ĐỀ THAM KHẢO

MÔN

TOÁN

Phân tích bình luận phát triển

THPT Quốc gia 2019

MATH VD_VDC

NHÓM TOÁN VD-VDC

NHÓM VẬN DỤNG- VẬN DỤNG CAO
PHÂN TÍCH ĐỀ THAM KHẢO
NĂM HỌC 2018 - 2019

Làm toán không vội vàng được, phải làm từ từ để hiểu hết được bản chất của nó và ý nghĩa của nó trong thực tiễn. Đã đến lúc phải trả lại danh hiệu cho em nó "Toán học là nữ hoàng của mọi bộ môn khoa học"

Kỳ thi Quốc gia từ năm 2016 – 2018, bài thi môn Toán chuyển từ thi tự luận sang hình thức thi trắc nghiệm nên trong cách dạy, cách kiểm tra đánh giá, cách ra đề cũng thay đổi. Sự thay đổi đó nằm trong toàn bộ chương trình môn Toán nói chung và trong kỹ năng giải toán nói riêng.

Bước sang kỳ thi Quốc gia năm 2018 - 2019 đánh giá sự đổi mới toàn bộ trong nội dung ra đề của Bộ Giáo Dục với mục tiêu chính là hạn chế " Casio hóa", tăng cường các câu hỏi Vận dụng và Vận dụng cao nhằm phân hóa được học sinh ở các ngưỡng trung bình-khá-giỏi.

Với mong muốn đưa ra những nhận định, những phân tích cho đề Tham Khảo 2019 vừa được BGD công bố, để giúp học sinh tiếp cận gần hơn với những bài toán khó đó, tập thể những thầy cô chúng tôi sau rất nhiều tâm huyết xin được trân trọng giới thiệu đến bạn đọc ***"Phân tích, bình luận và phát triển đề Tham Khảo 2019 môn Toán"****:*

Chân thành gửi lời cảm ơn quý thầy cô đã dành thời gian và tâm huyết của mình cho tài liệu này:

1. Thầy **Lê Tài Thắng, Cô Trịnh Thu Hương**
2. Thầy **Khải Nguyễn, Cô Hà Thị Mai, Thanh Minh**
3. Thầy **Dấu Vết Hát, Lê Hiếu Nhân, Ngô Nguyễn Quốc Mẫn**
4. Thầy **Hoàng Xuân Bính, Nguyễn Văn Viễn, Bùi Văn Nam**
5. Thầy **Nguyễn Duy Chiến, Nguyễn Thanh Hải**
6. Thầy **Duy Phạm Lê, Nam Phương, Thảo Lê**
7. Thầy **Nguyễn Văn Ái, Phạm Chí Tuân, Hoàng Phi Hùng**
8. Thầy **Vũ Minh Tư, Trần Minh Ngọc, Trương Đức Thịnh**
9. Thầy **Trương Quốc Toản, Nguyễn Ngọc Hóa, Nguyễn Hoàng Việt**
10. Thầy **Tôn Thất Thái Sơn, Đoàn Trí Dũng, Đinh Xuân Thạch**
11. Thầy **Trần Đình Cư, Nguyễn Đỗ Chiến, Nguyễn Cao Thời**

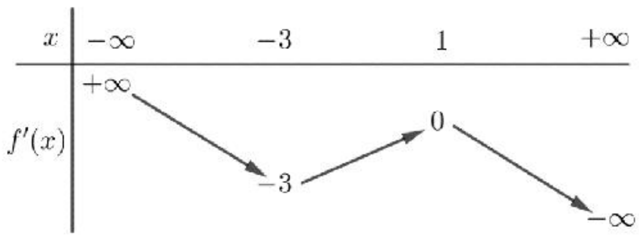
Trân trọng

Hà nội, ngày 09 tháng 12 năm 2018

Đại diện nhóm tác giả

Nguyễn Hoàng Việt

Câu 39: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau



Bất phương trình $f\left(x\right)<\mathrm{e}^{x}+m$ đúng với mọi $x\in\left(-1;1\right)$ khi và chỉ khi

A. $m\ge f\left(1\right)-\mathrm{e}$. **B.** $m>f\left(-1\right)-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. **C.** $m\ge f\left(-1\right)-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. **D.** $m>f\left(1\right)-\mathrm{e}$.

Trần Đình Cư, Nguyễn Thanh Hải

Lời bình

Đối với các lớp bài toán kiểu trên ta dùng phương pháp hàm số với lưu ý rằng

Xét bất phương trình $f\left(x\right)<m$ đúng với mọi $x\in\left(a,b\right)$

Trong trường hợp $f\left(x\right)$ đơn điệu ($f'\left(x\right)$ không đổi dấu) trên $\left(a,b\right)$ và hàm $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[a,b\right]$ thì yêu cầu bài toán trở thành $\max\limits_{\left[a,b\right]}f\left(x\right)\le m$.

Trong trường hợp $f\left(x\right)$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x_0\in\left(a,b\right)$ thì yêu cầu bài toán trở thành $\max\limits_{\left[a,b\right]}f\left(x\right)<m$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(x)<\mathrm{e}^{x}+m,\forall x\in\left(-1;1\right)\Leftrightarrow f(x)-\mathrm{e}^{x}<m,\ \forall x\in\left(-1;1\right)$.

Xét hàm số $g(x)=f(x)-\mathrm{e}^{x}$, ta có: $g'(x)=f'(x)-\mathrm{e}^{x}$.

Dựa vào bảng biến thiên $f'\left(x\right)$ ta thấy $\forall x\in\left(-1;1\right)$ thì $f'(x)<0$, $-\mathrm{e}^{x}<0$ nên

$g'(x)=f'(x)-\mathrm{e}^{x}<0,\ \forall x\in\left(-1;1\right)$.

Hàm số $g\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left(-1;1\right)$ và liên tục trên $\left[-1,1\right]$

Suy ra: $\max\limits_{\left[-1,1\right]}\left(f\left(x\right)-e^{x}\right)=g\left(-1\right)=f(-1)-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. Do đó: $m\ge f(-1)-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

CÂU TƯƠNG TỰ

Câu 1: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		$\frac{\pi}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$

Bất phương trình $f\left(x\right)>2^{\cos x}+3m$ đúng với mọi $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi

A. $m\le\frac{1}{3}\left[f\left(0\right)-2\right]$. **B.** $m<\frac{1}{3}\left[f\left(0\right)-2\right]$. **C.** $m\le\frac{1}{3}\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right)-1\right]$. **D.** $m<\frac{1}{3}\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right)-1\right]$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f\left(x\right)>2^{\cos x}+3m$ đúng $\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow f\left(x\right)-2^{\cos x}>3m,\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Xét hàm số $g(x)=f\left(x\right)-2^{\cos x}$,

Ta có: $g'(x)=f'\left(x\right)+2^{\cos x}.\sin x.\ln 2$.

Dựa vào bảng biến thiên: $f'\left(x\right)>0,\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ và hiển nhiên $2^{\cos x}.\sin x.\ln 2>0$,

$\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Hàm số $g\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ và liên tục trên $\left[-1,1\right]$

Do đó: $f\left(x\right)-2^{\cos x}>3m,\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\min\limits_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}\left[f\left(x\right)-2^{\cos x}\right]\ge 3m$

Suy ra: $\min\limits_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}g\left(x\right)=g\left(0\right)=f\left(0\right)-2$. Do đó: $m\le\frac{1}{3}\left[f\left(0\right)-2\right]$

Câu 2: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Bất phương trình $f\left(x\right)<\mathrm{e}^{x^2-2x}+m$ đúng $\forall x\in\left(0;2\right)$ khi chỉ khi.

A. $m>f\left(1\right)-\frac{1}{\mathrm{e}}$. **B.** $m\ge f\left(1\right)-\frac{1}{\mathrm{e}}$. **C.** $m>f\left(0\right)-1$. **D.** $m\ge f\left(0\right)-1$.

Lời giải

Chọn A

BPT $\Leftrightarrow f\left(x\right)-\mathrm{e}^{x^2-2x}<m$.

Xét hàm số $h\left(x\right)=f\left(x\right)-e^{x^2-2x}\Rightarrow h'\left(x\right)=f'\left(x\right)+\left(2-2x\right)e^{x^2-2x}$.

Nếu $x\in\left(0;1\right)$ thì $f'\left(x\right)>0$ và $\left(2-2x\right)e^{x^2-2x}>0$ nên $h'\left(x\right)>0$.

Nếu $x\in\left(1;2\right)$ thì $f'\left(x\right)<0$ và $\left(2-2x\right)e^{x^2-2x}<0$ nên $h'\left(x\right)<0$.

