp AA' \\ d \perp A'H \end{cases} \Rightarrow d \perp (AHA') \Rightarrow AH \perp d$.

Kẻ $BK \perp AC$ tại K

$$\Rightarrow AH = BK = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow A'H = \sqrt{AH^2 + AA'^2} = \frac{7\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \sin \varphi \leq \frac{A'H}{A'B} = \frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $(\alpha) \perp A'H$.

$$\text{Vậy } \max(\sin \varphi) = \frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

2.3. Bài tập tự luyện

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a$, $BC = a$. Cạnh bên $SD = a$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Sin của góc tạo bởi đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng

A. $\frac{5\sqrt{3}}{9}$.

B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{6}}{9}$.

D. $\frac{\sqrt{30}}{15}$.

Câu 2: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA = AB = a$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Tang góc tạo bởi đường thẳng DM với mặt phẳng (SAB) bằng?

A. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{13}}{13}$.

B. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

C. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{26}}{13}$.

D. $\tan \alpha = \sqrt{3}$.

Câu 3: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , tâm O . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC . Biết rằng góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng 60° , cosin góc giữa MN và mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\frac{\sqrt{41}}{41}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{2\sqrt{41}}{41}$.

Câu 4: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a . Gọi O là tâm của đáy, E là trung điểm cạnh AD . Gọi φ là góc giữa đường thẳng CD và mặt phẳng (SBE) . Biết $SO = \frac{a}{2}$ thì $\sin \varphi$ bằng

A. $\frac{1}{2\sqrt{6}}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. D. $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AB = 2a$, $BC = a$, $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Cạnh bên $SD = a\sqrt{3}$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Giá trị $\sin$ của góc tạo bởi SB và mặt phẳng (SAC) bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{7}$. B. $\frac{3}{4}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 6: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Giá trị lớn nhất của góc tạo bởi BD' với mặt phẳng (BDC') bằng

A. $\arcsin \frac{1}{3}$. B. $\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$. C. $\arcsin \frac{1}{2\sqrt{3}}$. D. $\arcsin \frac{1}{3\sqrt{2}}$.

Câu 7: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB = a$; $AD = 2a$; I là trọng tâm tam giác $(A'C'D')$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng ID và mặt phẳng (ICB) , biết $A'B = a\sqrt{3}$. Giá trị của $\sin \varphi$ bằng

A. $\frac{9}{\sqrt{253}}$. B. $\frac{6}{11\sqrt{2}}$. C. $\frac{6}{\sqrt{253}}$. D. $\frac{\sqrt{23}}{11}$.

Câu 8: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại C , $AB = 2a$ và $\widehat{ACB} = 120^\circ$. Biết $AA' = a$. Gọi I là trung điểm AB thì $\sin$ của góc giữa đường thẳng IA' và mặt phẳng $(C'AB)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{15}}{3}$

Câu 9: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$, gọi I là trung điểm $A'B'$. Gọi φ là góc tạo bởi AC' và (BIC') . Biết $AA' = a$; $AB = 2a$ thì giá trị $\cos \varphi$ bằng

A. $\frac{\sqrt{15}}{5}$. B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$. C. $\frac{3}{5}$. D. $\frac{2}{5}$

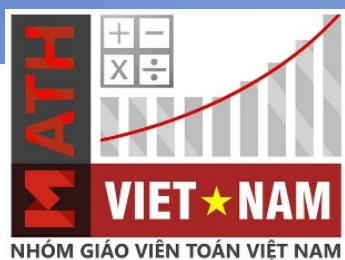
Câu 10: Cho lăng trụ tam giác ABC có $AB = a$, $BC = 2a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm G của tam giác ABC và góc giữa AA' tạo với mặt phẳng (ABC) bằng 60° . $\sin$ của góc tạo bởi AA' và mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

A. $\frac{9}{5\sqrt{41}}$. B. $\frac{9}{4\sqrt{51}}$. C. $\frac{7}{4\sqrt{51}}$. D. $\frac{9}{7\sqrt{41}}$.

Toàn cảnh đề thi tốt nghiệp THPT đợt 1 năm 2021**ĐỀ THI, ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT CÁC CÂU VD – VDC
TRONG ĐỀ THI TỐT NGHIỆP THPT ĐỢT 1 NĂM 2021**

Kỳ thi tốt nghiệp THPT đợt 2 năm 2021 sẽ diễn ra vào hai ngày 6,7/8/2021, để tạo điều kiện cho quý thầy cô cùng các em có tài liệu ôn tập trong thời gian gấp rút này Nhóm Giáo viên Toán Việt Nam xin gửi tới quý thầy cô và các em **Đề thi, đáp án và lời giải chi tiết các câu VD – VDC của 4 mã đề thi gốc 101, 102, 103, 104 Đề thi tốt nghiệp THPT đợt 1 Năm 2021**

Hy vọng bài viết sẽ giúp quý thầy cô có thêm tài liệu tham khảo; các em học sinh rèn luyện tốt kỹ năng thi trắc nghiệm môn Toán trong kỳ thi tốt nghiệp THPT đợt 2 năm 2021.



Đề thi gồm 06 trang

ĐỀ THI TỐT NGHIỆP THPT ĐỢT 1 NĂM 2021

Bài thi môn: Toán

Thời gian: 90 phút (Không kể thời gian phát đề)

Mã đề thi: 101

Câu 1: Tập nghiệm của bất phương trình $3^x < 2$ là

- A. $(-\infty; \log_3 2)$. B. $(\log_3 2; +\infty)$. C. $(-\infty; \log_2 3)$. D. $(\log_2 3; +\infty)$.

Câu 2: Nếu $\int_1^4 f(x)dx = 3$ và $\int_1^4 g(x)dx = -2$ thì $\int_1^4 [f(x) - g(x)]dx$ bằng

- A. -1. B. -5. C. 5. D. 1.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; -4; 0)$ và bán kính bằng 3. Phương trình của (S) là:

- A. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 9$. B. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 9$.
C. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 3$. D. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 3$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(3; -1; 4)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-2; 4; 5)$. Phương trình của d là:

- A. $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 4 - t \\ z = 5 + 4t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 + 4t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + 4t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$.

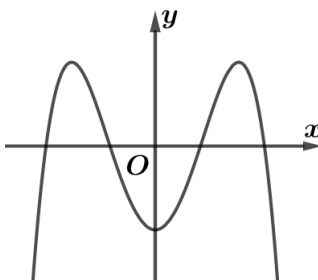
Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-2	-1	1	4	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 5. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 6: Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



- A. $y = -2x^4 + 4x^2 - 1$. B. $y = -x^3 + 3x - 1$.
C. $y = 2x^4 - 4x^2 - 1$. D. $y = x^3 - 3x - 1$.

Câu 7: Đồ thị của hàm số $y = -x^4 + 4x^2 - 3$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

- A. 0. B. 3. C. 1. D. -3.

Câu 8: Với n là số nguyên dương bất kì, $n \geq 4$, công thức nào dưới đây đúng?

- A. $A_n^4 = \frac{(n-4)!}{n!}$. B. $A_n^4 = \frac{4!}{(n-4)!}$. C. $A_n^4 = \frac{n!}{4!(n-4)!}$. D. $A_n^4 = \frac{n!}{(n-4)!}$.

Câu 9: Phần thực của số phức $z = 5 - 2i$ bằng

- A. 5. B. 2. C. -5. D. -2.

Câu 10: Trên khoảng $(0; +\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = x^{\frac{5}{2}}$ là

- A. $y' = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}$. B. $y' = \frac{2}{5}x^{\frac{3}{2}}$. C. $y' = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$. D. $y' = \frac{5}{2}x^{-\frac{3}{2}}$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x) = x^2 + 4$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\int f(x)dx = 2x + C$. B. $\int f(x)dx = x^2 + 4x + C$.
C. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + 4x + C$. D. $\int f(x)dx = x^3 + 4x + C$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2; 3; 5)$. Tọa độ vector $\overrightarrow{OA}$ là

- A. $(-2; 3; 5)$. B. $(2; -3; 5)$. C. $(-2; -3; 5)$. D. $(2; -3; -5)$.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

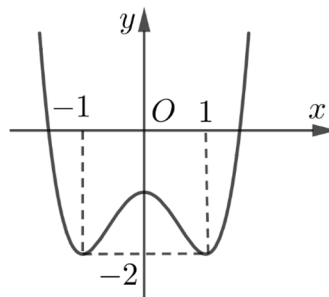
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$				5		$-\infty$

Diagram showing the function values at critical points: $f(x)$ decreases from $+\infty$ to -3 at $x = -1$, increases from -3 to 5 at $x = 1$, and decreases from 5 to $-\infty$ as $x \rightarrow +\infty$.

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

- A. -1. B. 5. C. -3. D. 1.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



- A. $(0; 1)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $(0; +\infty)$. D. $(-1; 1)$.

Câu 15: Nghiệm của phương trình $\log_3(5x) = 2$ là:

- A. $x = \frac{8}{5}$. B. $x = 9$. C. $x = \frac{9}{5}$. D. $x = 8$.

Câu 16: Nếu $\int_0^3 f(x)dx = 4$ thì $\int_0^3 3f(x)dx$ bằng

- A. 36. B. 12. C. 3. D. 4.

Câu 17: Thể tích của khối lập phương cạnh $5a$ bằng

- A. $5a^3$. B. a^3 . C. $125a^3$. D. $25a^3$.

Câu 18: Tập xác định của hàm số $y = 9^x$ là

- A. $\mathbb{R}$. B. $[0; +\infty)$. C. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. D. $(0; +\infty)$.

Câu 19: Diện tích S của mặt cầu bán kính R được tính theo công thức nào dưới đây?

- A. $S = 16\pi R^2$. B. $S = 4\pi R^2$. C. $S = \pi R^2$. D. $S = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Câu 20: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình:

- A. $x = 1$. B. $x = -1$. C. $x = 2$. D. $x = \frac{1}{2}$.

Câu 21: Cho $a > 0$ và $a \neq 1$, khi đó $\log_a \sqrt[4]{a}$ bằng

- A. 4. B. $\frac{1}{4}$. C. $-\frac{1}{4}$. D. -4.

Câu 22: Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 5a^2$ và chiều cao $h = a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

- A. $\frac{5}{6}a^3$. B. $\frac{5}{2}a^3$. C. $5a^3$. D. $\frac{5}{3}a^3$.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x - y + 2z - 1 = 0$. Vector nào dưới đây là một vector pháp tuyến của (P) ?

- A. $\vec{n}_1 = (-3; 1; 2)$. B. $\vec{n}_2 = (3; -1; 2)$. C. $\vec{n}_3 = (3; 1; 2)$. D. $\vec{n}_4 = (3; 1; -2)$.

Câu 24: Cho khối trụ có bán kính đáy $r = 6$ và chiều cao $h = 3$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

- A. 108π . B. 36π . C. 18π . D. 54π .

Câu 25: Cho hai số phức $z = 4 + 2i$ và $w = 3 - 4i$. Số phức $z + w$ bằng

- A. $1 + 6i$. B. $7 - 2i$. C. $7 + 2i$. D. $-1 - 6i$.

Câu 26: Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$ và $u_2 = 9$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

- A. -6. B. $\frac{1}{3}$. C. 3. D. 6.

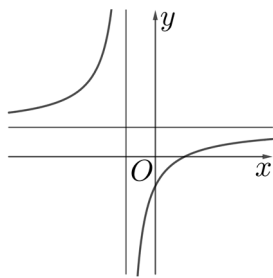
Câu 27: Cho hàm số $f(x) = e^x + 2$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\int f(x)dx = e^{x-2} + C$. B. $\int f(x)dx = e^x + 2x + C$.
C. $\int f(x)dx = e^x + C$. D. $\int f(x)dx = e^x - 2x + C$.

Câu 28: Trên mặt phẳng tọa độ, điểm $M(-3; 4)$ là điểm biểu diễn của số phức nào dưới đây?

- A. $z_2 = 3 + 4i$. B. $z_3 = -3 + 4i$. C. $z_4 = -3 - 4i$. D. $z_1 = 3 - 4i$.

Câu 29: Biết hàm số $y = \frac{x+a}{x+1}$ (a là số thực cho trước, $a \neq 1$) có đồ thị như trong hình bên.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $y' < 0, \forall x \neq -1$. B. $y' > 0, \forall x \neq -1$. C. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. D. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 30: Từ một hộp chứa 12 quả bóng gồm 5 quả màu đỏ và 7 quả màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả. Xác suất để lấy được 3 quả màu xanh bằng

- A. $\frac{7}{44}$. B. $\frac{2}{7}$. C. $\frac{1}{22}$. D. $\frac{5}{12}$.

Câu 31: Trên đoạn $[0;3]$, hàm số $y = -x^3 + 3x$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm

- A. $x = 0$. B. $x = 3$. C. $x = 1$. D. $x = 2$.

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-1;3;2)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 4z + 1 = 0$.

Đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) có phương trình là:

- A. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{1}$. B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+2}{1}$.
C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+2}{4}$. D. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{4}$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B , $AB = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

- A. $\sqrt{2}a$. B. $2a$. C. a . D. $2\sqrt{2}a$.

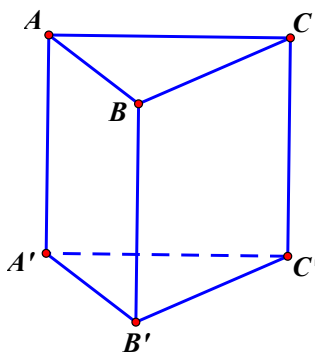
Câu 34: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0)$ và $B(4;1;2)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB có phương trình là

- A. $3x + y + 2z - 17 = 0$. B. $3x + y + 2z - 3 = 0$.
C. $5x + y + 2z - 5 = 0$. D. $5x + y + 2z - 25 = 0$.

Câu 35: Cho số phức z thỏa mãn $iz = 5 + 4i$. Số phức liên hợp của z là

- A. $\bar{z} = 4 + 5i$. B. $\bar{z} = 4 - 5i$. C. $\bar{z} = -4 + 5i$. D. $\bar{z} = -4 - 5i$.

Câu 36: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau (tham khảo hình bên). Góc giữa hai đường thẳng AA' và BC' là



- A. 30° . B. 90° . C. 45° . D. 60° .

Câu 37: Với mọi a, b thỏa mãn $\log_2 a^3 + \log_2 b = 6$, khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $a^3 b = 64$. B. $a^3 b = 36$. C. $a^3 + b = 64$. D. $a^3 + b = 64$.

Câu 38: Nếu $\int_0^2 f(x) dx = 5$ thì $\int_0^2 [2f(x) - 1] dx$ bằng

- A. 8. B. 9. C. 10. D. 12.

Câu 39: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

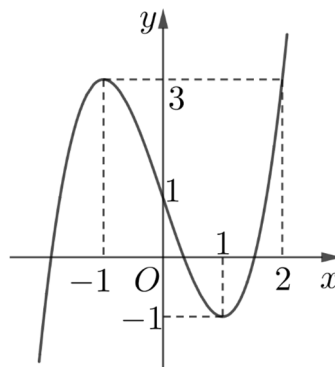
$F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

- A. 27. B. 29. C. 12. D. 33.

Câu 40: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $(3^{x^2} - 9^x)[\log_3(x+25) - 3] \leq 0$?

- A. 27. B. Vô số. C. 26. D. 25.

Câu 41: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x)) = 1$ là



- A. 9. B. 3. C. 6. D. 7.

Câu 42: Cắt hình nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc bằng 60° ta thu được thiết diện là một tam giác đều cạnh $4a$. Diện tích xung quanh của (N) bằng:

- A. $8\sqrt{7}\pi a^2$. B. $4\sqrt{13}\pi a^2$. C. $8\sqrt{13}\pi a^2$. D. $4\sqrt{7}\pi a^2$.

Câu 43: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0| = 7$?

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.

Câu 44: Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z| = 1$ và $|w| = 2$. Khi $|z + i\bar{w} - 6 - 8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z - w|$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{221}}{5}$. B. $\sqrt{5}$. C. 3. D. $\frac{\sqrt{29}}{5}$.

Câu 45: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x+2y+z-4=0$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) là đường thẳng có phương trình:

A. $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-4}$.

B. $\frac{x}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}$.

C. $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-4}$.

D. $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{1}$.

Câu 46: Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -3 và 6 . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng

A. $2\ln 3$.

B. $\ln 3$.

C. $\ln 18$.

D. $2\ln 2$.

Câu 47: Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{9x}$.

A. 27.

B. 9.

C. 11.

D. 12.

Câu 48: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng 30° . Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $6\sqrt{3}a^3$.

B. $\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3$.

C. $2\sqrt{3}a^3$.

D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$.

Câu 49: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -3; -4)$, $B(-2; 1; 2)$. Xét hai điểm M và N thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MN = 2$. Giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng

A. $3\sqrt{5}$.

B. $\sqrt{61}$.

C. $\sqrt{13}$.

D. $\sqrt{53}$.

Câu 50: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-7)(x^2-9)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x^3 + 5x| + m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 6.

B. 7.

C. 5.

D. 4.

..... HẾT



ĐỀ THI TỐT NGHIỆP THPT QUỐC GIA NĂM 2021

MÃ ĐỀ 101

Môn: Toán

Thời gian: 90 phút (Không kể thời gian phát đề)

BẢNG ĐÁP ÁN VÀ GIẢI CHI TIẾT

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	C	B	D	D	A	D	D	A	C	C	A	C	A	C	B	C	A	B	A	B	D	B	A	B
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
C	B	B	B	A	C	D	B	B	A	C	A	A	A	C	D	D	B	D	C	D	C	D	D	A

Câu 39: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$F(0)=2$. Giá trị của $F(-1)+2F(2)$ bằng

A. 27.

B. 29.

C. 12.

D. 33.

Lời giải

Chọn A

Dễ thấy hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$

$$F(1)-F(0)=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (3x^2+4)f(x)dx=5 \Rightarrow F(1)=7.$$

$$F(-1)+2F(2)=\int_1^{-1} f(x)dx+2\int_1^2 f(x)dx+3f(1)=-10+16+21=27.$$

Câu 40: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $(3^{x^2}-9^x)[\log_3(x+25)-3] \leq 0$

A. 27.

B. Vô số.

C. 26.

D. 25.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện xác định của bất phương trình là $x > -25$.

$$\text{Đặt } A(x) = (3^{x^2}-9^x)[\log_3(x+25)-3], x > -25.$$

$$3^{x^2}-9^x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2.$$

$$\log_3(x+25)-3=0 \Leftrightarrow x=2.$$

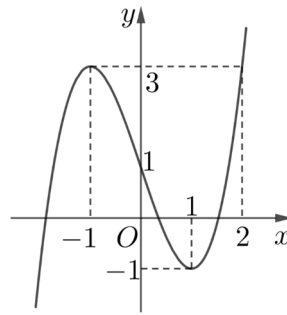
Ta có bảng xét dấu $A(x)$ như sau

x	-25		0		2		$+\infty$
$A(x)$		-	0	+	0	+	

$$\text{Từ đó, } A(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ -25 < x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \{-24; -23; \dots; 0; 2\} \text{ (do } x \in \mathbb{Z}).$$

Kết luận: có 26 nghiệm nguyên thỏa mãn.

Câu 41: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x)) = 1$ là



A. 9.

B. 3.

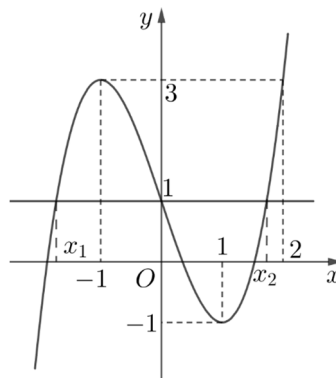
C. 6.

D. 7.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số ta có



$$f(f(x)) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x_1 & \text{và } x_1 < -1 & (1) \\ f(x) = 0 & & (2) \\ f(x) = x_2 & \text{và } 1 < x_2 < 2 & (3) \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị, (1) có đúng 1 nghiệm, (2) và (3) mỗi phương trình có 3 nghiệm phân biệt và 7 nghiệm trên phân biệt nhau.

Câu 42: Cắt hình nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc bằng 60° ta thu được thiết diện là một tam giác đều cạnh $4a$. Diện tích xung quanh của (N) bằng :

A. $8\sqrt{7}\pi a^2$.

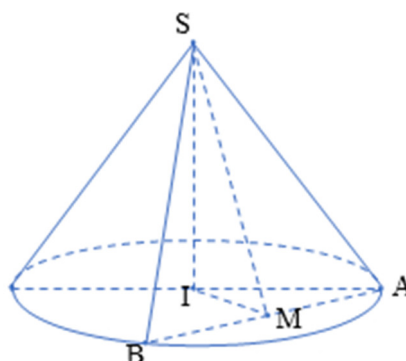
B. $4\sqrt{13}\pi a^2$.

C. $8\sqrt{13}\pi a^2$.

D. $4\sqrt{7}\pi a^2$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là tâm đáy nón. Ta có thiết diện qua đỉnh là tam giác SBA .

Gọi M là trung điểm của AB . Suy ra $\widehat{SMI} = 60^\circ$.

Do tam giác SAB đều cạnh $4a \Rightarrow SM = \frac{4a\sqrt{3}}{2} = 2a\sqrt{3}$.

Xét tam giác SIM vuông tại I ta có $SI = 3a; IM = a\sqrt{3}$.

Xét $\triangle IMA$ vuông tại M ta có $IA = \sqrt{IM^2 + MA^2} = \sqrt{3a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{7}$.

Khi đó $S_{xq} = \pi r l = \pi a \sqrt{7} \cdot 4a = 4\sqrt{7}\pi a^2$.

Câu 43: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 = 0$ (m là tham số thực).

Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0| = 7$?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

$$\Delta' = (m+1)^2 - m^2 = 2m+1.$$

+) Nếu $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 2m+1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{2}$, phương trình có 2 nghiệm thực. Khi đó

$$|z_0| = 7 \Leftrightarrow z_0 = \pm 7.$$

Thế $z_0 = 7$ vào phương trình ta được: $m^2 - 14m + 35 = 0 \Leftrightarrow m = 7 \pm \sqrt{14}$ (nhận).

Thế $z_0 = -7$ vào phương trình ta được: $m^2 + 14m + 63 = 0$, phương trình này vô nghiệm.

+) Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 2m+1 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}$, phương trình có 2 nghiệm phức $z_1, z_2 \notin \mathbb{R}$ thỏa

$$z_2 = \overline{z_1}. \text{ Khi đó } z_1 z_2 = |z_1|^2 = m^2 = 7^2 \text{ hay } m = 7 \text{ (loại) hoặc } m = -7 \text{ (nhận).}$$

Vậy tổng cộng có 3 giá trị của m là $m = 7 \pm \sqrt{14}$ và $m = -7$.

Câu 44: Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z| = 1$ và $|w| = 2$. Khi $|z + i\overline{w} - 6 - 8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất,

$|z - w|$ bằng

A. $\frac{\sqrt{221}}{5}$.

B. $\sqrt{5}$.

C. 3.

D. $\frac{\sqrt{29}}{5}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } |w| = 2 \Rightarrow |i\overline{w}| = 2; |z + i\overline{w}| \leq |z| + |i\overline{w}| = 3$$

$$P = |z + i\overline{w} - 6 - 8i| \geq |-6 - 8i| - |z + i\overline{w}| = 10 - 3 = 7.$$

$$\text{Suy ra: } P_{\min} = 7 \text{ khi } \begin{cases} z = k.i\overline{w}, (k \geq 0) \\ -6 - 8i = h.(z + i\overline{w}), (h \leq 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2}; h = -\frac{10}{3} \\ z = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i \\ \overline{w} = \frac{8}{5} - \frac{6}{5}i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i \\ w = \frac{8}{5} + \frac{6}{5}i \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } |z-w| = \left| \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i - \left(\frac{8}{5} + \frac{6}{5}i \right) \right| = \frac{\sqrt{29}}{5}.$$

Câu 45: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x+2y+z-4=0$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) là đường thẳng có phương trình:

A. $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-4}.$

B. $\frac{x}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}.$

C. $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-4}.$

D. $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{1}.$

Lời giải

Chọn C

Tọa độ giao điểm A của d và (P) thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1} \\ x+2y+z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow A(0;1;2).$$

Lấy điểm $B(1;2;1) \in d$. Gọi H là hình chiếu của B trên (P) .

$$\Rightarrow \text{Phương trình } BH: \begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=1+t \end{cases}$$

Do $H = BH \cap (P)$ nên tọa độ điểm H thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=1+t \\ x+2y+z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-\frac{1}{3} \\ x=\frac{2}{3} \\ y=\frac{4}{3} \\ z=\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right) \Rightarrow \overline{AH} = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{4}{3}\right).$$

Gọi d' là hình chiếu vuông góc của d trên $(P) \Rightarrow d'$ đi qua A và H

$\Rightarrow d'$ có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (2;1;-4)$.

Vậy phương trình đường thẳng d' là: $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-4}.$

Câu 46: Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -3 và 6 . Diện tích hình phẳng giới

hạn bởi các đường $y = \frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng

A. $2\ln 3.$

B. $\ln 3.$

C. $\ln 18.$

D. $2\ln 2.$

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b; f''(x) = 6x + 2a; f'''(x) = 6;$$

$$g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) \Rightarrow g'(x) = f'(x) + f''(x) + 6.$$

Vì $g(x)$ có hai giá trị cực trị là -3 và 6 nên $g(x)$ có hai điểm cực trị là x_1, x_2 và $g(x_1) = -3, g(x_2) = 6$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $y = \frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y = 1$ là $\frac{f(x)}{g(x)+6} = 1$

$$\Leftrightarrow f(x) = g(x) + 6$$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + 6$$

$$\Leftrightarrow f'(x) + f''(x) + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases}.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y = 1$ là:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \left| \frac{f(x)}{g(x)+6} - 1 \right| dx = \left| \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{-g'(x)}{g(x)+6} \right) dx \right| = \left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{d(g(x)+6)}{g(x)+6} \right| = \left| \ln |g(x)+6| \Big|_{x_1}^{x_2} \right| = \left| \ln \frac{12}{3} \right| = 2 \ln 2.$$

Câu 47: Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{9x}$.

A. 27.

B. 9.

C. 11.

D. 12.

Lời giải

Chọn C

- Khi $y \leq 0$, vì $xy > -1$ và $x > \frac{1}{3}$ nên ta có $y > -3$.

Với $y = 0$, phương trình thành: $27^{3x^2-9x} - 1 = 0$ vô nghiệm vì

$$27^{3x^2-9x} - 1 < 27^0 - 1 = 0, \forall x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right).$$

Với $y = -1$, phương trình thành: $27^{3x^2-10x} - (1-x) = 0$, có nghiệm vì $g_1(x) = 27^{3x^2-10x} - (1-x)$

liên tục trên $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$ và $g_1\left(\frac{1}{3}\right) \cdot g_1(3) < 0$.

Với $y = -2$, phương trình thành: $27^{3x^2-11x} - (1-2x) = 0$, có nghiệm vì

$$g_2(x) = 27^{3x^2-11x} - (1-2x) \text{ liên tục trên } \left[\frac{1}{3}; 3\right] \text{ và } g_2\left(\frac{1}{3}\right) \cdot g_2(3) < 0.$$

- Khi $y \geq 1$, xét trên $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$, ta có

$$27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{9x} \Leftrightarrow 3x^2 + xy = \log_{27}(1+xy) + 9x$$

$$\Leftrightarrow 3x - 9 - \frac{\log_{27}(1+xy)}{x} + y = 0.$$

Xét hàm $g(x) = 3x - 9 - \frac{\log_{27}(1+xy)}{x} + y$ trên $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$.

Ta có $g'(x) = 3 + \frac{\ln(1+xy)}{x^2 \ln 27} - \frac{y}{x(1+xy) \ln 27} > 3 - \frac{1}{3x^2 \ln 3} \geq 3 - \frac{3}{\ln 3} > 0, \forall x \in \left[\frac{1}{3}; 3\right]$.

Do đó, hàm $g(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$. Vì thế phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm trên $\left(\frac{1}{3}; 3\right)$ khi và chỉ khi $g\left(\frac{1}{3}\right)g(3) < 0$. Áp dụng bất đẳng thức $\ln(1+u) < u$ với mọi $u > 0$, ta có

$$g(3) = -\frac{\log_{27}(1+3y)}{3} + y > -\frac{3y}{3 \ln 27} + y > 0.$$

Do đó $g\left(\frac{1}{3}\right) < 0 \Leftrightarrow -\log_3\left(1+\frac{y}{3}\right) + y - 8 < 0 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 9$ (do y là số nguyên dương).

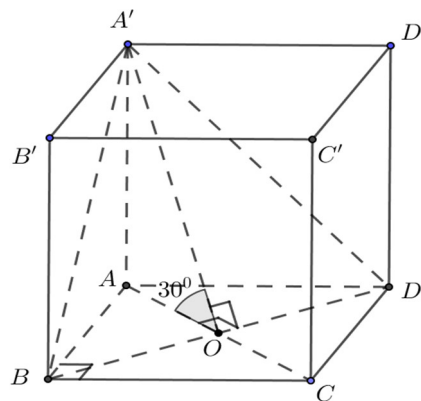
Vậy $y \in \{-2; -1; 1; 2; \dots; 9\}$ hay có 11 giá trị y thỏa đề.

Câu 48: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng 30° . Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

- A. $6\sqrt{3}a^3$. B. $\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3$. C. $2\sqrt{3}a^3$. **D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$.**

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Vì $BD \perp OA$ và $BD \perp AA'$ nên $BD \perp (A'OA) \Rightarrow BD \perp OA'$

Lại có $(A'BD) \cap (ABCD) = BD$. Do đó $((A'BD), (ABCD)) = \widehat{A'OA} = 30^\circ$ (Hình vẽ trên).

Vì tứ giác $ABCD$ là hình vuông có $BD = 2a$ nên $OA = a$ và $AB = AD = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác $A'AO$ vuông tại A có $OA = a$ và $\widehat{A'OA} = 30^\circ$ nên $AA' = OA \cdot \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy thể tích khối hộp chữ nhật $V = AB \cdot AD \cdot AA' = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$.

- Câu 49:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -3; -4)$, $B(-2; 1; 2)$. Xét hai điểm M và N thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MN = 2$. Giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng
- A. $3\sqrt{5}$. B. $\sqrt{61}$. C. $\sqrt{13}$. **D. $\sqrt{53}$.**

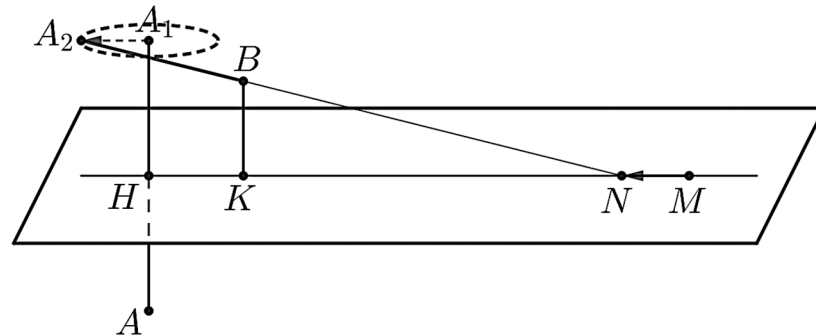
Lời giải

Chọn D

Vì $z_A \cdot z_B < 0$ nên A, B nằm khác phía so với mặt phẳng (Oxy) .

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B lên mặt phẳng (Oxy)

$\Rightarrow H(1; -3; 0)$, $K(-2; 1; 0)$.



Gọi A_1 là điểm đối xứng của A qua $(Oxy) \Rightarrow A_1(1; -3; 4)$.

Gọi A_2 thỏa $\overline{A_1A_2} = \overline{MN} \Rightarrow A_1A_2 = 2$

$\Rightarrow A_2 \in$ đường tròn (C) nằm trong mặt phẳng song song với (Oxy) và có tâm A_1 , bán kính $R = 2$.

Khi đó: $|AM - BN| = |A_1M - BN| = |A_2N - BN| \leq A_2B$.

Dấu "=" xảy ra và A_2B đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow \overline{A_1A_2}$ ngược hướng với $\overline{HK}$.

$$\Rightarrow \overline{A_1A_2} = -\frac{|\overline{A_1A_2}|}{|\overline{HK}|} \overline{HK} = \left(\frac{6}{5}; -\frac{8}{5}; 0\right) \Rightarrow A_2\left(\frac{11}{5}; -\frac{23}{5}; 4\right) \Rightarrow A_2B = \sqrt{53}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng $\sqrt{53}$.

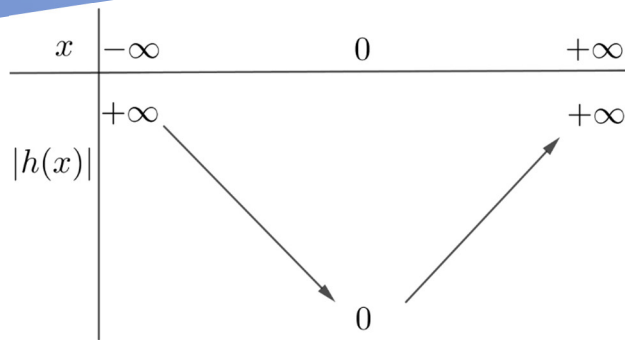
- Câu 50:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-7)(x^2-9)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x^3 + 5x| + m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

- A. 6.** B. 7. C. 5. D. 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có BBT của hàm $y = |h(x)| = |x^3 + 5x|$ như sau



Ta có $g'(x) = |x^3 + 5x|' \cdot f'(|x^3 + 5x| + m)$. Rõ ràng $x = 0$ là điểm cực trị của hàm số $y = |h(x)|$.

$$\text{Ta có: } f'(|x^3 + 5x| + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x^3 + 5x| + m = 7 \\ |x^3 + 5x| + m = 3 \\ |x^3 + 5x| + m = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x^3 + 5x| = 7 - m \\ |x^3 + 5x| = 3 - m \\ |x^3 + 5x| = -3 - m \end{cases}.$$

Để hàm số $g(x)$ có ít nhất 3 điểm cực trị thì phương trình $g'(x) = 0$ có ít nhất 2 nghiệm phân biệt khác 0 và $g'(x)$ đổi dấu khi đi qua ít nhất 2 trong số các nghiệm đó.

Từ BBT ta có $7 - m > 0 \Leftrightarrow m < 7 \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Vậy có 6 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.



Đề thi gồm 05 trang

ĐỀ THI TỐT NGHIỆP THPT ĐỢT 1 NĂM 2021

Bài thi môn: Toán

Thời gian: 90 phút (Không kể thời gian phát đề)

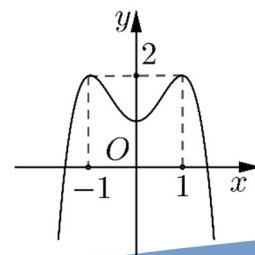
Mã đề thi: 102

- Câu 1.** Trên khoảng $(0; +\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = x^{\frac{5}{4}}$ là:
A. $y' = \frac{4}{9}x^{\frac{9}{4}}$. **B.** $y' = \frac{4}{5}x^{\frac{1}{4}}$. **C.** $y' = \frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}$. **D.** $y' = \frac{5}{4}x^{-\frac{1}{4}}$.
- Câu 2.** Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 3a^2$ và chiều cao $h = a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng:
A. $\frac{3}{2}a^3$. **B.** $3a^3$. **C.** $\frac{1}{3}a^3$. **D.** a^3 .
- Câu 3.** Nếu $\int_1^4 f(x)dx = 6$ và $\int_1^4 g(x)dx = -5$ thì $\int_1^4 [f(x) - g(x)]dx$ bằng:
A. -1 . **B.** -11 . **C.** 1 . **D.** 11 .
- Câu 4.** Tập xác định của hàm số $y = 7^x$ là:
A. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. **B.** $[0; +\infty)$. **C.** $(0; +\infty)$. **D.** $\mathbb{R}$.
- Câu 5.** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		3		-5		$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

- A.** 3 . **B.** -1 . **C.** -5 . **D.** 1 .
- Câu 6.** Diện tích S của mặt cầu bán kính R được tính theo công thức nào dưới đây?
A. $S = 4\pi R^2$. **B.** $S = 16\pi R^2$. **C.** $S = \frac{4}{3}\pi R^2$. **D.** $S = \pi R^2$.
- Câu 7.** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(2; 2; 1)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (5; 2; -3)$. Phương trình của d là:
A. $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 - 3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 + t \end{cases}$.
- Câu 8.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?
A. $(-1; 1)$. **B.** $(-\infty; 0)$. **C.** $(0; 1)$. **D.** $(0; +\infty)$.



A. $A_n^5 = \frac{n!}{5!(n-5)!}$. B. $A_n^5 = \frac{5!}{(n-5)!}$. C. $A_n^5 = \frac{n!}{(n-5)!}$. D. $A_n^5 = \frac{n!}{(n-5)!}$.