Suy ra $\max\limits_{[0;2]}h\left(x\right)=h\left(1\right)=f\left(1\right)-\dfrac{1}{e}$. Nên YCBT $\Leftrightarrow m>f\left(1\right)-\dfrac{1}{e}$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Bất phương trình $\left(x^2+5\right)f\left(x\right)\ge m$ có nghiệm trên khoảng $\left(-1;2\right)$ khi và chỉ khi.

A. $m<27$. **B.** $m<24$. **C.** $m<10$. **D.** $m\le 27$.

Lời giải

Chọn A

Nếu $x\in\left(-1;0\right)$ thì cả hai hàm số $y=x^2+5$ và $y=f\left(x\right)$ cùng nghịch biến.

Nếu $x\in\left(0;2\right)$ thì cả hai hàm số $y=x^2+5$ và $y=f\left(x\right)$ cùng đồng biến.

Mặt khác trên khoảng $\left(-1;2\right)$ thì $x^2+5>0$ và $f\left(x\right)>0$.

Ta có **BBT** của hàm số $y=\left(x^2+5\right)f\left(x\right)$ trên khoảng $\left(-1;2\right)$.

x	-1		0		2
y	24	$\searrow$	10	$\nearrow$	27

Nên YCBT $\Leftrightarrow m<27$.

Câu 40: Có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có ba ghế. Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh, gồm 3 nam và 3 nữ, ngồi vào hai dãy ghế đó sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh ngồi. Xác suất để mỗi học sinh nam đều ngồi đối đối diện với một học sinh nữ bằng

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{1}{20}$. **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{1}{10}$.

Nguyễn Cao Thời, Nguyễn Chiến

Lời bình

Trước hết chúng ta tìm số phần tử không gian mẫu. Mỗi cách xếp 6 học sinh vào 6 chiếc ghế là một hoán vị của 6 phần tử, vì vậy số phần tử của không gian mẫu là: $\left|\Omega\right| = 6!$ cách.

Gọi A là biến cố mỗi học sinh nam đều ngồi đối diện với một học sinh nữ.

Giả sử các ghế được sắp xếp như hình vẽ

A_1	B_1	C_1
A_2	B_2	C_2

Ta có thể tư duy tìm số phần tử của A theo 1 trong các hướng sau:

Hướng 1:

+ Xếp bạn thứ nhất (nam hoặc nữ đều được) vào ghế A_1 sẽ có 6 cách chọn.

Tiếp theo sẽ xếp 1 bạn vào ghế A_2, bạn này phải khác giới với bạn ngồi ghế A_1 nên sẽ có 3 cách chọn *(nếu ghế A_1 là nam thì ghế A_2 phải là 1 trong 3 bạn nữ hoặc nếu ghế A_1 là nữ thì ghế A_2 phải là 1 trong 3 bạn nam).*

+ Tiếp tục xếp 1 trong 4 bạn còn lại vào ghế B_1 sẽ có 4 cách chọn. Xếp bạn vào ghế B_2 sẽ có 4 cách chọn

+ Sau đó xếp 1 trong 2 bạn còn lại vào ghế C_1 sẽ có 2 cách chọn. Bạn cuối cùng chỉ còn 1 cách lựa chọn ngồi ghế C_2.

Do vậy số phần tử của A là: $\left|A\right| = 6.3.4.2.2.1$

Hướng 2:

Xếp cố định 3 bạn cùng giới vào 1 dãy ghế có $3!$ cách.

Xếp 3 bạn thuộc giới còn lại vào dãy có $3!$ cách.

Ở các cặp ghế đối diện nhau hai bạn nam và nữ có thể đổi chỗ cho nhau nên có 2^3 cách.

Do vậy số phần tử của A là $\left|A\right| = 3!.3!.2^3$.

Hướng 3:

Xếp 1 bạn vào ghế thứ nhất, giả sử xếp bạn nam thứ nhất có 6 cách.

Còn lại 5 ghế, bạn nam thứ 2 không được ngồi đối diện bạn nam thứ nhất nên có 4 cách.

Còn lại 4 ghế, bạn nam thứ 3 không được ngồi đối diện hai bạn nam kia nên có 2 cách.

Xếp 3 bạn nữ vào ba ghế còn lại có $3!$ cách.

Do vậy số phần tử của A là $\left|A\right| = 6.4.2.3!$.

Lời giải

Chọn A

Số phần tử của không gian mẫu là $\left|\Omega\right| = 6! = 720$.

Gọi A là biến cố mỗi học sinh nam đều ngồi đối diện với một học sinh nữ.
Giả sử các ghế được sắp xếp như hình vẽ:

A_1	B_1	C_1
A_2	B_2	C_2

Cách 1:

Xếp bạn thứ nhất vào ghế A_1 sẽ có 6 cách chọn.

Tiếp theo sẽ xếp 1 bạn vào ghế A_2, bạn này phải khác giới với bạn ngồi ghế A_1 nên sẽ có 3 cách chọn

Tiếp tục xếp 1 trong 4 bạn còn lại vào ghế B_1 sẽ có 4 cách chọn. Xếp bạn vào ghế B_2 sẽ có 4 cách chọn

Sau đó xếp 1 trong 2 bạn còn lại vào ghế C_1 sẽ có 2 cách chọn. Bạn cuối cùng chỉ còn 1 cách lựa chọn ngồi ghế C_2.

Số phần tử của A là: $\left|A\right| = 6.3.4.2.2.1 = 288$

Vậy xác suất cần tìm là $P\left(A\right) = \dfrac{\left|A\right|}{\left|\Omega\right|} = \dfrac{288}{720} = \dfrac{2}{5}$.

Cách 2:

Xếp 3 học sinh nữ vào cùng 1 dãy ghế có $3!$ cách.
Xếp 3 học sinh nam vào cùng 1 dãy ghế có $3!$ cách.
Ở các cặp ghế đối diện nhau hai bạn nam và nữ có thể đổi chỗ cho nhau nên có 2^3 cách.
Số phần tử của A là: $\left|A\right| = 3!.3!.2^3 = 288$.

Vậy xác suất cần tìm là $P\left(A\right) = \dfrac{\left|A\right|}{\left|\Omega\right|} = \dfrac{288}{720} = \dfrac{2}{5}$.

Cách 3:

Xếp bạn nam thứ nhất có 6 cách, bạn nam thứ 2 có 4 cách, bạn nam thứ 3 có 2 cách.
Xếp 3 bạn nữ vào ba ghế còn lại có $3!$ cách.
Số phần tử của A là: $\left|A\right| = 6.4.2.3! = 288$.

Vậy xác suất cần tìm là $P\left(A\right) = \dfrac{\left|A\right|}{\left|\Omega\right|} = \dfrac{6.4.2.3!}{6!} = \dfrac{288}{720} = \dfrac{2}{5}$.

CÂU TƯƠNG TỰ

Câu 1: Có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có bốn ghế. Xếp ngẫu nhiên 8 học sinh, gồm 4 nam và 4 nữ, ngồi vào hai dãy ghế đó sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh ngồi. Xác suất để mỗi học sinh nam đều ngồi đối đối diện với một học sinh nữ và không có hai học sinh cùng giới ngồi cạnh nhau bằng

A. $\frac{8}{35}$. **B.** $\frac{1}{35}$. **C.** $\frac{2}{35}$. **D.** $\frac{4}{35}$.

Lời giải

Chọn B

Mỗi cách xếp 8 học sinh vào 8 chiếc ghế là một hoán vị của 8 phần tử, vì vậy số phần tử của không gian mẫu là: $\left|\Omega\right| = 8! = 40320$.

Gọi A là biến cố: "Mỗi học sinh nam đều ngồi đối diện với một học sinh nữ và không có hai học sinh cùng giới ngồi cạnh nhau".

Cách 1.

Với cách xếp như vậy thì ta có hai tường hợp

NỮ	nam	NỮ	nam
nam	NỮ	nam	NỮ

nam	NỮ	nam	NỮ
NỮ	nam	NỮ	nam

Như vậy ta có $\left|A\right| = 2.4!.4! = 1152$

Vậy xác suất của biến cố A là: $P\left(A\right) = \frac{1152}{40320} = \frac{1}{35}$.

Cách 2.

8 cách (nam hoặc nữ, giả sử là nam)	3 cách (nữ)	2 cách (nam)	1 cách (nữ)
4 cách (nữ)	3 cách (nam)	2 cách (nữ)	1 cách (nam)

Theo cách này có $\left|A\right| = 8.4.3.3.2.2.1.1 = 1152$.