Câu 10. Thể tích của khối lập phương cạnh $4a$ bằng:

A. $64a^3$. B. $32a^3$. C. $16a^3$. D. $8a^3$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = x^2 + 3$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx = x^2 + 3x + C$. B. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + 3x + C$.

C. $\int f(x)dx = x^3 + 3x + C$. D. $\int f(x)dx = 2x + C$.

Câu 12. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm $M(-3; 2)$ là điểm biểu diễn của số phức nào dưới đây?

A. $z_3 = 3 - 2i$. B. $z_4 = 3 + 2i$. C. $z_1 = -3 - 2i$. D. $z_2 = -3 + 2i$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): -2x + 5y + z - 3 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P) ?

A. $\vec{n}_2 = (-2; 5; 1)$. B. $\vec{n}_1 = (2; 5; 1)$. C. $\vec{n}_4 = (2; 5; -1)$. D. $\vec{n}_3 = (2; -5; 1)$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(4; -1; 3)$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OA}$ là

A. $(-4; 1; 3)$. B. $(4; -1; 3)$. C. $(-4; 1; -3)$. D. $(4; 1; 3)$.

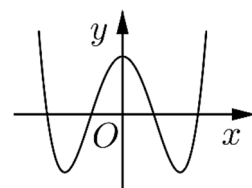
Câu 15. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

A. $y = x^3 - 3x + 1$.

B. $y = -2x^4 + 4x^2 + 1$.

C. $y = -x^3 + 3x + 1$.

D. $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$.



Câu 16. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$ và $u_2 = 12$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

A. 9. B. -9. C. $\frac{1}{4}$. D. 4.

Câu 17. Cho $a > 0$ và $a \neq 1$, khi đó $\log_a \sqrt[3]{a}$ bằng

A. -3. B. $\frac{1}{3}$. C. $-\frac{1}{3}$. D. 3.

Câu 18. Đồ thị của hàm số $y = -x^4 - 2x^2 + 3$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Câu 19. Cho hai số phức $z = 5 + 2i$ và $w = 1 - 4i$. Số phức $z + w$ bằng:

A. $6 + 2i$. B. $4 + 6i$. C. $6 - 2i$. D. $-4 - 6i$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = e^x + 1$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx = e^{x-1} + C$. B. $\int f(x)dx = e^x - x + C$.

C. $\int f(x)dx = e^x + x + C$. D. $\int f(x)dx = e^x + C$.

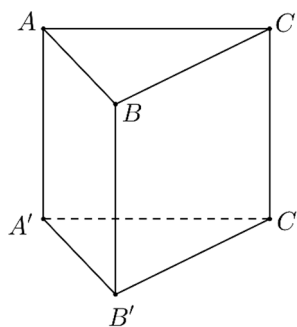
Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-3	-2	3	5	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

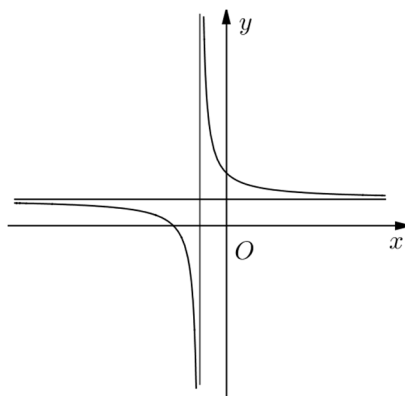
Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 5. B. 3. C. 2. D. 4.

- Câu 22.** Nếu $\int_0^3 f(x)dx = 3$ thì $\int_0^3 2f(x)dx$ bằng
A. 3. **B.** 18. **C.** 2. **D.** 6.
- Câu 23.** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ là đường thẳng có phương trình:
A. $x = -1$. **B.** $x = -2$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = 1$.
- Câu 24.** Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có tâm $I(0; -2; 1)$ và bán kính bằng 2. Phương trình của (S) là:
A. $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 2$. **B.** $x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 2$.
C. $x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 4$. **D.** $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 4$.
- Câu 25.** Phần thực của số phức $z = 6 - 2i$ bằng
A. -2. **B.** 2. **C.** 6. **D.** -6.
- Câu 26.** Tập nghiệm của bất phương trình $2^x < 5$ là
A. $(-\infty; \log_2 5)$. **B.** $(\log_2 5; +\infty)$. **C.** $(-\infty; \log_5 2)$. **D.** $(\log_5 2; +\infty)$.
- Câu 27.** Nghiệm của phương trình $\log_5(3x) = 2$ là:
A. 25. **B.** $\frac{32}{3}$. **C.** 32. **D.** $\frac{25}{3}$.
- Câu 28.** Cho khối trụ có bán kính đáy $r = 4$ và chiều cao $h = 3$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng
A. 16π . **B.** 48π . **C.** 36π . **D.** 12π .
- Câu 29.** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau (tham khảo hình bên). Góc giữa hai đường thẳng AA' và $B'C$ bằng



- A.** 90° . **B.** 45° . **C.** 30° . **D.** 60° .
- Câu 30.** Trong không gian, cho hai điểm $A(0; 0; 1)$ và $B(2; 1; 3)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB có phương trình là
A. $2x + y + 2z - 11 = 0$. **B.** $2x + y + 2z - 2 = 0$. **C.** $2x + y + 4z - 4 = 0$. **D.** $2x + y + 4z - 17 = 0$.
- Câu 31.** Từ một hộp chứa 10 quả bóng gồm 4 quả màu đỏ và 6 quả màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả. Xác suất để lấy được 3 quả màu xanh bằng
A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{1}{30}$. **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{2}{5}$.
- Câu 32.** Số phức z thỏa mãn $iz = 6 + 5i$. Số phức liên hợp của z là
A. $\bar{z} = 5 - 6i$. **B.** $\bar{z} = -5 + 6i$. **C.** $\bar{z} = 5 + 6i$. **D.** $\bar{z} = -5 - 6i$.
- Câu 33.** Biết hàm số $y = \frac{x+a}{x+1}$ (a là số thực cho trước, $a \neq 1$) có đồ thị như trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. B. $y' > 0, \forall x \neq -1$. C. $y' < 0, \forall x \neq -1$. D. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;-1)$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z + 1 = 0$. Đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) có phương trình là:

- A. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{1}$. B. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{2}$.
C. $\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{1}$. D. $\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{2}$.

Câu 35. Trên đoạn $[-2;1]$, hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm

- A. $x = -2$. B. $x = 0$. C. $x = -1$. D. $x = 1$.

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C , $AC = 3a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng

- A. $\frac{3}{2}a$. B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}a$. C. $3a$. D. $3\sqrt{2}a$.

Câu 37. Nếu $\int_0^2 f(x)dx = 3$ thì $\int_0^2 [2f(x) - 1]dx$ bằng

- A. 6. B. 4. C. 8. D. 5.

Câu 38. Với mọi a, b thỏa mãn $\log_2 a^3 + \log_2 b = 8$, khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $a^3 + b = 64$. B. $a^3 b = 256$. C. $a^3 b = 64$. D. $a^3 + b = 256$.

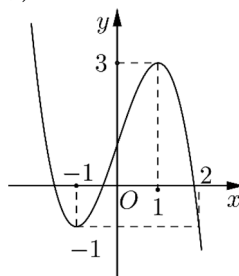
Câu 39. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $(3^{x^2} - 9)[\log_2(x+30) - 5] \leq 0$?

- A. 30. B. Vô số. C. 31. D. 29.

Câu 40. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2-2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$, giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng.

- A. 9. B. 15. C. 11. D. 6.

Câu 41. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình trên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x)) = 1$ là



- A. 9. B. 7. C. 3. D. 6.

- Câu 42.** Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z|=1$ và $|w|=2$. Khi $|z+i\bar{w}+6+8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất $|z-w|$ bằng
- A. $\frac{\sqrt{29}}{5}$. B. $\frac{\sqrt{221}}{5}$. C. 3. D. $\sqrt{5}$.
- Câu 43.** Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -4 và 2 . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các hàm số $y=\frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng
- A. $2\ln 2$. B. $\ln 6$. C. $3\ln 2$. D. $\ln 2$.
- Câu 44.** Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD=4a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)=30^\circ$. Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng?
- A. $\frac{16\sqrt{3}}{9}a^3$ B. $48\sqrt{3}a^3$ C. $\frac{16\sqrt{3}}{3}a^3$ D. $16\sqrt{3}a^3$
- Câu 45.** Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x \in \left(\frac{1}{3}; 4\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy}=(1+xy)27^{12x}$?
- A. 14. B. 27. C. 12. D. 15.
- Câu 46.** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ và mặt phẳng $(P): 2x+y-z+3=0$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) là đường thẳng có phương trình:
- A. $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z-1}{13}$. B. $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{-5} = \frac{z-1}{1}$. C. $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{-5} = \frac{z+1}{1}$. D. $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{13}$.
- Câu 47.** Cắt hình nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc bằng 60° ta được thiết diện là tam giác đều cạnh $2a$. Diện tích xung quanh của (N) bằng
- A. $\sqrt{7}\pi a^2$. B. $\sqrt{13}\pi a^2$. C. $2\sqrt{7}\pi a^2$. D. $2\sqrt{13}\pi a^2$.
- Câu 48.** Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2(m+1)z+m^2=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0|=5$?
- A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.
- Câu 49.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-8)(x^2-9)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $f(|x^3+6x|+m)$ có ít nhất 3 cực trị?
- A. 5. B. 7. C. 8. D. 6.
- Câu 50.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-3;2)$, $B(-2;1;-3)$. Xét hai điểm M, N thay đổi trong mặt phẳng (Oxy) sao cho $MN=1$. Giá trị lớn nhất của $|AM-BN|$ bằng
- A. $\sqrt{17}$. B. $\sqrt{41}$. C. $\sqrt{37}$. D. $\sqrt{61}$.

BẢNG ĐÁP ÁN ĐỀ 102

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
C	D	D	D	A	A	C	C	C	A	B	D	A	B	D	D	B	D	C	C	D	D	C	D	C
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
A	D	B	B	B	A	C	C	B	B	C	B	B	C	A	B	A	A	C	A	A	A	B	B	C

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 39. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $(3^{x^2} - 9^x)[\log_2(x+30) - 5] \leq 0$?

A. 30.

B. Vô số.

C. 31.

D. 29.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện xác định: $x > -30$. Đặt $f(x) = (3^{x^2} - 9^x)[\log_2(x+30) - 5]$

Xét phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x^2} = 9^x \\ \log_2(x+30) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2x \\ x+30 = 2^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \text{ (kép)} \end{cases}$

Ta có bảng xét dấu:

x	-30		0		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Suy ra bất phương trình $f(x) \leq 0$ có tập nghiệm là: $S = (-30; 0] \cup \{2\}$.

Với $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-29; -28; \dots; -2; -1; 0; 2\}$.

Vậy có 31 số nguyên x thỏa mãn.

Câu 40. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2-2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$, giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng.

A. 9.

B. 15.

C. 11.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Ta có: $\int (2x-1)dx = x^2 - x + c_1$; $\int (3x^2-2)dx = x^3 - 2x + c_2$

Suy ra $F(x) = \int f(x)dx = \begin{cases} x^2 - x + C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 - 2x + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

Mà ta có $F(0) = 2 \Rightarrow C_2 = 2$.

Mặt khác hàm số F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ nên $y = F(x)$ liên tục tại $x = 1$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) \Rightarrow C_1 = 1$.

Khi đó ta có: $F(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 - 2x + 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} F(-1) = 3 \\ F(2) = 3 \end{cases}$.

Vậy $F(-1) + 2F(2) = 9$.

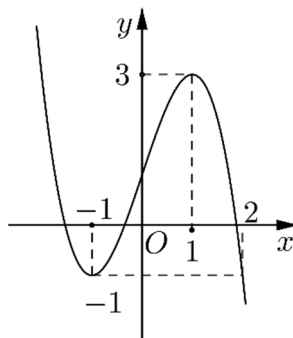
Cách 2:

Dễ thấy hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó ta có:

$$F(1) - F(0) = \int_0^1 (3x^2 - 2) dx = -1 \Rightarrow F(1) = 1.$$

$$F(-1) + 2F(2) = \int_1^{-1} (3x^2 - 2) dx + 2 \int_1^2 (2x - 1) dx + 3F(1) = 2 + 4 + 3 = 9.$$

Câu 41. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình trên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x)) = 1$ là



A. 9.

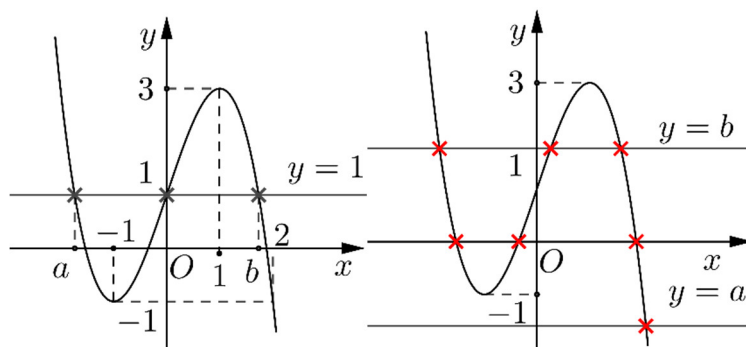
B. 7.

C. 3.

D. 6.

Lời giải

Chọn B



$$\text{Từ } f(f(x)) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a, (a < -1) \\ f(x) = 0 \\ f(x) = b, (1 < b < 2) \end{cases}.$$

- $f(x) = a$ với $a < -1$ phương trình có một nghiệm
- $f(x) = 0$ phương trình có ba nghiệm phân biệt
- $f(x) = b$ với $1 < b < 2$ phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x)) = 1$ là 7.

Câu 42. Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z| = 1$ và $|w| = 2$. Khi $|z + i\bar{w} + 6 + 8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z - w|$ bằng

A. $\frac{\sqrt{29}}{5}$.

B. $\frac{\sqrt{221}}{5}$.

C. 3.

D. $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $|z + i\bar{w} + 6 + 8i| \geq |6 + 8i| - |z| - |i\bar{w}| = 10 - 1 - 2 = 7$.

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} z = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \\ i\bar{w} = -\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \\ w = -\frac{8}{5} - \frac{6}{5}i \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } |z - w| = \frac{\sqrt{29}}{5}.$$

Câu 43. Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -4 và 2 . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x) + 6}$ và $y = 1$ bằng

A. $2\ln 2$.

B. $\ln 6$.

C. $3\ln 2$.

D. $\ln 2$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) = x^3 + (a+3)x^2 + (2a+b+6)x + (2a+b+c)$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) + f''(x) + f'''(x) = 3x^2 + 2ax + b + 6x + 2a + 6 \\ &= 3x^2 + (2a+6)x + (2a+b+6). \end{aligned}$$

$$\text{Do } g(x) \text{ có hai cực trị là } -5 \text{ và } 3 \text{ nên } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases} \text{ với } g(x_1) = -4, g(x_2) = 2.$$

Phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{f(x)}{g(x) + 6} = 1 \Leftrightarrow \frac{f(x) - g(x) - 6}{g(x) + 6} = 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2 + (2a+6)x + (2a+b+6)}{g(x) + 6} = 0 \Leftrightarrow \frac{g'(x)}{g(x) + 6} = 0$$

Phương trình này cũng có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Như vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi các hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x) + 6}$ và $y = 1$ là

$$S = \left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{g'(x)}{g(x) + 6} dx \right| = \left| \ln |g(x) + 6| \Big|_{x_1}^{x_2} \right| = \left| \ln |2 + 6| - \ln |-4 + 6| \right| = 2\ln 2.$$

Câu 44. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 4a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD) = 30^\circ$. Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng ?

A. $\frac{16\sqrt{3}}{9}a^3$

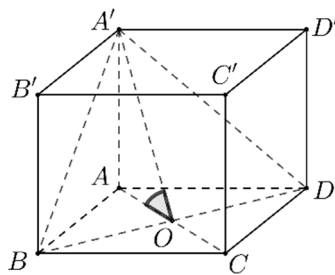
B. $48\sqrt{3}a^3$

C. $\frac{16\sqrt{3}}{3}a^3$

D. $16\sqrt{3}a^3$

Lời giải

Chọn C



Gọi O là trung điểm của BD . Ta có: $\Delta A'AB = \Delta A'AD$ suy ra $A'B = A'D$ suy ra $\Delta A'BD$ cân.

$$\text{Mà } \begin{cases} (A'BD) \cap (ABCD) = BD \\ A'O \perp BD \\ AO \perp BD \end{cases} \Rightarrow \widehat{(A'BD), (ABCD)} = \widehat{A'OA} = 30^\circ.$$

$$\text{Xét } \Delta A'OA \text{ vuông tại } A \text{ có: } \tan 30^\circ = \frac{A'A}{AO} = \frac{A'A}{\frac{AC}{2}} = \frac{A'A}{\frac{BD}{2}} = \frac{A'A}{2a} \Rightarrow A'A = 2a \cdot \tan 30^\circ = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Xét hình vuông } ABCD \text{ có: } BD = AB\sqrt{2} \Rightarrow AB = 2a\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy thể tích của khối hộp chữ nhật bằng: } V = A'A \cdot AB^2 = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot (2a\sqrt{2})^2 = \frac{16\sqrt{3}}{3} a^3.$$

Câu 45. Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x \in \left(\frac{1}{3}; 4\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{12x}$?

A. 14.

B. 27.

C. 12.

D. 15.

Lời giải

Chọn A

• **TH1:** $y \leq 0$, vì $xy > -1$ và $x > \frac{1}{3}$ nên ta có $y > -3$.

Ta có thể kiểm tra trực tiếp để xem xét có nhận $y = -2, y = -1, y = 0$ hay không.

$$+) \text{ Nếu } y = 0 \Rightarrow 27^{3x^2-12x} = 1 \Rightarrow 3x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin \left(\frac{1}{3}; 4\right) \\ x = 4 \notin \left(\frac{1}{3}; 4\right) \end{cases} \text{ (trường hợp này loại).}$$

+) Nếu $y = -1$ thỏa mãn.

+) Nếu $y = -2$ thỏa mãn.

• **TH2:** Khi $y \geq 1$, ta có:

$$27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{12x} \Leftrightarrow 3x^2 - 12x = \log_{27}(1+xy) - xy \Leftrightarrow 3x - 12 - \frac{\log_{27}(1+xy)}{x} + y = 0.$$

$$\text{Xét hàm } g(x) = 3x - 12 - \frac{\log_{27}(1+xy)}{x} + y \text{ trên } \left[\frac{1}{3}; 4\right].$$

$$\text{Ta có } g'(x) = 3 + \frac{\ln(1+xy)}{x^2 \ln 27} - \frac{y}{x(1+xy) \ln 27} > 3 - \frac{1}{3x^2 \ln 3} \geq 3 - \frac{3}{\ln 3} > 0, \forall x \in \left[\frac{1}{3}; 4\right].$$

Do đó, hàm $g(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{3}; 4\right]$. Vì thế phương trình $g(x)=0$ có nghiệm trên $\left(\frac{1}{3}; 4\right)$ khi và chỉ khi $g\left(\frac{1}{3}\right)g(4)<0$.

Áp dụng bất đẳng thức $\ln(1+u)<u$ với mọi $u>0$, ta có

$$g(4)=-\frac{\ln(1+4y)}{18\ln 3}+y>-\frac{y}{3\ln 3}+y>0.$$

Do đó $g\left(\frac{1}{3}\right)<0 \Leftrightarrow -\log_3\left(1+\frac{y}{3}\right)+y-11<0 \Leftrightarrow 1\leq y\leq 12$ (do y là số nguyên dương).

Vậy có 14 giá trị nguyên y sao cho tồn tại $x\in\left(\frac{1}{3}; 4\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy}=(1+xy).27^{12x}$.

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ và mặt phẳng $(P): 2x+y-z+3=0$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) là đường thẳng có phương trình:

A. $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z-1}{13}$.

B. $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{-5}=\frac{z-1}{1}$.

C. $\frac{x-1}{3}=\frac{y}{-5}=\frac{z+1}{1}$.

D. $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z+1}{13}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm.

Đường thẳng d đi qua $A(-1;0;1)$ có 1 VTCP là: $\vec{u}=(1;1;2)$.

Mặt phẳng (P) có 1 VTPT là: $\vec{n}=(2;1;-1)$.

Ta có $\vec{v}=[\vec{u}, \vec{n}]=(-3;5;-1)$; $\vec{a}=[\vec{n}, \vec{v}]=(-4;5;13)$.

Δ là hình chiếu của d trên $(P) \Rightarrow \Delta$ đi qua $A(-1;0;1)$ và có 1 VTCP $\vec{a}=[\vec{n}, \vec{v}]=(-4;5;13)$.

Suy ra phương trình $\Delta: \frac{x+1}{-4}=\frac{y}{5}=\frac{z-1}{13}$.

Câu 47. Cắt hình nón $(\mathcal{N})$ bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc bằng 60° ta được thiết diện là tam giác đều cạnh $2a$. Diện tích xung quanh của $(\mathcal{N})$ bằng

A. $\sqrt{7}\pi a^2$.

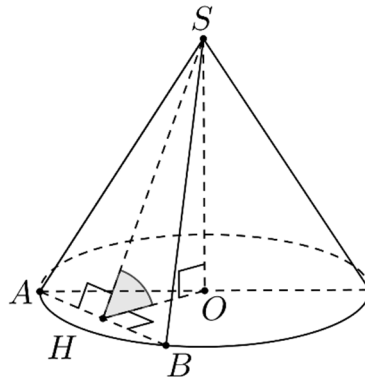
B. $\sqrt{13}\pi a^2$.

C. $2\sqrt{7}\pi a^2$.

D. $2\sqrt{13}\pi a^2$.

Lời giải

Chọn A



Mặt phẳng (P) cắt hình nón theo thiết diện là tam giác đều SAB cạnh $2a \Rightarrow AB = 2a$.

Kẻ $OH \perp AB$ tại $H \Rightarrow AH = a, SH = a\sqrt{3}$.

Góc giữa mặt phẳng (SAB) với mặt đáy bằng $60^\circ \Rightarrow \widehat{SHO} = 60^\circ \Rightarrow SO = SH \cdot \sin 60^\circ = \frac{3a}{2}$.

Mà $OH = \frac{SO}{\tan 60^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = \sqrt{AH^2 + OH^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2} \Rightarrow SA = \sqrt{h^2 + r^2} = 4a$.

Vậy $S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2} \cdot 2a = \sqrt{7}\pi a^2$.

Câu 48. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 = 0$ (m là tham số thực).

Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0| = 5$?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\Delta' = 2m+1$.

• **TH1:** $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$ thì $z_0 = \frac{1}{2}$, suy ra $m = -\frac{1}{2}$ (loại).

• **TH2:** $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}$ thì $z_0 = m+1 + \sqrt{|2m+1|}i$ hoặc $z_0 = m+1 - \sqrt{|2m+1|}i$.

Theo đề bài $|z_0| = 5 \Rightarrow (m+1)^2 + (-2m-1) = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} m=5 & (L) \\ m=-5 & (N) \end{cases}$.

• **TH3:** $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}$ thì phương trình có hai nghiệm thực phân biệt

Theo đề bài $|z_0| = 5 \Leftrightarrow z_0 = \pm 5$.

+ Khi $z_0 = 5$: thế vào phương trình ta được $m^2 - 10m + 15 = 0 \Leftrightarrow m = 5 \pm \sqrt{10}$ (nhận).

+ Khi $z_0 = -5$: thế vào phương trình ta được $m^2 + 10m + 35 = 0$ vô nghiệm.

Vậy có ba giá trị của m .

Câu 49. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-8)(x^2-9)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $f(|x^3 + 6x| + m)$ có ít nhất 3 cực trị?

A. 5.

B. 7.

C. 8.

D. 6.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = 0$ tại $x = 8, x = \pm 3$.

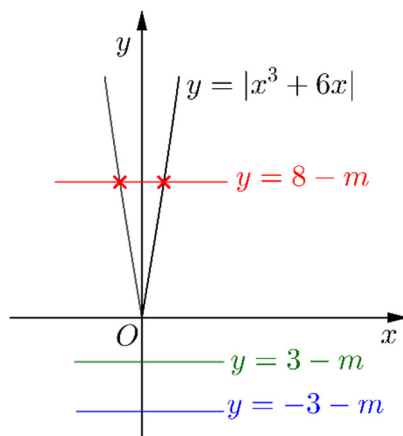
Đặt $g(x) = f(|x^3 + 6x| + m)$.

Ta có: $g'(x) = [f(|x^3 + 6x| + m)]' = \frac{(3x^2 + 6)(x^3 + 6x)}{|x^3 + 6x|} \cdot f'(|x^3 + 6x| + m) \quad (x \neq 0)$.

Với $x = 0$ là 1 cực trị của $g(x)$

Để $g(x)$ có ít nhất 3 cực trị thì $g'(x)$ phải có ít nhất 3 nghiệm bội lẻ hay $f'(|x^3 + 6x| + m) = 0$ có ít nhất 2 nghiệm.

$$f'(|x^3 + 6x| + m) = 0 \rightarrow \begin{cases} |x^3 + 6x| + m = -3 \\ |x^3 + 6x| + m = 3 \\ |x^3 + 6x| + m = 8 \end{cases} \quad \text{Ta có đồ thị } u(x) = |x^3 + 6x| \quad (\text{với } m > 0):$$



Để $f'(|x^3 + 6x| + m) = 0$ có ít nhất 2 nghiệm thì: $8 - m > 0 \rightarrow m < 8 \rightarrow m \in [1; 7]$.

Vậy có 7 giá trị m .

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -3; 2)$, $B(-2; 1; -3)$. Xét hai điểm M, N thay đổi trong mặt phẳng (Oxy) sao cho $MN = 1$. Giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng

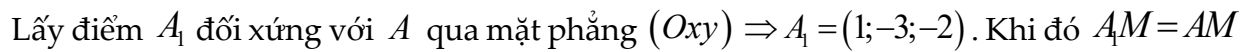
- A. $\sqrt{17}$. B. $\sqrt{41}$. C. $\sqrt{37}$. D. $\sqrt{61}$.

Lời giải

Chọn C

Đề thấy hai điểm A, B nằm khác phía so với mặt phẳng (Oxy) .

Gọi H lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oxy) , khi đó ta có: $H(1; -3; 0)$.



Khi đó ta dễ thấy hai điểm A_2 và B nằm cùng phía so với mặt phẳng (Oxy) .

Ta có: $|AM - BN| = |A_1M - BN| = |A_2N - BN| \leq A_2B$. Dấu bằng xảy ra khi $N = A_2B \cap (Oxy)$.

Gọi K lần lượt là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng $z = -2$, khi đó ta có: $K(-2; 1; -2)$ và $BK = 1, AK = 5$.

Để A_2B phải đạt giá trị lớn nhất thì KA_2 phải lớn nhất.

Mà $KA_2 \leq A_1K + R' = 5 + 1 = 6 \Rightarrow A_2B \leq \sqrt{1 + 6^2} = 37$

Suy ra giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng $\sqrt{37}$, dấu bằng xảy ra khi $N = A_2B \cap (Oxy)$.



ĐỀ THI TỐT NGHIỆP THPT ĐỢT 1 NĂM 2021

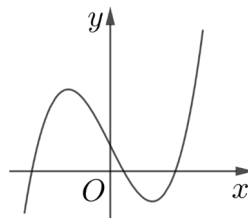
Bài thi môn: Toán

Thời gian: 90 phút (Không kể thời gian phát đề)

Mã đề thi: 103

Đề thi gồm 05 trang

Câu 1. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



- A. $y = -x^3 - 2x + \frac{1}{2}$. B. $y = x^3 - 2x + \frac{1}{2}$. C. $y = -x^4 + 2x^2 + \frac{1}{2}$. D. $y = x^4 + 2x^2 + \frac{1}{2}$.

Câu 2. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$ và $u_2 = 15$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

- A. -12 . B. $\frac{1}{5}$. C. 5 . D. 12 .

Câu 3. Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 7a^2$ và chiều cao $h = a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

- A. $\frac{7}{6}a^3$. B. $\frac{7}{2}a^3$. C. $\frac{7}{3}a^3$. D. $7a^3$.

Câu 4. Nếu $\int_1^4 f(x)dx = 5$ và $\int_1^4 g(x)dx = -4$ thì $\int_1^4 [f(x) - g(x)]dx$ bằng

- A. -1 . B. -9 . C. 1 . D. 9 .

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(-3;1;2)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2;4;-1)$. Phương trình của d là

- A. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = 2 - t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = 2 + t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = 2 - t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 4 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$.

Câu 6. Diện tích S của mặt cầu bán kính R được tính theo công thức nào dưới đây?

- A. $S = \pi R^2$. B. $S = \frac{4}{3}\pi R^2$. C. $S = 4\pi R^2$. D. $S = 16\pi R^2$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P) ?

- A. $\vec{n}_3 = (1;2;2)$. B. $\vec{n}_1 = (1;-2;2)$. C. $\vec{n}_4 = (1;-2;-3)$. D. $\vec{n}_2 = (1;2;-2)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;1;-2)$ và bán kính bằng 3. Phương trình của (S) là:

- A. $x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$. B. $x^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$.
C. $x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 3$. D. $x^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 3$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = x^2 + 1$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\int f(x)dx = x^3 + x + C$.
B. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + x + C$.
C. $\int f(x)dx = x^2 + x + C$.
D. $\int f(x)dx = 2x + C$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.
- Câu 11.** Tập xác định của hàm số $y = 6^x$ là:
A. $[0; +\infty)$. B. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. C. $(0; +\infty)$. D. $\mathbb{R}$.
- Câu 12.** Nếu $\int_0^3 f(x)dx = 2$ thì $\int_0^3 3f(x)dx$ bằng
A. 6. B. 1. C. -1. D. 0.
- Câu 13.** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm $M(-2;3)$ là điểm biểu diễn số phức nào dưới đây?
A. $z_3 = 2 + 3i$. B. $z_4 = -2 - 3i$. C. $z_1 = -2 + 3i$. D. $z_2 = 2 - 3i$.
- Câu 14.** Cho hàm số $f(x) = e^x + 3$. Khẳng định nào dưới đây đúng?
A. $\int f(x)dx = e^x + 3x + C$. B. $\int f(x)dx = e^x + C$.
C. $\int f(x)dx = e^{x-3} + C$. D. $\int f(x)dx = e^x - 3x + C$.
- Câu 15.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trong khoảng nào dưới đây?
A. $(-\infty; 2)$. B. $(0; 2)$. C. $(-2; 2)$. D. $(2; +\infty)$.
- Câu 16.** Đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x^2 - 1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng
A. 3. B. 1. C. -1. D. 0.
- Câu 17.** Trên khoảng $(0; +\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = x^{\frac{4}{3}}$ là:
A. $y' = \frac{4}{3}x^{\frac{-1}{3}}$. B. $y' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$. C. $y' = \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}$. D. $y' = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{3}}$.
- Câu 18.** Cho $a > 0$ và $a \neq 1$, khi đó $\log_a \sqrt{a}$ bằng
A. 2. B. -2. C. $-\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.
- Câu 19.** Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(3; 2; -4)$. Tọa độ vector $\overrightarrow{OA}$ là
A. $(3; -2; -4)$. B. $(-3; -2; 4)$. C. $(3; 2; -4)$. D. $(3; 2; 4)$.
- Câu 20.** Tập nghiệm của phương trình $2^x > 3$ là
A. $(\log_3 2; +\infty)$. B. $(-\infty; \log_2 3)$. C. $(-\infty; \log_3 2)$. D. $(\log_2 3; +\infty)$.
- Câu 21.** Cho hai số phức $z = 1 + 2i$ và $w = 3 - 4i$. Số phức $z + w$ bằng
A. $2 - 6i$. B. $4 + 2i$. C. $4 - 2i$. D. $-2 + 6i$.
- Câu 22.** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	1	3	1	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 23. Thể tích khối lập phương cạnh $3a$ bằng

- A. $27a^3$. B. $3a^3$. C. $9a^3$. D. a^3 .

Câu 24. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình

- A. $x=2$. B. $x=1$. C. $x = \frac{-1}{2}$. D. -1 .

Câu 25. Phần thực của số phức $z = 3 - 2i$ bằng:

- A. 2. B. -3 . C. 3. D. -2 .

Câu 26. Nghiệm của phương trình $\log_3(2x) = 2$ là:

- A. $x = \frac{9}{2}$. B. $x=9$. C. $x=4$. D. $x=8$

Câu 27. Với n là số nguyên dương bất kì, $n \geq 2$, công thức nào sau đây đúng?

- A. $A_n^2 = \frac{(n-2)!}{n!}$. B. $A_n^2 = \frac{2!}{(n-2)!}$. C. $A_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!}$. D. $A_n^2 = \frac{n!}{(n-2)!}$

Câu 28. Cho khối trụ có bán kính đáy $r = 2$ và chiều cao $h = 3$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

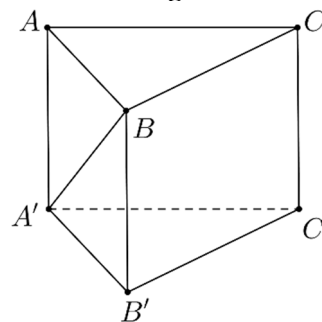
- A. 12π . B. 18π . C. 6π . D. 4π

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, Cho điểm $M(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 3z + 1 = 0$

Đường thẳng đi qua M và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình là:

- A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{1}$. B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-3}$.
C. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{1}$. D. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-3}$.

Câu 30. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau (tham khảo hình bên). Góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và CC' bằng:



- A. 45° . B. 30° . C. 90° . D. 60° .

Câu 31. Cho số phức z thỏa mãn $iz = 3 + 2i$. Số phức liên hợp của z là:

- A. $\bar{z} = 2 + 3i$. B. $\bar{z} = -2 - 3i$. C. $\bar{z} = -2 + 3i$. D. $\bar{z} = 2 - 3i$.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C , $AC = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng

- A. $\frac{1}{2}a$. B. $\sqrt{2}a$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}a$. D. a .

Câu 33. Từ một hộp chứa 10 quả bóng gồm 4 quả màu đỏ và 6 quả màu xanh. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả. Xác suất để lấy được 3 quả màu đỏ bằng

- A. $\frac{1}{5}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{2}{5}$. D. $\frac{1}{30}$.

Câu 34. Với mọi a, b thỏa mãn $\log_2 a^3 + \log_2 b = 7$, khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $a^3 + b = 49$. B. $a^3 b = 128$. C. $a^3 + b = 128$. D. $a^3 b = 49$.

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;0;1)$ và $B(1;2;3)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB có phương trình là:

- A. $x + 2y + 2z - 11 = 0$. B. $x + 2y + 2z - 2 = 0$.
C. $x + 2y + 4z - 4 = 0$. D. $x + 2y + 4z - 17 = 0$.

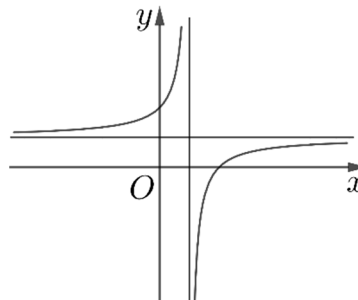
Câu 36. Trên đoạn $[0;3]$, hàm số $y = x^3 - 3x + 4$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

- A. $x = 1$. B. $x = 0$. C. $x = 3$. D. $x = 2$.

Câu 37. Nếu $\int_0^2 f(x) dx = 6$ thì $\int_0^2 [2f(x) - 1] dx$ bằng

- A. 12. B. 10. C. 11. D. 14

Câu 38. Biết hàm số $y = \frac{x+a}{x-1}$, (a là số thực cho trước và $a \neq -1$) có đồ thị như trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. $y' > 0, \forall x \neq 1$. B. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. C. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. D. $y' < 0, \forall x \neq 1$.

Câu 39. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $(2^{x^2} - 4^x)[\log_2(x+14) - 4] \leq 0$?

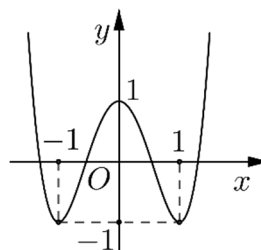
- A. 14. B. 13. C. Vô số. D. 15.

Câu 40. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

- A. 23. B. 11. C. 10. D. 21.

Câu 41. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x)) = 0$ là

- A. 4. B. 10. C. 12. D. 8.

Câu 42. Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z|=1$ và $|w|=2$. Khi $|z+i\bar{w}-6+8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z-w|$ bằng?

- A. 3. B. $\frac{\sqrt{29}}{5}$. C. $\sqrt{5}$. D. $\frac{\sqrt{221}}{5}$.

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-2}$ và mặt phẳng $(P): x+2y-z-6=0$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) là đường thẳng có phương trình:

- A. $\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{1}$. B. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{1}$.
C. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{7}$. D. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+1}{7}$.