Do đó xác suất của biến cố A là: $P\left(A\right) = \frac{1152}{40320} = \frac{1}{35}$.

Câu 2: Một bàn dài có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có 5 ghế. Người ta muốn xếp chỗ ngồi cho 5 học sinh trường X và 5 học sinh trường Y vào bàn nói trên. Tính xác suất để bất cứ 2 học sinh nào ngồi đối diện nhau thì khác trường với nhau.

A. $\frac{2}{63}$. **B.** $\frac{4}{63}$. **C.** $\frac{8}{63}$. **D.** $\frac{5}{63}$.

Lời giải

Chọn C

A_1	B_1	C_1	D_1	E_1
A_2	B_2	C_2	D_2	E_2

Mỗi cách xếp 10 học sinh vào 10 chiếc ghế là một hoán vị của 10 phần tử, vì vậy số phần tử của không gian mẫu là: $|\Omega| = 10! = 3628800$.

Gọi A là biến cố: "bất cứ 2 học sinh nào ngồi đối diện nhau thì khác trường với nhau".

Cách 1:

— Xếp bạn thứ nhất vào ghế A_1 sẽ có 10 cách chọn.

— Tiếp theo sẽ xếp 1 bạn vào ghế A_2, bạn này phải khác trường với bạn ngồi ghế A_1 nên sẽ có 5 cách chọn

— Tiếp tục xếp 1 trong 8 bạn còn lại vào ghế B_1 sẽ có 8 cách chọn. Xếp bạn vào ghế B_2 sẽ có 4 cách chọn

— Tiếp tục xếp 1 trong 6 bạn còn lại vào ghế C_1 sẽ có 6 cách chọn. Xếp bạn vào ghế C_2 sẽ có 3 cách chọn

— Tiếp tục xếp 1 trong 4 bạn còn lại vào ghế D_1 sẽ có 4 cách chọn. Xếp bạn vào ghế D_2 sẽ có 2 cách chọn

— Sau đó xếp 1 trong 2 bạn còn lại vào ghế E_1 sẽ có 2 cách chọn. Bạn cuối cùng chỉ còn 1 cách lựa chọn ngồi ghế E_2.

Số phần tử của A là: $|A| = 10.5.8.4.6.3.4.2.2.1 = 460800$

Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{460800}{3628800} = \dfrac{8}{63}$.

Cách 2:

Xếp 3 học sinh trường *X* vào cùng 1 dãy ghế có $6!$ cách.

Xếp 3 học sinh trường *Y* vào cùng 1 dãy ghế có $6!$ cách.

Ở các cặp ghế đối diện nhau hai bạn nam và nữ có thể đổi chỗ cho nhau nên có 2^6 cách.

Số phần tử của A là: $|A| = 5!.5!.2^5 = 460800$.

Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{460800}{3628800} = \dfrac{8}{63}$.

Câu 3: Trong kỳ thi chọn học sinh giỏi tỉnh có 105 em dự thi, có 10 em tham gia buổi gặp mặt trước kỳ thi. Biết các em đó có số thứ tự trong danh sách lập thành một cấp số cộng. Các em ngồi ngẫu nhiên vào hai dãy bàn đối diện nhau, mỗi dãy có năm ghế và mỗi ghế chỉ ngồi được một học sinh. Tính xác suất để tổng các số thứ tự của hai em ngồi đối diện nhau là bằng nhau.

A. $\dfrac{1}{126}$ **B.** $\dfrac{1}{252}$ **C.** $\dfrac{1}{945}$ **D.** $\dfrac{1}{954}$

Lời giải

Chọn C

Mỗi cách xếp 10 học sinh vào 10 chiếc ghế là một hoán vị của 10 phần tử, vì vậy số phần tử của không gian mẫu là: $|\Omega| = 10! = 3628800$.

Gọi A là biến cố: "Tổng số thứ tự của các học sinh ngồi đối diện nhau là bằng nhau".

Giả sử số vị trí của 10 học sinh trên là $u_1, u_2, ..., u_{10}$. Theo tính chất của cấp số cộng, ta có các cặp số có tổng sau đây: $u_1 + u_{10} = u_2 + u_9 = u_3 + u_8 = u_4 + u_7 = u_5 + u_6$

10 cách	8 cách	6 cách	4 cách	2 cách
1 cách	1 cách	1 cách	1 cách	1 cách

Theo cách này có $\left|A\right| = 10.8.6.4.2 = 3840$

Do đó xác suất của biến cố A là: $P\left(A\right) = \frac{3840}{3628800} = \frac{1}{945}$.

Câu 41: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-8=0$. Xét M là điểm thay đổi thuộc (P), giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2$ bằng

A. 135. **B.** 105. **C.** 108. **D.** 145.

Lê Tài Thắng, Trịnh Thu Hương

Lời bình

Đây là bài toán cực trị hình học trong không gian (cũng giống một dạng toán cực trị trong hình học phẳng). Sử dụng kiến thức về "tâm tỉ cự" có thể giúp học sinh thấy được bản chất hình học của bài toán, đồng thời xây dựng lên ý tưởng ra đề cũng như ý tưởng chung để giải quyế dạng toán này.

*** Tâm tỉ cự**: Trong không gian, cho hệ n điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ và n số thực $k_1, k_2, \ldots, k_n$ thỏa mãn $k_1+k_2+\ldots+k_n=k\neq 0$. Khi đó, tồn tại duy nhất một điểm I trong không gian thoả mãn: $k_1\overrightarrow{IA_1}+k_2\overrightarrow{IA_2}+\ldots+k_n\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}$

Điểm I như thế được gọi là tâm tỉ cự của hệ điểm A_i gắn với các hệ số k_i.

*** Sử dụng "tâm tỉ cự" để giải một số bài toán cực trị hình học.**

Bài toán tổng quát 1: Cho n điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ và n số thực $k_1, k_2, \ldots, k_n$ thỏa mãn $k_1+k_2+\ldots+k_n=k\neq 0$. Cho đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P). Tìm điểm M trên đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P) sao cho $\left|k_1\overrightarrow{MA_1}+k_2\overrightarrow{MA_2}+\ldots+k_n\overrightarrow{MA_n}\right|$ có giá trị nhỏ nhất.

Phương pháp:

+ Tìm điểm I thỏa mãn: $k_1\overrightarrow{IA_1}+k_2\overrightarrow{IA_2}+\ldots+k_n\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}$.

+ $\left|k_1\overrightarrow{MA_1}+k_2\overrightarrow{MA_2}+\ldots+k_n\overrightarrow{MA_n}\right|=k\left|\overrightarrow{MI}\right|$

+ Điểm M cần tìm là hình chiếu vuông góc của I trên đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P).

Bài toán tổng quát 2: Cho n điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ và n số thực $k_1, k_2, \ldots, k_n$ thỏa mãn $k_1+k_2+\ldots+k_n=k\neq 0$. Cho đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P). Tìm điểm M trên đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P) sao cho $T=k_1MA_1^2+k_2MA_2^2+\ldots+k_nMA_n^2$ có giá trị nhỏ nhất (hoặc giá trị lớn nhất).

Phương pháp:

+ Tìm điểm I thỏa mãn: $k_1\overrightarrow{IA_1}+k_2\overrightarrow{IA_2}+\ldots+k_n\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}$.

+ $T=k_1MA_1^2+k_2MA_2^2+\ldots+k_nMA_n^2=kMI^2+k_1IA_1^2+k_2IA_2^2+\ldots+k_nIA_n^2$.

+ Do $k_1IA_1^2+k_2IA_2^2+\ldots+k_nIA_n^2$ không đổi nên

Nếu $k>0$, T **nhỏ nhất** khi điểm M cần tìm là hình chiếu vuông góc của I trên đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P).

Nếu $k<0$, T **lớn nhất** khi điểm M cần tìm là hình chiếu vuông góc của I trên đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P).

Lời giải

Chọn A

Gọi $I\left(x;y;z\right)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ suy ra $I\left(-1;1;1\right)$

$IA^2=27$; $IB^2=12$; $d\left(I,\left(P\right)\right)=3$

$2MA^2+3MB^2=2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=5\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{IA}^2+3\overrightarrow{IB}^2=5MI^2+90$

Suy ra $2MA^2+3MB^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MI nhỏ nhất

Mà $MI\ge d\left(I,\left(P\right)\right)=3$

Vậy $2MA^2+3MB^2\ge 5.9+90=135$.

CÂU TƯƠNG TỰ

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A\left(2;1;3\right)$, $B\left(1;-1;2\right)$, $C\left(3;-6;1\right)$. Điểm $M\left(x;y;z\right)$ thuộc mặt phẳng $\left(Oyz\right)$ sao cho $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $P=x+y+z$.

A. $P=0$. **B.** $P=2$. **C.** $P=6$. **D.** $P=-2$.

Lời giải

Chọn A

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Suy ra: $G\left(2;-2;2\right)$.

Ta có: $MA^2+MB^2+MC^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2$

$=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$.

Do tổng $GA^2+GB^2+GC^2$ không đổi nên $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG^2 nhỏ nhất hay MG nhỏ nhất.

Mà M nằm trên mặt phẳng $\left(Oyz\right)$ nên M là hình chiếu vuông góc của G lên mặt phẳng $\left(Oyz\right)$. Suy ra: $M\left(0;-2;2\right)$.

Vậy $P=x+y+z=0+\left(-2\right)+2=0$.

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho 3 điểm $A\left(1;1;1\right)$, $B\left(0;1;2\right)$, $C\left(-2;1;4\right)$ và mặt phẳng $\left(P\right): x-y+z+2=0$. Tìm điểm $N\in\left(P\right)$ sao cho $S=2NA^2+NB^2+NC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $N\left(-\frac{4}{3};2;\frac{4}{3}\right)$. **B.** $N\left(-2;0;1\right)$. **C.** $N\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{4};\frac{3}{4}\right)$. **D.** $N\left(-1;2;1\right)$.

Lời giải

Chọn D

Với mọi điểm I ta có

$S=2NA^2+NB^2+NC^2=2\left(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+\left(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$

$= 4NI^2 + 2\overrightarrow{NI}\left(2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right) + 2IA^2 + IB^2 + IC^2$

Chọn điểm I sao cho $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ Suy ra tọa độ điểm I là $I\left(0;1;2\right)$.

Khi đó $S = 4NI^2 + 2IA^2 + IB^2 + IC^2$, do đó S nhỏ nhất khi N là hình chiếu của I lên mặt phẳng $\left(P\right)$.

Phương trình đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng $\left(P\right)$ là $\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$

Tọa độ điểm $N\left(t;1-t;2+t\right) \in \left(P\right) \Rightarrow t - 1 + t + 2 + t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow N\left(-1;2;1\right)$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(1;2;1\right)$, $B\left(2;-1;3\right)$. Tìm điểm M trên mặt phẳng $\left(Oxy\right)$ sao cho $MA^2 - 2MB^2$ lớn nhất.

A. $M\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2};0\right)$. **B.** $M\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2};0\right)$. **C.** $M\left(0;0;5\right)$. **D.** $M\left(3;-4;0\right)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi điểm E thỏa $\overrightarrow{EA} - 2\overrightarrow{EB} = \vec{0}$. Suy ra B là trung điểm của AE, suy ra $E\left(3;-4;5\right)$.

Khi đó: $MA^2 - 2MB^2 = \left(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA}\right)^2 - 2\left(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB}\right)^2 = -ME^2 + EA^2 - 2EB^2$.

Do đó $MA^2 - 2MB^2$ lớn nhất $\Leftrightarrow ME$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu của $E\left(3;-4;5\right)$ lên $\left(Oxy\right)$ $\Leftrightarrow M\left(3;-4;0\right)$.

Chú ý: Ta có thể làm trắc nghiệm như sau

+ Loại C vì $M\left(0;0;5\right)$ không thuộc $\left(Oxy\right)$.

+ Lần lượt thay $M\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2};0\right)$, $M\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2};0\right)$, $M\left(3;-4;0\right)$ vào biểu thức $MA^2 - 2MB^2$ thì $M\left(3;-4;0\right)$ cho giá trị lớn nhất nên ta chọn $M\left(3;-4;0\right)$.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A\left(1;4;5\right)$, $B\left(3;4;0\right)$, $C\left(2;-1;0\right)$ và mặt phẳng $\left(P\right): 3x - 3y - 2z - 12 = 0$. Gọi $M\left(a;b;c\right)$ thuộc $\left(P\right)$ sao cho $MA^2 + MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $a + b + c$.

A. 3. **B.** 2. **C.** -2. **D.** -3.

Lời giải

Chọn A

Gọi $I\left(x;y;z\right)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Ta có: $\overrightarrow{IA} = \left(1-x;4-y;5-z\right)$, $\overrightarrow{IB} = \left(3-x;4-y;-z\right)$

và $3\overrightarrow{IC}=\left(6-3x;-3-3y;-3z\right)$.

Từ ta có hệ phương trình: $\begin{cases}1-x+3-x+6-3x=0\\4-y+4-y-3-3y=0\\5-z-z-3z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\\z=1\end{cases}\Rightarrow I\left(2;1;1\right)$.

Khi đó: $MA^2=\overrightarrow{MA}^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2=MI^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}+IA^2$.

$MB^2=\overrightarrow{MB}^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=MI^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}+IB^2$.

$3MC^2=3\overrightarrow{MC}^2=3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2=3\left(MI^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IC}+IC^2\right)$.

Do đó: $S=MA^2+MB^2+3MC^2=5MI^2+IA^2+IB^2+3IC^2$.

Do $IA^2+IB^2+3IC^2$ không đổi nên S đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI đạt giá trị nhỏ nhất. Tức là M là hình chiếu của I lên mặt phẳng $\left(P\right):3x-3y-2z-12=0$.

Vectơ chỉ phương của IM là $\vec{n}=\left(3;-3;-2\right)$.

Phương trình tham số của IM là: $\begin{cases}x=2+3t\\y=1-3t\\z=1-2t\end{cases},\left(t\in\mathbb{R}\right)$.

Gọi $M\left(2+3t;1-3t;1-2t\right)\in\left(P\right)$ là hình chiếu của I lên mặt phẳng $\left(P\right)$.

Khi đó: $3\left(2+3t\right)-3\left(1-3t\right)-2\left(1-2t\right)-12=0\Leftrightarrow 22t-11=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$.

Suy ra: $M\left(\frac{7}{2};-\frac{1}{2};0\right)$. Vậy $a+b+c=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}=3$.

Câu 42: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|^2 = 2|z+\bar{z}| + 4$ và $|z-1-i| = |z-3+3i|$?

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Khải Nguyễn, Hà Thị Mai, Thanh Minh

Lời bình

Đây là bài toán tìm số phức bằng cách giải hệ phương trình. Cách làm phổ biến là đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$ và đưa về hệ phương trình đại số để giải.

Đây là câu hỏi thuộc chương số phức. Dạng toán tìm số phức thỏa mãn điều kiện cho trước.

Mức độ câu hỏi : Vận dụng thấp.

Kiến thức cần vận dụng :

- Các phép toán về số phức.
- Modun số phức.
- Kiến thức về giải phương trình.

Lời giải

Chọn B

+ Gọi $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.Khi đó, ta có:

$$\begin{cases} |z-1-i| = |z-3+3i| \\ |z|^2 = 2|z+\bar{z}| + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y+3)^2 \\ x^2 + y^2 = 4|x| + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x-4}{2} \\ 5x^2 - 8(x + 2|x|) = 0 \end{cases}.$$

+ $5x^2 - 8(x + 2|x|) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 0 \\ 5x^2 - 24x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ 5x^2 + 8x = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left\{-\dfrac{8}{5}; 0; \dfrac{24}{5}\right\}$.

CÂU TƯƠNG TỰ

Câu 1: Cho số phức z không phải là số thực và $\dfrac{z^2 - 2z + 4}{z^2 + 2z + 4}$ là số thực. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+\bar{z}| + |z-\bar{z}| = |z^2|$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

+ Điều kiện $z^2 + 2z + 4 \ne 0 \Leftrightarrow z \ne -1 \pm i\sqrt{3}$.Vì số phức z không phải là số thực nên $\dfrac{z^2 - 2z + 4}{z^2 + 2z + 4} \ne 1$; Đặt $w = \dfrac{z^2 - 2z + 4}{z^2 + 2z + 4} \ne 1$.

Ta có $wz^2+2wz+4w=z^2-2z+4 \Leftrightarrow z^2+\dfrac{2(w+1)}{w-1}z+4=0\ (1)$.

Vì w là số thực khác 1 nên (1) là phương trình bậc hai với hệ số thực. Vì tồn tại số phức z không thực $\Rightarrow (1)$ có hai nghiệm phức z_1, z_2 không thực $\Rightarrow |z_1|=|z_2|=\sqrt{4}=2 \Rightarrow |z|=2$.

+ Đặt $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$; $|z|=2\Rightarrow x^2+y^2=4$;

$|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|=|z^2| \Rightarrow 2|x|+2|y|=x^2+y^2$.