Câu 44. Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x \in \left(\frac{1}{3}; 5\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{15x}$.

- A. 17. B. 16. C. 18. D. 15.

Câu 45. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD=2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng 60° . Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3$. B. $6\sqrt{3}a^3$. C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$. D. $2\sqrt{3}a^3$.

Câu 46. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -5 và 3 . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng

- A. $2\ln 3$. B. $\ln 2$. C. $\ln 15$. D. $3\ln 2$.

Câu 47. Cắt hình nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc bằng 30° , ta được thiết diện là tam giác đều cạnh $4a$. Diện tích xung quanh của nón bằng

- A. $4\sqrt{7}\pi a^2$. B. $8\sqrt{7}\pi a^2$. C. $8\sqrt{13}\pi a^2$. D. $4\sqrt{13}\pi a^2$.

Câu 48. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2(m+1)z+m^2=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0|=8$?

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-3;2)$ và $B(-2;1;-4)$. Xét hai điểm M và N thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MN=4$. Giá trị lớn nhất của $|AM-BN|$ bằng

- A. $5\sqrt{2}$. B. $3\sqrt{13}$. C. $\sqrt{61}$. D. $\sqrt{85}$.

Câu 50. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-10)(x^2-25), \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f(|x^3+8x|+m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị

- A. 9. B. 25. C. 5. D. 10.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
B	C	C	D	C	C	B	A	B	C	D	A	C	A	B	C	B	D	C	D	C	A	A	B	C
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
A	D	A	B	A	A	D	D	B	B	A	B	A	D	D	B	D	D	A	D	A	D	B	D	A

LỜI GIẢI CHI TIẾT CÁC CÂU VD – VDC

Câu 39. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $(2^{x^2} - 4^x)[\log_2(x+14) - 4] \leq 0$?

- A. 14. B. 13. C. Vô số. D. 15.

Lời giải

Chọn D

Cách 1

• Trường hợp 1:

$$\begin{cases} 2^{x^2} - 4^x \leq 0 \\ \log_2(x+14) - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2} \leq 2^{2x} \\ x+14 \geq 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x \leq 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

• Trường hợp 2:

$$\begin{cases} 2^{x^2} - 4^x \geq 0 \\ \log_2(x+14) - 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ -14 < x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 2 \\ -14 < x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -14 < x \leq 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy có 15 giá trị nguyên của x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2:

Điều kiện xác định: $x > -14$. Đặt $f(x) = (2^{x^2} - 4^x)[\log_2(x+14) - 4]$.

$$\text{Xét phương trình } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2} = 4^x \\ \log_2(x+14) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2x \\ x+14 = 2^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \text{ (kép)} \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu:

x	-14		0		2		$+\infty$
$f'(x)$			-	0	+	0	+

Suy ra bất phương trình $f(x) \leq 0$ có tập nghiệm là: $S = (-14; 0] \cup \{2\}$.

Do $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-13; -12; \dots; -2; -1; 0; 2\}$.

Vậy có 15 giá trị nguyên của x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 40. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

- A. 23. B. 11. C. 10. D. 21.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } F(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 + 2x + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 3x + C_1) = C_1 + 4.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3 + 2x + C_2) = C_2 + 3.$$

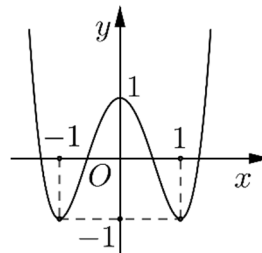
$$F(x) \text{ liên tục tại } x = 1 \Leftrightarrow C_1 + 4 = C_2 + 3 \quad (1)$$

$$F(0) = 2 \Rightarrow C_2 = 2 \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 + 2x + 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}.$$

$$F(-1) + 2F(2) = (-1)^3 + 2(-1) + 2 + 2(2^2 + 3 \cdot 2 + 1) = 21.$$

Câu 41. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x)) = 0$ là

A. 4.

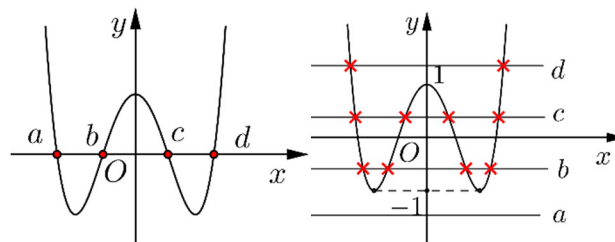
B. 10.

C. 12.

D. 8.

Lời giải

Chọn B



$$\text{Ta có: } f(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a & (a < -1) \\ f(x) = b & (-1 < b < 0) \\ f(x) = c & (0 < c < 1) \\ f(x) = d & (d > 1) \end{cases}.$$

Phương trình $f(x) = a$ với $a < -1$ vô nghiệm.

Phương trình $f(x) = b$ với $-1 < b < 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Phương trình $f(x) = c$ với $0 < c < 1$ có 4 nghiệm phân biệt.

Phương trình $f(x) = d$ với $d > 1$ có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $f(f(x)) = 0$ có 10 nghiệm.

Câu 42. Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z| = 1$ và $|w| = 2$. Khi $|z + i\bar{w} - 6 + 8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z - w|$ bằng?

A. 3.

B. $\frac{\sqrt{29}}{5}$.

C. $\sqrt{5}$.

D. $\frac{\sqrt{221}}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Theo BĐT modun số phức, ta có:

$$|z + i\bar{w}| \leq |z| + |i\bar{w}| = |z| + |w| = 3.$$

Ta lại có:

$$|z + i\bar{w} - 6 + 8i| = |(-6 + 8i) - [-(z + i\bar{w})]| \geq |-6 + 8i| - |-(z + i\bar{w})| = |-6 + 8i| - |z + i\bar{w}| \geq 10 - 3 = 7.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra, khi và chỉ khi: } \begin{cases} z = k.i\bar{w} \\ -6 + 8i = m.(z + i\bar{w}) \end{cases} \quad k > 0, m < 0.$$

$$\text{Lấy modun 2 vế, ta được: } \begin{cases} |z| = k.|i\bar{w}| \\ |-6 + 8i| = -m.|z + i\bar{w}| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = k.2 \\ 10 = -m.3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ m = -\frac{10}{3} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \\ w = \frac{-8}{5} + \frac{6}{5}i \end{cases} \Rightarrow |z - w| = \frac{\sqrt{221}}{5}.$$

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-2}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - z - 6 = 0$ hình chiếu vuông góc của d trên (P) là đường thẳng có phương trình:

A. $\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{1}.$

B. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{1}.$

C. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{7}.$

D. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+1}{7}.$

Lời giải

Chọn D

Ta có d đi qua điểm $A(1; 2; -1)$ và $A(1; 2; -1)$ thuộc (P) .

Vậy $A(1; 2; -1)$ là giao điểm của d và (P) .

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và vuông góc với (P) . Khi đó (Q) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(Q)} = [\vec{u}_d, \vec{n}_{(P)}] = (3; -1; 1)$.

Đường thẳng d' là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) nên có một vectơ chỉ phương là:

$$\vec{u}_{d'} = [\vec{n}_Q, \vec{n}_P] = (-1; 4; 7).$$

Vậy đường thẳng d' có $\vec{u}_{d'} = (-1; 4; 7)$ và đi qua điểm $A(1; 2; -1)$ có phương trình chính tắc là $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+1}{7}.$

Câu 44. Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x \in \left(\frac{1}{3}; 5\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{15x}.$

A. 17.

B. 16.

C. 18.

D. 15.

Lời giải

Chọn A

- Khi $y \leq 0$, vì $xy > -1$ và $x > \frac{1}{3}$ nên ta có $y > -3$.

Với $y = 0$, phương trình thành: $27^{3x^2-15x} - 1 = 0$, vô nghiệm vì

$$27^{3x^2-15x} - 1 < 27^0 - 1 = 0, \forall x \in \left(\frac{1}{3}; 5\right).$$

Với $y = -1$, phương trình thành: $27^{3x^2-16x} - (1-x) = 0$ có nghiệm vì $g_1(x) = 27^{3x^2-16x} - (1-x)$

liên tục trên $\left[\frac{1}{3}; 5\right]$ và $g_1\left(\frac{1}{3}\right) \cdot g_1(5) < 0$.

Với $y = -2$, phương trình thành: $27^{3x^2-17x} - (1-2x) = 0$ có nghiệm vì

$g_2(x) = 27^{3x^2-16x} - (1-2x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{3}; 5\right]$ và $g_2\left(\frac{1}{3}\right) \cdot g_2(5) < 0$.

• Khi $y \geq 1$, xét trên $\left[\frac{1}{3}; 5\right]$, ta có

$$\begin{aligned} 27^{3x^2+xy} &= (1+xy)27^{15x} \Leftrightarrow 3x^2 - 15x = \log_{27}(1+xy) - xy \\ &\Leftrightarrow 3x - 15 - \frac{\log_{27}(1+xy)}{x} + y = 0. \end{aligned}$$

Xét hàm $g(x) = 3x - 15 - \frac{\log_{27}(1+xy)}{x} + y$ trên $\left[\frac{1}{3}; 5\right]$.

$$\text{Ta có } g'(x) = 3 + \frac{\ln(1+xy)}{x^2 \ln 27} - \frac{y}{x(1+xy) \ln 27} > 3 - \frac{1}{3x^2 \ln 3} \geq 3 - \frac{3}{\ln 3} > 0, \forall x \in \left[\frac{1}{3}; 5\right].$$

Do đó, hàm $g(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{3}; 5\right]$. Vì thế phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm trên

$\left(\frac{1}{3}; 5\right)$ khi và chỉ khi $g\left(\frac{1}{3}\right) \cdot g(5) < 0$. Áp dụng bất đẳng thức $\ln(1+u) < u$ với mọi $u > 0$, ta

$$\text{có } g(5) = -\frac{\log_{27}(1+5y)}{5} + y > -\frac{5y}{5 \ln 27} + y > 0.$$

$$\text{Do đó } g\left(\frac{1}{3}\right) < 0 \Leftrightarrow -\log_3\left(1 + \frac{y}{3}\right) + y - 14 < 0 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 15 \text{ (do } y \text{ là số nguyên dương)}.$$

Vậy $y \in \{-2; -1; 1; 2; \dots; 15\}$ hay có 17 giá trị y thỏa đề.

Câu 45. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng 60° . Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3$.

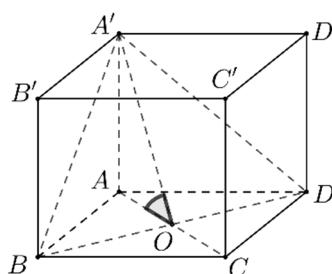
B. $6\sqrt{3}a^3$.

C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$.

D. $2\sqrt{3}a^3$.

Lời giải

Chọn D



+) Ta có $BD = 2a \Rightarrow AC = 2a; AB = a\sqrt{2}$.

$$+) S_{ABCD} = (a\sqrt{2})^2 = 2a^2.$$

+) Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ là góc $\widehat{A'OA} \Rightarrow AA' = AO \tan \widehat{A'OA} = a \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}.$

$$\text{Vậy } V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA' \cdot S_{ABCD} = a\sqrt{3} \cdot 2a^2 = 2\sqrt{3}a^3.$$

Câu 46. Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -5 và 3 . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y = 1$ bằng

A. $2\ln 3$.

B. $\ln 2$.

C. $\ln 15$.

D. $3\ln 2$.

Lời giải

Chọn A

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b, f''(x) = 6x + 2a, f'''(x) = 6.$$

$$g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) \Rightarrow g'(x) = f'(x) + f''(x) + f'''(x) = f'(x) + f''(x) + 6.$$

Do $g(x)$ có hai cực trị là -5 và 3 nên $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases}$ với $g(x_1) = 3, g(x_2) = -5$.

$$\text{Ta có: } \frac{f(x)}{g(x)+6} = 1 \Leftrightarrow \frac{-f'(x) - f''(x) - 6}{g(x)+6} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases}.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y = 1$ là

$$S = \left| \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{f(x)}{g(x)+6} - 1 \right) dx \right| = \left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{-f'(x) - f''(x) - 6}{g(x)+6} dx \right| = \left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{d(g(x)+6)}{g(x)+6} \right| = \left| \left(\ln |g(x)+6| \right) \Big|_{x_1}^{x_2} \right| = 2\ln 3.$$

Câu 47. Cắt hình nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc bằng 30° , ta được thiết diện là tam giác đều cạnh $4a$. Diện tích xung quanh của nón bằng

A. $4\sqrt{7}\pi a^2$.

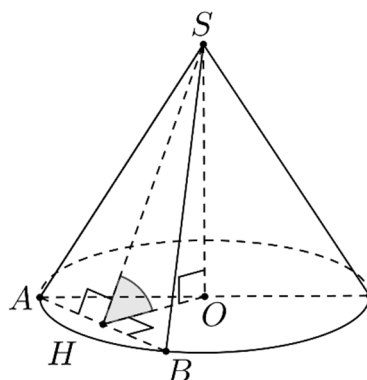
B. $8\sqrt{7}\pi a^2$.

C. $8\sqrt{13}\pi a^2$.

D. $4\sqrt{13}\pi a^2$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm đáy nón, đỉnh nón là S , thiết diện là tam giác đều SAB .

Kẻ $OH \perp AB$, H là trung điểm $AB \Rightarrow \widehat{SHO} = 30^\circ$.

$$\Rightarrow SH = 2a\sqrt{3}, HA = 2a.$$

$$\text{Ta có: } OH = SH \cdot \cos 30^\circ = 3a.$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{HO^2 + HA^2} = \sqrt{9a^2 + 4a^2} = a\sqrt{13}.$$

$$\Rightarrow S_{xq} = \pi Rl = \pi a\sqrt{13} \cdot 4a = 4\sqrt{13}\pi a^2.$$

Câu 48. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0| = 8$?

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \Delta = 8m + 4.$$

Trường hợp 1: $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{2}$ suy ra phương trình có 2 nghiệm thực $\Rightarrow z_0$ là nghiệm thực

$$|z_0| = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} z_0 = 8 \\ z_0 = -8 \end{cases} \text{ thay vào phương trình } \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 16m + 48 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = 12 \end{cases} (T/M) \\ m^2 + 16m + 80 = 0 (VN) \end{cases}.$$

Trường hợp 2: $\Delta < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}$ suy ra phương trình sẽ có 2 nghiệm phức, vì z_0 là nghiệm nên suy ra $\overline{z_0}$ cũng là nghiệm

$$|z_0| = 8 \Rightarrow |z_0|^2 = 64 \Leftrightarrow z_0 \cdot \overline{z_0} = 64 \Leftrightarrow m^2 = 64 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 8 \\ m = -8 \end{cases}.$$

Kết hợp điều kiện nên ta nhận $m = -8$.

Vậy có 3 giá trị m thỏa mãn.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -3; 2)$ và $B(-2; 1; -4)$. Xét hai điểm M và N thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MN = 4$. Giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng

A. $5\sqrt{2}$.

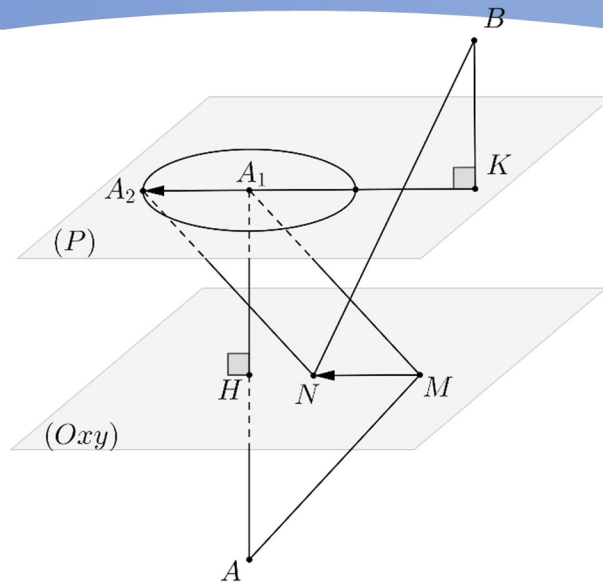
B. $3\sqrt{13}$.

C. $\sqrt{61}$.

D. $\sqrt{85}$.

Lời giải

Chọn D



Dễ thấy hai điểm A, B nằm khác phía so với mặt phẳng (Oxy) .

Gọi A_1 là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (Oxy) suy ra $A_1(1; -3; -2)$.

Gọi mặt phẳng (P) chứa A_1 và song song mặt phẳng (Oxy) suy ra $(P): z = -2$.

Ta gọi $A_2: \overline{A_1A_2} = \overline{MN}$ và gọi K là hình chiếu của B lên $(P) \Rightarrow K(-2; 1; -2) \Rightarrow BK = 2, KA_1 = 5$

Khi đó: $|AM - BN| = |A_2N - BN| \leq A_2B \leq \sqrt{BK^2 + (KA_1 + 4)^2} = \sqrt{85}$.

Suy ra giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng $\sqrt{85}$, dấu bằng xảy ra khi $N = A_2B \cap (Oxy)$.

Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-10)(x^2-25), \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x^3 + 8x| + m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị

A. 9.

B. 25.

C. 5.

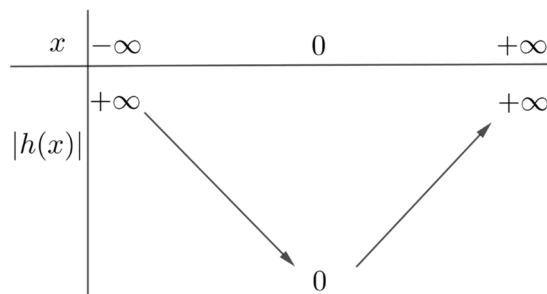
D. 10.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Ta có BBT của hàm $y = |h(x)| = |x^3 + 8x|$ như sau



Ta có $g'(x) = |x^3 + 8x|' \cdot f'(|x^3 + 8x| + m)$. Rõ ràng $x = 0$ là điểm cực trị của hàm $y = |h(x)|$

$$\text{Ta có: } f'(|x^3 + 8x| + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x^3 + 8x| + m = 10 \\ |x^3 + 8x| + m = 5 \\ |x^3 + 8x| + m = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x^3 + 8x| = 10 - m \\ |x^3 + 8x| = 5 - m \\ |x^3 + 8x| = -5 - m \end{cases}$$

Để hàm số $g(x)$ có ít nhất 3 điểm cực trị thì phương trình $g'(x)=0$ có ít nhất 2 nghiệm phân biệt khác 0 và $g'(x)$ đổi dấu khi đi qua ít nhất 2 trong số các nghiệm đó.

Từ BBT ta có $10-m > 0 \Leftrightarrow m < 10 \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

Vậy có 9 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Cách 2:

Với f, h là các hàm liên tục trên tập số thực, thì nếu c là điểm cực trị của $f(h(x))$ thì c phải là điểm cực trị của g hoặc là $h(c)$ là điểm đạt cực trị của f . Bây giờ $m \geq 10$ và với hàm $h(x) = |x^3 + 8x| + m$, ta có f chỉ có các điểm đạt cực trị là $10, \pm 5$. Trong khi chỉ có duy nhất điểm đạt cực trị của h là 0 cùng với $h(x) \geq m \geq 10$ với mọi x , và thêm nữa thì phương trình $h(x) = 10$ có không quá một nghiệm là $x = 0$. Bởi vậy, $m \geq 10$ không thỏa mãn yêu cầu.

Khi $m \leq 9$ và $m \neq 5$, thì trên từng khoảng mở bên trái và phải số 0 ta có

$$g'(x) = \frac{(3x^2 + 8)(h(x) - 9)(h(x)^2 - 25)|x|}{x}.$$

Cho thấy $g'(x)$ đổi dấu khi x chạy qua 0 và vì thế nó đạt cực trị tại $x = 0$. Kết hợp thêm việc đa thức $h(x) - 9$ có đúng hai nghiệm phân biệt khác 0, và $g'(x)$ đổi dấu khi x chạy qua các nghiệm đó. Cho thấy $m \leq 9$ và $m \neq 5$ thỏa yêu cầu.

Nếu $m = 5$ lúc đó $g'(x) = x(3x^2 + 8)^2(h(x) - 9)(h(x)^2 - 25)$. Ta cũng thấy $g'(x)$ đổi dấu khi x chạy qua 0 và hai nghiệm phân biệt khác 0 của $h(x) - 9$, cho thấy là cũng thỏa mãn.

Vậy m là các số nguyên dương nhỏ hơn 10.



ĐỀ THI TỐT NGHIỆP THPT ĐỢT 1 NĂM 2021

Bài thi môn: Toán

Thời gian: 90 phút (Không kể thời gian phát đề)

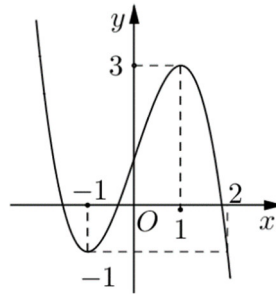
Mã đề thi: 104

Đề thi gồm 06 trang

Câu 1: Cho hai số phức $z = 3 + 2i$ và $w = 1 - 4i$. Số phức $z + w$ bằng

- A. $4 + 2i$. B. $4 - 2i$. C. $-2 - 6i$. D. $2 + 6i$.

Câu 2: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



- A. $y = x^3 - 3x + 1$. B. $y = x^4 + 4x^2 + 1$. C. $y = -x^3 + 3x + 1$. D. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

Câu 3: Nếu $\int_1^4 f(x)dx = 4$ và $\int_1^4 g(x)dx = -3$ thì $\int_1^4 [f(x) - g(x)]dx$ bằng

- A. 1. B. -7. C. -1. D. 7.

Câu 4: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ là đường thẳng có phương trình:

- A. $x = 2$. B. $x = -1$. C. $x = -2$. D. $x = 1$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 3; 0)$ và bán kính bằng 2. Phương trình của mặt cầu (S) là:

- A. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 2$. B. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 4$.
C. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 4$. D. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 2$.

Câu 6: Tập nghiệm của bất phương trình $2^x > 5$ là

- A. $(-\infty; \log_2 5)$. B. $(\log_5 2; +\infty)$. C. $(-\infty; \log_5 2)$. D. $(\log_2 5; +\infty)$.

Câu 7: Thể tích của khối lập phương cạnh $2a$ bằng

- A. a^3 . B. $2a^3$. C. $8a^3$. D. $4a^3$.

Câu 8: Trên khoảng $(0; +\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = x^{\frac{5}{3}}$ là:

- A. $y = \frac{3}{8}x^{\frac{5}{3}}$. B. $y = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$. C. $y = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$. D. $y = \frac{3}{5}x^{\frac{2}{3}}$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; -1; 4)$. Tọa độ của véc tơ $\overrightarrow{OA}$ là

- A. $(-2; 1; 4)$. B. $(2; -1; 4)$. C. $(2; 1; 4)$. D. $(-2; 1; -4)$.

Câu 10: Nếu $\int_0^3 f(x)dx = 3$ thì $\int_0^3 4f(x)dx$ bằng

- A. 3. B. 12. C. 36. D. 4.

Câu 11: Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_2 = 10$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

- A. -8. B. 8. C. 5. D. $\frac{1}{5}$.

Câu 12: Với n là số nguyên dương bất kì, $n \geq 3$, công thức nào dưới đây đúng?

- A. $A_n^3 = \frac{(n-3)!}{n!}$. B. $A_n^3 = \frac{3!}{(n-3)!}$. C. $A_n^3 = \frac{n!}{(n-3)!}$. D. $A_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!}$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x) = x^2 + 2$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\int f(x)dx = 2x + C$. B. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + 2x + C$.
C. $\int f(x)dx = x^2 + 2x + C$. D. $\int f(x)dx = x^3 + 2x + C$.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f(x)$	$-\infty$	3	1	3	$-\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

- A. 0. B. 3. C. 1. D. -1.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 4y - z - 1 = 0$. Vector nào dưới đây là một vector pháp tuyến của (P) ?

- A. $\vec{n}_2 = (2; -4; 1)$. B. $\vec{n}_1 = (2; 4; 1)$. C. $\vec{n}_3 = (2; 4; -1)$. D. $\vec{n}_4 = (-2; 4; 1)$.

Câu 16: Phần thực của số phức $z = 4 - 2i$ bằng

- A. 2. B. -4. C. 4. D. -2.

Câu 17: Nghiệm của phương trình $\log_2(5x) = 3$ là

- A. $x = \frac{8}{5}$. B. $x = \frac{9}{5}$. C. $x = 8$. D. $x = 9$.

Câu 18: Tập xác định của hàm số $y = 8^x$ là

- A. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. B. $\mathbb{R}$. C. $[0; +\infty)$. D. $(0; +\infty)$.

Câu 19: Cho $a > 0$ và $a \neq 1$, khi đó $\log_a \sqrt[5]{a}$ bằng

- A. $\frac{1}{5}$. B. $-\frac{1}{5}$. C. 5. D. -5.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(1; 5; -2)$ và có một vector chỉ phương $\vec{u} = (3; -6; 1)$. Phương trình của d là:

- A. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -6 + 5t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 5 - 6t \\ z = 2 + t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 5 + 6t \\ z = -2 + t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 5 - 6t \\ z = -2 + t \end{cases}$.

Câu 21: Trên mặt phẳng tọa độ, điểm $M(-4; 3)$ là điểm biểu diễn của số phức nào sau đây?

- A. $z_3 = -4 - 3i$. B. $z_4 = 4 + 3i$. C. $z_2 = 4 - 3i$. D. $z_1 = -4 + 3i$.

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-2	-1	2	4	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

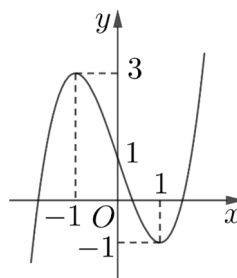
Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 3. B. 4. C. 2. D. 5.

Câu 23: Cho hàm số $f(x) = e^x + 4$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\int f(x)dx = e^x + 4x + C$. B. $\int f(x)dx = e^x + C$.
C. $\int f(x)dx = e^{x-4} + C$. D. $\int f(x)dx = e^x - 4x + C$.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1; 1)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(-\infty; 1)$. D. $(0; 3)$.

Câu 25: Diện tích S của mặt cầu bán kính R được tính theo công thức nào dưới đây?

- A. $S = \pi R^2$. B. $S = 16\pi R^2$. C. $S = 4\pi R^2$. D. $S = \frac{4}{3}\pi R^2$.

Câu 26: Đồ thị hàm số $y = -2x^3 + 3x^2 - 5$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

- A. -5. B. 0. C. -1. D. 2.

Câu 27: Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 8a^2$ và chiều cao $h = a$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

- A. $8a^3$ B. $\frac{4}{3}a^3$. C. $4a^3$. D. $\frac{8}{3}a^3$.

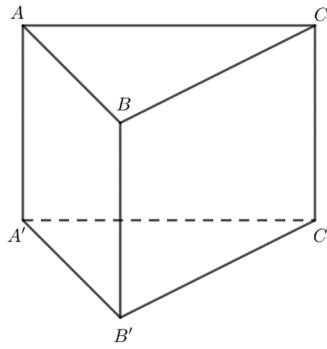
Câu 28: Cho khối trụ có bán kính đáy $r = 5$ và chiều cao $h = 3$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

- A. 15π B. 75π . C. 25π . D. 45π .

Câu 29: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; 1; -2)$ và mặt phẳng $(P): 3x + 2y - z + 1 = 0$. Đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) có phương trình là:

- A. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-1}$. B. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{1}$.
C. $\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$. D. $\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$.

Câu 30: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau (tham khảo hình bên). Góc giữa hai đường thẳng AB' và CC' bằng



- A. 30° . B. 90° . C. 60° . D. 45° .

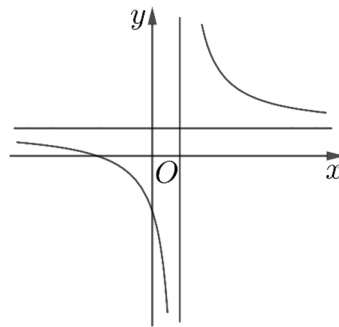
Câu 31: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B , $AB = 4a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) bằng

- A. $4a$. B. $4\sqrt{2}a$. C. $2\sqrt{2}a$. D. $2a$.

Câu 32: Nếu $\int_0^2 f(x)dx = 4$ thì $\int_0^2 [2f(x)-1]dx$ bằng

- A. 8. B. 10. C. 7. D. 6.

Câu 33: Biết hàm số $y = \frac{x+a}{x-1}$ (a là số thực cho trước và $a \neq -1$) có đồ thị như trong hình bên.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. B. $y' < 0, \forall x \neq 1$. C. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. D. $y' < 0, \forall x \neq 1$.

Câu 34: Cho số phức z thỏa mãn $iz = 4 + 3i$. Số phức liên hợp của z là:

- A. $\bar{z} = 3 + 4i$. B. $\bar{z} = -3 - 4i$. C. $\bar{z} = 3 - 4i$. D. $\bar{z} = -3 + 4i$.

Câu 35: Từ một hộp chứa 12 quả bóng gồm 5 quả màu đỏ và 7 quả màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả. Xác suất để lấy được 3 quả màu đỏ bằng

- A. $\frac{1}{22}$. B. $\frac{7}{44}$. C. $\frac{5}{12}$. D. $\frac{2}{7}$.

Câu 36: Với mọi a, b thỏa mãn $\log_2 a^3 + \log_2 b = 5$, khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $a^3b = 32$. B. $a^3b = 25$. C. $a^3 + b = 25$. D. $a^3 + b = 32$.

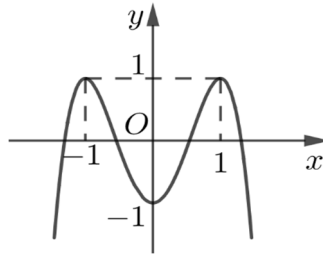
Câu 37: Trên đoạn $[-1; 2]$, hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

- A. $x = 2$. B. $x = 0$. C. $x = -1$. D. $x = 1$.

Câu 38: Trong mặt phẳng $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0)$ $B(3;2;1)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB có phương trình là:

- A. $2x + 2y + z - 2 = 0$. B. $4x + 2y + z - 17 = 0$.
C. $4x + 2y + z - 4 = 0$. D. $2x + 2y + z - 11 = 0$.

Câu 39: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x)) = 0$ là:



- A. 12. B. 10. C. 8. D. 4.

Câu 40: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $(2^{x^2} - 4^x)[\log_3(x+25) - 3] \leq 0$?

- A. 24. B. Vô số. C. 25. D. 26.

Câu 41: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

- A. 18. B. 20. C. 9. D. 24.

Câu 42: Cắt hình nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc bằng 30° , ta được thiết diện là tam giác đều cạnh $2a$. Diện tích xung quanh của (N) bằng

- A. $\sqrt{7}\pi a^2$. B. $\sqrt{13}\pi a^2$. C. $2\sqrt{13}\pi a^2$. D. $2\sqrt{7}\pi a^2$.

Câu 43: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z+2=0$. Hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng (P) là đường thẳng có phương trình:

- A. $\frac{x}{-2} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{3}$. B. $\frac{x}{14} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{8}$. C. $\frac{x}{-2} = \frac{y}{4} = \frac{z+1}{3}$. D. $\frac{x}{14} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{8}$.

Câu 44: Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x \in \left(\frac{1}{3}; 6\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{18x}$?

- A. 19. B. 20. C. 18. D. 21.

Câu 45: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0| = 6$?

- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 46: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông $BD = 4a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng 60° . Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

- A. $48\sqrt{3}a^3$. B. $\frac{16\sqrt{3}}{9}a^3$. C. $\frac{16\sqrt{3}}{3}a^3$. D. $16\sqrt{3}a^3$.

Câu 47: Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -5 và 2 . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y = 1$ bằng

- A. $\ln 3$. B. $3\ln 2$. C. $\ln 10$. D. $\ln 7$.

- Câu 48:** Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z|=1$ và $|w|=2$. Khi $|z+i\bar{w}+6+8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất $|z-w|$ bằng
- A. $\frac{\sqrt{29}}{5}$. B. $\frac{\sqrt{221}}{5}$. C. 3. D. $\sqrt{5}$.
- Câu 49:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;1;-3)$ và $B(1;-3;2)$. Xét hai điểm M và N thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MN=3$. Giá trị lớn nhất của $|AM-AN|$ bằng
- A. $\sqrt{65}$. B. $\sqrt{29}$. C. $\sqrt{26}$. D. $\sqrt{91}$.
- Câu 50:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-9)(x^2-16)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f(|x^3+7x|+m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?
- A. 16. B. 9. C. 4. D. 8.



ĐỀ THI THPT QUỐC GIA – NĂM HỌC: 2020 – 2021

ĐỀ CHÍNH THỨC (MÃ ĐỀ 104)

Môn: Toán

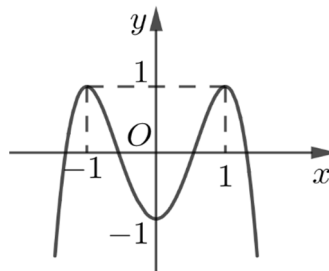
Thời gian: 90 phút (Không kể thời gian phát đề)

BẢNG ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
B	C	D	C	C	D	C	B	B	B	C	C	B	C	C	C	A	B	A	D	D	B	A	A	C
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
A	D	B	A	D	A	D	B	A	A	A	B	A	B	D	A	B	D	B	D	D	B	A	A	D

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 39: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x)) = 0$ là:



A. 12.

B. 10.

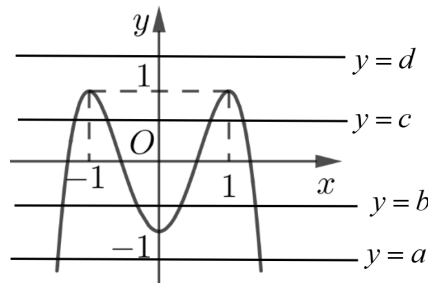
C. 8.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } f(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a \ (a < -1) & (1) \\ f(x) = b \ (-1 < b < 0) & (2) \\ f(x) = c \ (0 < c < 1) & (3) \\ f(x) = d \ (d > 1) & (4) \end{cases}$$



Từ đồ thị hàm số ta thấy:

Phương trình (1) có: 2 nghiệm

Phương trình (2) có: 4 nghiệm

Phương trình (3) có: 4 nghiệm

Phương trình (4) vô nghiệm

Vậy phương trình $f(f(x))=0$ có tất cả 10 nghiệm thực phân biệt.

Câu 40: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $(2^{x^2}-4^x)[\log_3(x+25)-3] \leq 0$?

A. 24.

B. Vô số.

C. 25.

D. 26.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Điều kiện xác định của bất phương trình là $x > -25$.

Đặt $A(x) = (2^{x^2}-4^x)[\log_3(x+25)-3], x > -25$.

$$2^{x^2}-4^x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2.$$

$$\log_3(x+25)-3=0 \Leftrightarrow x=2.$$

Ta có bảng xét dấu $A(x)$ như sau

x	-25	0	2	$+\infty$
$A(x)$		-	0	+

Từ đó, $A(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ -25 < x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \{-24; -23; \dots; 0; 2\}$ (do $x \in \mathbb{Z}$).

Kết luận: có 26 nghiệm nguyên thỏa mãn.

Cách 2:

• Trường hợp 1:

$$\begin{cases} 2^{x^2}-4^x \leq 0 \\ \log_3(x+25)-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2} \leq 2^{2x} \\ x+25 \geq 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x \leq 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

• Trường hợp 2:

$$\begin{cases} 2^{x^2}-4^x \geq 0 \\ \log_3(x+25)-3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x \geq 0 \\ -25 < x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -25 < x \leq 0 \vee x=2.$$

• Vậy có 26 giá trị nguyên của x thỏa mãn $(2^{x^2}-4^x)[\log_3(x+25)-3] \leq 0$.

Câu 41: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$F(0)=2$. Giá trị của $F(-1)+2F(2)$ bằng

A. 18.

B. 20.

C. 9.

D. 24.

Lời giải

Chọn A

• F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ nên $F(x) = \begin{cases} x^2+2x+C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3+x+C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

• Ta có: $F(0)=2 \Rightarrow C_2=2$. (1)

• Do F liên tục tại $x=1$ nên $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = F(1)$

$$\Leftrightarrow C_1 + 3 = C_2 + 2 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} C_1 + 3 = 4 \Leftrightarrow C_1 = 1.$$

$$\bullet \text{ Do đó } F(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 + x + 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}.$$

$$\bullet \text{ Suy ra } F(-1) + 2F(2) = 18.$$

Câu 42: Cắt hình nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc bằng 30° , ta được thiết diện là tam giác đều cạnh $2a$. Diện tích xung quanh của (N) bằng

A. $\sqrt{7}\pi a^2$.

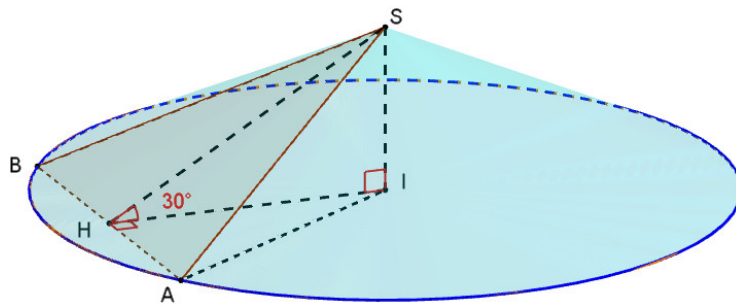
B. $\sqrt{13}\pi a^2$.