Xét hệ $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x^2+y^2=2|x|+2|y| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ |x|+|y|=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0; y=\pm 2 \\ y=0; x=\pm 2 \end{array}\right.$.

Vì số phức z không phải là số thực và $z\neq -1\pm i\sqrt{3}$ nên $z=\pm 2i$.

Câu 2: **[THPTQG 2017]** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-3i|=5$ và $\dfrac{z}{z-4}$ là số thuần ảo.

A. 0. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

+ Điều kiện $z\neq 4$. Đặt $z=x+yi, (x,y\in\mathbb{R})$.

Cách 1:

+ Ta có $|z-3i|=5 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-3)^2}=5 \Leftrightarrow x^2+y^2-6y=16\ (1)$.

$$\frac{z}{z-4}=\frac{x+yi}{x-4+yi}=\frac{(x+yi).[(x-4)-yi]}{(x-4)^2+y^2}=\frac{x^2-4x+y^2}{(x-4)^2+y^2}-\frac{4yi}{(x-4)^2+y^2}$$

+ $\dfrac{z}{z-4}$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow \dfrac{x^2-4x+y^2}{(x-4)^2+y^2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+y^2=0\ (2) \\ (x-4)^2+y^2\neq 0 \end{cases}$.

Từ (1), (2) ta có hệ: $\begin{cases} x^2+y^2-6y=16 \\ x^2+y^2-4x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{16}{13} \\ y=\dfrac{-24}{13} \end{cases} \end{array}\right.$

$\Rightarrow z=\dfrac{16}{13}-\dfrac{24}{13}i$. Vậy chỉ có 1 số phức z thỏa mãn.

Nhận xét: Học sinh thường mắc sai lầm là thiếu điều kiện $z\neq 4$ dẫn đến không loại được nghiệm.

Cách 2: Vì $\dfrac{z}{z-4}$ là số thuần ảo $\Rightarrow \dfrac{z}{z-4}=bi, (b\in R) \Rightarrow z=\dfrac{4bi}{-1+bi}$.

$$|z-3i|=5 \Leftrightarrow \left|\frac{4bi}{-1+bi}-3i\right|=5 \Leftrightarrow \left|\frac{4bi-3i.(-1+bi)}{-1+bi}\right|=5 \Leftrightarrow \frac{|3b+(3+4b)i|}{|-1+bi|}=5$$

$\Leftrightarrow 9b^2+(3+4b)^2=25\cdot(1+b^2) \Leftrightarrow b=\dfrac{2}{3}$. Vậy chỉ có 1 số phức z thỏa mãn

Câu 3: **[THPTQG 2018]** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z-4-i)+2i=(5-i)z$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Phân tích : Nếu đặt $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$ thì thấy khối lượng tính toán lớn và đi đến một hệ phương trình phức tạp. Nghĩ đến phép lấy mô đun hai vế của một biểu thức số phức là phép suy ra. Ta chỉ thực hiện được nó khi giả thiết của bài toán được đưa về một trong các dạng sau :

$(a+bi)z=c+di$ hoặc $(a+bi)\overline{z}=c+di$ với a,b,c,d là các hằng số thực.

$\dfrac{a+bi}{z}=c+di$ hoặc $\dfrac{a+bi}{\overline{z}}=c+di$ với a,b,c,d là các hằng số thực.

Sau khi lấy mô đun hai vế, ta được phương trình một ẩn $|z|$.

$|z|(z-4-i)+2i=(5-i)z \Leftrightarrow z.|z|-4|z|-i.|z|+2i=(5-i)z$

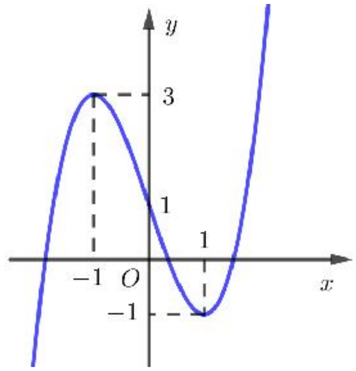
$\Leftrightarrow z(|z|-5+i)=4|z|+(2-|z|)i \Rightarrow |z|.\sqrt{(|z|-5)^2+1}=\sqrt{16|z|^2+(2-|z|)^2}$

$\Leftrightarrow |z|^2(|z|^2-10|z|+26)=17|z|^2-4|z|+4 \Leftrightarrow |z|^4-10|z|^3+9|z|^2+4|z|-4=0$

$\Leftrightarrow (|z|-1)(|z|^3-9|z|^2+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|z|=1\\ |z|^3-9|z|^2+4=0\,(2)\end{array}\right.$.

Bằng cách bấm máy tính ta thấy phương trình (2) có 3 nghiệm phân biệt trong đó có đúng 2 nghiệm phân biệt dương đều khác 1. Từ đó ta thu được 3 giá trị của $|z|$. Hơn nữa do (1), ta thấy mỗi giá trị dương của $|z|$ thay vào (1) ta được một số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy có 3 số phức.

Câu 43: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(\sin x\right) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\pi\right)$ là

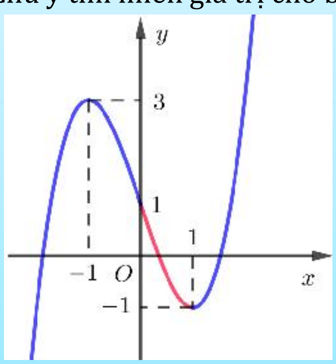


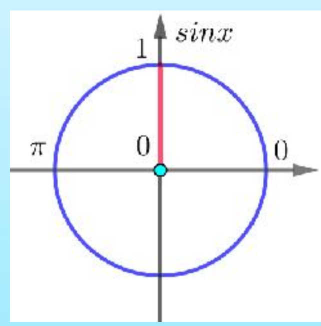
A. $\left[-1;3\right)$. **B.** $\left(-1;1\right)$. **C.** $\left(-1;3\right)$. **D.** $\left[-1;1\right)$.

Ngonguyen Quocman, Dấu Vết Hát, Nhân Lê

Lời bình

Đây là bài toán về sự tương giao đồ thị. Đề bài đã cho đồ thị của hàm $f\left(x\right)$ nên ta nghĩ đến việc dùng đồ thị để giải. Để sử dụng được đồ thị thì cần đưa $f\left(\sin x\right)$ về dạng $f\left(x\right)$. Từ đó ta nghĩ đến việc đặt ẩn phụ để đưa về hàm ban đầu và sử dụng được đồ thị để giải bài toán tương giao. Chú ý tìm miền giá trị cho biến mới.





Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \sin x$, do $x \in \left(0;\pi\right)$ nên $t \in \left(0;1\right]$ (xem hình trên)

Khi đó phương trình trở thành: $f\left(t\right) = m, t \in \left(0;1\right]$. Đồ thị $f\left(t\right)$ trên $\left(0;1\right]$ như hình vẽ.

Từ đồ thị ta có: Phương trình $f\left(\sin x\right) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\pi\right)$

$\Leftrightarrow$ phương trình $f\left(t\right) = m$ có nghiệm trên nửa khoảng $\left(0;1\right] \Leftrightarrow m \in \left[-1;1\right)$.

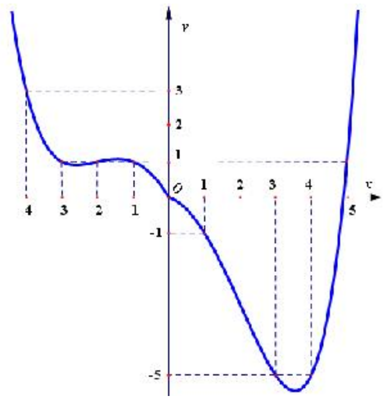
Nhận xét: Đây là câu hỏi thuộc chương hàm số của lớp 12, dạng tương giao dùng đồ thị

Mức độ câu hỏi: Vận dụng thấp.

Kiến thức vận dụng: Đặt ẩn phụ, tìm điều kiện cho ẩn phụ (lượng giác), biết quan sát đồ thị trên một miền cho trước, biết dùng đồ thị để biện luận sự tương giao.

CÂU TƯƠNG TỰ

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2.f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right) = m-3$ có nghiệm.



A. 13. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Với $x \in \left[0;\dfrac{2}{3}\right]$, ta có $0 \le \sqrt{6x-9x^2} = \sqrt{1-(1-3x)^2} \le 1 \Leftrightarrow 0 \ge -4\sqrt{6x-9x^2} \ge -4$

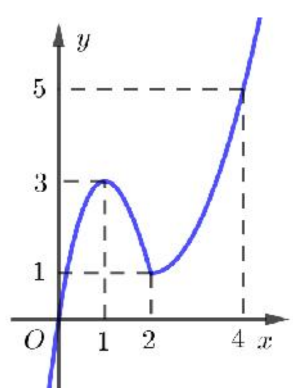
$\Leftrightarrow 3 \ge 3-4\sqrt{6x-9x^2} \ge -1$. Dựa vào đồ thị đã cho suy ra $f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right) \in \left[-5;1\right]$.

Khi đó phương trình $2.f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right) = m-3$ có nghiệm

$\Leftrightarrow -5 \le \dfrac{m-3}{2} \le 1 \Leftrightarrow -7 \le m \le 5$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \left\{-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;5\right\}$, có 13 giá trị của m thỏa đề.

Câu 2: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình: $f\left[4\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)\right] = m$ có nghiệm.



A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

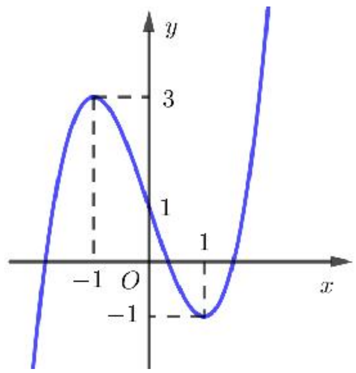
Chọn D

Đặt $t = 4\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) = 4 - 2\sin^2 2x \Rightarrow t \in \left[2;4\right]$.

Do đó phương trình $f\left[4\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)\right] = m$ có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $f\left(t\right) = m$ có nghiệm trên đoạn $\left[2;4\right]$.

Dựa vào đồ thị đã cho ta thấy: phương trình $f\left(t\right) = m$ có nghiệm t với $t \in \left[2;4\right] \Leftrightarrow 1 \le m \le 5$. Vậy $m \in \left\{1;2;3;4;5\right\}$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(f\left(\sin x\right)\right) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\pi\right)$.



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

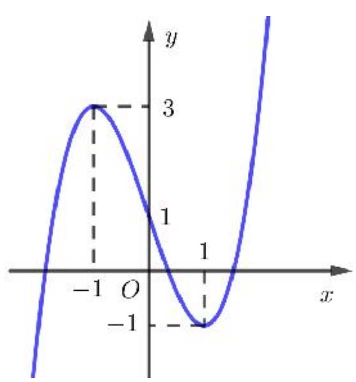
Chọn D

Đặt $t = f\left(\sin x\right)$, do $x \in \left(0;\pi\right) \Rightarrow \sin x \in \left(0;1\right] \Rightarrow t \in \left[-1;1\right)$.

Do đó phương trình $f\left(f\left(\sin x\right)\right) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\pi\right)$ khi và chỉ khi phương trình $f\left(t\right) = m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $\left[-1;1\right)$.

Quan sát đồ thị đã cho: yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \in \left(-1;3\right]$.

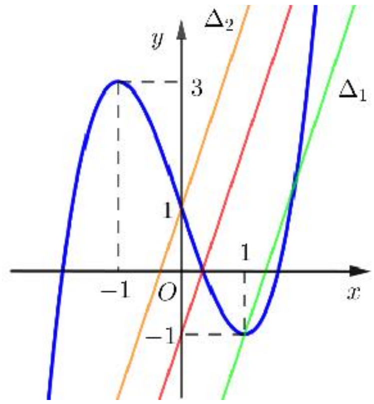
Câu 4: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sin x\right) = 3\sin x + m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\pi\right)$. Tổng các phần tử của S bằng



A. -8. **B.** -10. **C.** -6. **D.** -5.

Lời giải

Chọn B



Đặt $t = \sin x$, do $x \in (0;\pi) \Rightarrow \sin x \in (0;1] \Rightarrow t \in (0;1]$.

Gọi Δ_1 là đường thẳng qua điểm $(1;-1)$ và song song với đường thẳng $y = 3x$ có phương trình $y = 3x - 4$.

Gọi Δ_2 là đường thẳng qua điểm $(0;1)$ và song song với đường thẳng $y = 3x$ có phương trình $y = 3x + 1$.

Do đó phương trình $f(\sin x) = 3\sin x + m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = 3t + m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $(0;1] \Leftrightarrow -4 \le m < 1$.

Câu 44: Ông A vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất 1% / tháng. Ông ta muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi tháng là như nhau và ông A trả hết nợ sau đúng 5 năm kể từ ngày vay. Biết rằng mỗi tháng ngân hàng chỉ tính lãi trên số dư nợ thực tế của tháng đó. Hỏi số tiền mỗi tháng ông ta cần trả cho ngân hàng gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A. $2,22$ triệu đồng. **B.** $3,03$ triệu đồng. **C.** $2,25$ triệu đồng. **D.** $2,20$ triệu đồng.

Nguyễn Văn Viễn, Binh Hoang, Bui Van Nam

Lời bình

Phân tích bài toán gốc:

Ý tưởng chính của câu này xuất phát từ bài toán lãi kép, mở đầu cho bài phương trình mũ trong chương trình sách giáo khoa 12 cơ bản hiện hành. Tuy nhiên, mức độ ở câu hỏi này được nâng lên đó là bài toán kiểu trả góp; yêu cầu về kiến thức đối với học sinh là phải hiểu được bản chất của bài toán, đồng thời có sự tích hợp, ghi nhớ và tái hiện kiến thức của lớp 11, đó là tổng n số hạng đầu của một cấp số nhân. Chúng ta cùng làm rõ bài toán gốc sau đây:

Bài toán: Ông A vay ngân hàng số tiền S (triệu đồng) với lãi suất $r\%$ / tháng. Ông ta muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi tháng là như nhau và ông A trả hết nợ sau đúng n năm kể từ ngày vay. Biết rằng mỗi tháng ngân hàng chỉ tính lãi trên số dư nợ thực tế của tháng đó. Hỏi số tiền mỗi tháng ông ta cần trả cho ngân hàng là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi x là số tiền ông A hoàn nợ mỗi tháng, sau đúng một tháng kể từ ngày vay.

Số tiền ông A nợ ngân hàng sau một tháng là: $S+S.r=S\left(1+r\right)$ (triệu đồng).

Sau khi hoàn nợ lần thứ 1 thì số tiền ông A còn nợ là: $S\left(1+r\right)-x$ (triệu đồng).

Sau khi hoàn nợ lần thứ 2 thì số tiền ông A còn nợ là:

$S\left(1+r\right)-x+\left[S\left(1+r\right)-x\right]r-x=S\left(1+r\right)^2-x\left[\left(1+r\right)+1\right]$ (triệu đồng).

Sau khi hoàn nợ lần thứ 3 thì số tiền ông A còn nợ là:

$S\left(1+r\right)^2-x\left[\left(1+r\right)+1\right]+\left\{S\left(1+r\right)^2-x\left[\left(1+r\right)+1\right]\right\}r-x$

$=S\left(1+r\right)^3-x\left[\left(1+r\right)^2+\left(1+r\right)+1\right]$ (triệu đồng).

…

Lý luận tương tự, sau khi hoàn nợ lần thứ n thì số tiền ông A còn nợ ngân hàng là:

$S\left(1+r\right)^n-x\left[\left(1+r\right)^{n-1}+\left(1+r\right)^{n-2}+...+1\right]$

$=S\left(1+r\right)^n-x\dfrac{\left(1+r\right)^n-1}{\left(1+r\right)-1}=S\left(1+r\right)^n-\dfrac{x}{r}\left[\left(1+r\right)^n-1\right]$

Vì sau n tháng ông A trả hết nợ, cho nên:

$S\left(1+r\right)^n-\dfrac{x}{r}\left[\left(1+r\right)^n-1\right]=0\Leftrightarrow x=\dfrac{S.r\left(1+r\right)^n}{\left(1+r\right)^n-1}$.

Vậy số tiền mỗi tháng ông ta cần trả cho ngân hàng là $x=\dfrac{S.r\left(1+r\right)^n}{\left(1+r\right)^n-1}$.

Lời giải

Chọn A

Với $S=100$ triệu đồng, $r=0,01$ và $n=5.12=60$ tháng thì:

$$x=\frac{100.0.01\left(1+0.01\right)^{60}}{\left(1+0.01\right)^{60}-1}\approx 2,22 \text{ triệu đồng.}$$

CÂU TƯƠNG TỰ

Câu 1: Sinh viên B được gia đình gửi tiết kiệm số tiền 300 triệu đồng vào ngân hàng theo mức kì hạn 1 tháng với lãi suất tiết kiệm là $0,4\%$ / tháng. Mỗi tháng, vào ngày ngân hàng tính lãi, sinh viên B rút ra một số tiền như nhau để trang trải chi phí cho cuộc sống. Hỏi hàng tháng sinh viên này rút số tiền xấp sỉ bao nhiêu để sau 5 năm học đại học, số tiền tiết kiệm vừa hết?