C. $2\sqrt{13}\pi a^2$.

D. $2\sqrt{7}\pi a^2$.

Lời giải

Chọn B



$$\bullet \text{ Ta có: } \triangle SAB \text{ đều cạnh } 2a \Rightarrow SH = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

$$\bullet \text{ Góc giữa thiết diện và mặt phẳng đáy là } \widehat{SHI} = 30^\circ.$$

$$\bullet \text{ Xét } \triangle SHI \text{ vuông tại } I; HI = SH \cdot \cos 30^\circ = a\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2}.$$

$$\bullet \text{ Xét } \triangle AHI \text{ vuông tại } H; AI = \sqrt{AH^2 + HI^2} = \sqrt{a^2 + \frac{9a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

$$\bullet \text{ Vậy: } S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot AI \cdot SA = \pi \cdot \frac{a\sqrt{13}}{2} \cdot 2a = \sqrt{13}\pi a^2.$$

Câu 43: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 2 = 0$. Hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng (P) là đường thẳng có phương trình:

A. $\frac{x}{-2} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{3}$.

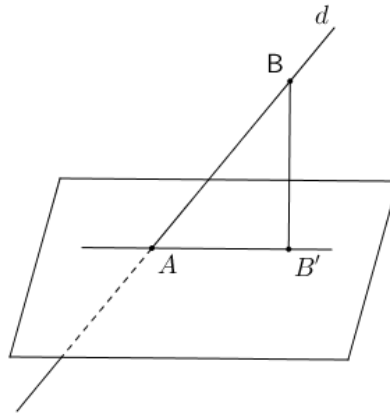
B. $\frac{x}{14} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{8}$.

C. $\frac{x}{-2} = \frac{y}{4} = \frac{z+1}{3}$.

D. $\frac{x}{14} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{8}$.

Lời giải

Chọn D



Cách 1

• Tọa độ $A = d \cap (P)$ thỏa
$$\begin{cases} x+2y-2z+2=0 \\ \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2} = \frac{x+2y-2z+2}{1-2-4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow A(0;0;1).$$

• Lấy điểm $B(1;-1;3) \in d : \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}.$

Gọi B' là hình chiếu của điểm B lên mặt phẳng $(P) \Rightarrow BB' : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2}$

• Tọa độ $B' = BB' \cap (P)$ thỏa

$$\begin{cases} x+2y-2z+2=0 \\ \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2} = \frac{x+2y-2z+2+5}{1+4+4} = \frac{5}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+\frac{5}{9} = \frac{14}{9} \\ y=-1+2 \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{9} \\ z=3-2 \cdot \frac{5}{9} = \frac{17}{9} \end{cases} \Rightarrow B' \left(\frac{14}{9}; \frac{1}{9}; \frac{17}{9} \right).$$

• $\overrightarrow{AB'} = \left(\frac{14}{9}; \frac{1}{9}; \frac{8}{9} \right) = \frac{1}{9} \vec{u} \Rightarrow \vec{u} = (14;1;8)$ là vector chỉ phương của AB' .

• Vậy $AB' : \frac{x}{14} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{8}$ là hình chiếu vuông góc của đường thẳng d lên (P) .

Cách 2

• Tọa độ $A = d \cap (P)$ thỏa
$$\begin{cases} x+2y-2z+2=0 \\ \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2} = \frac{x+2y-2z+2}{1-2-4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow A(0;0;1).$$

• Gọi d' là hình chiếu của d lên (P) ;

+ Đường thẳng d có vector chỉ phương $\vec{u} = (1;-1;2).$

+ Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (1;2;-2).$

+ $\vec{a} = [\vec{u}, \vec{n}] = (-2;4;3).$

+ $[\vec{n}, \vec{a}] = (14;1;8)$ là vector chỉ phương của (d') .

• Vậy $d' : \frac{x}{14} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{8}.$

Câu 44: Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x \in \left(\frac{1}{3}; 6\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{18x}$?

A. 19.

B. 20.

C. 18.

D. 21.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

• Khi $y \leq 0$, vì $xy > -1$ và $x > \frac{1}{3}$ nên ta có $y > -3$.

Với $y = 0$, phương trình thành: $27^{3x^2-18x} - 1 = 0$ vô nghiệm vì

$$27^{3x^2-18x} - 1 < 27^0 - 1 = 0, \forall x \in \left(\frac{1}{3}; 6\right).$$

Với $y = -1$, phương trình thành: $27^{3x^2-19x} - (1-x) = 0$, có nghiệm vì $g_1(x) = 27^{3x^2-19x} - (1-x)$

liên tục trên $\left[\frac{1}{3}; 6\right]$ và $g_1\left(\frac{1}{3}\right) \cdot g_1(6) < 0$.

Với $y = -2$, phương trình thành: $27^{3x^2-20x} - (1-2x) = 0$, có nghiệm vì

$g_2(x) = 27^{3x^2-20x} - (1-2x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{3}; 6\right]$ và $g_2\left(\frac{1}{3}\right) \cdot g_2(6) < 0$.

• Khi $y \geq 1$, xét trên $\left[\frac{1}{3}; 6\right]$, ta có

$$\begin{aligned} 27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{18x} &\Leftrightarrow 3x^2 - 18x = \log_{27}(1+xy) - xy \\ &\Leftrightarrow 3x - 18 - \frac{\log_{27}(1+xy)}{x} + y = 0. \end{aligned}$$

Xét hàm $g(x) = 3x - 18 - \frac{\log_{27}(1+xy)}{x} + y$ trên $\left[\frac{1}{3}; 6\right]$.

$$\text{Ta có } g'(x) = 3 + \frac{\ln(1+xy)}{x^2 \ln 27} - \frac{y}{x(1+xy) \ln 27} > 3 - \frac{1}{3x^2 \ln 3} \geq 3 - \frac{3}{\ln 3} > 0, \forall x \in \left[\frac{1}{3}; 6\right].$$

Do đó, hàm $g(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{3}; 6\right]$. Vì thế phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm trên

$\left(\frac{1}{3}; 6\right)$ khi và chỉ khi $g\left(\frac{1}{3}\right) \cdot g(6) < 0$. Áp dụng bất đẳng thức $\ln(1+u) < u$ với mọi $u > 0$, ta có

$$g(6) = -\frac{\log_{27}(1+6y)}{6} + y > -\frac{6y}{6 \ln 27} + y > 0.$$

$$\text{Do đó } g\left(\frac{1}{3}\right) < 0 \Leftrightarrow -\log_3\left(1+\frac{y}{3}\right) + y - 17 < 0 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 18 \text{ (do } y \text{ là số nguyên dương).}$$

Vậy $y \in \{-2; -1; 1; 2; \dots; 18\}$ hay có 20 giá trị y thỏa đề.

Cách 2.

Giả sử y là một trong những số nguyên thỏa mãn yêu cầu, lúc đó ta xét phương trình

$$27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{18x}$$

trên $D = \left(\frac{1}{3}; 6\right) \cap \{x \in \mathbb{R} : xy > -1\}$, và trên D nó tương đương với $f(x) = 0$, trong đó

$$f(x) = 3x^2 + (y - 18)x - \frac{1}{3} \log_3(1 + xy).$$

Ta có vài tính toán sau $f'(x) = 6x + y - 18 - \frac{y}{3(1+xy)\ln 3}$, $f''(x) = 6 + \frac{y^2}{(1+xy)^2 \ln 3}$.

Nếu $y < 0$, khi ấy vì cần có nghiệm $x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right)$ nên có ngay $y \geq -2$, lúc ấy $D = \left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{y}\right)$ trên D ta có

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^+} f(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}y - 6 - \frac{1}{3} \log_3\left(1 + \frac{1}{3}y\right) \leq -6 - \frac{1}{3} \log_3\left(1 - \frac{2}{3}\right) < 0.$$

Kết hợp $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{y}^-} f(x) = +\infty$ và việc f liên tục trên D cho thấy f có điểm triệt tiêu trên D ,

nghĩa là trường hợp này cho ta $y \in \{-2, -1\}$ thỏa yêu cầu.

Nếu $y = 0$, ta có $f(x) = 3x^2 - 18x < 0$ với mọi $x \in D$, vì thế loại.

Nếu $y \geq 19$, lúc đó có

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^+} f'(x) = y - 16 - \frac{y}{(3+y)\ln 3} > y - 17 > 0.$$

Kết hợp việc $f'(x)$ tăng ngặt trên D , cho ta f tăng ngặt trên D và trên D có

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^+} f(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}y - 6 - \frac{1}{3} \log_3\left(1 + \frac{1}{3}y\right)$$

Xét $g(y) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}y - 6 - \frac{1}{3} \log_3\left(1 + \frac{1}{3}y\right)$ trên $[10; +\infty)$, ta có

$$g'(y) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3(3+y)} > 0, g(19) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \log_3\left(1 + \frac{19}{3}\right) > 0$$

Vậy, $g(y) > 0$ với mỗi $y \geq 19$, cho thấy là $f(x) > 0$ với mọi $x \in D$.

Nếu $1 \leq y \leq 18$, thế thì vì $g(18) = \frac{1 - \log_3 7}{3} < 0$ kết hợp tính tăng ngặt của g trên $[1; 18]$ ta có

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^+} f(x) = g(y) = \frac{1}{3} + y - 9 - \frac{1}{3} \log_3\left(1 + \frac{1}{3}y\right) < 0.$$

Còn, theo bất đẳng thức số e , ta có

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = 6y - \frac{1}{3} \log_3(1 + 6y) > 6y - \ln(1 + 6y) > 0.$$

Đến đây, theo tính liên tục của f , ta thấy nó triệt tiêu trên D .

Tóm lại $y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ và $-2 \leq y \leq 18$.

Câu 45: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0| = 6$?

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\Delta' = (m+1)^2 - m^2 = 2m+1$.

+) Nếu $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 2m+1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{2}$, phương trình có 2 nghiệm thực. Khi đó $|z_0| = 6 \Leftrightarrow z_0 = \pm 6$.

* Thay $z_0 = 6$ vào phương trình ta được

$$36 - 12(m+1) + m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 12m + 24 = 0 \Leftrightarrow m = 6 \pm 2\sqrt{3} \text{ (thỏa mãn).}$$

* Thay $z_0 = -6$ vào phương trình ta được

$$36 + 12(m+1) + m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2 + 12m + 48 = 0 \text{ (vô nghiệm).}$$

+) Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 2m+1 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}$, phương trình có 2 nghiệm phức $z_1, z_2 \notin \mathbb{R}$ thỏa $z_2 = \overline{z_1}$.

. Khi đó $z_1 \cdot z_2 = |z_1|^2 = m^2 = 6^2$ hay $m = 6$ (loại) hoặc $m = -6$ (nhận).

Vậy tổng cộng có 3 giá trị của m là $m = 6 \pm 2\sqrt{3}$ và $m = -6$.

Câu 46: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 4a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng 60° . Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $48\sqrt{3}a^3$.

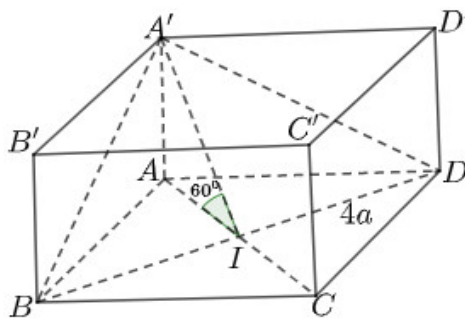
B. $\frac{16\sqrt{3}}{9}a^3$.

C. $\frac{16\sqrt{3}}{3}a^3$.

D. $16\sqrt{3}a^3$.

Lời giải

Chọn D



Ta có đáy $ABCD$ là hình vuông có $BD = 4a \Rightarrow AB = 2\sqrt{2}a$.

Gọi I trung điểm BD . Vì $BD = 4a \Rightarrow BI = AI = 2a$.

Tam giác $A'AI$ vuông tại A có: $\tan 60^\circ = \frac{A'A}{AI} \Rightarrow A'A = 2\sqrt{3}a$.

Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng:

$$V = S_{ABCD} \cdot A'A = (2\sqrt{2}a)^2 \cdot 2\sqrt{3}a = 16\sqrt{3}a^3.$$

Câu 47: Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -5 và 2 . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi

các hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y = 1$ bằng

A. $\ln 3$.

B. $3 \ln 2$.

C. $\ln 10$.

D. $\ln 7$.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) = x^3 + (a+3)x^2 + (2a+b+6)x + (2a+b+c)$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) + f''(x) + f'''(x) = 3x^2 + 2ax + b + 6x + 2a + 6 \\ &= 3x^2 + (2a+6)x + (2a+b+6). \end{aligned}$$

Vì $y = g(x)$ có hai giá trị cực trị là -5 và 2 nên $g'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với $g(x_1) = 2, g(x_2) = -5$.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{f(x)}{g(x)+6} = 1 \Leftrightarrow \frac{f(x) - g(x) - 6}{g(x)+6} = 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2 + (2a+6)x + (2a+b+6)}{g(x)+6} = 0 \Leftrightarrow \frac{g'(x)}{g(x)+6} = 0.$$

Phương trình này cũng có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Như vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi các hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y = 1$ là

$$S = \left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{g'(x)}{g(x)+6} dx \right| = \left| \ln |g(x)+6| \Big|_{x_1}^{x_2} \right| = \left| \ln |2+6| - \ln |-5+6| \right| = 3 \ln 2.$$

Câu 48: Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z| = 1$ và $|w| = 2$. Khi $|z + i\bar{w} + 6 + 8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z - w|$ bằng

A. $\frac{\sqrt{29}}{5}$.

B. $\frac{\sqrt{221}}{5}$.

C. 3.

D. $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } |z + i\bar{w} + 6 + 8i| \geq |6 + 8i| - |z| - |i\bar{w}| = 10 - 1 - 2 = 7.$$

$$\text{Dấu "bằng" xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} k(z) = 6 + 8i \\ l(i\bar{w}) = -6 + 8i \end{cases}, (k, l < 0) \Leftrightarrow \begin{cases} |k| = 10 \\ 2|l| = 10 \end{cases}, (k, l < 0) \Leftrightarrow \begin{cases} k = -10 \\ l = -5 \end{cases}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \begin{cases} z = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \\ i\bar{w} = -\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \\ \bar{w} = -\frac{8}{5} + \frac{6}{5}i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \\ w = -\frac{8}{5} - \frac{6}{5}i \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } |z - w| = \frac{\sqrt{29}}{5}.$$

Câu 49: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(-2; 1; -3)$ và $B(1; -3; 2)$. Xét hai điểm M và N thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MN = 3$. Giá trị lớn nhất của $|AM - AN|$ bằng

A. $\sqrt{65}$.

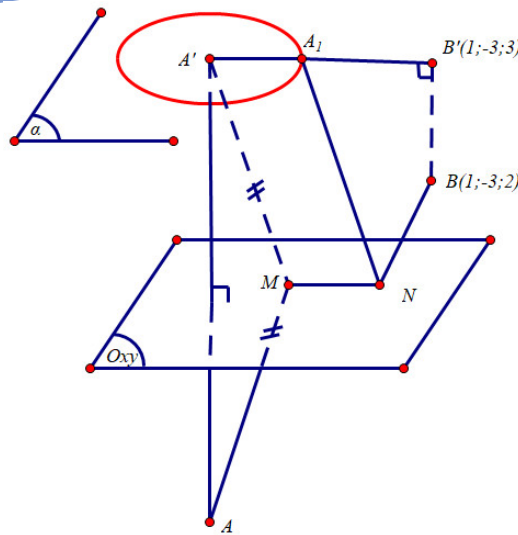
B. $\sqrt{29}$.

C. $\sqrt{26}$.

D. $\sqrt{91}$.

Lời giải

Chọn A



Để thấy điểm A nằm phía dưới, điểm B nằm phía trên mặt phẳng (Oxy) .

Gọi A' là điểm đối xứng của điểm A qua mặt phẳng (Oxy) , suy ra tọa độ điểm $A'(-2;1;3)$.

Gọi (α) là mặt phẳng qua A' và song song với mặt phẳng (Oxy) , suy ra phương trình mặt phẳng $(\alpha): z - 3 = 0$. Trên mặt phẳng (α) lấy điểm A_1 sao cho $A'A_1 = MN = 3$, suy ra A_1 thuộc đường tròn $(A', 3)$ và tứ giác $A'A_1MN$ là hình bình hành nên ta có $A'M = A_1N$.

Nên $|AM - BN| = |A'M - BN| = |A_1M - BN| \leq A_1B$. Gọi B' là hình chiếu của B lên mặt phẳng (α) , suy ra tọa độ điểm $B'(1; -3; 3)$.

$$\text{Ta có } A_1B = \sqrt{B'B^2 + B'A_1^2} \leq \sqrt{1 + (B'A' + 3)^2} = \sqrt{65}.$$

Câu 50: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-9)(x^2-16)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x^3 + 7x| + m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 16.

B. 9.

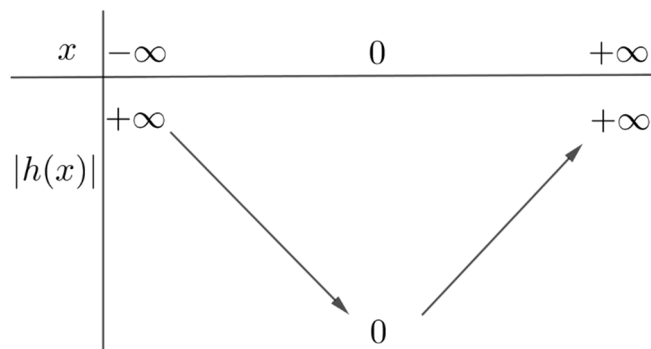
C. 4.

D. 8.

Lời giải

Chọn D

Ta có BBT của hàm $y = |h(x)| = |x^3 + 7x|$ như sau:



Ta có $g'(x) = |x^3 + 7x|' \cdot f'(|x^3 + 7x| + m)$. Rõ ràng $x = 0$ là điểm cực trị của hàm $y = |h(x)|$.

$$\text{Ta có: } f'(|x^3 + 7x| + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x^3 + 7x| + m = 9 \\ |x^3 + 7x| + m = 4 \\ |x^3 + 7x| + m = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x^3 + 7x| = 9 - m \\ |x^3 + 7x| = 4 - m \\ |x^3 + 7x| = -4 - m \end{cases}.$$

Để hàm số $g(x)$ có ít nhất 3 điểm cực trị thì phương trình $g'(x) = 0$ có ít nhất 2 nghiệm phân biệt khác 0 và $g'(x)$ đổi dấu khi đi qua ít nhất 2 trong số các nghiệm đó.

Từ BBT ta có $9 - m > 0 \Leftrightarrow m < 9 \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7, 8\}$.

Vậy có 8 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Ôn thi tốt nghiệp THPT đợt 2

*Phân tích, định hướng tìm lời giải, xây dựng các bài tương tự các
câu VD – VDE mã đề 102*

ĐỀ THI TỐT NGHIỆP THPT ĐỢT 1 NĂM 2021

Buổi thi môn Toán kỳ thi tốt nghiệp THPT đợt 1 năm 2021 diễn ra vào chiều ngày 7/8/2021. Bài thi môn Toán gồm 24 mã đề, được lấy từ 4 mã đề gốc là: Mã đề 101, 102, 103, 104. Nội dung đề thi nằm trong chương trình THPT, chủ yếu chương trình lớp 12, trong đó 38 câu đầu ở mức độ nhận biết, thông hiểu được ra trong các mã đề nhằm kiểm tra kiến thức cơ bản của lớp 11, lớp 12; trong các mã đề từ câu 39 đến câu 45 kiểm tra kiến thức học sinh ở mức độ vận dụng, từ câu 46 đến câu 50 ở mức độ vận dụng cao đã thể hiện rõ tính phân hoá bằng cách sử dụng tổng hợp các kiến thức trong chương trình THPT.

Kỳ thi tốt nghiệp THPT đợt 2 năm 2021 sẽ diễn ra trong 2 ngày 6/7/8/2021, để tạo điều kiện cho quý thầy cô cùng các em có tài liệu ôn tập trong thời gian gấp rút này Nhóm Giáo viên Toán Việt Nam xin gửi tới quý thầy cô và các em bài viết “Phân tích, định hướng tìm lời giải, xây dựng các bài tương tự các câu VD – VDE đề thi tốt nghiệp THPT đợt 1 Năm 2021”

Hวัง vọng bài viết sẽ giúp quý thầy cô có thêm tài liệu tham khảo; các em học sinh nắm chắc các kiến thức trong chương trình THPT; tiếp cận được với các bài toán mới, hay và lạ. Đặc biệt, rèn luyện tốt kỹ năng thi trắc nghiệm môn Toán.

Câu 39. Cắt hình nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc bằng 60° ta thu được thiết diện là một tam giác đều cạnh $4a$. Diện tích xung quanh của (N) bằng :

A. $8\sqrt{7}\pi a^2$.

B. $4\sqrt{13}\pi a^2$.

C. $8\sqrt{13}\pi a^2$.

D. $4\sqrt{7}\pi a^2$.

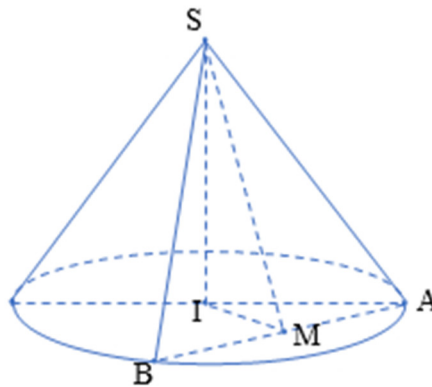
FB: Trương Quốc Toàn – Tạ Minh Đức

Phân tích định hướng tìm Lời giải:

- Đây là bài toán tính diện tích xung quanh của hình nón;
- Để tính diện tích xung quanh của hình nón ta áp dụng công thức $S_{xq} = \pi rl$;
- Trong bài toán này đường sinh $l = 4a$, nên chúng ta chỉ cần xác định bán kính đáy r của hình nón (N) thông qua giả thiết bài toán;

Lời giải

Chọn D



Gọi I là tâm của đường tròn đáy của hình nón.

Ta có thiết diện qua đỉnh là tam giác SBA .

Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Ta chứng minh được $AB \perp (SIM)$, suy ra góc giữa mặt phẳng đi qua đỉnh và mặt phẳng chứa đáy của hình nón là $\widehat{SMI} = 60^\circ$.

Do tam giác SAB đều cạnh $4a$, suy ra $SM = \frac{4a\sqrt{3}}{2} = 2a\sqrt{3}$.

Xét tam giác SIM vuông tại I ta có $SI = 3a$; $IM = a\sqrt{3}$.

Xét $\triangle IMA$ vuông tại M ta có $IA = \sqrt{IM^2 + MA^2} = \sqrt{3a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{7}$.

Vậy diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi rl = \pi a\sqrt{7} \cdot 4a = 4\sqrt{7}\pi a^2$.

Bình luận:

- Đây là bài toán tính diện tích xung quanh của hình nón, để làm được bài này yêu cầu các em học sinh phải nhớ công thức tính diện tích xung quanh của hình nón; cách xác định thiết diện của mặt phẳng với hình nón và xác định được góc giữa hai mặt phẳng. Tuy dạng toán này không mới, nhưng để giải quyết được bài toán này thì các em học sinh phải có học lực khá trở lên.

Hướng phát triển:

Hướng phát triển 1: Thay đổi giả thiết cho chiều cao và diện tích thiết diện. Yêu cầu tính thể tích của khối nón

Hướng phát triển 2: Thay giả thiết góc bằng bán kính đáy của hình nón. Tính khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng

Hướng phát triển 3: Giữ nguyên giả thiết, mặt cắt chia khối nón thành hai phần tính thể tích một phần của khối nón

Hướng phát triển 4: Thay đổi giả thiết cho bán kính đáy hình nón; mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc. Tính diện tích thiết diện.

Hướng phát triển 5: Thay đổi giả thiết bài toán cho bán kính, chiều cao của hình nón. Mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón cắt mặt phẳng chứa đáy là tam giác cân có cạnh đáy cho trước. Tính góc tạo bởi hai mặt phẳng.

Hướng phát triển 6: Xây dựng các bài toán tương tự trên hình trụ

Các ví dụ minh họa

Câu 1. Cho hình nón có chiều cao bằng $2\sqrt{5}$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều có diện tích bằng $9\sqrt{3}$. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $\frac{32\sqrt{5}\pi}{3}$.

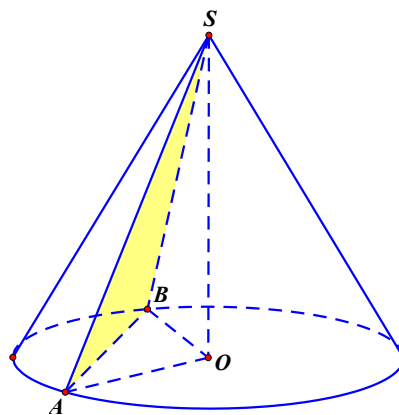
B. 32π .

C. $32\sqrt{5}\pi$.

D. 96π .

Lời giải

Chọn A



$$\text{Ta có } S_{SAB} = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \Rightarrow AB^2 = 36 \Rightarrow SA^2 = 36.$$

$$R = OA = \sqrt{SA^2 - SO^2} = \sqrt{36 - 20} = 4$$

$$\text{Thể tích của khối nón là } V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{32\sqrt{5}}{3}.$$

Câu 2. Cho hình nón có đỉnh S , đáy là đường tròn tâm O sao cho $SO = 6\sqrt{5}$, một mặt phẳng (α) cắt mặt nón theo hai đường sinh SA, SB . Biết khoảng cách từ O đến mặt phẳng (α) bằng $2\sqrt{5}$ và diện tích tam giác SAB bằng 360. Thể tích khối nón bằng

A. $1325\pi\sqrt{5}$.

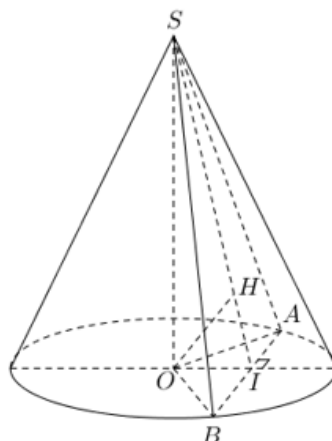
B. $265\pi\sqrt{5}$.

C. $1325\sqrt{5}$.

D. $265\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A



$$\text{Kẻ } OI \perp AB, OH \perp SI \Rightarrow OH = d(O, (\alpha)) = 2\sqrt{5}$$

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2} \Rightarrow \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{(2\sqrt{5})^2} - \frac{1}{(6\sqrt{5})^2} = \frac{2}{45} \Rightarrow OI = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

$$SI = \sqrt{SO^2 + OI^2} = \sqrt{(6\sqrt{5})^2 + \left(\frac{3\sqrt{10}}{2}\right)^2} = \frac{9\sqrt{10}}{2}$$

$$S_{SAB} = \frac{1}{2} \cdot SI \cdot AB = SI \cdot IA \Rightarrow IA = \frac{S_{SAB}}{SI} = \frac{360}{\left(\frac{9\sqrt{10}}{2}\right)} = 8\sqrt{10}$$

$$r = \sqrt{OI^2 + IA^2} = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{10}}{2}\right)^2 + (8\sqrt{10})^2} = \frac{5\sqrt{106}}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{5\sqrt{106}}{2}\right)^2 \cdot 6\sqrt{5} = 1325\pi\sqrt{5}$$

Câu 3. Cho hình nón đỉnh S , đáy là đường tròn $(O; 3)$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón cắt đường tròn đáy tại hai điểm A và B sao cho $SA = AB = 5$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. $\frac{\sqrt{33}}{5}$.

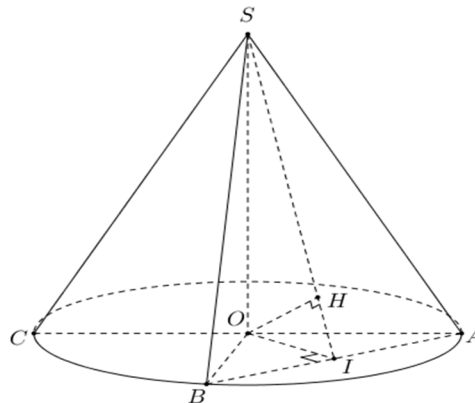
B. $\frac{4\sqrt{33}}{15}$.

C. $\frac{\sqrt{33}}{15}$.

D. $\frac{2\sqrt{33}}{15}$.

Lời giải

Chọn B.



Gọi I là trung điểm AB .

$$\text{Ta có } \begin{cases} AB \perp SO \\ AB \perp OI \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOI) \Rightarrow (SAB) \perp (SOI).$$

Trong (SOI) , kẻ $OH \perp SI$, $H \in SI$ thì $OH \perp (SAB)$.

$$\Rightarrow d(O; (SAB)) = OH.$$

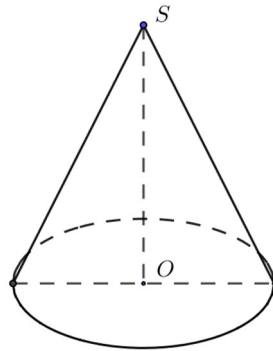
$$\text{Ta có: } SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

$$\text{Ta có: } OI = \sqrt{OA^2 - AI^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{11}}{2}.$$

$$\text{Tam giác vuông } SOI \text{ có: } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{16} + \frac{4}{11} \Rightarrow OH = \frac{4\sqrt{33}}{15}.$$

Vậy $d(O; (SAB)) = OH = \frac{4\sqrt{33}}{15}$.

Câu 4. Một khối nón có bán kính đáy bằng $2a$, đường sinh bằng $a\sqrt{7}$ (tham khảo hình dưới đây).



Một mặt phẳng qua đỉnh và tạo với đáy của hình nón một góc 60° chia khối nón thành hai phần, gọi V là thể tích phần nhỏ hơn. Giá trị của V bằng

A. $\left(\frac{4\pi\sqrt{3}}{9} - 1\right)a^3$.

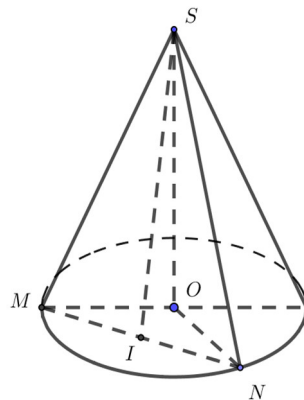
B. $\left(\frac{4\pi\sqrt{3}}{3} - 1\right)a^3$.

C. $\left(\frac{4\pi\sqrt{3}}{3} - 3\right)a^3$.

D. $\left(-\frac{4\pi\sqrt{3}}{9} + 3\right)a^3$.

Lời giải

Chọn A.



Giả sử mặt phẳng qua đỉnh và tạo với đáy một góc 60° cắt khối nón theo thiết diện là tam giác SMN như hình vẽ.

Gọi I là trung điểm của MN . Khi đó $OI \perp MN, SI \perp MN$ từ giả thiết ta có góc $SIO = 60^\circ$.

Xét tam giác SOM ta có $SO = \sqrt{SM^2 - OM^2} = \sqrt{3}a$.

Xét tam giác SIO ta có $OI = \frac{SO}{\tan 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3}} = a$, từ đó xét trong tam giác OIM ta được

$\widehat{IOM} = 60^\circ$, suy ra $\widehat{NOM} = 120^\circ$, $S_{OMN} = \frac{1}{2} \cdot OM^2 \cdot \sin 120^\circ = \sqrt{3}a^2$.

Gọi S_0 là diện tích hình viên phân tạo bởi dây MN và cung nhỏ MN . Ta có

$S_0 = \frac{1}{3} \pi \cdot OM^2 - S_{OMN} = \left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right)a^2$.

Thể tích cần tính bằng $V = \frac{1}{3} SO \cdot S_0 = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}a \cdot \left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right)a^2 = \left(\frac{4\pi\sqrt{3}}{9} - 1\right)a^3$.

NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM

Câu 5. Cắt hình nón đỉnh I bởi một mặt phẳng đi qua trục của hình nón ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$, BC là dây cung của đường tròn đáy hình nón sao cho mặt phẳng (IBC) tạo với mặt phẳng chứa đáy hình nón một góc 60° . Tính theo a diện tích S của tam giác IBC .

A. $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

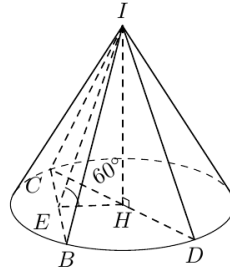
B. $S = \frac{a^2}{3}$.

C. $S = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

D. $S = \frac{2a^2}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Tam giác IDC vuông cân có $DC = a\sqrt{2} \Rightarrow IH = HC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và $IC = a$.

Gọi E là trung điểm cạnh BC , góc giữa mặt phẳng (IBC) và (BCD) là $\widehat{IEH} = 60^\circ$.

Trong tam giác IHE có $IE = \frac{IH}{\sin 60^\circ} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Tam giác IEC có $CE = \sqrt{IC^2 - IE^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2}{3}a^2} = a\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $S = EI \cdot EC = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 6. Cho hình nón đỉnh S có bán kính đáy $R = \sqrt{3}$, chiều cao $h = 2\sqrt{2}$. Mặt phẳng (α) qua đỉnh S cắt đáy của hình nón theo dây cung có độ dài $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Tính góc tạo bởi mặt phẳng (α) và mặt phẳng chứa đáy của hình nón.

A. 30°

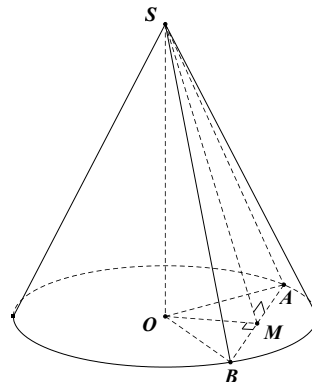
B. 45°

C. 60°

D. 75°

Lời giải

Chọn C



Gọi A, B là hai giao điểm của (α) với đường tròn đáy, ta có $AB = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Gọi M là trung điểm AB , ta có $OM \perp AB, SM \perp AB \Rightarrow$ góc tạo bởi (α) và mặt đáy

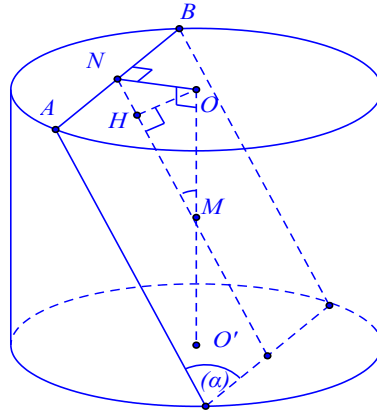
là $\widehat{SMO}$, $OM = \sqrt{OB^2 - BM^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, $\tan \widehat{SMO} = \frac{SO}{OM} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SMO} = 60^\circ$.

Câu 7. Cho hình trụ có hai đáy là hai đường tròn tâm O và tâm O' , bán kính đáy $r = a\sqrt{3}$, chiều cao hình trụ $h = a$. Mặt phẳng (α) đi qua trung điểm của OO' và tạo với OO' một góc 60° và (α) cắt đường tròn đáy tâm O theo dây cung AB . Độ dài đoạn AB là:

- A. $2a$. B. $\frac{3a}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D. $3a$.**

Lời giải

Chọn D



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OO' và AB . Ta có $AB \perp ON, AB \perp OO' \Rightarrow AB \perp (OMN)$. Gọi H là hình chiếu của O trên MN thì $OH \perp (\alpha)$

Ta có $(OO'; (ABM)) = (\widehat{OO'; MH}) = (\widehat{OO'; MN}) = \widehat{OMN} = 60^\circ$.

Tam giác OMN vuông tại O có $ON = OM \cdot \tan \widehat{OMN} \Leftrightarrow ON = \frac{a}{2} \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

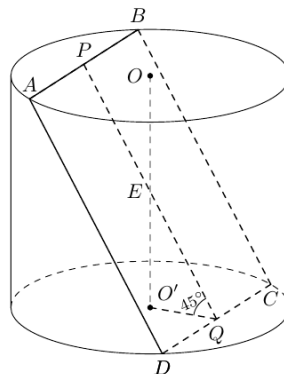
$$AB = 2NB = 2\sqrt{OB^2 - ON^2} = 2\sqrt{3a^2 - \frac{3a^2}{4}} = 3a.$$

Câu 8. Cho một hình trụ tròn xoay và hình vuông $ABCD$ cạnh a có hai đỉnh liên tiếp A, B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất của hình trụ, hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ. Mặt phẳng $ABCD$ tạo với mặt phẳng chứa đáy hình trụ một góc 45° . Tính diện tích xung quanh hình trụ?

- A. $S_{xq} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{3}}{5}$. B. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{3}$. C. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{4}$. **D. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{2}$.**

Lời giải

Chọn D



Gọi P, Q, E lần lượt là trung điểm của AB, CD, OO' . Góc giữa $(ABCD)$ và mặt đáy là

$\widehat{O'QE} = 45^\circ$. Ta có $EQ = \frac{a}{2}$, do đó $O'Q = EO' = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Suy ra $h = OO' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và $r = O'C = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq} = 2\pi \cdot \frac{a\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{2}$.

Câu 9. Cho khối trụ có thiết diện qua trục OO' là một hình vuông cạnh bằng 2. Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm I của OO' và tạo với mặt phẳng chứa đáy của khối trụ một góc bằng 30° . Diện tích của thiết diện do (P) cắt khối trụ gần số nào sau đây nhất?

A. 3,6.

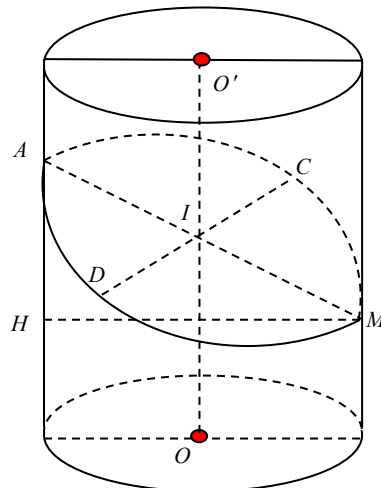
B. 3,8.

C. 3,5.

D. 3,7.

Lời giải

Chọn A



Do thiết diện qua trục OO' là một hình vuông cạnh bằng 2 nên chiều cao của hình trụ là $h = 2$ và bán kính đáy là $R = 1$.

Giả sử giao tuyến của mặt phẳng (P) và đáy chứa tâm O là đường thẳng d . Gọi E là hình chiếu của O trên d . Khi đó góc giữa (P) và mặt phẳng chứa đáy là góc $\widehat{OEI} = 30^\circ$.

Trong tam giác vuông IOE có $\tan \widehat{OEI} = \frac{OI}{OE} \Rightarrow OE = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3} > 1$. Do đó điểm E

nằm ngoài đường tròn đáy nên thiết diện là Elip.

Trong tam giác vuông AHM có $\cos \widehat{AMH} = \frac{HM}{AM} \Rightarrow AM = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Hay $2a = \frac{4\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Mà $CD = 2b = 2 \Rightarrow b = 1$.

Thiết diện là hình elip nên diện tích bằng $\pi ab = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} \approx 3,62$.

Câu 40: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

A. 27.

B. 29.

C. 12.

D. 33.

Phân tích định hướng tìm lời giải

Dạng toán: Cho hàm số F là nguyên hàm của f với f là hàm cho bởi nhiều biểu thức. Bài toán yêu cầu tính giá trị của biểu thức F tại một số điểm. Dạng toán này ta có 2 cách làm chính sau

* **Cách 1:** Tìm hàm số F (là tìm các hằng số $C_1, C_2, \dots$) dựa vào các giả thuyết đã cho (như liên tục, có đạo hàm, $F(x_0), \dots$). Tùy theo yêu cầu bài toán mà sử dụng hàm số F đã tìm được một cách phù hợp. Cụ thể hơn ta có:

Bước 1: $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+4 & \text{khi } x < 1 \end{cases} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} x^2+5x+C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3+4x+C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

Bước 2: Tìm các hằng số C_1, C_2 dựa vào $F(0) = 2$ và tính liên tục của hàm số.

Bước 3: Tính giá trị của biểu thức $F(-1) + 2F(2)$.

* **Cách 2:** Sử dụng công thức $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$ phù hợp. Cụ thể ở bài trên ta làm như sau

Bước 1: $F(1) = \int_0^1 f(x) dx + F(0)$.

Bước 2: Đề ý $F(-1) + 2F(2) = [F(-1) - F(1)] + 2[F(2) - F(1)] + 3F(1)$, các biểu thức trong dấu ngoặc vuông có dạng $\int_a^b f(x) dx$

Fb-Nam Phương

Lời giải

* **Cách 1**

$$f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+4 & \text{khi } x < 1 \end{cases} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} x^2+5x+C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3+4x+C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

$$\text{Vì } F(0) = 2 \Rightarrow C_2 = 2 \Rightarrow F(x) = \begin{cases} x^2+5x+C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3+4x+2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

$$\text{Hàm số liên tục trên } \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = F(1) \Leftrightarrow 1+5+C_1 = 1+4+2 \Leftrightarrow C_1 = 1$$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} x^2+5x+1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3+4x+2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}. \text{ Vậy } F(-1) + 2F(2) = -3 + 2.15 = 27.$$

* **Cách 2**

Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$F(0) - F(-1) = \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 (3x^2+4) dx = 5 \Rightarrow F(-1) = F(0) - 5 = -3.$$

$$F(1) - F(0) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (3x^2+4) dx = 5 \Rightarrow F(1) = F(0) + 5 = 7.$$

$$F(2) - F(1) = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (2x+5) dx = 8 \Rightarrow F(2) = F(1) + 8 = 15.$$

$$\text{Do đó } F(-1) + 2F(2) = -3 + 2.15 = 27.$$

Bình luận:

- Đây là dạng toán thuộc mức độ vận dụng, việc nhận ra hướng giải đòi hỏi học sinh phải nắm chắc các khái niệm và tính chất của nguyên hàm cũng như các phương pháp tìm nguyên hàm.

Hướng phát triển:

- Không cho điều kiện $F(a) = m$. Yêu cầu tính $F(b) - F(c)$.
- Thêm điều kiện như: có đạo hàm, liên tục, ...
- Thay đổi điều kiện của đề bài bằng cách cho $F(a) + F(b) = k$. Yêu cầu tính $F(n) + F(m)$.

Bài tập tương tự

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2-2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

A. 9.

B. 15.

C. 11.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2-2 & \text{khi } x < 1 \end{cases} \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \begin{cases} x^2 - x + C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 - 2x + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

$$\text{Mà ta có } F(0) = 2 \Rightarrow C_2 = 2.$$

Mặt khác hàm số F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ nên $y = F(x)$ liên tục tại $x = 1$.

$$\text{Suy ra } \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = F(1) \Rightarrow C_1 = 1.$$

$$\text{Khi đó ta có: } F(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 - 2x + 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} F(-1) = 3 \\ F(2) = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } F(-1) + 2F(2) = 9.$$

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

A. 23.

B. 11.

C. 10.

D. 21.

Lời giải

Chọn D

Dễ thấy hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$F(1) - F(0) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (3x^2 + 2) dx = 3 \Rightarrow F(1) = 5.$$

$$F(-1) + 2F(2) = \int_1^{-1} f(x) dx + 2 \int_1^2 f(x) dx + 3f(1) = -6 + 12 + 15 = 21.$$

Câu 3: Biết rằng $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2+2 & \text{khi } x \geq 2 \\ 4x^3-18 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Giá trị của biểu thức $F(-1) - F(3)$ bằng

A. 7.

B. 18.

C. 8.

D. 32.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } F(-1) - F(3) = \int_2^{-1} f(x) dx - \int_2^3 f(x) dx = 18.$$

Câu 4: Biết rằng $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2x+1}} & \text{khi } x \geq 0 \\ (2x+1)^3 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ và

$$F(4) + F(-1) = 8. \text{ Giá trị của biểu thức } P = F(-2) + 2F(12) \text{ bằng}$$

A. 20.

B. 27.

C. $\frac{281}{16}$.

D. $\frac{121}{8}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } 8 - 2F(0) = F(4) - F(0) + F(-1) - F(0) = \int_0^4 f(x) dx + \int_0^{-1} f(x) dx = 2 \Rightarrow F(0) = 3.$$

$$P = F(-2) + 2F(12) = \int_0^{-2} f(x)dx + 2\int_0^{12} f(x)dx + 3F(0) = 27.$$

Câu 5: Biết rằng $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{khi } x \geq 0 \\ (2x+1)^3 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ và

$$F(3) + F(-1) = \frac{19}{3}. \text{ Giá trị của biểu thức } P = F(-2) + F(8) \text{ bằng}$$

A. 20. B. 27. C. 58. **D. 29.**

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } F(x) = \begin{cases} F_1(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + C_1, & x \geq 0 \\ F_2(x) = \frac{(2x+1)^4}{8} + C_2, & x < 0 \end{cases}.$$

$$\text{Do } F(x) \text{ liên tục trên } \mathbb{R} \text{ nên } \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = F(0) \Leftrightarrow C_1 + \frac{2}{3} = \frac{1}{8} + C_2 \Leftrightarrow C_1 - C_2 = -\frac{13}{24}.$$

$$\text{Và } F(3) + F(-1) = 8 \Leftrightarrow \frac{16}{3} + C_1 + \frac{1}{8} + C_2 = \frac{19}{3} \Leftrightarrow C_1 + C_2 = \frac{7}{8}. \text{ Suy ra } C_1 = \frac{1}{6}, C_2 = \frac{17}{24}.$$

$$\text{Tính } F(8) + F(-2) = 18 + \frac{1}{6} + \frac{81}{8} + \frac{17}{24} = 29.$$

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^2+b & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ với a, b là các tham số thực. Biết rằng $f(x)$ liên tục và có

đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Tích phân $I = \int_{-1}^2 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{19}{3}$. **C. $\frac{26}{3}$.** D. $\frac{25}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên sẽ liên tục tại $x_0 = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax+1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2+b) = f(1) \Leftrightarrow a+1 = 1+b \Leftrightarrow a = b.$$

Hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ nên có đạo hàm tại $x_0 = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x)$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} (a) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x) \Leftrightarrow a = 2. \text{ Suy ra } a = b = 2 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^2+2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó: } I = \int_{-1}^2 f(x)dx = \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_{-1}^1 (x^2+2)dx + \int_1^2 (2x+1)dx = \frac{26}{3}.$$

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2+bx+1 & \text{khi } x \geq 0 \\ ax-b-1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Biết rằng hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Tích phân

$$I = \int_{-3}^{-1} f(x)dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{82}{3}$. B. $-\frac{22}{3}$. C. -14. **D. 10.**

Lời giải

Chọn D

$\Rightarrow f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

$$f(x) \text{ liên tục tại } x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax^2 + bx + 1) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax - b - 1) = f(0) \Leftrightarrow -b - 1 = 1 \Leftrightarrow b = -2.$$

+) $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ có đạo hàm tại $x = 0$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(ax^2 - 2x + 1) - 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax - 2) = -2.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[ax - (-2) - 1] - 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} a = a.$$

$$f(x) \text{ có đạo hàm tại } x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow a = -2.$$

$$\text{Do đó, } f(x) = \begin{cases} -2x^2 - 2x + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ -2x + 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } I = \int_{-3}^{-1} f(x) dx = \int_{-3}^{-1} (-2x + 1) dx = 10.$$

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & x \geq 1 \\ 5 - x, & x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 1$.

$$\text{Tính } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) \sin x dx + \int_1^2 F(x) dx$$

A. $\frac{142}{12}$.

B. $\frac{112}{13}$

C. $\frac{1}{12}$.

D. $\frac{13}{12}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + 3x + C_1, & x \geq 1 \\ 5x - \frac{x^2}{2} + C_2, & x < 1 \end{cases}.$$

$$\text{Mà } F(0) = 1 \Rightarrow C_2 = 1.$$

$$\text{Vì } f(x) \text{ liên tục tại } x = 1 \text{ nên } F(x) \text{ liên tục tại } x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = F(1)$$

$$\Leftrightarrow 5 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{3} + 3 + C_1 \Leftrightarrow C_1 = \frac{13}{6}.$$

$$\text{Vậy } F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + 3x + \frac{13}{6}, & x \geq 1 \\ 5x - \frac{x^2}{2} + 1, & x < 1 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) \sin x dx + \int_1^2 F(x) dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) d(\cos x) + \int_1^2 F(x) dx \\ &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 F(x) dx \\ &= \int_0^1 (5 - x) dx + \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3} + 3x + \frac{13}{6} \right) dx = \frac{142}{12}. \end{aligned}$$

Câu 41: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $(3^{x^2} - 9^x)[\log_3(x + 25) - 3] \leq 0$

A. 27.

B. Vô số.

C. 26.

D. 25.

Phân tích định hướng tìm lời giải:

- Đây là bài toán giải bất phương trình mũ, lôgarit dạng $f(x).g(x) \leq 0$.
- Để giải bất phương trình chúng ta cần đặt điều kiện sau đó tìm nghiệm của từng phương trình $f(x) = 0$ và $g(x) = 0$. Tiếp theo lập bảng xét dấu $f(x).g(x)$ và tìm tập nghiệm từ đó kết luận số nghiệm nguyên thỏa mãn bất phương trình.

Fb-Lê Thanh Bình

Lời giải

Chọn C

Ta có điều kiện xác định của bất phương trình là $x > -25$.

Đặt $A(x) = (3^{x^2} - 9^x)[\log_3(x+25) - 3], x > -25$.

$$3^{x^2} - 9^x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2.$$

$$\log_3(x+25) - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Ta có bảng xét dấu $A(x)$ như sau

x	-25	0	2	$+\infty$
$A(x)$		-	0	+

$$\text{Từ đó, } A(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ -25 < x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \{-24; -23; \dots; 0; 2\} \text{ (do } x \in \mathbb{Z}).$$

Kết luận: có 26 nghiệm nguyên thỏa mãn.

Bình luận:

- Đây là bài toán giải bất phương trình mũ và lôgarit trong đó việc tìm nghiệm của từng phương trình mũ và lôgarit khá đơn giản. Tuy nhiên qua thực tế thì học sinh thường mắc các sai sót sau:

❖ Quên không đặt hay để ý điều kiện của lôgarit. Từ đó dẫn đến tập nghiệm là $(-\infty; 0] \cup \{2\}$ nên kết luận là vô số.

❖ Thiếu nghiệm $x = 2$ nên kết luận là có 25 số nguyên x .

Đây là câu hỏi kiểm tra kiến thức ở mức độ vận dụng.

Hướng phát triển:

Hướng phát triển 1: Thay đổi hàm số, hoặc có thể cho thêm 1 hàm số nữa dạng $f(x).g(x).h(x) \leq 0$.

Hướng phát triển 2: Thay đổi thành dạng $f(x).g(x) \geq 0$, $f(x).g(x) > 0$ hay $f(x).g(x) < 0$

...

Bài tập tương tự

Câu 1. Tập nghiệm của bất phương trình $(3^{2x} - 9)\left(3^x - \frac{1}{27}\right)\sqrt{3^{x+1} - 1} \leq 0$ chứa bao nhiêu số nguyên?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $3^{x+1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 3^{x+1} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq -1$.

+ Ta có $x = -1$ là một nghiệm của bất phương trình.

+ Với $x > -1$, bất phương trình tương đương với $(3^{2x} - 9)\left(3^x - \frac{1}{27}\right) \leq 0$.

Đặt $t = 3^x > 0$, ta có $(t^2 - 9)\left(t - \frac{1}{27}\right) \leq 0 \Leftrightarrow (t-3)(t+3)\left(t - \frac{1}{27}\right) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -3 \\ \frac{1}{27} \leq t \leq 3 \end{cases}$.

Kết hợp điều kiện $t = 3^x > 0$ ta được nghiệm $\frac{1}{27} \leq t \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{27} \leq 3^x \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1$.

Kết hợp điều kiện $x > -1$ ta được $-1 < x \leq 1$ suy ra trường hợp này bất phương trình có 2 nghiệm nguyên.

Vậy bất phương trình đã cho có tất cả 3 nghiệm nguyên.

Câu 2. Tập nghiệm của bất phương trình $3^x \cdot x^2 + 54x + 5 \cdot 3^x > 9x^2 + 6x \cdot 3^x + 45$ là

A. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$

B. $(-\infty; 1) \cup (2; 5)$

C. $(-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$

D. $(1; 2) \cup (5; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Bất phương trình $3^x \cdot x^2 + 54x + 5 \cdot 3^x > 9x^2 + 6x \cdot 3^x + 45$ tương đương với:

$$(3^x \cdot x^2 - 9x^2) + (-6x \cdot 3^x + 54x) + (5 \cdot 3^x - 45) > 0 \Leftrightarrow x^2(3^x - 9) - 6x(3^x - 9) + 5(3^x - 9) > 0$$

$$\Leftrightarrow (3^x - 9)(x^2 - 6x + 5) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x - 9 > 0 \\ x^2 - 6x + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 1 \\ x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5 \\ 1 < x < 2 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(1; 2) \cup (5; +\infty)$.

Câu 3. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $(3^{x^2} - 9^x)[\log_2(x+32) - 5] < 0$?

A. 31.

B. Vô số.

C. 32.

D. 33.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = (3^{x^2} - 9^x)[\log_2(x+32) - 5]$, với $x > -32$.

$$\text{Cho } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x^2} - 9^x = 0 \\ \log_2(x+32) - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x^2} = 3^{2x} \\ x+32 = 2^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	-32	0	2	$+\infty$
$f(x)$			-	0	+

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình $f(x) < 0$ là $S = (-32; 0) \cup (0; 2)$

Mặt khác $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-31; -30; -27; \dots; -2; -1; 1\}$.

Vậy có 32 số nguyên x thỏa mãn.

Câu 4. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\sqrt{\log_5 x - 1} \cdot (2^x - 1024) < 0$?

A. 6.

B. Vô số.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $\log_5 x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{\log_5 x - 1} \cdot (2^x - 1024)$, với $x \geq 5$.

$$\text{Cho } f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\log_5 x - 1} = 0 \\ 2^x - 1024 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 10 \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	5	10	$+\infty$	
$f(x)$		0	-	0	+

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình $f(x) < 0$ là $S = (5; 10)$

Mặt khác $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{6; 7; 8; 9\}$.

Vậy có 4 số nguyên x thỏa mãn.

Câu 5. Có bao nhiêu số nguyên x thuộc khoảng $(-2020; 2021)$ thỏa mãn $2^{x^2-7x+6} \cdot \log_7 x \geq \log_7 x$?

A. 2017.

B. Vô số.

C. 2016.

D. 2015.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x > 0$.

Với $x > 0$ bất phương trình đã cho tương đương với $2^{x^2-7x+6} \cdot \log_7 x - \log_7 x \geq 0$

$$\Leftrightarrow (2^{x^2-7x+6} - 1) \cdot \log_7 x \geq 0$$

Xét hàm số $f(x) = (2^{x^2-7x+6} - 1) \cdot \log_7 x$, với $x > 0$.

$$\text{Cho } f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2^{x^2-7x+6} - 1 = 0 \\ \log_7 x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 6 = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện}$$

$x > 0$)

Ta có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	0	1	6	$+\infty$	
$f(x)$		-	0	-	0	+

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình $f(x) \geq 0$ là $S = [6; +\infty) \cup \{1\}$.

Mặt khác x là số nguyên thuộc khoảng $(-2020; 2021)$ nên $x \in \{1; 6; 7; 8; 9; \dots; 2020\}$.

Vậy có 2016 số nguyên x thỏa mãn.

Câu 42: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng

$(P): x + 2y + z - 4 = 0$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) là đường thẳng có phương trình:

A. $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-4}$.

B. $\frac{x}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}$.

C. $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-4}$.

D. $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{1}$.

Phân tích định hướng tìm lời giải:

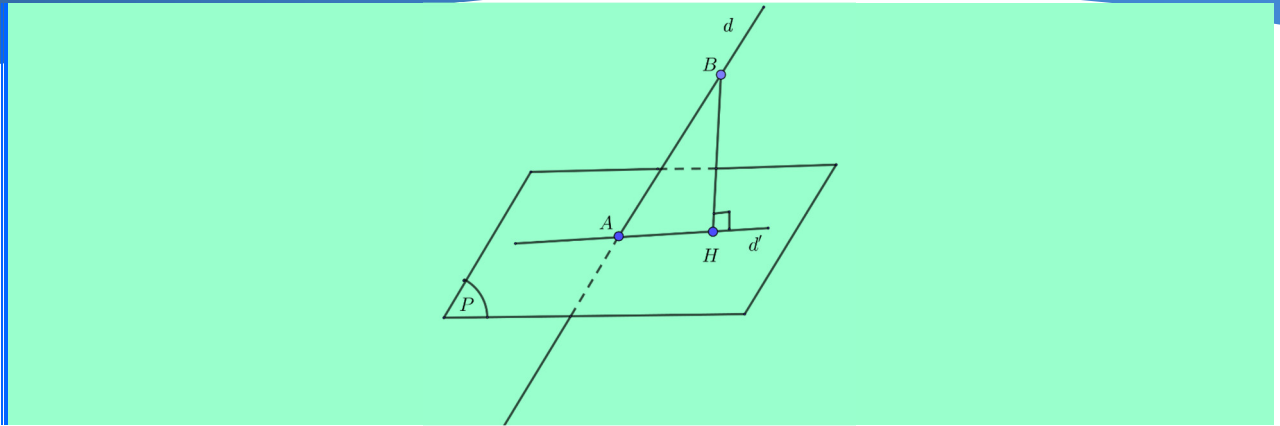
- Đây là bài toán lập phương trình đường thẳng là hình chiếu vuông góc của một đường thẳng lên một mặt phẳng.

- Để lập phương trình đường thẳng ta cần biết hai điểm hoặc biết một điểm và một véc tơ chỉ phương của nó

- Trong lời giải sau đây ta sẽ đi theo hướng lập phương trình đường thẳng d' là hình chiếu của d trên (P) khi biết hai điểm bằng cách.

+ Tìm $A = d \cap (P)$

+ Tìm hình chiếu của H của $B \in d, B \neq A$ lên (P) . Khi đó d' là đường thẳng AH



Fb-Lê Tài Thắng

Lời giải

Chọn C

Tọa độ giao điểm A của d và (P) thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1} \\ x+2y+z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow A(0;1;2).$$

Lấy điểm $B(1;2;1) \in d$. Gọi H là hình chiếu của B trên (P) .

$$\Rightarrow \text{Phương trình } BH: \begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=1+t \end{cases}$$

Do $H = BH \cap (P)$ nên tọa độ điểm H thỏa mãn hệ phương trình: $A(0;1;2)$

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=1+t \\ x+2y+z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-\frac{1}{3} \\ x=\frac{2}{3} \\ y=\frac{4}{3} \\ z=\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{4}{3}\right).$$

Gọi d' là hình chiếu vuông góc của d trên $(P) \Rightarrow d'$ đi qua A và H

$\Rightarrow d'$ có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (2;1;-4)$.

Vậy phương trình đường thẳng d' là: $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-4}$.

Nhận xét: Đây là cách làm theo chuẩn tự luận dựa trên tư duy hình học đơn giản.

Cách này hơi dài nhưng học sinh trung bình thì dễ làm.

Bình luận:

- Đây là bài toán lập phương trình đường thẳng, để xác định các yếu tố lập được phương trình của đường thẳng nói trên học sinh phải có kiến thức tổng hợp liên quan đến tìm tọa độ giao điểm, tìm hình chiếu của điểm lên mặt. Đặc biệt, học sinh phải nhận ra mẫu chốt của bài toán là khi tìm hình chiếu của đường thẳng ta cần tìm hình chiếu của hai điểm phân biệt của đường thẳng đó lên mặt phẳng. Trong trường hợp đường và mặt cắt nhau thì điểm cắt chính là một điểm trên đường thẳng là hình chiếu đó.

- Ở bài toán này ta có thể dễ thấy $d' = (P) \cap (ABH)$ với (ABH) là mặt phẳng chứa d và vuông góc (P) . Vì vậy ta có thêm các hướng giải như sau:

+ **Hướng 1:** Ta lập mặt phẳng (Q) chứa d vuông góc với (P) , khi đó ta tìm $d' = (P) \cap (Q)$.

+ **Hướng 2:** Tìm véc tơ chỉ phương của d' là $\vec{u} = \left[\left[\vec{n}_P, \vec{u}_d \right], \vec{n}_P \right]$ và lập phương trình d' có VTCP $\vec{u}$ đi qua A .

Trong các hướng thì ta chọn hướng 2 là nhanh nhất với bài toán trắc nghiệm.

Lời giải (theo hướng 2)

Chọn C

Tọa độ giao điểm A của d và (P) thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1} \\ x+2y+z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow A(0;1;2).$$

Ta có $\vec{n}_P = (1, 2, 1)$; $\vec{u}_d = (1, 1, -1)$ nên $\vec{u} = \left[\left[\vec{n}_P, \vec{u}_d \right], \vec{n}_P \right] = (4, 2, -8)$ hay chọn $\vec{u} = (2, 1, -4)$.

Vậy phương trình đường thẳng d' là: $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-4}$.

Cách này nhanh nhưng đòi hỏi sự tưởng tượng cao, tính toán nhanh, với học sinh khá trở lên sẽ thích cách này hơn. Nó rất phù hợp cho bài toán trắc nghiệm.

Bài tập tương tự

Câu 1. Cho đường thẳng $(d): \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 3 = 0$. Đường thẳng Δ là hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{4}$.

B. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{4}$.

C. $\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{-8} = \frac{z-2}{5}$.

D. $\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-3}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Tọa độ giao điểm A của d và (P) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x+y-3=0 \\ \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow A(1;1;3).$$

Lấy $B(-1;2;2) \in d$, gọi H là hình chiếu của B xuống mặt phẳng (P) .

Phương trình đường thẳng $(BH): \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 2 \end{cases}$. Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x+y-3=0 \\ x = -1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow H\left(\frac{1}{5}; \frac{13}{5}; 2\right).$$

Hình chiếu Δ là đường thẳng đi qua hai điểm A, H .

Ta có $\overrightarrow{AH} \left(\frac{-4}{5}; \frac{8}{5}; -1 \right)$. Đường thẳng Δ đi qua A có vectơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta = -5\overrightarrow{AH} = (4; -8; 5)$.

Phương trình đường thẳng Δ là: $\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-3}{5}$.

Câu 2. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) có phương trình là

A. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+1}{5}$

B. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-1}$

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-5}$

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+5}{1}$

Lời giải

Chọn C

Gọi M là giao điểm của d với (P) .

$$\text{Tọa độ của } M \text{ là nghiệm của hệ: } \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y = 1 \\ x + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M(1; 1; 1)$$

Lấy điểm $N(0; -1; 2) \in d$.

Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là: $\vec{n} = (1; 1; 1)$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua N và nhận $\vec{n} = (1; 1; 1)$ làm vectơ chỉ phương.

$$\text{Phương trình đường thẳng } \Delta: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$$

Gọi N' là giao điểm của Δ với (P) .

$$\text{Tọa độ của } N' \text{ là nghiệm của hệ: } \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ \frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y = 1 \\ x - z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = \frac{8}{3} \end{cases}$$

$$N' \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{8}{3} \right)$$

$$\overrightarrow{MN'} = \left(-\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}; \frac{5}{3} \right) = -\frac{1}{3}\vec{u}(1; 4; -5)$$

Đường thẳng cần tìm đi qua điểm $M(1; 1; 1)$ và nhận $\vec{u} = (1; 4; -5)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-5}$.

Câu 3. Cho đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{2}$ và mặt phẳng $(P): x - y - z - 2 = 0$. Phương trình hình chiếu vuông góc của d trên (P) là

A.
$$\begin{cases} x=1-t \\ y=1+2t \\ z=-2-3t \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x=1-t \\ y=1+2t \\ z=-2+3t \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} x=1-t \\ y=1-2t \\ z=-2-3t \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x=1-t \\ y=1+2t \\ z=2-3t \end{cases}$$

Lời giải

Đường thẳng d có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_d = (2; -3; 2)$.

Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_p = (1; -1; -1)$.

Mặt phẳng (Q) chứa d và vuông góc với (P) ;

Đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d trên (P) , $d' = (P) \cap (Q)$

Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là $\vec{n}_Q = [\vec{u}_d, \vec{n}_p] = (5; 4; 1)$

Véc tơ chỉ phương của d' là $\vec{u}_{d'} = [\vec{n}_p, \vec{n}_Q] = (3; -6; 9) = -3(-1; 2; -3)$

Ta thấy đường thẳng d' thuộc (P) nên điểm $M_0 \in d' \Rightarrow M_0 \in (P)$. Thay tọa độ điểm $M_0(1; 1; -2)$ ở đáp án A thấy thỏa mãn phương trình (P) .

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$. Hình chiếu của d trên (P) có phương trình là đường thẳng d' . Trong các điểm sau điểm nào thuộc đường thẳng d' ?

A. $M(2; 5; -4)$.

B. $P(1; 3; -1)$.

C. $N(1; -1; 3)$.

D. $Q(2; 7; -6)$.

Lời giải

Gọi $A = d \cap (P)$. Vì $A \in d: \begin{cases} x=t \\ y=-1+2t \\ z=2-t \end{cases} \Rightarrow A(t; -1+2t; 2-t)$.

Mặt khác $A \in (P) \Rightarrow t - 1 + 2t + 2 - t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Vậy $A(1; 1; 1)$.

Lấy $B(0; -1; 2) \in d$. Gọi Δ là đường thẳng qua B và vuông góc (P) .

Thì $\Delta: \begin{cases} x=t' \\ y=-1+t' \\ z=2+t' \end{cases}$. Gọi C là hình chiếu của B lên (P) .

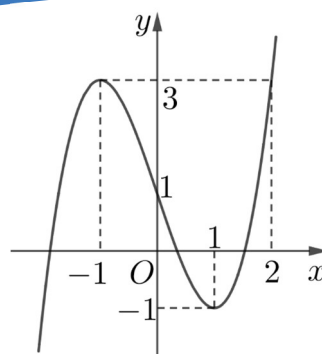
Suy ra $C \in \Delta \Rightarrow C(t'; -1+t'; 2+t')$.

Mặt khác $C \in (P) \Rightarrow t' - 1 + t' + 2 + t' - 3 = 0 \Leftrightarrow t' = \frac{2}{3}$. Vậy $C(\frac{2}{3}; \frac{-1}{3}; \frac{8}{3})$.

Lúc này d' qua $A(1; 1; 1)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{AC} = (\frac{-1}{3}; \frac{-4}{3}; \frac{5}{3})$. Hay d' nhận $\vec{u} = (1; 4; -5)$ làm một vectơ chỉ phương.

Suy ra $d': \begin{cases} x=1+s \\ y=1+4s \\ z=1-5s \end{cases}$. Vậy điểm thuộc đường thẳng d' là $M(2; 5; -4)$.

Câu 43: (MĐ 101 BGD&ĐT NĂM 2020-2021) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x)) = 1$ là



A. 9.

B. 3.

C. 6.

D. 7.

Phân tích định hướng

o – Bài toán có mức độ VD thuộc dạng “Tương giao đồ thị”, đã xuất hiện nhiều trong đề thi các năm trước.

O– Ý tưởng: Cho đồ thị, bảng biến thiên,... của hàm số $y = f(x)$. Hỏi số nghiệm của phương trình $f(g(x)) = \alpha$ với α là hằng số.

B1: Vẽ đường thẳng $y = \alpha$, dựa vào đồ thị, bảng biến thiên đã cho đưa phương trình về dạng $g(x) = \alpha_i$.

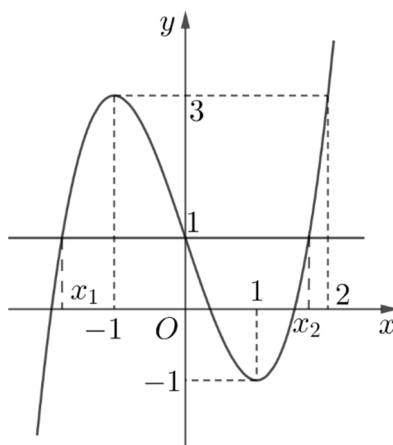
B2: Tìm nghiệm của phương trình $g(x) = \alpha_i$.

FB-Ngonguyen Quocman

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số ta có



$$f(f(x)) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x_1 & \text{và } x_1 < -1 & (1) \\ f(x) = 0 & & (2) \\ f(x) = x_2 & \text{và } 1 < x_2 < 2 & (3) \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị, (1) có đúng 1 nghiệm, (2) và (3) mỗi phương trình có 3 nghiệm phân biệt và 7 nghiệm trên phân biệt nhau.

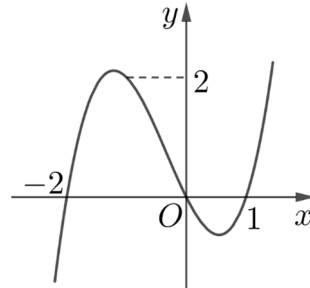
Bình luận:

- Việc “hợp” các f vào nhau sẽ gây khó hiểu hoặc nhầm lẫn cho các học sinh chưa gặp dạng này hoặc học chưa kỹ. Chưa kể, đường thẳng $y = \alpha$ có thể cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ ban đầu tại những điểm “không đẹp” là cách làm bài toán “khó gần” thêm. Đôi khi, để học sinh có thể dễ tiếp cận hơn, quen thuộc hơn, ta có thể “án chừng” các con số x_1, x_2 như bài trên bởi các giá trị gần đúng, ví dụ như $x_1 \approx -1,7; x_2 \approx 1,7$.

- Có rất nhiều hướng để có thể mở rộng bài toán, như thêm vào trị tuyệt đối, tham số, thay α bởi hàm số,... hoặc thay vì cho đồ thị, bảng biến thiên của $f(x)$ thì có thể cho đồ thị hoặc bảng biến thiên của $f'(x)$.

Các ví dụ tương tự:

Câu 1. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị trong hình bên. Số nghiệm của phương trình $f(f(x)) = 0$ là



A. 3.

B. 9.

C. 4.

D. 7.

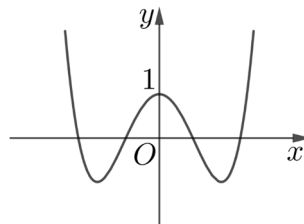
Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số ta có: $f(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -2 & (1) \\ f(x) = 0 & (2) \\ f(x) = 1 & (3) \end{cases}$

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất, phương trình (2) và (3) mỗi phương trình có 3 nghiệm phân biệt. Tất cả các nghiệm trên đều phân biệt nhau nên phương trình ban đầu có tổng cộng 7 nghiệm.

Câu 2. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $\frac{4-f(x)}{f(x)+3} = 1$ là



A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 6.

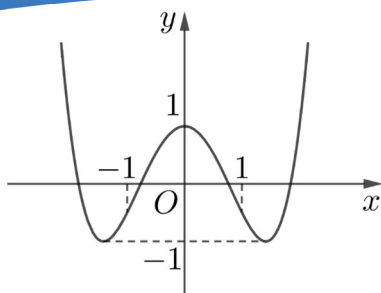
Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $f(x) \neq -3$

Khi đó ta có: $\frac{4-f(x)}{f(x)+3} = 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}$. Dựa vào đồ thị, phương trình $f(x) = \frac{1}{2}$ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 3. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $\frac{5-f(f(x))}{f(f(x))+3} = 1$ là



A. 7.

B. 8.

C. 5.

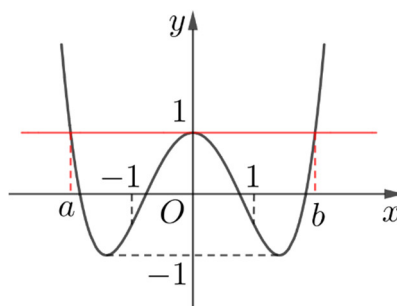
D. 6.

Lời giải

Chọn D

Để ý rằng $f(f(x)) + 3 \geq -1 + 3 = 2 > 0, \forall x$

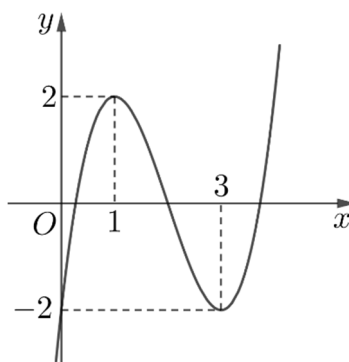
Ta có: $\frac{5 - f(f(x))}{f(f(x)) + 3} = 1 \Leftrightarrow f(f(x)) = 1 \quad (*)$.



Vẽ đường thẳng $y = 1$, ta có: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & (1) \\ f(x) = a < -1 & (2) \\ f(x) = b > 1 & (3) \end{cases}$

Dựa vào đồ thị, phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt, phương trình (2) vô nghiệm, phương trình (3) có 2 nghiệm phân biệt khác với 4 nghiệm trên. Vậy phương trình đã cho có tổng cộng 6 nghiệm.