A. $5.633.922$ đồng. **B.** $5.363.922$ đồng. **C.** $5.633.923$ đồng. **D.** $5.336.932$ đồng.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức đã thiết lập, với $S=3.10^8$; $r=0,004$; $n=60$.

Khi đó, số tiền hàng tháng mà sinh viên B rút ra là:

$$x=\frac{S.r\left(1+r\right)^n}{\left(1+r\right)^n-1}\approx 5.633.923 \text{ đồng.}$$

Câu 2: Một người vay ngân hàng 200 triệu đồng với lãi suất là $0,6\%$ một tháng theo thỏa thuận: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay thì ông bắt đầu trả nợ và đều đặn cứ mỗi tháng người đó sẽ trả cho ngân hàng 9 triệu đồng cho đến khi hết nợ (biết rằng, tháng cuối cùng có thể trả dưới 9 triệu đồng). Hỏi sau bao nhiêu tháng thì người đó trả được hết nợ ngân hàng.

A. 24. **B.** 23. **C.** 22. **D.** 25.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng bài toán trên với $x=9$ triệu; $S=200$ triệu; $r=0,006$.

Vì sau n tháng ông A trả hết nợ, cho nên ta có $x=\dfrac{S.r\left(1+r\right)^n}{\left(1+r\right)^n-1}$

$$\Leftrightarrow x=\left(x-Sr\right)\left(1+r\right)^n \Leftrightarrow \left(1+r\right)^n=\frac{x}{x-Sr} \Leftrightarrow n=\log_{(1+r)}\left(\frac{x}{x-Sr}\right)\approx 23,9 \text{ tháng.}$$

Vậy sau 24 tháng thì người đó trả được hết nợ ngân hàng.

Câu 3: Anh C đi làm với mức lương khởi điểm là x (triệu đồng)/tháng, và số tiền lương này được nhận vào ngày đầu tháng. Vì làm việc chăm chỉ và có trách nhiệm nên sau 36 tháng kể từ ngày đi làm, anh C được tăng lương thêm 10%. Mỗi tháng, anh ta giữ lại 20% số tiền lương để gửi tiết kiệm vào ngân hàng với kì hạn 1 tháng và lãi suất là $0,5\%$ /tháng, theo hình thức lãi kép (tức là tiền lãi của tháng này được nhập vào vốn để tính lãi cho tháng tiếp theo). Sau 48 tháng kể từ ngày đi làm, anh C nhận được số tiền cả gốc và lãi là 100 triệu đồng. Hỏi mức lương khởi điểm của người đó là bao nhiêu?

A. $8.991.504$ đồng. **B.** $9.891.504$ đồng. **C.** $8.981.504$ đồng. **D.** $9.881.505$ đồng.

Lời giải

Chọn A

+ Lãi suất $r = 0,5\% = 0,005$.

+ Số tiền gốc ban đầu gửi vào mỗi tháng là $A = 0,2x$.

+ Số tiền cả gốc và lãi nhận được sau 36 tháng là

$$A_1 = A(1+r).\frac{(1+r)^{36}-1}{r} = 0,2x(1+r).\frac{(1+r)^{36}-1}{r}.$$

+ Bắt đầu từ tháng thứ 37 số tiền gốc người này gửi vào ngân hàng là $(x + x.10\%).20\% = 0,22x$.

+ Số tiền cả gốc và lãi nhận được sau 48 tháng là:

$$S = A_1(1+r)^{12} + 0,22x.(1+r).\frac{(1+r)^{12}-1}{r}$$

$$= 0,2x(1+r)^{13}.\frac{(1+r)^{36}-1}{r} + 0,22x.(1+r).\frac{(1+r)^{12}-1}{r}.$$

Suy ra: $x = \dfrac{rS}{0,2(1+r)^{13}\left[(1+r)^{36}-1\right] + 0,22(1+r)\left[(1+r)^{12}-1\right]}$.

Theo giả thiết bài toán ta có:

$$x = \frac{0,005 \times 10^8}{0,2(1+0,005)^{13}\left[(1+0,005)^{36}-1\right] + 0,22(1+0,005)\left[(1+0,005)^{12}-1\right]} \approx 8.991.504$$

đồng.

Vậy mức lương khởi điểm của anh C là $8.991.504$ đồng.

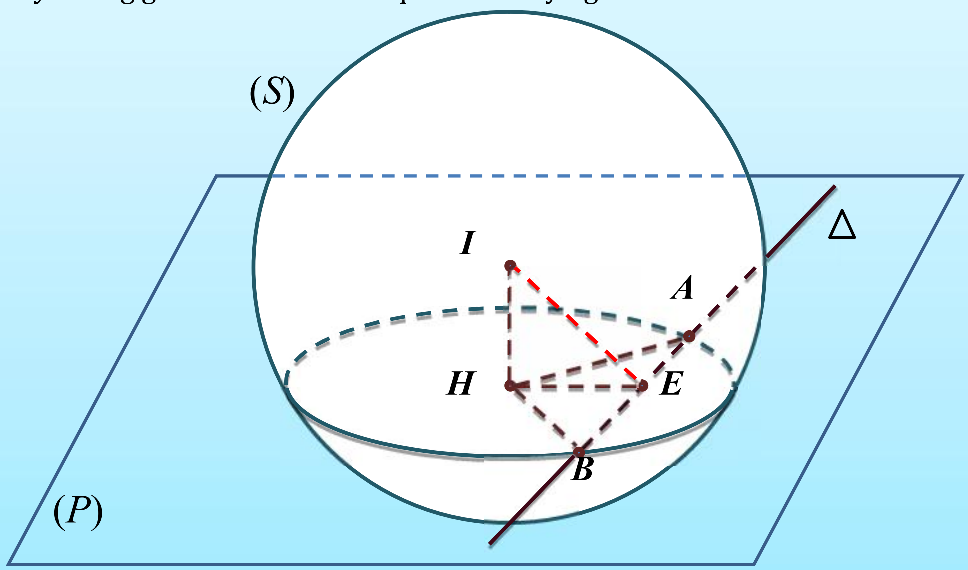
Câu 45: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E\left(2;1;3\right)$, mặt phẳng $\left(P\right): 2x+2y-z-3=0$ và mặt cầu $\left(S\right):\left(x-3\right)^2+\left(y-2\right)^2+\left(z-5\right)^2=36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E, nằm trong $\left(P\right)$ và cắt $\left(S\right)$ tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình của Δ là

A. $\begin{cases} x=2+9t \\ y=1+9t \\ z=3+8t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2-5t \\ y=1+3t \\ z=3 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=3 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2+4t \\ y=1+3t \\ z=3-3t \end{cases}$.

Nguyễn Duy Chiến, Nguyễn Khải

Lời bình

Kết quả quen thuộc của lớp 9: Trong các dây đi qua một điểm E ở trong một đường tròn, dây vuông góc với bán kính đi qua E là dây ngắn nhất.



Lời giải

Chọn C

Mặt cầu $\left(S\right)$ có tâm $I\left(3;2;5\right)$ và bán kính $R=6$.

$IE=\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}<R \Rightarrow$ điểm E nằm trong mặt cầu $\left(S\right)$.

Gọi H là hình chiếu của I trên mặt phẳng $\left(P\right)$, A và B là hai giao điểm của Δ với $\left(S\right)$.

Khi đó, AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow AB\perp HE$, mà $AB\perp IH$ nên $AB\perp\left(HIE\right)\Rightarrow AB\perp IE$.

Suy ra: $\overrightarrow{u_\Delta}=\left[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{EI}\right]=\left(5;-5;0\right)=5\left(1;-1;0\right)$.

Vậy phương trình của Δ là $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=3 \end{cases}$.