Câu 4. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm của phương trình $f(f(|x|)) = 0$ là

A. 10.

B. 12.

C. 14.

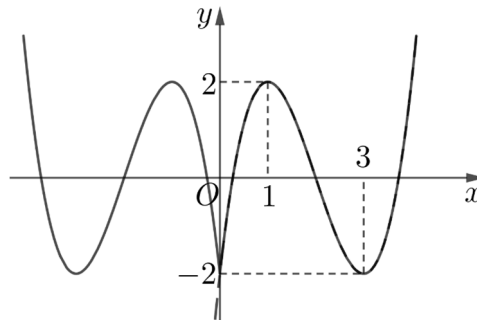
D. 8.

Lời giải

Chọn B

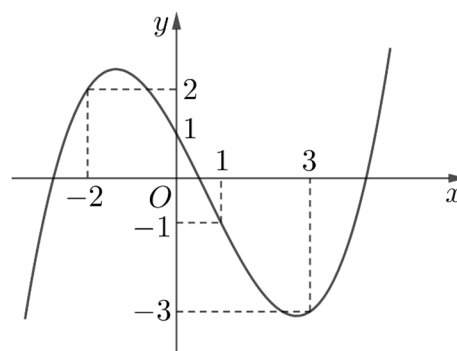
Từ đồ thị hàm số ta có: $f(f(|x|)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(|x|) = x_1 \in (0; 1) & (1) \\ f(|x|) = 2 & (2) \\ f(|x|) = x_2 \in (3; +\infty) & (3) \end{cases}$

Từ đồ thị $y = f(x)$ ta suy ra đồ thị $y = f(|x|)$ như hình vẽ



Từ đó dễ thấy phương trình (1) có 6 nghiệm, phương trình (2) có 4 nghiệm và phương trình (3) có 2 nghiệm phân biệt. Tất cả các nghiệm trên đều phân biệt nhau nên phương trình ban đầu có tổng cộng 12 nghiệm.

Câu 5. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm của phương trình $f(f(x) + x) = 1$ là

A. 5.

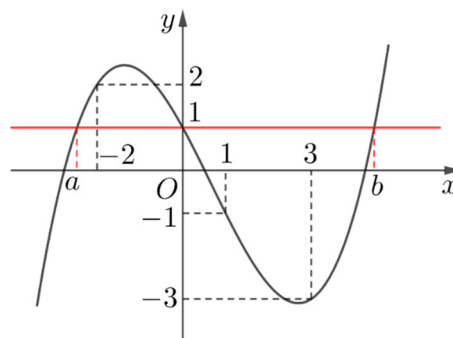
B. 7.

C. 9.

D. 3.

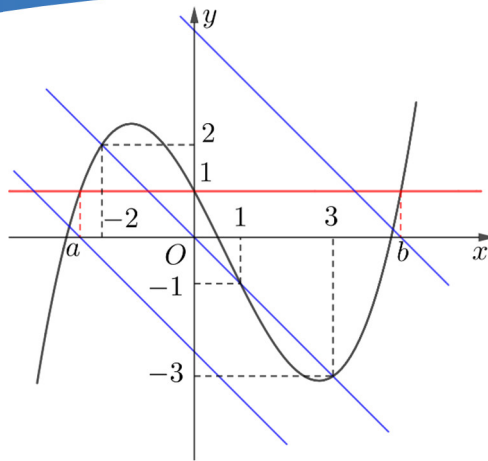
Lời giải

Chọn A



$$f(f(x) + x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + x = a \in (-3; -2) \\ f(x) + x = 0 \\ f(x) + x = b \in (3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -x + a \\ f(x) = -x \\ f(x) = -x + b \end{cases}.$$

Ta có các đường thẳng $y = -x + a$; $y = x$; $y = -x + b$ như hình vẽ (2 đường không qua gốc tọa độ đều tạo với 2 trục các tam giác vuông cân).



Dựa vào đồ thị, phương trình đã cho có đúng 5 nghiệm.

- Câu 6.** (Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa – Lần 3) Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 4$. Gọi m là số nghiệm thực của phương trình $\sqrt{f(f(x)-2)} - 2 = 3 - f(x)$. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $m = 7$. B. $m = 4$. C. $m = 6$. D. $m = 9$.

Lời giải

Chọn C

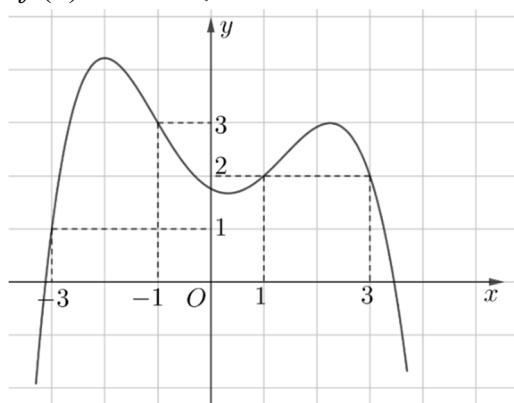
Đặt $t = f(x) - 2$. Khi đó phương trình thành $\sqrt{f(t) - 2} = 1 - t \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 1 \\ f(t) - 2 = (1 - t)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 1 \\ t^3 - 3t^2 - 4t + 2 = (1 - t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 1 \\ t^3 - 4t^2 - 2t + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 - 3x + 4 - 2 = 1 \\ x^3 - 3x^2 - 3x + 4 - 2 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \end{cases} \text{ Mỗi phương trình đều có 3 nghiệm phân biệt lẫn}$$

nhau nên phương trình ban đầu có tổng cộng 6 nghiệm.

- Câu 7.** Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm của phương trình $\frac{2f(x)+3}{f(f(x))-2} = -f(x)$ là

- A. 5. B. 6. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn C

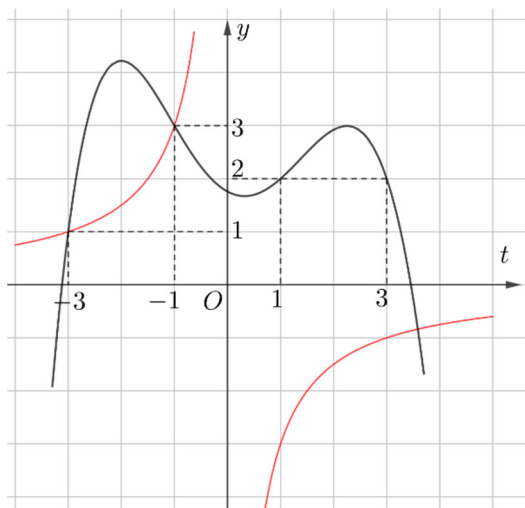
Điều kiện:

$$f(f(x)) - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \neq a \in (-3; -1) \\ f(x) \neq b \in (-1; 0) \\ f(x) \neq 1 \\ f(x) \neq 3 \end{cases}.$$

Đặt $t = f(x), t \notin \{a; 0; 1; 3\}$.

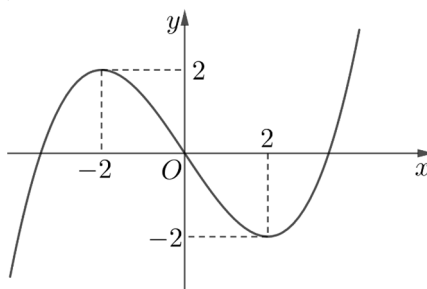
Khi đó ta có: $\frac{2t+3}{f(t)-2} = -t \Leftrightarrow \frac{2t+3}{-t} = f(t) - 2 \Leftrightarrow f(t) = -\frac{3}{t} \quad (*)$.

Vẽ đồ thị $y = -\frac{3}{t}$ ta được



Dựa vào đồ thị, $(*) \Leftrightarrow t \in \{-3; -1; c\}, c \in (3; 4)$. So điều kiện nhận $t = c \Rightarrow f(x) = c$, phương trình này có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 8. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm của phương trình $f(xf(x)) = 2$ là

A. 5.

B. 4.

C. 3.

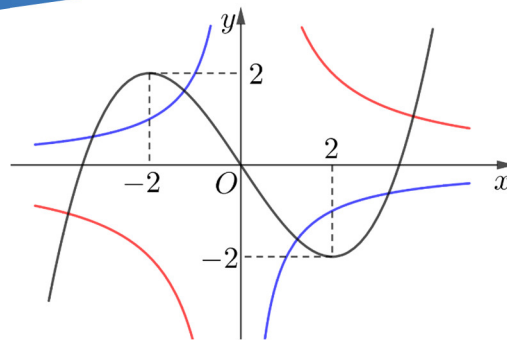
D. 6.

Lời giải

Chọn D

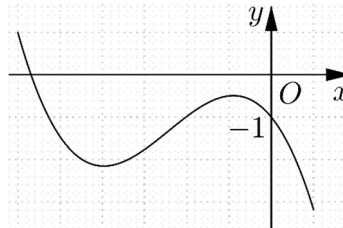
Ta có: $f(xf(x)) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} xf(x) = -2 \\ xf(x) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -\frac{2}{x} \\ f(x) = \frac{4}{x} \end{cases} \text{ (do } x = 0 \text{ không là nghiệm)}$

Ta vẽ thêm các đồ thị $y = -\frac{2}{x}$ và $y = \frac{4}{x}$



Dựa vào đồ thị, phương trình đã cho tổng cộng có 6 nghiệm.

Câu 9. (MĐ 102 BGD&ĐT NĂM 2019-2020) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên dưới.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(x^3 f(x)) + 1 = 0$ là

A. 6

B. 4

C. 5

D. 8

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } f(x^3 f(x)) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x^3 f(x)) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 f(x) = a \in (-6; -5) & (1) \\ x^3 f(x) = b \in (-3; -2) & (2) \\ x^3 f(x) = 0 & (3) \end{cases}$$

$$+ \text{ Phương trình (3) tương đương } \begin{cases} x = 0 \\ x = x_1, (-6 < x_1 < a < -5) \end{cases}$$

+ Các hàm số $g(x) = \frac{a}{x^3}$ và $h(x) = \frac{b}{x^3}$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$, và nhận xét rằng $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình (1) và (2) nên ta có:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = h(x) \end{cases}$$

$$+ \text{ Trên khoảng } (-\infty; 0), \text{ ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = +\infty \end{cases} \text{ nên các phương trình}$$

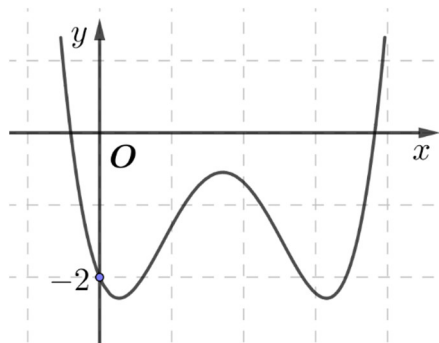
$f(x) = g(x)$ và $f(x) = h(x)$ có nghiệm duy nhất.

$$+ \text{ Trên khoảng } (0; +\infty), \text{ ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty \end{cases} \text{ nên các phương trình}$$

$f(x) = g(x)$ và $f(x) = h(x)$ có nghiệm duy nhất.

Do đó, phương trình $f(x^3 f(x)) + 1 = 0$ có 6 nghiệm phân biệt.

Câu 10. (MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2019-2020) Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(x^2 f(x)) + 2 = 0$ là

A. 8.

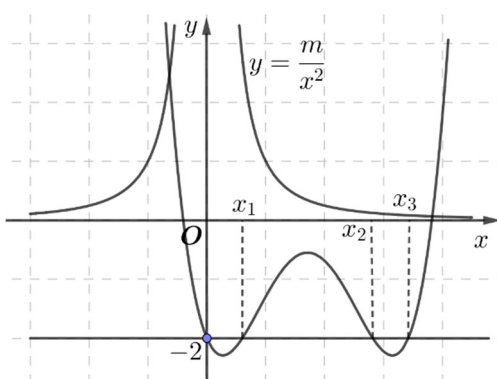
B. 12.

C. 6.

D. 9.

Lời giải

Chọn D



$$f(x^2 f(x)) + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 f(x) = 0 \\ x^2 f(x) = a(1) \\ x^2 f(x) = b(2) \\ x^2 f(x) = c(3) \end{cases} \text{ với } 0 < a < b < c.$$

Xét phương trình $f(x) = \frac{m}{x^2}$ ($m > 0$).

Gọi α, β là hoành độ giao điểm của $(C): y = f(x)$ và Ox ; $\alpha < 0 < \beta$.

$$(1) \Leftrightarrow f(x) - \frac{m}{x^2} = 0. \text{ Đặt } g(x) = f(x) - \frac{m}{x^2}$$

$$\text{Đạo hàm } g'(x) = f'(x) + \frac{2m}{x^3}.$$

$$\text{Trường hợp 1: } x < \alpha; f'(x) < 0; \frac{2m}{x^3} < 0 \Rightarrow g'(x) < 0$$

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty, g(\alpha) = -\frac{m}{\alpha^2} < 0$. Phương trình $g(x) = 0$ có một nghiệm thuộc $(-\infty; \alpha)$.

Trường hợp 2: $\alpha < x < \beta$

$$f(x) < 0, \frac{m}{x^2} > 0 \text{ suy ra } g(x) < 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta).$$

$$\text{Trường hợp 3: } x > \beta; f'(x) > 0; \frac{2m}{x^3} > 0 \Rightarrow g'(x) > 0$$

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty, g(\beta) = -\frac{m}{\beta^2} < 0$. Phương trình $g(x) = 0$ có một nghiệm thuộc $(\beta; +\infty)$.

Vậy phương trình $f(x) = \frac{m}{x^2}$ có hai nghiệm $\forall m > 0$.

Ta có: $x^2 f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee f(x) = 0$: có ba nghiệm.

Vậy phương trình (1) có 9 nghiệm.

Câu 44: Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -3 và 6 . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y = 1$ bằng

A. $2 \ln 3$.

B. $\ln 3$.

C. $\ln 18$.

D. $2 \ln 2$.

Phân tích định hướng tìm lời giải:

- Đây là bài toán tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số trong trường hợp một đồ thị hàm số là đồ thị của hàm ẩn với giả thiết về cực trị;
- Để giải bài toán đầu tiên cần xác định hai yếu tố: tính chất của hàm ẩn từ giả thiết và nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hai hàm số;
- Trong bài toán này, hai yếu tố trên chỉ xác định được vì hàm ẩn là hàm bậc ba có hai điểm cực trị với hai giá trị cực trị cho trước và nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm chính là hai điểm cực trị của hàm ẩn.
- Từ đó, áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng với lưu ý nếu hàm $f(x)$ không đổi dấu trên $(a; b)$ thì $\int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$.

FB-Phạm Tuấn

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b; f''(x) = 6x + 2a; f'''(x) = 6;$$

$$\text{Khi đó } g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) \Rightarrow g'(x) = f'(x) + f''(x) + 6.$$

Vì $g(x)$ có hai giá trị cực trị là -3 và 6 mà $g(x)$ là hàm bậc ba có hệ số của x^3 dương nên $g(x)$ có hai điểm cực trị là $x_1 < x_2$ và $g(x_1) = 6, g(x_2) = -3$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $y = \frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y = 1$ là

$$\frac{f(x)}{g(x)+6} = 1$$

$$\Leftrightarrow f(x) = g(x) + 6$$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + 6$$

$$\Leftrightarrow f'(x) + f''(x) + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y = 1$ là:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \left| \frac{f(x)}{g(x)+6} - 1 \right| dx = \left| \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{f(x) - g(x) - 6}{g(x)+6} \right) dx \right| = \left| \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{-f'(x) - f''(x) - 6}{g(x)+6} \right) dx \right|$$

$$= \left| \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{-g'(x)}{g(x)+6} \right) dx \right| = \left| \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{g'(x)}{g(x)+6} \right) dx \right| = \left| \ln |g(x)+6| \Big|_{x_1}^{x_2} \right| = |\ln 12 - \ln 3| = 2 \ln 2.$$

Bình luận:

- Đây là bài toán tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số trong trường hợp một đồ thị hàm số là đồ thị của hàm ẩn với giả thiết về cực trị, để xác định các yếu tố lập được công thức tính diện tích hình phẳng học sinh phải có kiến thức tổng hợp liên quan đến cực trị, giá trị cực trị của hàm số, tích phân hàm trị tuyệt đối và tích phân hàm ẩn. Đây là câu hỏi kiểm tra kiến thức ở mức độ VDC.

- Đây là bài toán sử dụng tính chất điểm cực trị của hàm bậc 3 đã gặp trong đề minh họa. Có thể xây dựng các hướng phát triển đối với tính chất điểm cực trị của hàm số bậc 3.

- **Lưu ý:** Với hướng giải dựng hàm của bài toán sẽ gặp khó khăn khi xây dựng lại hàm

$$y = \frac{f(x)}{g(x)+6}.$$

Hướng phát triển:

Hướng phát triển 1: Giữ nguyên giả thiết và cho diện tích hình phẳng hỏi giá trị cực trị còn lại.

Hướng phát triển 2: Thay cho giá trị cực trị của hàm số $g(x)$ cho đồ thị của hàm số $g(x)$ không thay đổi kết luận.

Hướng phát triển 3: Hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có mối liên hệ bằng biến thiên giữ nguyên giả thiết về giá trị cực trị của một hàm số có mối liên hệ giữa hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ với cách dựng lại hàm số.

Hướng phát triển 4: Thay đổi giả thiết về giá trị cực trị của hàm $f(x)$ và cho hai hàm số có mối liên hệ giữa nghiệm và cực trị với các dựng lại hàm số.

Hướng phát triển 5: Sử dụng tính chất hai điểm cực trị và điểm uốn của hàm bậc 3 để xây dựng lại hàm số và trả lời yêu cầu bài toán về diện tích hình phẳng.

Hướng phát triển 6: Thay đổi giả thiết về cực trị của hàm số $f(x)$ và giữ nguyên hàm $g(x)$ cho thêm điều kiện giá trị tại điểm cực trị của hàm $f(x)$.

Bài tập tương tự

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$ có hai điểm cực trị với giá trị cực tiểu là -3 và diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y = 1$ bằng $2 \ln 2$. Giá trị cực đại của hàm $g(x)$

bằng

A. 6.

B. 3.

C. 18.

D. 8.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b;$$

$$f''(x) = 6x + 2a;$$

$$f'''(x) = 6;$$

$$\text{Khi đó } g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) \Rightarrow g'(x) = f'(x) + f''(x) + 6.$$

Vì $g(x)$ có hai điểm cực trị với giá trị cực tiểu là -3 mà $g(x)$ là hàm bậc ba có hệ số của x^3 dương nên $g(x)$ có hai điểm cực trị là $x_1 < x_2$ và $g(x_2) = -3$ nên $g(x) + 6 > 0, \forall x \in [x_1; x_2]$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $y = \frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y = 1$ là

$$\frac{f(x)}{g(x)+6} = 1$$

$$\Leftrightarrow f(x) = g(x) + 6$$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + 6$$

$$\Leftrightarrow f'(x) + f''(x) + 6 = 0$$

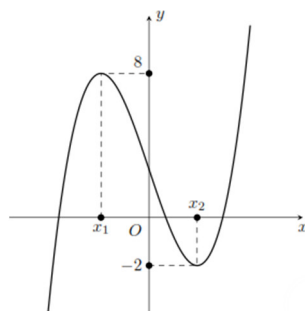
$$\Leftrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y = 1$ là:

$$\begin{aligned} S &= \int_{x_1}^{x_2} \left| \frac{f(x)}{g(x)+6} - 1 \right| dx = \int_{x_1}^{x_2} \left| \frac{f(x) - g(x) - 6}{g(x)+6} \right| dx = \int_{x_1}^{x_2} \left| \frac{-f'(x) - f''(x) - 6}{g(x)+6} \right| dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left| \frac{-g'(x)}{g(x)+6} \right| dx = \int_{x_1}^{x_2} \left| \frac{g'(x)}{g(x)+6} \right| dx = \left| \ln |g(x)+6| \right|_{x_1}^{x_2} = |\ln(g(x_1)+6) - \ln 3| = 2 \ln 2. \end{aligned}$$

Do $g(x_1) > g(x_2) \Rightarrow \ln(g(x_1)+6) = \ln 3 + 2 \ln 2 = \ln 12 \Rightarrow g(x_1) = 6$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{f(x)}{g(x)+4}$ và $y = 1$ bằng

A. $2 \ln 3 - \ln 2$.

B. $\ln 3$.

C. $\ln 12$.

D. $2 \ln 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$f'(x) = 2x^2 + 2ax + b;$$

$$f''(x) = 4x + 2a;$$

$$f'''(x) = 4;$$

Khi đó $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) \Rightarrow g'(x) = f'(x) + f''(x) + 4$.

Từ đồ thị của hàm số $g(x)$ thì $g(x)$ có hai điểm cực trị $x_1 < x_2$ và $g(x_1) = 8; g(x_2) = -2; g(x) + 4 > 0, \forall x \in [x_1; x_2]$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $y = \frac{f(x)}{g(x)+4}$ và $y = 1$ là

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)+4} &= 1 \\ \Leftrightarrow f(x) &= g(x) + 4 \\ \Leftrightarrow f(x) &= f(x) + f'(x) + f''(x) + 4 \\ \Leftrightarrow f'(x) + f''(x) + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow g'(x) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{f(x)}{g(x)+4}$ và $y = 1$ là:

$$\begin{aligned} S &= \int_{x_1}^{x_2} \left| \frac{f(x)}{g(x)+4} - 1 \right| dx = \left| \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{f(x)}{g(x)+4} - 1 \right) dx \right| \\ &= \left| \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{f(x) - g(x) - 4}{g(x)+4} \right) dx \right| = \left| \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{-f'(x) - f''(x) - 4}{g(x)+4} \right) dx \right| \\ &= \left| \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{-g'(x)}{g(x)+4} \right) dx \right| = \left| \ln |g(x)+4| \Big|_{x_1}^{x_2} \right| = |\ln 12 - \ln 2| = 2 \ln 3 - \ln 2. \end{aligned}$$

Câu 3. Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + 2x^2 + bx + 1; g(x) = cx^2 + 4x + d$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	0	1	$-\infty$
$f(x)$	$+\infty$			$-\infty$

Biết rằng hàm số $y = f'(x) - g'(x)$ có giá trị cực trị là 2. Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x); y = g(x); x = 1; x = 2$ bằng

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn A

Hàm số $g(x) = cx^2 + 4x + d$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = -\frac{2}{c}$ và giá trị lớn nhất bằng

$$g\left(-\frac{2}{c}\right) = 1 \text{ nên } c\left(-\frac{2}{c}\right)^2 + 4\left(-\frac{2}{c}\right) + d = 1 \Leftrightarrow -\frac{4}{c} + d = 1, (1).$$

Hàm số $g(x)$ có hai nghiệm là α và β nên $g(x) = c(x - \alpha)(x - \beta)$.

Hơn nữa $f(x)$ có hai điểm cực trị $x = \alpha$ và $x = \beta$ nên

$$f'(x) = 3ax^2 + 4x + b = 3a(x - \alpha)(x - \beta)$$

$$\text{Do đó } f'(x) = \frac{3a}{c} g(x) = 3ax^2 + \frac{12a}{c}x + \frac{3ad}{c} \Rightarrow \begin{cases} \frac{12a}{c} = 4 \Rightarrow c = 3a \\ \frac{3ad}{c} = b \end{cases} \Rightarrow f'(x) = g(x).$$

Khi đó $y = f'(x) - g'(x) = g(x) - g'(x) = cx^2 + (4-2c)x + d - 4$ đạt cực trị tại điểm

$$x = -\frac{4-2c}{2c} = 1 - \frac{2}{c} \text{ và giá trị cực trị } y\left(1 - \frac{2}{c}\right) = 2.$$

$$\text{Suy ra } y\left(1 - \frac{2}{c}\right) = c\left(1 - \frac{2}{c}\right)^2 + (4-2c)\left(1 - \frac{2}{c}\right) + d - 4 = -\frac{4}{c} - c + d = 2 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $c = -1$.

$$\text{Do đó } \begin{cases} d = -3 \\ a = -\frac{1}{3} \\ b = -3 \end{cases}. \text{ Vậy } S = \int_1^2 \left| -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 7x + 4 \right| dx = \frac{3}{4}.$$

Câu 4. Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + 2x^2 + bx + 1$; $g(x) = cx^2 + 4x + d$ với a, b, c và d là các số thực thỏa mãn $ac \neq 0$. Biết phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt là hai điểm cực trị của hàm số $f(x)$ với hai giá trị cực trị là -1 và 3 . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{f(x)+g(x)}{f(x)}$; $y = 1$ bằng

A. $\ln 2$.

B. $2 \ln 2$.

C. $\ln 6$.

D. $2 \ln 3$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $g(x)$ có hai nghiệm là α và β nên $g(x) = c(x-\alpha)(x-\beta)$.

Hơn nữa $f(x)$ có hai điểm cực trị $x = \alpha$ và $x = \beta$ nên, $f'(\alpha) = -1$; $f'(\beta) = 3$

$$f'(x) = 3ax^2 + 4x + b = 3a(x-\alpha)(x-\beta)$$

$$\text{Do đó } f'(x) = \frac{3a}{c} g(x) = 3ax^2 + \frac{12a}{c}x + \frac{3ad}{c} \Rightarrow \begin{cases} \frac{12a}{c} = 4 \Rightarrow c = 3a \\ \frac{3ad}{c} = b \end{cases} \Rightarrow f'(x) = g(x).$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đường là

$$\frac{f(x)+g(x)}{f(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) + g(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ x = \beta \end{cases}.$$

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \left| \frac{f(x)+g(x)}{f(x)} - 1 \right| dx = \int_{\alpha}^{\beta} \left| \frac{g(x)}{f(x)} \right| dx = \left| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{g(x)}{f(x)} dx \right| = \left| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f'(x)}{f(x)} dx \right| = \left| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d(f(x))}{f(x)} \right|$$

$$= \left| \ln |f(x)| \right|_{\alpha}^{\beta} = |\ln 4 - \ln 2| = \ln 2.$$

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ với a, b là các số thực khác 0. Biết hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) + f(x_2) = -2$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{f(x)-1}{x}$; $y = 4$ bằng

A. $\frac{32}{3}$

B. $\frac{21}{2}$

C. 11.

D. 10.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ và $f''(x) = 6x + 2a$.

Do hàm số $f(x)$ có hai cực trị là x_1 và x_2 , nên x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của

$$\text{phương trình } 3x^2 + 2ax + b = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2a}{3} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{b}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Hơn nữa } f(x_1) + f(x_2) = -2 \Rightarrow f\left(-\frac{a}{3}\right) = -1.$$

Mà $x_2 - x_1 = 2$ suy ra $a = 6; b = 9$.

$$\text{Hàm số } f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 1 \text{ nên } \frac{f(x) - 1}{x} = x^2 + 6x + 9.$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm giữa hai đường là

$$x^2 + 6x + 9 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -5 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } S = \int_{-5}^{-1} \left| \frac{f(x) - 1}{x} - 4 \right| dx = \int_{-5}^{-1} |x^2 + 6x + 5| dx = \frac{32}{3}.$$

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và hàm số $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$ có $g(x_1) = -6$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = g(x); x = x_1$ và $x = x_2$ bằng

A. 8.

B. 4.

C. 2.

D. 16.

Lời giải

Chọn A

Do hàm số $f(x)$ có hai cực trị là x_1 và x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$, nên

$$f'(x) = 3(x - x_1)(x - x_2) = 3(x - x_1)^2 - 3(x_2 - x_1)(x - x_1) = 3(x - x_1)^2 - 6(x - x_1).$$

$$\text{Khi đó } f(x) = (x - x_1)^3 - 3(x - x_1)^2 + C \text{ và } f''(x) = 6(x - x_1) - 6.$$

$$\text{Mà } g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) = (x - x_1)^3 + C - 6 \text{ suy ra } g(x_1) = C - 6 = -6 \Rightarrow C = 0.$$

Vậy

$$S = \int_{x_1}^{x_2} |g(x)| dx = \int_{x_1}^{x_2} |(x - x_1)^3 - 6| dx = \left| \int_{x_1}^{x_2} [(x - x_1)^3 - 6] dx \right| = \left| \left[\frac{1}{4}(x - x_1)^4 - 6x \right]_{x_1}^{x_2} \right| = 8.$$

Câu 45. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng 30° . Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $6\sqrt{3}a^3$.

B. $\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3$.

C. $2\sqrt{3}a^3$.

D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$.

Phân tích định hướng tìm lời giải:

- Đây là bài toán tính thể tích của khối hộp chữ nhật;

- Để tính khối hộp chữ nhật ta áp dụng công thức $V = B.h$;

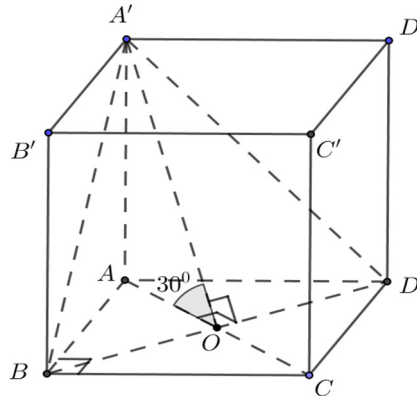
+ Trong bài toán này $B = S_{ABCD}$ dễ dàng tính thông qua giả thiết

+ Xác định đường cao $h = AA'$, việc tính AA' được quy về việc xác lập mối liên hệ giữa góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ với đường chéo của đáy.

Fb-Ngô Dung

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.

Vì $BD \perp OA$ và $BD \perp AA'$ nên $BD \perp (A'OA) \Rightarrow BD \perp OA'$

Lại có $(A'BD) \cap (ABCD) = BD$. Do đó $((A'BD), (ABCD)) = \widehat{A'OA} = 30^\circ$ (Hình vẽ trên).

Vì tứ giác $ABCD$ là hình vuông có $BD = 2a$ nên $OA = a$ và $AB = AD = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác $A'AO$ vuông tại A có $OA = a$ và $\widehat{A'OA} = 30^\circ$ nên

$$AA' = OA \cdot \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vậy thể tích khối hộp chữ nhật } V = AB \cdot AD \cdot AA' = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a^3.$$

Bình luận:

- Đây là bài toán tính thể tích của khối hộp chữ nhật, để giải quyết được bài toán này yêu cầu học sinh phải nắm vững công thức tính thể tích khối hộp; cách xác định góc giữa hai mặt phẳng; thiết lập mối liên hệ giữa đường cao với giả thiết đã cho của bài toán để tính chiều cao của khối hộp. Đây là câu hỏi kiểm tra kiến thức ở mức độ VD.

Hướng phát triển 1: Một bài toán tương tự, tuy nhiên ta thay đổi một chút về giả thiết đáy. (câu 1)

Hướng phát triển 2: Về cách xác định đường cao, từ đó xác định được góc. (câu 2,3)

Hướng phát triển 3: Thay đổi góc giữa mặt bên và mặt đáy thành góc giữa mặt bên và mặt bên (câu 4)

Hướng phát triển 4: Ta cho 2 giả thiết về góc, khi đó, giả thiết đường cao được ẩn trong giả thiết về góc, sử dụng mối quan hệ đó đi xác định đường cao. (câu 5)

Bài tập tương tự

Câu 1. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, đáy $ABCD$ có $AB = 2AD = 2a$. Góc giữa hai mặt phẳng $(B'AD)$ và $(ABCD)$ bằng 45° . Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $\frac{4\sqrt{5}}{5}a^3$.

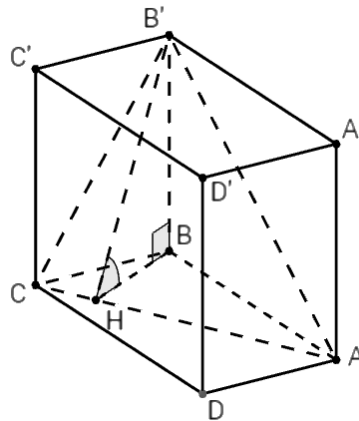
B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}a^3$.

C. $\frac{2\sqrt{5}}{15}a^3$.

D. $\frac{8\sqrt{5}}{15}a^3$.

Lời giải

Chọn A



Bài toán hoàn toàn tương tự với đề bài gốc. Vậy nên ta sẽ giải rút gọn như sau:

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên cạnh AC .

Khi đó ta sẽ có $((B'AC), (ABCD)) = \widehat{B'HB} = 45^\circ$

Dẫn đến $\triangle B'HB$ vuông cân tại $B \Rightarrow BB' = BH$.

Xét tam giác $\triangle BAC$ vuông tại B , $BA = 2a$, $BC = a$ khi đó đường cao

$$BH = \frac{BA \cdot BC}{\sqrt{BA^2 + BC^2}} = \frac{2a \cdot a}{\sqrt{(2a)^2 + a^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Vậy } V_{ABCD.A'B'C'D'} = BA \cdot BC \cdot BB' = \frac{4\sqrt{5}}{5} a^3.$$

Câu 2. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 3a$. Gọi M là trung điểm AA' . Góc giữa hai mặt phẳng (MBC) và $(A'B'C')$ bằng 30° . Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đã cho bằng

A. $\frac{9\sqrt{3}}{8} a^3$.

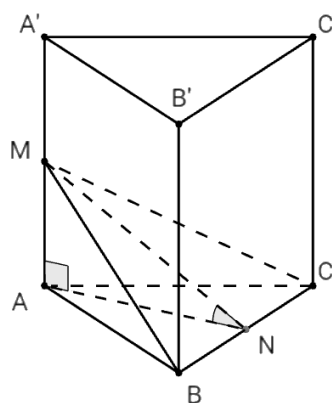
B. $\frac{9\sqrt{3}}{4} a^3$.

C. $\frac{27\sqrt{3}}{8} a^3$.

D. $\frac{27\sqrt{3}}{4} a^3$.

Lời giải

Chọn D



Gọi N là trung điểm BC . Khi đó $((MBC), (A'B'C')) = (MN; AN) = \widehat{MNA} = 30^\circ$

Xét $\triangle MAN$ có $AN = \frac{3\sqrt{3}}{2} a$, $\widehat{MNA} = 30^\circ \Rightarrow MA = \frac{3a}{2} \Rightarrow AA' = 3a$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = \frac{27\sqrt{3}}{4} a^3$$

Câu 3. Cho chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Gọi M là trung điểm BC , chân đường cao hạ từ S xuống mặt phẳng đáy chính là trung điểm H của đoạn AM . Biết góc giữa hai mặt phẳng $(SAB), (ABC)$ bằng 60° . Thể tích của hình chóp đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{8}a^3$.

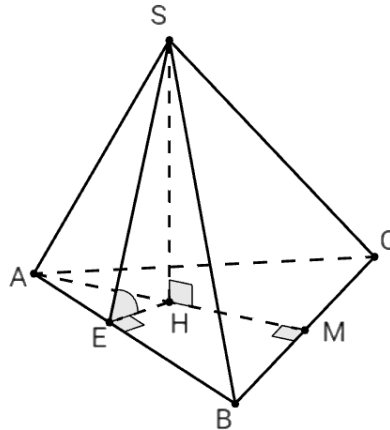
B. $\frac{3\sqrt{3}}{16}a^3$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{32}a^3$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{8}a^3$.

Lời giải

Chọn C



Dựng $HE \perp AB$ tại E .

Khi đó $((SAB), (ABC)) = (SE, EH) = \widehat{SEH} = 60^\circ$.

Ta có $EH = \frac{1}{2}d(M, AB) = \frac{1}{4}d(C, AB) = \frac{a\sqrt{3}}{8}$, suy ra $SH = EH \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{8}$

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A cạnh $AB = a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của BC . Biết góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng 60° . Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{a^3}{24}$.

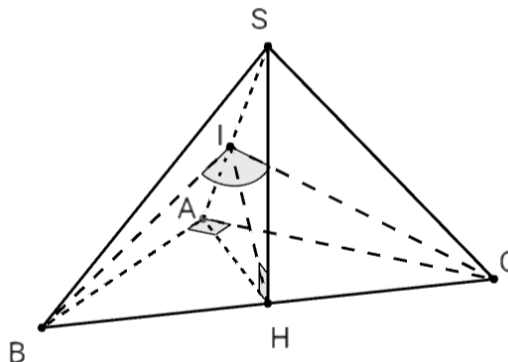
B. $\frac{a^3}{12}$.

C. $\frac{a^3}{6}$.

D. $\frac{a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có ΔABC vuông cân tại $A, AB = a \Rightarrow BC = a\sqrt{2}$ và $AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta dựng $HI \perp SA$, khi đó ta có $SA \perp (IBC)$.

Mà $SA = (SAB) \cap (SAC) \Rightarrow$ góc $((SAB); (SAC)) = (IB; IC) = 60^\circ$

Khi đó có 2TH: $\widehat{BIC} = 60^\circ$ hoặc $\widehat{BIC} = 120^\circ$.

TH: $\widehat{BIC} = 60^\circ$. Khi đó $BI = BC = a\sqrt{2} > a = BA \Rightarrow$ vô lý.

TH. $\widehat{BIC} = 120^\circ$. Khi đó $BI = CI = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

Ta xét $\triangle HSA$ vuông tại H , $HA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và đường cao $HI = \frac{a\sqrt{6}}{6} \Rightarrow SH = \frac{a}{2}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{6} SH \cdot AB \cdot AC = \frac{a^3}{12}$

Câu 5. Cho chóp $S.ABC$, đáy ABC là tam giác vuông tại A , $BC = 2a$, $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Hai mặt bên (SAB) , (SAC) cùng tạo với đáy một góc bằng 60° . Biết hình chiếu vuông góc H của S xuống mặt đáy nằm trên cạnh BC . Thể tích của hình chóp đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}+1}{12}a^3$.

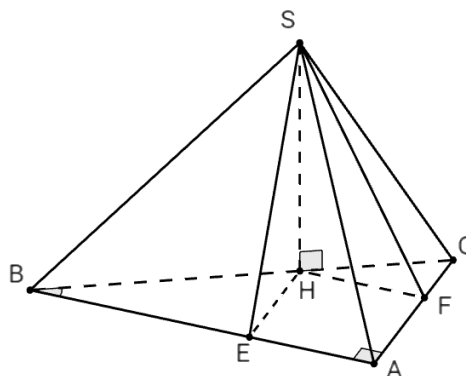
B. $\frac{\sqrt{3}+1}{6}a^3$.

C. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}a^3$.

D. $\frac{3+\sqrt{3}}{4}a^3$.

Lời giải

Chọn D



Từ H dựng $HE \perp AB$ tại E và $HF \perp AC$ tại F .

$$\Rightarrow \begin{cases} ((SAB), (ABC)) = \widehat{SEH} = 60^\circ \\ ((SAC), (ABC)) = \widehat{SFH} = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \text{đặt } HE = HF = x$$

Ta có $\tan C = \tan 60^\circ = \frac{HF}{FC} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{a-x} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$

Suy ra $SH = HF \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{\sqrt{3}+1}$

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{6} SH \cdot AB \cdot AC = \frac{3+\sqrt{3}}{4}a^3$.

Câu 46: [TNTHPTQG -MĐ122-Năm 2021] Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0| = 6$?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Phân tích định hướng tìm lời giải:

+ Khai thác $|z_0| = 6$. Nếu z_0 là số thực thì $|z_0| = 6 \Leftrightarrow z_0 = \pm 6$; Nếu

$z_0 = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}; b \neq 0$) thì $|z_0| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

+ Trong từng trường hợp z_0 là nghiệm thực, z_0 là nghiệm phức không suy biến của phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 = 0$ ta phải chú ý tới điều kiện tương ứng của m để kiểm tra kết quả.

Ý tưởng: Kiểm tra việc một số em học sinh quên không xét trường hợp z_0 là số thực.

Fb-Khải Nguyễn

Lời giải

Phương trình đã cho có $\Delta' = (m+1)^2 - m^2 = 2m+1$.

• Nếu $\Delta' = 2m+1 \geq 0$ thì phương trình có nghiệm thực $\Rightarrow z_0 \in \mathbb{R}$ mà $|z_0| = 6$

$$\Leftrightarrow z_0 = \pm 6$$

$$\text{Khi đó ta có: } \begin{cases} 6^2 - 2(m+1) \cdot 6 + m^2 = 0 \\ (-6)^2 - 2(m+1) \cdot (-6) + m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 12m + 48 = 0 \\ m^2 - 12m + 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 6 \pm 2\sqrt{3}$$

(thỏa mãn điều kiện $\Delta' \geq 0$).

• Nếu $\Delta' = 2m+1 < 0$ thì phương trình có phức không thực $z = m+1 \pm i\sqrt{-2m-1}$

$$\text{Khi đó } |z_0| = 6 \Leftrightarrow |m+1 \pm i\sqrt{-2m-1}| = 6 \Leftrightarrow \sqrt{(m+1)^2 + (\sqrt{-2m-1})^2} = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ m = -6 \end{cases}$$

Thấy $m = -6$ thỏa mãn $\Delta' < 0$ và $m = 6$ không thỏa mãn $\Delta' < 0$.

Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Bài tập tương tự

Câu 1: [Nhóm Giáo Viên Toán Việt Nam] Trên tập số phức cho phương trình $z^2 + az + b = 0$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Biết rằng hai nghiệm của phương trình có dạng $w+2$ và $2w-5+3i$ với w là một số phức. Giá trị của tổng $T = a+b$ bằng

- A. 81. B. 82. C. 100. D. 64.

Định hướng

+ Khai thác giả thiết thấy phương trình có hai nghiệm phức không thực. Đây là cơ sở để áp dụng tính chất về nghiệm phức không thực của phương trình bậc hai.

+ Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $az^2 + bz + c = 0$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$.

Khi đó nếu z_1, z_2 là các nghiệm phức không thực của phương trình thì:

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \text{ và } z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}. \text{ Nhận thấy } z_1 = \overline{z_2}; z_1 + z_2 = -\frac{b}{a},$$

$$z_1 z_2 = |z_1|^2 = |z_2|^2 = \frac{c}{a}; |z_1 - z_2| = \left| \frac{\sqrt{|\Delta|}}{a} \right|.$$

Lời giải

+ Vì $w+2$ và $2w-5+3i$ với w là một số phức là các nghiệm của phương trình đã cho nên chúng là các nghiệm phức không thực.

+ Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức không thực của phương trình đã cho $\Rightarrow z_1 = \overline{z_2}$. Đặt

$$z_1 = w+2 = x+yi \ (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow w = (x-2) + yi \Rightarrow 2w-5+3i = (2x-9) + (2y+3)i = z_2.$$

$$\text{+ Vì } z_1 = \overline{z_2} \text{ nên } \begin{cases} x = 2x-9 \\ y = -(2y+3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = -1 \end{cases}. \text{ Như vậy } z_1 = 9-i; z_2 = 9+i.$$

$$\text{+ } \begin{cases} a = -(z_1 + z_2) = -18 \\ b = z_1 z_2 = 82 \end{cases} \Rightarrow a+b = 64 \Rightarrow \text{Chọn D}$$

Câu 2: [Sưu Tầm Trên Nhóm Giáo Viên Toán Việt Nam] Cho các số thực a và b sao cho phương trình $z^2 + az + b = 0$ có hai nghiệm phức z_1, z_2 không thực. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi

A và B lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1, z_2 . Biết rằng ΔOAB có một góc bằng 120° . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $(2 + \sqrt{3})b = a^2$. B. $3b = a^2$. C. $2b = a^2$. D. $b = a^2$.

Định hướng

Dùng tính chất về nghiệm phức không thực của phương trình bậc hai hệ số thực.

Lời giải

+ Vì Phương trình $z^2 + az + b = 0$ ($a, b \in \mathbb{R}$) có hai nghiệm phức z_1, z_2 không phải là

số thực nên $\Delta = a^2 - 4b < 0$ và $z_{1,2} = \frac{-a \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2}$.

+ Ta có $OA = |z_1| = \sqrt{b}$; $OB = |z_2| = \sqrt{b}$; $AB = |z_1 - z_2| = \sqrt{4b - a^2}$. Thấy $OA = OB \Rightarrow \Delta OAB$ cân tại đỉnh O . Vì ΔOAB cân tại O và có một góc bằng 120° nên $\widehat{AOB} = 120^\circ$

$$\Rightarrow (\sqrt{4b - a^2})^2 = (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{b}\sqrt{b}\cos 120^\circ \Leftrightarrow b = a^2 \Rightarrow \text{Chọn D}$$

Câu 3: [Chuyên Đại Học Vinh-L2/N2021] Cho các số thực b, c sao cho phương trình $z^2 + bz + c = 0$ có hai nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 4 + 3i| = 1$ và $|z_2 - 8 - 6i| = 4$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $5b + c = 4$. B. $5b + c = -12$. C. $5b + c = 12$. D. $5b + c = -4$.

Lời giải

+ Nếu z_1, z_2 là các nghiệm thực của phương trình đã cho thì từ $|z_1 - 4 + 3i| = 1$

$$\Rightarrow \sqrt{(z_1 - 4)^2 + 9} = 1 \Rightarrow (z_1 - 4)^2 = -8. \text{ Điều này vô lý.}$$

+ Nếu z_1, z_2 là các nghiệm phức không thực thì $z_2 = \overline{z_1}$. Đặt $z_1 = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

$$\Rightarrow z_2 = x - yi.$$

$$\begin{cases} |z_1 - 4 + 3i| = 1 \\ |z_2 - 8 - 6i| = 4 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} \sqrt{(x-4)^2 + (y+3)^2} = 1 \\ \sqrt{(x-8)^2 + (-y-6)^2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + y^2) - 2(4x - 3y) = -24 \\ (x^2 + y^2) - 4(4x - 3y) = -84 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ 4x - 3y = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{24}{5} \\ y = -\frac{18}{5} \end{cases}. \text{ Suy ra } \begin{cases} z_1 = \frac{24}{5} - \frac{18}{5}i \\ z_2 = \frac{24}{5} + \frac{18}{5}i \end{cases}.$$

$$+ \begin{cases} b = -(z_1 + z_2) = -\frac{48}{5} \\ c = z_1 z_2 = 36 \end{cases} \Rightarrow 5b + c = -12 \Rightarrow \text{Chọn B}$$

Câu 47: [TNTHPT QG-MĐ122-Năm 2021] Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z| = 1$ và $|w| = 2$. Khi $|z + i(\overline{w}) + 6 + 8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z - w|$ bằng

- A. 3. B. $\sqrt{5}$. C. $\frac{\sqrt{29}}{5}$. D. $\frac{\sqrt{221}}{5}$.

Phân tích định hướng tìm lời giải:

+ Khai thác kết luận, thấy cần áp dụng BĐT mô đun

$$\left| z + i(\bar{w}) + 6 + 8i \right| \geq |6 + 8i| - \left| z + i(\bar{w}) \right| = 10 - \left| z + i(\bar{w}) \right| \quad (1). \text{ Kết hợp giả thiết, nghĩ đến}$$

$$\left| z + i(\bar{w}) \right| \leq |z| + |i(\bar{w})| = 3 \quad (2). \text{ Từ đây suy ra } \left| z + i(\bar{w}) + 6 + 8i \right| \geq 7.$$

+ Tìm z, w để đẳng thức ở (1) và (2) xảy ra.

Fb-Khải Nguyễn

Lời giải

$$+ \text{Ta có } \begin{cases} \left| z + i(\bar{w}) + 6 + 8i \right| \geq |6 + 8i| - \left| z + i(\bar{w}) \right| = 10 - \left| z + i(\bar{w}) \right| \quad (1) \\ \left| z + i(\bar{w}) \right| \leq |z| + |i(\bar{w})| = 3 \quad (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left| z + i(\bar{w}) + 6 + 8i \right| \geq 7 \quad (3).$$

+ Đẳng thức ở (1) xảy ra khi và chỉ khi $z + i(\bar{w}) = k(6 + 8i)$ với $k \in \mathbb{R}$ và $k \leq 0$. Đẳng thức ở (2) xảy ra khi và chỉ khi $z = t \cdot i(\bar{w})$ với $t \in \mathbb{R}$ và $t \geq 0$. Như thế, đẳng thức ở

$$(1), (2) \text{ đồng thời xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} z = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \\ w = -\frac{8}{5} - \frac{6}{5}i \end{cases} \text{ hay đẳng thức ở (3) xảy ra khi}$$

$$\text{và chỉ khi } \begin{cases} z = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \\ w = -\frac{8}{5} - \frac{6}{5}i \end{cases}.$$

$$+ \text{Vậy } \min \left| z + i(\bar{w}) + 6 + 8i \right| = 7, \text{ khi đó } |z - w| = \frac{\sqrt{29}}{5} \Rightarrow \text{Chọn C}$$

Bình luận

Đây là bài thi trắc nghiệm về GTNN, GTLN của biểu thức chứa mô đun số phức. Để giải bài toán này chỉ cần áp dụng trực tiếp các BĐT mô đun, nhưng yêu cầu phải chỉ được khi nào đẳng thức xảy ra. Điều này gây khó khăn cho học sinh vì các em khó nhớ nếu không tự chứng minh được BĐT mô đun.

Các câu tương tự

Câu 1: [Nhóm Giáo Viên Toán Việt Nam] Xét số phức z thay đổi thỏa mãn $|z - i| = 2$. Biết biểu thức $T = |z + 3i| + 2|z - 4 - i|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Hiệu $x - y$ bằng

A. $\frac{3 - 6\sqrt{13}}{17}$. B. $\frac{6\sqrt{13} - 3}{17}$. C. $\frac{3 + 6\sqrt{13}}{17}$. D. $-\frac{3 + 6\sqrt{13}}{17}$.

Định hướng

Khai thác kết luận: Biểu thức $T = |z + 3i| + 2|z - 4 - i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Ta phải “cân bằng hệ số” (làm xuất hiện thừa số 2 ở biểu thức $|z + 3i|$) trước khi áp dụng bất đẳng

thức mô đun bằng đẳng thức sau: $|z_1 + z_2| = \left| \frac{|z_2|}{|z_1|} z_1 + \frac{|z_1|}{|z_2|} z_2 \right|$ ($z_1, z_2 \in \mathbb{C}; z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$).

Lời giải

$$+ \text{Ta có } |z+3i| = |(z-i)+4i| = \left| \frac{|4i|}{|z-i|} (z-i) + \frac{|z-i|}{|4i|} (4i) \right| = 2|z|; \quad T = 2(|z| + |4+i-z|) \\ \geq 2|z+4+i-z| = 2\sqrt{17} \quad (1).$$

$$+ \text{Đẳng thức ở (1) xảy ra khi } \begin{cases} z = k(4+i), (k \in \mathbb{R}, 0 \leq k \leq 1) \\ |z-i| = 2 \end{cases} \Rightarrow z = \frac{4+8\sqrt{13}}{17} + \frac{1+2\sqrt{13}}{17}i.$$

$$+ \text{Vậy } x-y = \frac{3+6\sqrt{13}}{17} \Rightarrow \text{Chọn C}$$

Câu 2: [Sở Nam Định-Năm 2021] Xét các số phức $z; w$ thỏa mãn $|z-2|^2 + |z-2i|^2 = 6$ và $|w-3-2i| = |w+3+6i|$. Khi $|z-w|$ đạt giá trị nhỏ nhất, hãy tính $|z|$.

A. $1 + \sqrt{2}$. B. $\sqrt{2} - 1$. C. $\frac{1}{5}$. D. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Định hướng

$$+ \text{Khai thác giả thiết, thấy } |z-2|^2 + |z-2i|^2 = 6 \Leftrightarrow |z-1-i|=1; \quad |w-3-2i| = |w+3+6i| \\ \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x - 2 \quad (w = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})).$$

$$+ \text{Khai thác kết luận, viết } |z-w| = |(1+i-w) + (z-1-i)| \geq |1+i-w| - |z-1-i| \\ = \sqrt{(1-x)^2 + \left(\frac{3}{4}x+3\right)^2} - 1 \quad (*).$$

Lời giải

$$+ |z-2|^2 + |z-2i|^2 = 6 \Leftrightarrow |(z-1-i) + (i-1)|^2 + |(z-1-i) - (i-1)|^2 = 6 \\ \Leftrightarrow 2[|z-1-i|^2 + |i-1|^2] = 6 \Leftrightarrow |z-1-i| = 1.$$

$$+ \text{Đặt } w = x + yi, (x, y \in \mathbb{R}). \text{ Khi đó } |w-3-2i| = |w+3+6i| \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x - 2.$$

$$+ |z-w| = |(1+i-w) + (z-1-i)| \geq |1+i-w| - |z-1-i| = \sqrt{(1-x)^2 + \left(\frac{3}{4}x+3\right)^2} - 1 \quad (*).$$

$$+ \text{Khi } x = -\frac{4}{5} \text{ thì } y = -\frac{7}{5} \text{ và } w = -\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i. \text{ Đẳng thức ở } (*) \text{ xảy ra khi và chỉ khi}$$

$$z-1-i = k(1+i-w) \text{ với } k \in \mathbb{R} \text{ và } k \leq 0. \text{ Từ } z-1-i = k(1+i-w)$$

$$\Rightarrow |z-1-i| = |k(1+i-w)| \Rightarrow k = -\frac{1}{3} \Rightarrow z = \frac{2}{5} + \frac{i}{5} \Rightarrow |z| = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \text{Chọn D}$$

Câu 3: [Đề tham khảo-2018] Xét các số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z-4-3i| = \sqrt{5}$. Khi biểu thức $P = |z+1-3i| + |z-1+i|$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị của $x+y$ bằng

A. 4. B. 6. C. 8. D. 10.

Định hướng

$$+ \text{Nhận thấy } |z+1-3i| = |(z-4-3i) + 5|, \quad |z-1+i| = |(z-4-3i) + (3+2i)| \text{ do đó không tính được } \alpha|z+1-3i|^2 + \beta|z-1+i|^2 \text{ theo } |z-4-3i| \quad (\alpha, \beta \text{ là các số thực}).$$

$$+ \text{Tuy nhiên ta lại có } |z+1-3i|^2 + |z-1+i|^2 = 2[|z-i|^2 + |1-2i|^2].$$

Lời giải

$$+ P \leq \sqrt{2[|z+1-3i|^2 + |z-1+i|^2]} = \sqrt{4[|z-i|^2 + |1-2i|^2]} = 2\sqrt{5+|z-i|^2} \quad (1).$$

$$+ |z-i| = |(z-4-3i) + (4+2i)| \leq |z-4-3i| + |4+2i| = 3\sqrt{5} \quad (2). \text{ Đẳng thức ở (2) xảy ra}$$

$$\text{khi } \begin{cases} \exists k \in \mathbb{R}, k \geq 0 \\ z-4-3i = k(4+2i) \Rightarrow z = 6+4i. \\ |z-4-3i| = \sqrt{5} \end{cases}$$

+ Từ (1) và (2) suy ra $P \leq 10\sqrt{2} \quad (3)$. Đẳng thức ở (3) xảy ra khi và chỉ khi đẳng

$$\text{thức ở (1) và (2) đồng thời xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 6+4i \\ |z+1-3i| = |z-1+i| \end{cases} \Leftrightarrow z = 6+4i \Rightarrow \text{Chọn D}$$

Câu 4: [Chuyên Hùng Vương Bình Dương-L5N2018] Xét các số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z-1+3i| = |z+3-i|$. Khi $\|z-1-2i\| - \|z+1-i\|$ đạt giá trị lớn nhất, $x^3 + y^3$ bằng

- A. 0. B. 16. C. 54. D. 27.

Lời giải

$$+ \text{Ta có } |z-1+3i| = |z+3-i| \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y-1)^2} \Leftrightarrow x - y = 0.$$

+ Trong mặt phẳng phức, gọi $M(z)$, $A(1+2i)$ và $B(-1+i)$. Khi đó, M thuộc đường thẳng (d) có phương trình $x - y = 0$. Nhận thấy A, B nằm cùng một phía đối với (d) .

$$+ AB \text{ có phương trình: } x - 2y + 3 = 0; \text{ Xét hệ } \begin{cases} x - y = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 3.$$

+ $\|z-1-2i\| - \|z+1-i\| = |MA-MB| \leq AB = \sqrt{5}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ba điểm M, A, B thẳng hàng hay M là giao điểm của đường thẳng AB và đường thẳng (d) hay $M(3;3) \Rightarrow \text{Chọn C}$

Câu 5: [Sưu Tầm Và Biên Tập] Xét các số phức z, w thay đổi thỏa mãn $|z|=2, |w-3+2i|=1$. Khi $|z^2 - 2zw - 4|$ đạt giá trị lớn nhất, $|z-w|$ bằng

- A. 6. B. $\frac{2\sqrt{85}}{5}$. C. 2. D. $2\sqrt{5}$.

Lời giải

$$+ \text{Đặt } z = x + yi \text{ với } x, y \in \mathbb{R} \text{ thì } \frac{z-\bar{z}}{2} = yi; \text{ Vì } |z|=2 \text{ nên } x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow -2 \leq y \leq 2$$

$$\Rightarrow 0 \leq y+2 \leq 4 \Rightarrow (y+2)^2 \leq 16.$$

$$+ |z^2 - 2zw - 4| = |2z| \left| \frac{z-\bar{z}}{2} - w \right| = 4|iy-w| = 4|(iy-3+2i) + (3-2i-w)|$$

$$\leq 4[|iy-3+2i| + |3-2i-w|] = 4|-3+(y+2)i| + 4 = 4+4\sqrt{9+(y+2)^2} \leq 24. \text{ Từ đây suy ra } |z^2 - 2zw - 4| \leq 24 \quad (1).$$

$$+ \text{Đẳng thức ở (1) xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} z = 2i \\ w = \frac{18}{5} - \frac{14}{5}i \end{cases}. \text{ Vậy } \max |z^2 - 2zw - 4| = 24, \text{ khi}$$

$$\text{đó } |z-w| = 6 \Rightarrow \text{Chọn A}$$

- Câu 6:** [Chuyên Đại Học Vinh-L2/N2021] Cho các số thực b, c sao cho phương trình $z^2 + bz + c = 0$ có hai nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 4 + 3i| = 1$ và $|z_2 - 8 - 6i| = 4$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. $5b + c = 4$. B. $5b + c = -12$. C. $5b + c = 12$. D. $5b + c = -4$.

Lời giải

+ Nếu z_1, z_2 là các nghiệm thực của phương trình đã cho thì từ $|z_1 - 4 + 3i| = 1$

$$\Rightarrow \sqrt{(z_1 - 4)^2 + 9} = 1 \Rightarrow (z_1 - 4)^2 = -8. \text{ Điều này vô lý.}$$

+ Nếu z_1, z_2 là các nghiệm phức không thực thì $z_2 = \bar{z}_1 \Rightarrow |\bar{z}_1 - 8 - 6i| = 4$.

Ta có
$$\begin{cases} 1 = |z_1 - 4 + 3i| \geq |z_1| - |-4 + 3i| & (1) \\ 4 = |\bar{z}_1 - 8 - 6i| \geq |-8 - 6i| - |z_1| & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z_1| \leq 6 \\ |z_1| \geq 6 \end{cases} \Rightarrow |z_1| = 6.$$
 Đẳng thức ở (1) xảy ra khi và

chỉ khi $z_1 = k(-4 + 3i)$ với $k \in \mathbb{R}$ và $k \leq 0$. Từ đây tính được $z_1 = \frac{24}{5} - \frac{18}{5}i$ (thỏa mãn

$$(2)) \text{ và } z_2 = \frac{24}{5} + \frac{18}{5}i.$$

$$+ \begin{cases} b = -(z_1 + z_2) = -\frac{48}{5} \\ c = z_1 z_2 = 36 \end{cases} \Rightarrow 5b + c = -12 \Rightarrow \text{Chọn B}$$

- Câu 7:** [Chuyên Vinh -L2/N2018] Trong các số phức z thỏa mãn $|z^2 + 1| = 2|z|$, gọi z_1 và z_2 lần lượt là các số phức có mô đun nhỏ nhất và lớn nhất. Khi đó mô đun của số phức $w = z_1 + z_2$ bằng
- A. $2\sqrt{2}$. B. 2. C. $\sqrt{2}$. D. $1 + \sqrt{2}$.

Định hướng

+ Khai thác giả thiết: $|z^2 + 1| = 2|z| \Leftrightarrow |z^2|^2 + 1 + z^2 + \bar{z}^2 = 4|z|^2$

$$\Leftrightarrow z^2 + (\bar{z})^2 = 4|z|^2 - |z|^4 - 1.$$

$$+ z^2 + (\bar{z})^2 = (z + \bar{z})^2 - 2z\bar{z} = (z + \bar{z})^2 - 2|z|^2 \geq -2|z|^2.$$

Lời giải

+ Ta có: $|z^2 + 1| = 2|z| \Leftrightarrow |z^2|^2 + 1 + z^2 + \bar{z}^2 = 4|z|^2 \Leftrightarrow z^2 + (\bar{z})^2 = 4|z|^2 - |z|^4 - 1.$

+ Mặt khác: $z^2 + (\bar{z})^2 = (z + \bar{z})^2 - 2|z|^2 \geq -2|z|^2$ (1). Suy ra $4|z|^2 - |z|^4 - 1 \geq -2|z|^2$
 $\Leftrightarrow |z|^4 - 6|z|^2 + 1 \leq 0 \Leftrightarrow -1 + \sqrt{2} \leq |z| \leq 1 + \sqrt{2}$. Đẳng thức ở (1) xảy ra khi và chỉ khi $z + \bar{z} = 0 \Leftrightarrow z$ là số thuần ảo.

+ Dễ dàng có $z_1 = (\sqrt{2} - 1)i$ và $z_2 = (\sqrt{2} + 1)i$. Từ đó $w = z_1 + z_2 = 2\sqrt{2}i$ và $|w| = 2\sqrt{2}$
 $\Rightarrow$ Chọn A

- Câu 8:** [Sở GD&ĐT Hà Nam-L1/N2018] Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $4(z - \bar{z}) - 15i = i(z + \bar{z} - 1)^2$. Khi $|z - \frac{1}{2} + 3i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $-a + 4b$ bằng
- A. 7. B. 6. C. 5. D. 4.

Lời giải

$$+ \text{Ta có } z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi; 4(z - \bar{z}) - 15i = i(z + \bar{z} - 1)^2 \Rightarrow b = \frac{a^2}{2} - \frac{a}{2} + 2$$

$$\Rightarrow z = a + \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a}{2} + 2 \right) i.$$

$$+ \left| z - \frac{1}{2} + 3i \right| = \left| \left(a - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a}{2} + 5 \right) i \right| = \sqrt{\left(a - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a}{2} + 5 \right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(a - \frac{1}{2} \right)^2 + \left[\frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{39}{8} \right]^2} \geq \frac{39}{8}. \text{ Khi } a = \frac{1}{2} \text{ thì } \left| z - \frac{1}{2} + 3i \right| = \frac{39}{8}$$

$$+ \text{Vậy } \min \left| z - \frac{1}{2} + 3i \right| = \frac{39}{8}; \text{ Khi đó } -a + 4b = 7 \Rightarrow \text{Chọn A}$$

Câu 48: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-7)(x^2-9), \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x^3 + 5x| + m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 6.

B. 7.

C. 5.

D. 4.

Phân tích định hướng tìm lời giải:

- Đây là bài toán cực trị hàm hợp có tham số: Tìm tham số m để hàm số $y = f(u(x, m))$ có đúng (ít nhất, nhiều nhất) k điểm cực trị (1).

- Cách giải bài toán (1):

+ Một số bài mà $y = f(u(x, m))$ là hàm số chẵn thì đồ thị hàm số $y = f(u(x, m))$ nhận Oy là trục đối xứng. Khi đó, việc xét số điểm cực trị của hàm số $y = f(u(x, m))$ trên $\mathbb{R}$ quy về xét số điểm cực trị của hàm số này trên $(0; +\infty)$. Hàm số $y = f(u(x, m))$ có $2k+1$ điểm cực trị khi và chỉ khi $y = f(u(x, m))$ có k điểm cực trị trên $(0; +\infty)$.

+ **Tổng quát:** Trong nhiều bài toán, ta sử dụng **tính chất (*)** sau

Cho hàm số $f(x)$ và $u(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, khác hàm hằng trên mọi khoảng. Gọi $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các điểm cực trị của $f(x)$.

Khi đó:

1) Nếu x_0 là nghiệm của phương trình $u(x) = x_i, (i = \overline{1, n})$ thì x_0 cũng là điểm cực trị của hàm số $f(u(x))$. Hơn nữa, nếu x_i là điểm cực đại (cực tiểu) của $f(x)$ thì x_0 cũng là điểm cực đại (cực tiểu) của hàm số $f(u(x))$.

Thật vậy, theo định nghĩa cực trị, x_i là điểm cực trị của $f(x) \Leftrightarrow$ tồn tại khoảng $(a_i; b_i)$ chứa x_i sao cho $f(x) < f(x_i)$ hay $f(x) > f(x_i)$ với mọi $x \in (a_i; b_i) \setminus \{x_i\}$.

Mà $u(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên tồn tại khoảng $(c_i; d_i)$ chứa x_0 sao cho $u(x) \in (a_i; b_i) \setminus \{x_i\}, \forall x \in (c_i; d_i) \setminus \{x_0\}$.

Do vậy: $f(u(x)) < f(u(x_0))$ hay $f(u(x)) > f(u(x_0))$ với $\forall x \in (c_i; d_i) \setminus \{x_0\}$.

Suy ra, x_0 cũng là điểm cực trị của hàm số $f(u(x))$. Hơn nữa, nếu x_i là điểm cực đại (cực tiểu) của $f(x)$ thì x_0 cũng là điểm cực đại (cực tiểu) của hàm số $f(u(x))$.

2) Ta có $[f(u(x))]' = u'(x) \cdot f'(u(x))$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó:

+ Qua điểm x_0 mà $u'(x)$ đổi dấu thì $[f(u(x))]'$ đổi dấu.

+ Nếu x_0 là điểm cực trị của $u(x)$ thì x_0 cũng là điểm cực trị của $f(u(x))$.

Từ đó, ta có kết quả sau:

Số điểm cực trị của hàm số $f(u(x))$ bao gồm số điểm cực trị của $u(x)$ và số nghiệm của các phương trình $u(x) = x_i$, với $i = \overline{1, n}$. Đồng thời các nghiệm này phải khác điểm cực trị của $u(x)$.

FB-Chu Thom

Lời giải

Chọn A

Để ý rằng: $u(x) = |x^3 + 5x| + m$ có cùng số điểm cực trị với hàm số $y = h(x) = |x^3 + 5x|$.

Ta có BBT của hàm $y = h(x) = |x^3 + 5x|$ như sau:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

Suy ra $u(x) = |x^3 + 5x| + m$ có đúng 1 điểm cực trị.

Ta có $g'(x) = |x^3 + 5x|' \cdot f'(|x^3 + 5x| + m)$.

Từ giả thiết $f'(x) = (x-7)(x^2-9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ x=-3 \\ x=3 \end{cases}$.

Ta có: $f'(|x^3 + 5x| + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) = |x^3 + 5x| + m = 7 \\ u(x) = |x^3 + 5x| + m = 3 \\ u(x) = |x^3 + 5x| + m = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x^3 + 5x| = 7 - m \\ |x^3 + 5x| = 3 - m \\ |x^3 + 5x| = -3 - m \end{cases} \quad (2).$

Hàm số $g(x)$ có ít nhất 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow (2)$ có ít nhất 2 nghiệm phân biệt khác 0.

Từ bảng biến thiên của hàm số $|h(x)|$, ta có $7 - m > 0 \Leftrightarrow m < 7$.

Mà $m \in \mathbb{Z}^+$ nên $m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Vậy có 6 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bình luận:

- Trong cách giải trên, mấu chốt là tìm được số điểm cực trị của $u(x) = |x^3 + 5x| + m$ và tìm được m để hệ (2) có ít nhất 2 nghiệm phân biệt khác 0. Cả 2 yêu cầu cùng được giải quyết dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = |h(x)| = |x^3 + 5x|$.

- Ngoài cách giải trên, ta có thể thấy $g(x) = f(|x^3 + 5x| + m)$ là hàm số chẵn. Vì vậy, $g(x)$ có ít nhất 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow g(x)$ có ít nhất 1 điểm cực trị trên khoảng $(0; +\infty)$.

Hướng phát triển:

Hướng phát triển 1: Thay giả thiết cho công thức $f'(x)$ thành cho đồ thị hay bảng xét dấu của $f'(x)$, đồ thị hay bảng biến thiên của $f(x)$.

Hướng phát triển 2: Thay đổi hàm số $u(x, m)$.

Hướng phát triển 3: Thay đổi vị trí của trị tuyệt đối, hoặc bỏ trị tuyệt đối, vị trí tham số m (m không phải hệ số tự do).

Hướng phát triển 4: Thay đổi câu hỏi: Có ít nhất k cực trị, có nhiều nhất k cực trị, có đúng k cực trị.

Bài tập tương tự

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	4		5		6		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	+

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x^4 - 2x^2 - 3| + m)$ có ít nhất 7 điểm cực trị?

A. 2.

B. 4.

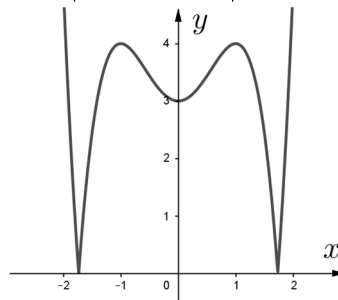
C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Đặt $u(x) = |x^4 - 2x^2 - 3| + m$. Ta có $u(x)$ có cùng số điểm cực trị với hàm số $h(x) = |x^4 - 2x^2 - 3|$. Đồ thị $h(x) = |x^4 - 2x^2 - 3|$ như sau:



Từ đó suy ra hàm số $u(x) = |x^4 - 2x^2 - 3| + m$ có 5 điểm cực trị.

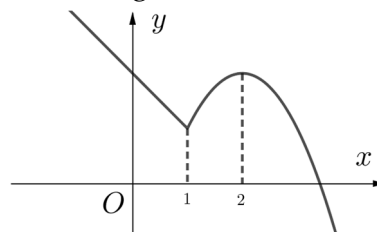
Từ giả thiết suy ra hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị là $x = 4$; $x = 5$.

$$g'(x) = [|x^4 - 2x^2 - 3| + m]' f'(|x^4 - 2x^2 - 3| + m).$$

$$\text{Ta có } f'(|x^4 - 2x^2 - 3| + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x^4 - 2x^2 - 3| + m = 4 \\ |x^4 - 2x^2 - 3| + m = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x^4 - 2x^2 - 3| = 4 - m \\ |x^4 - 2x^2 - 3| = 5 - m \end{cases} \quad (3).$$

Hàm số $g(x) = f(|x^4 - 2x^2 - 3| + m)$ có ít nhất 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow (3)$ có ít nhất 2 nghiệm phân biệt khác điểm cực trị của $u(x) \Leftrightarrow 5 - m > 0 \Leftrightarrow m < 5$ mà $m \in \mathbb{N}^*$ nên $m \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đúng 2 điểm cực trị và có đồ thị như hình vẽ



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-20; 20]$ để hàm số $g(x) = f(x^2|x-3| + m)$ có nhiều nhất 7 điểm cực trị?

A. 21.

B. 20.

C. 22.

D. 19.

Lời giải

Chọn A

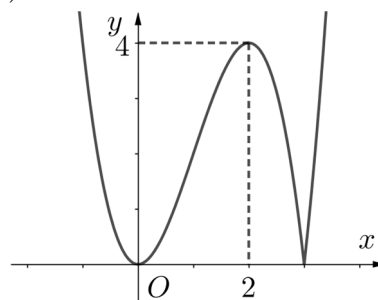
Đặt $u(x) = x^2|x-3| + m \Rightarrow g(x) = f(u(x)) \Rightarrow g'(x) = u'(x) \cdot f'(u(x))$.

Xét hàm số $u(x) = x^2|x-3| + m$ có cùng điểm cực trị với hàm số $h(x) = x^2|x-3| = |x^2(x-3)| = |x^3 - 3x^2|$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = x^3 - 3x^2$ như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	0	-4	$+\infty$	

Suy ra, đồ thị hàm số $y = h(x)$ như sau



Từ đồ thị suy ra hàm số $y = h(x)$ có 3 điểm cực trị $\Rightarrow u(x)$ có 3 điểm cực trị.

Hàm số $g(x)$ có quá 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ hệ $\begin{cases} u(x) = x^2|x-3| + m = 1 \\ u(x) = x^2|x-3| + m = 2 \end{cases}$ có quá 4 nghiệm phân biệt khác điểm cực trị của $h(x)$. Ta có $\begin{cases} x^2|x-3| = 1-m \\ x^2|x-3| = 2-m \end{cases}$.

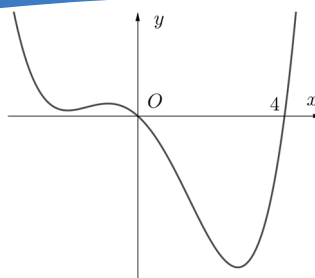
Do vậy, hệ $\begin{cases} u(x) = x^2|x-3| + m = 1 \\ u(x) = x^2|x-3| + m = 2 \end{cases}$ có quá 4 nghiệm phân biệt khác điểm cực trị của $h(x)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-m > 0 \\ 1-m \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \neq -3 \end{cases}$ mà m nguyên thuộc $[-20; 20] \Rightarrow \begin{cases} m \in [-20; 0] \\ m \neq -3 \end{cases} \Rightarrow$ có 20 giá trị

của m để $g(x)$ có quá 7 điểm cực trị. Vậy số giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-20; 20]$ để hàm số $g(x) = f(x^2|x-3| + m)$ có nhiều nhất 7 điểm cực trị là $41 - 20 = 21$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm đa thức bậc 4. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình

vẽ. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10; 10]$ để hàm số $g(x) = f(x^3 - 3mx^2 + 2)$ có đúng 6 điểm cực trị?



A. 8.

B. 10.

C. 21.

D. 20.

Lời giải

Chọn D

$$g'(x) = (3x^2 - 6mx)f'(x^3 - 3mx^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \\ u(x) = x^3 - 3mx^2 + 2 = 0 \\ u(x) = x^3 - 3mx^2 + 2 = 4 \end{cases} \quad (4).$$

Nếu $m = 0$ thì (4) có 3 nghiệm phân biệt là $x = 0; x = \pm\sqrt[3]{2} \Rightarrow g(x)$ không thể có 6 điểm cực trị.
Nếu $m < 0$ thì ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$2m$	0	$+\infty$			
$u'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$u(x)$			$2 - 4m^3$		2		$+\infty$

$g(x)$ có đúng 6 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ (4) có đúng 6 nghiệm $\Leftrightarrow 4 < 2 - 4m^3 \Leftrightarrow m < -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

Nếu $m > 0$ thì ta có bảng biến thiên

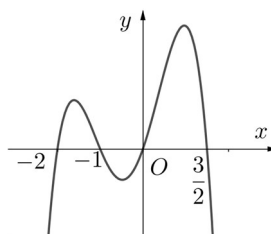
x	$-\infty$	0	$2m$	$+\infty$			
$u'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$u(x)$			2		$2-4m^3$		$+\infty$
	$-\infty$						

$g(x)$ có đúng 6 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ (4) có đúng 6 nghiệm $\Leftrightarrow 2 - 4m^3 < 0 \Leftrightarrow m > \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

Vậy, $g(x)$ có đúng 6 điểm cực trị thì $m < -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ hoặc $m > \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

Mà m nguyên thuộc $[-10; 10]$ nên có 20 giá trị của m .

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$. Biết rằng $f'(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn có đồ thị như sau



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x) = f(e^{2x} - 2me^x)$ có nhiều điểm cực trị nhất?

A. $m < -\sqrt{2}$.

B. $m > 1$.

C. $m < -1$.

D. $m > \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $u(x) = e^{2x} - 2me^x \Rightarrow g(x) = f(u(x)) \Rightarrow g'(x) = u'(x) \cdot f'(u(x))$.

$$\text{Ta có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = 2e^x(e^x - m) = 0 \\ u(x) = -2 \\ u(x) = -1 \\ u(x) = 0 \\ u(x) = \frac{3}{2} \end{cases} \quad (5).$$

Hàm số $g(x)$ có nhiều điểm cực trị nhất $\Leftrightarrow (5)$ có nhiều nghiệm nhất

$$\Leftrightarrow m > 0 \text{ và } \begin{cases} u(x) = -2 \\ u(x) = -1 \\ u(x) = 0 \\ u(x) = \frac{3}{2} \end{cases} \quad (6) \text{ có nhiều nghiệm nhất.}$$

Khi $m > 0$, ta có $u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln m$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\ln m$		$+\infty$
$u'(x)$		-	0	+
$u(x)$	0	$-m^2$		$+\infty$

$$(6) \text{ có nhiều nghiệm nhất } \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -m^2 < -2 \end{cases} \Leftrightarrow m > \sqrt{2}.$$

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	4	1	-3	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để hàm số $g(x) = f(|e^x - x - 5| + m)$ có đúng 9 cực trị?

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

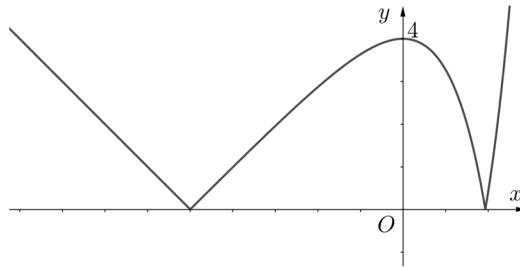
Đặt $u(x) = |e^x - x - 5| + m \Rightarrow g(x) = f(u(x)) \Rightarrow g'(x) = u'(x) \cdot f'(u(x))$.

Hàm số $u(x) = |e^x - x - 5| + m$ có cùng điểm cực trị với hàm số $|h(x)| = |e^x - x - 5|$, với $h(x) = e^x - x - 5$.

Xét hàm số $h(x) = e^x - x - 5 \Rightarrow h'(x) = e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$	-4	$+\infty$

Suy ra đồ thị hàm số $|h(x)|$ có dạng



Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $|h(x)|$ có 3 điểm cực trị $\Rightarrow u(x) = |e^x - x - 5| + m$ có 3 điểm cực trị.

$$\text{Ta có } f'(u(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |e^x - x - 5| + m = -1 \\ |e^x - x - 5| + m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |e^x - x - 5| = -1 - m \\ |e^x - x - 5| = 2 - m \end{cases} \quad (7).$$

Hàm số $g(x)$ có đúng 9 điểm cực trị $\Leftrightarrow (7)$ có đúng 6 nghiệm phân biệt khác điểm cực trị của $u(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < -1 - m < 4 \\ 2 - m \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < m + 1 < 0 \\ m \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 < m < -1 \\ m \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -5 < m \leq -2$,
mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ có 3 giá trị của m .

Câu 49: [Câu 49 THPT QG 2021- Mã 103] Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -3; 2)$ và $B(-2; 1; -4)$. Xét hai điểm M và N thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MN = 4$. Giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng

A. $5\sqrt{2}$.

B. $3\sqrt{13}$.

C. $\sqrt{61}$.

D. $\sqrt{85}$.

Fb-Võ Trọng Trí & Khải Nguyễn

Phân tích định hướng tìm lời giải:

1. Các bài toán quen thuộc:

+ Cho hai điểm A, B cố định nằm khác phía đối với mặt phẳng (α) . Xét điểm M thay đổi thuộc (α) , khi đó:

$MA + MB \geq AB$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv M'$, trong đó M' là giao điểm của đoạn thẳng AB với (α) .

$|MA - MB| = |MA - MB'| \leq AB'$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv M'$, trong đó B' là điểm đối xứng với B qua (α) và M' là giao điểm của đoạn thẳng AB' với (α) .

+ Cho hai điểm A, B cố định nằm cùng phía đối với mặt phẳng (α) . Xét điểm M thay đổi thuộc (α) , khi đó:

$MA + MB = MA + MB' \geq AB'$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv M'$, trong đó B' là điểm đối xứng với B qua (α) và M' là giao điểm của đoạn thẳng AB' với (α) .

$|MA - MB| \leq AB$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv M'$, trong đó M' là giao điểm của đoạn thẳng AB với (α) .

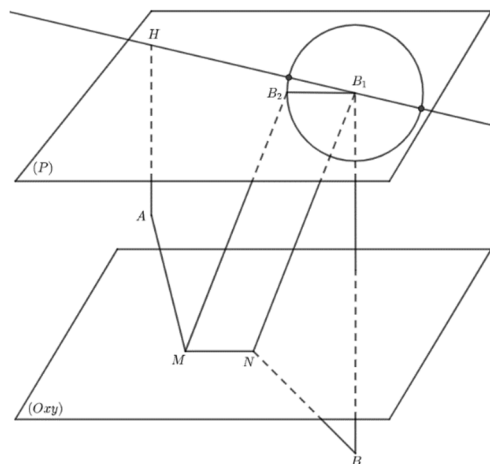
2. Trở lại bài toán.

Bài toán gần gũi với một bài toán quen thuộc là tìm giá trị lớn nhất của $|AM - BM|$ với M thuộc mặt phẳng (Oxy) . Việc đề cho xuất hiện điểm N với ràng buộc $MN = 4$ nên ta có thể dùng phép tịnh tiến để biến $|AM - BN| = |AM - B'M|$ quen thuộc bằng cách lấy điểm B' sao cho $\overline{BB'} = \overline{NM}$.

Lời giải 1

Chọn D

Thấy hai điểm A, B nằm khác phía so với mặt phẳng (Oxy) . Gọi B_1 là điểm đối xứng của B qua (Oxy) thì $B_1(-2; 1; 4)$ và $BN = B_1N$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua B_1 và song song với (Oxy) thì (P) có phương trình $z = 4$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên (P) thì $H(1; -3; 4)$. Gọi B_2 là điểm sao cho $\overline{B_1B_2} = \overline{NM}$ thì $B_2 \in (P)$.



Ta có: $AH = 2$, $B_1H = 5$, $B_1B_2 = MN = 4$ (vì $\overline{B_1B_2} = \overline{NM}$), $B_1N = B_2M$ (vì $\overline{B_1B_2} = \overline{NM} \Rightarrow \overline{B_1N} = \overline{B_2M}$). Trong (P) , điểm B_2 thay đổi thuộc đường tròn (C) có tâm B_1 và bán kính $R = B_1B_2 = 4$.

$|AM - BN| = |AM - B_1N| = |AM - B_2M| \leq AB_2 = \sqrt{AH^2 + (HB_2)^2} \leq \sqrt{AH^2 + (HB_1 + B_1B_2)^2}$
 $= \sqrt{85} \Rightarrow |AM - BN| \leq \sqrt{85}$ (1). Đẳng thức ở (1) xảy ra khi và chỉ khi điểm B_1 nằm giữa hai điểm B_2, H và $M = AB_2 \cap (Oxy)$.

Vậy $\max |AM - BN| = \sqrt{85}$.

Lời giải 2

Để thấy hai điểm A, B nằm khác phía so với mặt phẳng (Oxy) . Gọi A_1 là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (Oxy) thì $A_1(1; -3; -2)$ và $AM = A_1M$. Gọi $M(a; b; 0)$ và $N(c; d; 0)$, ta có: $\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} = 4$ hay $(a-c)^2 + (b-d)^2 = 16$; $\overrightarrow{A_1M} = (a-1; b+3; 2)$; $\overrightarrow{BN} = (c+2; d-1; 4)$; $\overrightarrow{A_1M} - \overrightarrow{BN} = (a-c-3; b-d+4; -2)$.

$$|AM - BN| = |A_1M - BN| = \left| \overrightarrow{A_1M} - \overrightarrow{BN} \right| \leq \left| \overrightarrow{A_1M} - \overrightarrow{BN} \right| = \sqrt{(a-c-3)^2 + (b-d+4)^2 + 4}$$

$$= \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2 + 29 + 2[4(b-d) - 3(a-c)]}$$

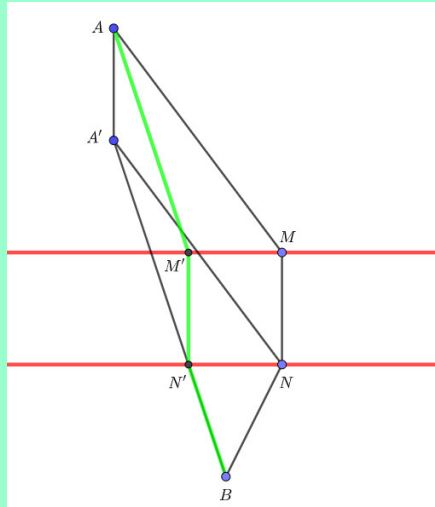
$$\leq \sqrt{45 + 2\sqrt{(4^2 + 3^2)((b-d)^2 + (a-c)^2)}} = \sqrt{85} \Rightarrow |AM - BN| \leq \sqrt{85}. \text{ Khi } M\left(\frac{32}{5}; -\frac{51}{5}; 0\right)$$

và $N\left(\frac{44}{5}; -\frac{67}{5}; 0\right)$ thì $|AM - BN| = \sqrt{85}$. Vậy $\max |AM - BN| = \sqrt{85}$.

Bình luận:

Đây là bài toán được phát triển từ 'bài toán 2' trang số 7 trong SGK Hình Học Nâng Cao lớp 11.

Hai thôn nằm ở hai vị trí A và B cách nhau một con sông (xem rằng hai bờ sông là hai đường thẳng song song). Người ta dự định xây một chiếc cầu bắc qua sông (cổ nhiên cầu phải vuông góc với hai bờ sông và làm hai đoạn đường thẳng từ A đến M và từ B đến N . Hãy xác định vị trí chiếc cầu MN sao cho $AM + BN$ ngắn nhất.



Lấy điểm A' sao cho $\overline{AA'} = \overline{MN}$ khi đó $AM = A'N$ và $AM + BN = A'N + BN \geq A'B$.

Hướng phát triển

Hướng 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$.

Hướng 2: Bỏ bớt ràng buộc điểm $N \in (Oxy)$, khi đó A_2 thuộc mặt cầu tâm A_1 bán kính bằng A_1A_2 .

Các bài tập tương tự

Câu 1: [Trần Quốc Luật-THTT tháng 12 năm 2017] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0; 0; 2)$ và $B(3; 4; 1)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $AX + BY$ với X, Y là các điểm thuộc mặt phẳng Oxy sao cho $XY = 1$.

A. 3.

B. 5.

C. $2 + \sqrt{17}$.

D. $1 + 2\sqrt{5}$.

Lời giải 1

Thấy $A(0;0;2)$, $B(3;4;1)$ nằm cùng phía đối với mặt phẳng (Oxy) . Gọi A' là điểm đối xứng với điểm A qua (Oxy) , khi đó $A'(0;0;-2)$ và $AX = A'X$.

Vì $X, Y \in (Oxy)$ nên gọi $X(a;b;0)$, $Y(c;d;0)$. Vì $XY=1$ nên $\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} = 1$ hay $(a-c)^2 + (b-d)^2 = 1$.

$$\overrightarrow{A'X} = (a;b;2), \overrightarrow{YB} = (3-c;4-d;1), \overrightarrow{A'X} + \overrightarrow{YB} = (a-c+3;b-d+4;3).$$

$$\begin{aligned} AX + BY &= A'X + YB = |\overrightarrow{A'X}| + |\overrightarrow{YB}| \geq |\overrightarrow{A'X} + \overrightarrow{YB}| = \sqrt{(a-c+3)^2 + (b-d+4)^2 + 9} \\ &= \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2 + 34 + 2[3(a-c) + 4(b-d)]} = \sqrt{35 + 2[3(a-c) + 4(b-d)]} \end{aligned}$$

$$\geq \sqrt{35 - 2|3(a-c) + 4(b-d)|} \geq \sqrt{35 - 2\sqrt{(3^2 + 4^2)((a-c)^2 + (b-d)^2)}} = 5 \Rightarrow AX + BY \geq 5. \text{ Khi}$$

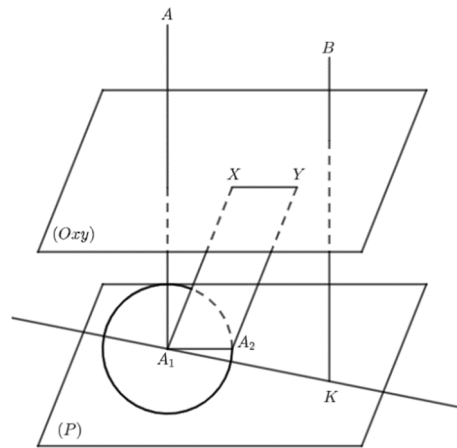
$X\left(\frac{8}{5}; \frac{32}{15}; 0\right)$ và $Y\left(\frac{11}{5}; \frac{44}{15}; 0\right)$ thì $AX + BY = 5$. Vậy $\min(AX + BY) = 5$.

Lời giải 2

Thấy $A(0;0;2)$, $B(3;4;1)$ nằm cùng phía đối với mặt phẳng (Oxy) . Gọi A' là điểm đối xứng với điểm A qua (Oxy) , khi đó $A_1(0;0;-2)$ và $AX = A_1X$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa A_1 và song song mặt phẳng (Oxy) suy ra (P) có phương trình là $z = -2$. Gọi K là hình chiếu của B lên (P) thì $K(3;4;-2)$, khi đó $BK = 3$, $KA_1 = 5$.

Lấy điểm A_2 sao cho $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{XY}$, khi đó $A_1X = A_2Y$ (vì $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{XY} \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1X} = \overrightarrow{A_2Y}$), $A_2 \in (P)$ và trong (P) , A_2 thuộc đường tròn (C) tâm A_1 bán kính $R = A_1A_2 = 1$ (vì $A_1A_2 = XY$).



$$AX + BY = A_1X + BY = A_2Y + BY \geq A_2B = \sqrt{BK^2 + (KA_2)^2} \geq \sqrt{BK^2 + (KA_1 - R)^2} = 5$$

$\Rightarrow AX + BY \geq 5$ (1). Đẳng thức ở (1) xảy ra khi và chỉ khi A_2 là giao điểm thứ nhất của đường thẳng A_1K với (C) (A_2 thuộc đoạn thẳng A_1K) đồng thời $Y = A_2B \cap (Oxy)$.

Vậy $\min(AX + BY) = 5$.

Câu 2: [Câu 49 THPT QG 2021- Mã 103] Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-3;2)$ và $B(-2;1;-4)$. Xét hai điểm M và N thay đổi, trong đó M thuộc mặt phẳng (Oxy) và N tùy ý sao cho $MN = 4$. Giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng

A. $5\sqrt{2}$.

B. $3\sqrt{13}$.

C. $\sqrt{61}$.

D. $\sqrt{85}$.

Câu 50. Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x \in \left(\frac{1}{3}; 6\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{18x}$?

A. 19.

B. 21.

C. 20.

D. 18.

Phân tích định hướng lời giải

- Đây là bài toán có mức độ VDC (có thể là câu khó nhất của đề thi THPT QG năm 2021).

- Sử dụng phương pháp “Logarit hóa hai vế” để xét phương trình mũ dạng:

$$a^{f(x;m)} = u(x;m) \cdot b^{g(x;m)}, \quad (0 < a; b \neq 1) \quad (\text{với } m \text{ là tham số})$$

Định hướng tìm lời giải:

B1: Dựa vào phương trình đã cho tìm điều kiện cho phương trình.

B2: Coi y như tham số, lấy logarit cơ số 27 hai vế, sau đó đưa phương trình về dạng $f(x) = 0$.

B3: Sử dụng kỹ thuật chia miền giá trị của tham số và xét hàm số $f(x)$. Mục đích để đánh giá được tính đơn điệu của hàm số $f(x)$ và sử dụng được định lý giá trị trung bình.

Sử dụng các đơn vị kiến thức:

- Nếu f liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(a; b)$.

Sử dụng kiến thức này đã làm cho việc giải toán trở thành việc thử sai trong việc chọn cặp a, b . Thay vào đó dùng kết quả sau (không thể giải quyết trọn vẹn việc thử sai nhưng đã giảm thiểu một phần):

Cho f liên tục và đơn điệu trên đoạn $[a; b]$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên khoảng $(a; b)$ khi và chỉ khi và $f(a) \cdot f(b) < 0$.

- Nếu $a \geq e$ thì hàm số $f(x) = \log_a(1+x) - x$ nghịch biến trên $[0; +\infty)$.

Lưu ý: $\log_a(1+x) \leq x$ với mọi $x \geq 0$ và $a \geq e$.

Fb: Nguyễn Sỹ - Nguyễn Thanh Hải

Lời giải

Giả sử tồn tại $y \in \mathbb{Z}$ để phương trình trên có nghiệm $x \in \left(\frac{1}{3}; 6\right)$. Suy ra $1+xy > 0$

Lấy logarit cơ số 27 hai vế, PT đã cho tương đương

$$3x^2 + (y-18)x - \log_{27}(1+xy) = 0.$$

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 + (y-18)x - \log_{27}(1+xy)$, với $x \in \left(\frac{1}{3}; 6\right)$.

- Với $y < 0$, do $\begin{cases} 1+xy > 0 \\ x > \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow y > -\frac{1}{x}$, Suy ra $-3 < y < 0$ hay $y \in \{-1; -2\}$.

+) Với $y = -1$, ta có $f(x) = 3x^2 - 19x - \log_{27}(1-x)$ là hàm số liên tục trên $\left[\frac{2}{3}; 1\right)$.

Do $f\left(\frac{2}{3}\right) = -11$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ suy ra phương trình có nghiệm trên $\left(\frac{2}{3}; 1\right)$.

+) Với $y = -2$, ta có $f(x) = 3x^2 - 20x - \log_{27}(1-2x)$ là hàm số liên tục trên $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

Do $f\left(\frac{1}{3}\right) = -6$ và $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^-} f(x) = +\infty$ suy ra phương trình có nghiệm trên $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

- Với $y = 0$, phương trình trở thành $3x^2 - 18x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$, không thỏa mãn.

- Với $y \geq 19$, ta có

$$f'(x) = 6x + (y - 18) - \frac{y}{3(1+xy)\ln 3},$$

$$f''(x) = 6 + \frac{y^2}{3(1+xy)^2 \ln 3} > 0, \forall x \in \left(\frac{1}{3}; 6\right).$$

Suy ra $f'(x)$ đồng biến trên $\left(\frac{1}{3}; 6\right)$. Do đó

$$f'(x) > f'\left(\frac{1}{3}\right) = 2 + (y - 18) - \frac{y}{(3+y)\ln 3} > 0 \text{ vì } (3+y)\ln 3 > y \Rightarrow -\frac{y}{(3+y)\ln 3} > -1$$

Suy ra $f(x)$ là đồng biến trên $\left(\frac{1}{3}; 6\right)$. Suy ra

$$f(x) > f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{y}{3} - \log_{27}\left(1 + \frac{y}{3}\right) - \frac{17}{3}.$$

Xét hàm số $g(t) = t - \log_{27}(1+t)$, $t > 0$. Dễ thấy $g'(t) = 1 - \frac{1}{3(3+t)\ln 3} > 0, \forall t > 0$, suy ra $g(t)$

là hàm đồng biến, do đó

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = g\left(\frac{y}{3}\right) - \frac{17}{3} \geq g\left(\frac{19}{3}\right) - \frac{17}{3} > 0. \text{ Suy ra } f(x) > 0 \forall x \in \left(\frac{1}{3}; 6\right).$$

Do đó PT trên không có nghiệm thuộc $\left(\frac{1}{3}; 6\right)$.

- Với $1 \leq y \leq 18$. Do hàm số $f(x) = 3x^2 + (y-18)x - \log_{27}(1+xy)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{3}; 6\right]$.

Ta lại có hàm số $g(t) = t - \log_{27}(1+t)$, đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Mà } f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{y}{3} - \log_{27}\left(1 + \frac{y}{3}\right) - \frac{17}{3} \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = g\left(\frac{y}{3}\right) - \frac{17}{3} \leq g(6) - \frac{17}{3} < 0, \forall y \in [1; 18],$$

$$\text{Mặt khác } f(6) = 6y - \log_{27}(1+6y) = g(6y) \geq g(6) > 0, \forall y \in [1; 18].$$

Suy ra $f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot f(6) < 0$. Do đó phương trình trên có nghiệm trên $\left(\frac{1}{3}; 6\right)$.

Vậy có tất cả 20 giá trị nguyên của y thỏa mãn yêu cầu.

Bình luận:

- Việc sử dụng BĐT Bernoulli để đánh giá như lời giải sau đây là sai:

Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x \in \left(\frac{1}{3}; 6\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{18x}$?

A. 19.

B. 21.

C. 20

D. 18.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 27^{3x^2+xy} = (1+xy) \cdot 27^{18x} \Leftrightarrow 27^{3x^2+xy-18x} = 1+xy \Leftrightarrow 27^{3x^2+xy-18x} - 1 - xy = 0.$$

$$\text{Mặt khác: } 27^{3x^2+xy-18x} - 1 - xy = (1+26)^{3x^2+xy-18x} - 1 - xy \geq 1 + 26(3x^2 + xy - 18x) - 1 - xy$$

$$= 78x^2 + 25xy - 468x.$$

+ Với $y \geq 19 \Rightarrow 27^{3x^2+xy-18x} - 1 - xy \geq 78x^2 + 25xy - 468x \geq 84x^2 + 7x > 0 \forall x \in \left(\frac{1}{3}; 6\right)$ (loại).

+ Với $y \leq -3 \Rightarrow 27^{3x^2+xy-18x} = 1 + xy \leq 1 - 3x < 0 \forall x \in \left(\frac{1}{3}; 6\right)$ (loại).

+ Với $y = -2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ (thỏa mãn).

+ Với $y = -1 \Rightarrow x = 1$ (thỏa mãn).

+ Với $y = 0 \Rightarrow 27^{3x^2-18x} = 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 18x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$ (loại).

+ Với $1 \leq y \leq 18$. Xét hàm số $f(x) = 27^{3x^2+xy-18x} - 1 - xy$.

Do $f\left(\frac{1}{3}\right) = 3^{y-17} - 1 - \frac{y}{3} < 0 \forall y \in \{1; 2; \dots; 18\}$ và

$f(6) = 27^{6y} - 6y - 1 > 0 \forall y \in \{1; 2; \dots; 18\}$ nên phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm thuộc $\left(\frac{1}{3}; 6\right)$.

Tóm lại $y \in \{-2; -1; 1; 2; \dots; 18\}$. Vậy có 20 số nguyên y thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Lưu ý:

- Nếu $a > -1$ thì $(1+a)^x \geq ax+1$ với $x \leq 0$ hoặc $x \geq 1$.
- Nếu $a > -1$ thì $(1+a)^x \leq ax+1$ với $0 \leq x \leq 1$.

- Khi giảng dạy cho HS chúng ta nên phát biểu bài toán dưới dạng. “Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $27^{3x^2+xm} = (1+xm)27^{18x}$ có nghiệm thuộc $\left(\frac{1}{3}; 6\right)$?”

Hướng phát triển:

Hướng phát triển 1: Thay biến y bởi tham số m quy về bài toán tìm tham số m nguyên để phương trình có nghiệm.

Hướng phát triển 2: Sử dụng phương pháp đánh giá hai vế của phương trình hoặc sử dụng các bất đẳng thức cơ bản.

Hướng phát triển 3: Sử dụng phương pháp hàm số.

Các ví dụ tương tự:

Hướng phát triển 1: Thay biến y bởi tham số m quy về bài toán tìm tham số m nguyên để phương trình có nghiệm

Câu 1. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $27^{3x^2+xm} = (1+xm)27^{15x}$ có nghiệm $x \in \left(\frac{1}{3}; 5\right)$?

A. 16 .

B. 18 .

C. 15 .

D. 17 .

Lời giải

Giả sử tồn tại $m \in \mathbb{Z}$ để phương trình trên có nghiệm $x \in \left(\frac{1}{3}; 5\right)$.

Từ phương trình, suy ra $xm > -1$. Do $x \in \left(\frac{1}{3}; 5\right)$, nên ta có $m > -\frac{1}{x} > -3$ hay $m \geq -2$.

Phương trình đã cho tương đương với $27^{3x^2-15x+xm} - (1+xm) = 0$.

Xét hàm số $f(x) = 27^{3x^2-15x+xm} - (1+xm)$ trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; 5\right)$

Ta có $f(5) = 27^{5m} - 1 - 5m > 0 \forall m \in \mathbb{Z}^*$ và $f\left(\frac{1}{3}\right) = 3^{-14+m} - 1 - \frac{1}{3}m$,

Xét hàm số: $g(m) = 3^{m-14} - 1 - \frac{m}{3}$, ta có $g'(m) = 0 \Leftrightarrow m = 14 - \log_3(3 \ln 3) = m_0 \approx 12,9$.

BBT:

m	-3	m_0	16	$+\infty$
$g'(m)$	-	0	+	
$g(m)$	$g(-3)$			$+\infty$

Do $\begin{cases} g(-3) > 0 \\ g(-2) < 0 \end{cases}$ và $\begin{cases} g(16) > 0 \\ g(15) < 0 \end{cases}$, kết hợp với BBT suy ra với m nguyên lớn hơn -3 và

$$g(m) < 0 \Leftrightarrow m \in \{-2; -1; \dots; 15\}.$$

+ Với $m \in \{-2; -1; 1; \dots; 15\}$ ta có $f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot f(5) < 0$, nên phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; 5\right)$.

+ Với $m = 0$, ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 5$ không thỏa mãn.

+ Với $m \geq 16$; Ta có phương trình

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 27^{3x^2-15x+xm} = (1+xm) \Leftrightarrow 3x^2 - 15x + xm - \log_{27}(1+mx) = 0$$

Xét hàm số $h(x) = 3x^2 - 15x + xm - \log_{27}(1+mx)$ trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; 5\right)$. Ta có

$$h'(x) = 6x - 15 + m - \frac{m}{(1+mx) \ln 27} \Rightarrow h''(x) = 6 + \frac{m^2}{3(1+mx)^2 \ln 3} > 0, \forall x \in \left(\frac{1}{3}; 5\right).$$

Vì $h'(x)$ liên tục trên đoạn $\left[\frac{1}{3}; 5\right]$ nên hàm số $h'(x)$ đồng biến trên khoảng $\left[\frac{1}{3}; 5\right]$. Do đó

$$h'(x) > h'\left(\frac{1}{3}\right) = 2 + (m-15) - \frac{m}{(3+m) \ln 3} > 0 \text{ vì } (3+m) \ln 3 > m \text{ nên } -\frac{m}{(3+m) \ln 3} > -1.$$

Suy ra $h(x)$ là đồng biến trên $\left[\frac{1}{3}; 5\right]$. Do đó, $h(x) > h\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{m}{3} - \log_{27}\left(1 + \frac{m}{3}\right) - \frac{14}{3}$.

Xét hàm số $g(t) = t - \log_{27}(1+t)$, $t > 0$. Dễ thấy $g'(t) = 1 - \frac{1}{3(3+t) \ln 3} > 0, \forall t > 0$, suy ra

$g(t)$ là hàm đồng biến, do đó $h\left(\frac{1}{3}\right) = g\left(\frac{m}{3}\right) - \frac{14}{3} \geq g(8) - \frac{14}{3} > 0$. Suy ra $h(x) > 0 \forall x \in \left(\frac{1}{3}; 5\right)$.

Do đó phương trình trên không có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{1}{3}; 5\right)$.

Vậy $m \in \{-2; -1; 1; 2; \dots; 15\}$, hay có 17 giá trị nguyên của tham số m .

Câu 2. (Mã đề 101, 2021) Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right)$ thỏa mãn

$$27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{9x}?$$

- A. 27. B. 9. **C. 11.** D. 12.

Lời giải

Giả sử tồn tại $y \in \mathbb{Z}$ để phương trình trên có nghiệm $x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right)$. Suy ra $1+xy > 0$

Lấy logarit cơ số 27 hai vế, phương trình đã cho tương đương

$$3x^2 + (y-9)x - \log_{27}(1+xy) = 0.$$

Đặt $f(x) = 3x^2 + (y-9)x - \log_{27}(1+xy)$, $x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right)$. Ta xét các trường hợp sau

- Nếu $y < 0$ thì $-y < \frac{1}{x} < 3$, suy ra $y > -3$ hay $y \in \{-1; -2\}$.

+) Với $y = -1$ thì ta có $f\left(\frac{1}{3}\right) < 0$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ suy ra phương trình có nghiệm trên $\left(\frac{1}{3}; 1\right) \subset \left(\frac{1}{3}; 3\right)$.

+) Tương tự, với $y = -2$, phương trình cũng có nghiệm trên $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right) \subset \left(\frac{1}{3}; 3\right)$.

- Nếu $y = 0$ thì phương trình trở thành $3x^2 - 9x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$ không thỏa mãn.
- Nếu $y \geq 10$, ta có

$$f'(x) = 6x + (y-9) - \frac{y}{3(1+xy)\ln 3},$$

$$f''(x) = 6 + \frac{y^2}{3(1+xy)^2 \ln 3} > 0, \forall x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right).$$

Suy ra $f'(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$. Do đó

$$f'(x) > f'\left(\frac{1}{3}\right) = 2 + (y-9) - \frac{y}{(3+y)\ln 3} > 0.$$

Suy ra $f(x)$ là hàm số đồng biến trên $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$. Do đó

$$f(x) > f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{y}{3} - \log_{27}\left(1 + \frac{y}{3}\right) - \frac{8}{3}.$$

Xét hàm số $g(t) = t - \log_{27}(1+t)$, $t > 0$. Dễ thấy $g'(t) = 1 - \frac{1}{3(3+t)\ln 3} > 0$ $g(t)$ là hàm đồng biến, suy ra

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = g\left(\frac{y}{3}\right) - \frac{8}{3} \geq g\left(\frac{10}{3}\right) - \frac{8}{3} > 0.$$

Nên phương trình không có nghiệm trên $\left(\frac{1}{3}; 3\right)$ trong trường hợp này.

- Nếu $1 \leq y \leq 9$ thì từ tính đồng biến của $g(t)$, ta suy ra

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = g\left(\frac{y}{3}\right) - \frac{8}{3} < 0, \forall 1 \leq y \leq 9,$$

$$f(3) = g(3y) > 0, \forall 1 \leq y \leq 9.$$

Điều này dẫn đến phương trình có nghiệm trên $\left(\frac{1}{3}; 3\right)$.

Vậy có 11 giá trị nguyên của y thỏa mãn yêu cầu.

Hướng phát triển 2. Sử dụng phương pháp đánh giá hai vế của phương trình hoặc sử dụng các bất đẳng thức cơ bản.

Câu 3. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $|x| \leq 2020$ và $2^{x+2y} + 2021^{x^2-3y-2}(x+2y-2) = 4$?

A. 1. B. 2020. C. 2021. D. 0.

Lời giải

Chọn B

Nếu $x+2y-2 > 0 \Rightarrow 2^{x+2y} > 2^2, 2021^{x^2-3y-2}(x+2y-2) > 0 \Rightarrow 2^{x+2y} + 2021^{x^2-3y-2}(x+2y-2) > 4$.

Nếu $x+2y-2 < 0 \Rightarrow 2^{x+2y} < 2^2, 2021^{x^2-3y-2}(x+2y-2) < 0 \Rightarrow 2^{x+2y} + 2021^{x^2-3y-2}(x+2y-2) < 4$.

Nếu $x+2y-2 = 0 \Rightarrow 2^{x+2y} = 2^2, 2021^{x^2-3y-2}(x+2y-2) = 0 \Rightarrow 2^{x+2y} + 2021^{x^2-3y-2}(x+2y-2) = 4$.

Vậy $x+2y-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2-2y$, do $-2020 \leq x \leq 2020 \Rightarrow -1009 \leq y \leq 1011$.

Do $y \in \mathbb{Z}$ nên có 2021 giá trị, nên có 2021 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn.

Câu 4. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ với $1 \leq y \leq 2020$ thỏa mãn biểu thức sau:

$$\log_3(4^x + 2^x y + y^2) - \log_3(2^x y) = \frac{2^x(2y - 2^x)}{y^2}.$$

A. 11. B. 15. C. 10. D. 6.

Lời giải

Chọn A

Đặt $a = 2^x > 0$, suy ra $\log_3(a^2 + ay + y^2) - \log_3(ay) = \frac{2ay - a^2}{y^2}$

$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{a^2 + ay + y^2}{ay} = 2 \cdot \frac{a}{y} - \frac{a^2}{y^2} \Leftrightarrow \log_3 \left(\frac{a}{y} + 1 + \frac{y}{a} \right) = 1 - \left(1 - \frac{a}{y} \right)^2 \quad (*)$$

Nhận thấy $VP(*) \leq 1, VT(*) = \log_3 \left(\frac{a}{y} + \frac{y}{a} + 1 \right) \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} \log_3 3 = 1$ dẫn đến $\frac{a}{y} = 1 \Rightarrow y = 2^x$.

Do $1 \leq y \leq 2020 \Rightarrow 1 \leq 2^x \leq 2020 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \log_2 2020 \approx 10,98$.

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên x có 11 giá trị, mỗi giá trị của x tương ứng một giá trị y .

Vậy nên có 11 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn.

Hướng phát triển 3. Sử dụng phương pháp hàm số.

Câu 5. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ với $2 \leq x < y \leq 99$ thỏa mãn $x^y > y^x$?

A. 4751. B. 4750. C. 4656. D. 4657.

Lời giải

Chọn A

Từ $x^y > y^x \Leftrightarrow y \ln x > x \ln y \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} > \frac{\ln y}{y}$, xét hàm số $f(t) = \frac{\ln t}{t}, t \in [2; 99]$.

Có $f'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = e \approx 2,71$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên đoạn $[2; e]$ và nghịch biến trên đoạn $[e; 99]$.

- **TH1.** $x \geq 3$ ($x \in [e; 99]$) thì $\frac{\ln x}{x} > \frac{\ln y}{y} \Rightarrow y > x \geq 3$, suy ra có $C_{97}^2 = 4656$ cặp $(x; y)$ thỏa mãn.

- **TH2.** $x = 2$ thì $\frac{\ln 2}{2} > \frac{\ln y}{y} \Leftrightarrow \frac{\ln 4}{4} > \frac{\ln y}{y} \Rightarrow y > 4 \Rightarrow y \geq 5$, $x = 2$ có 95 cặp $(x; y)$ thỏa mãn.

Vậy nên có $4656 + 95 = 4751$ cặp số $(x; y)$ thỏa mãn.