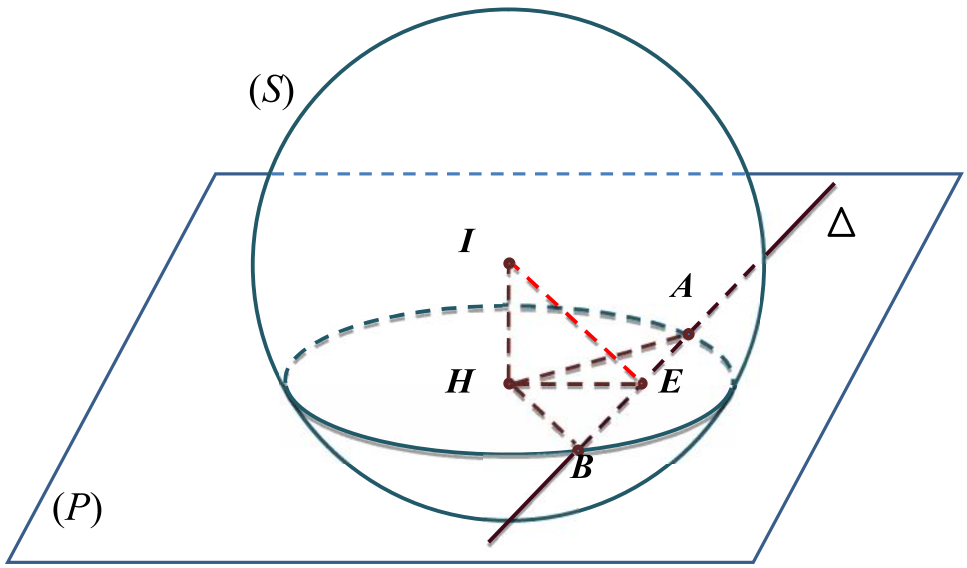
CÂU TƯƠNG TỰ

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2;1;3)$, mặt phẳng $(P): 2x+2y-z-3=0$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E, nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Biết Δ có một vec-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2018;y_0;z_0)$. Tính $T=z_0-y_0$.

A. $T=0$. **B.** $T=-2018$. **C.** $T=2018$. **D.** $T=1009$.

Lời giải

Chọn C



Mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;5)$ và bán kính $R=6$.

$IE=\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}<R \Rightarrow$ điểm E nằm trong mặt cầu (S).

Gọi H là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P), A và B là hai giao điểm của Δ với (S).

Khi đó, AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow AB\perp HE$, mà $AB\perp IH$ nên $AB\perp(HIE) \Rightarrow AB\perp IE$.

Suy ra: $\overrightarrow{u_\Delta}=\left[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{EI}\right]=(5;-5;0)=5(1;-1;0)$.

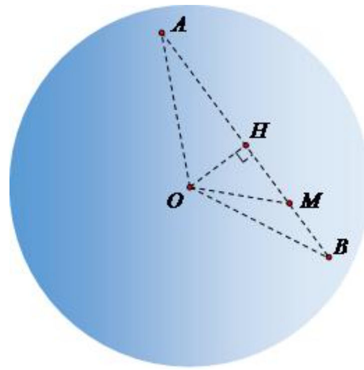
Suy ra $\vec{u}=(2018;-2018;0)$, do đó $T=z_0-y_0=2018$.

Câu 2: **[Sở GD&ĐT Hà Nội-2017]** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=8$. Đường thẳng d thay đổi, đi qua điểm M, cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt. Tính diện tích lớn nhất S của tam giác OAB.

A. $S=\sqrt{7}$. **B.** $S=4$. **C.** $S=2\sqrt{7}$. **D.** $S=2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A



Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

Vì $OM = 1 < R$ nên M thuộc miền trong của mặt cầu (S). Gọi A, B là giao điểm của đường thẳng với mặt cầu. Gọi H là chân đường cao hạ từ O của tam giác OAB.

Đặt $x = OH$, ta có $0 < x \le OM = 1$, đồng thời $HA = \sqrt{R^2 - OH^2} = \sqrt{8 - x^2}$. Vậy diện tích tam giác OAB là

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}OH.AB = OH.HA = x\sqrt{8 - x^2}.$$

Khảo sát hàm số $f(x) = x\sqrt{8 - x^2}$ trên $(0;1]$, ta được $\max\limits_{(0;1]} f(x) = f(1) = \sqrt{7}$.

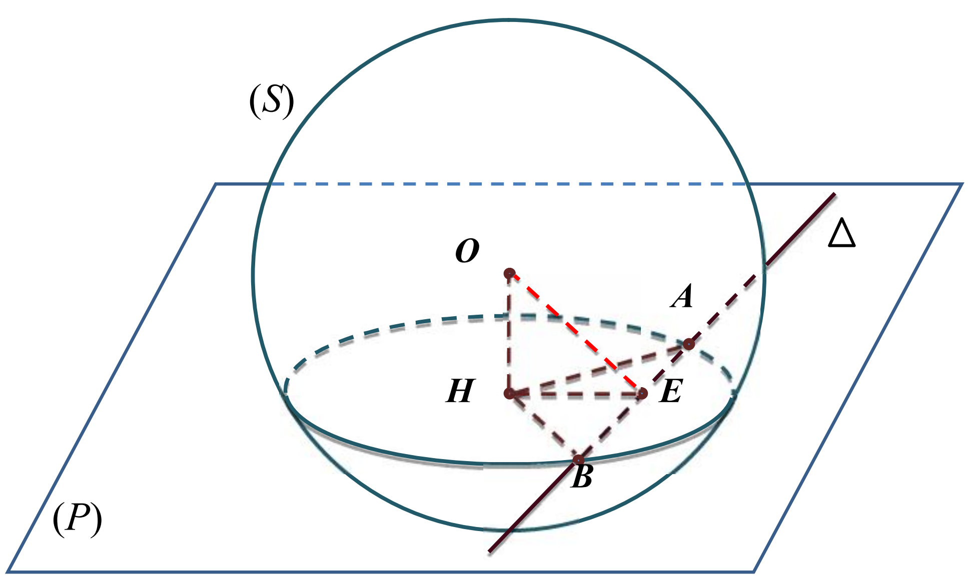
Vậy giá trị lớn nhất của $S_{\Delta OAB} = \sqrt{7}$, đạt được khi $x = 1$ hay $H \equiv M$, nói cách khác là $d \perp OM$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(1;1;2)$, mặt phẳng $(P): x + y + z - 4 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E, nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình của Δ là

A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$.
B. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + t \\ z = 2 - 1 \end{cases}$.
C. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 2 \end{cases}$.
D. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C



Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R=3$.

$OE=\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}<R \Rightarrow$ điểm E nằm trong mặt cầu (S).

Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (P), A và B là hai giao điểm của Δ với (S).

Khi đó, AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow AB\perp HE$, mà $AB\perp OH$ nên $AB\perp(HOE)\Rightarrow AB\perp OE$.

Suy ra: $\overrightarrow{u_\Delta}=\left[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{EO}\right]=(-1;1;0)$. Vậy phương trình của Δ là $\begin{cases}x=1-t\\y=1+t\\z=2\end{cases}$.

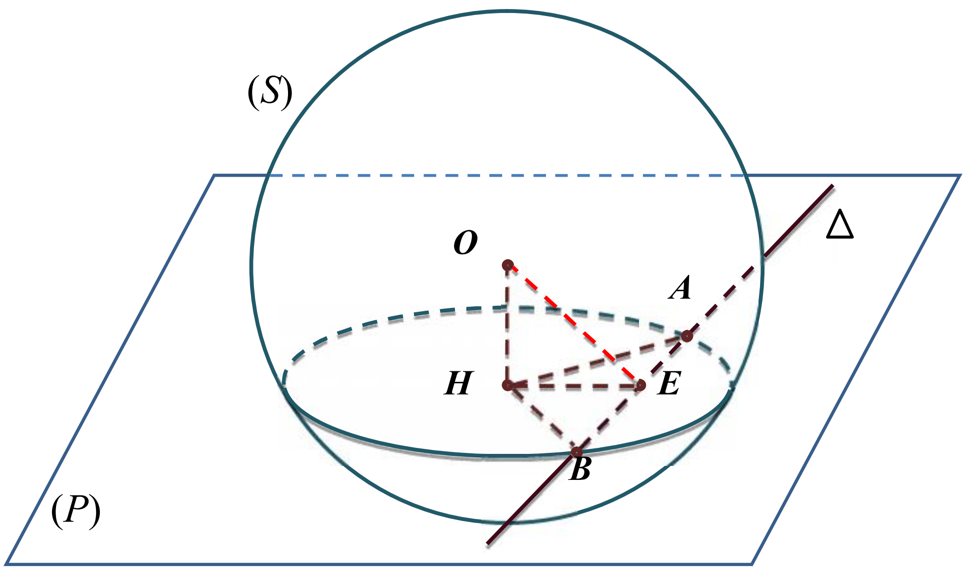
Câu 4: Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $E(1;1;1)$, mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=4$ và mặt phẳng $(P): x-3y+5z-3=0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E, nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm A,B sao cho tam giác OAB là tam giác đều.

A. $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$. **B.** $d:\dfrac{1-x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}$.

C. $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{1-y}{1}=\dfrac{1-z}{1}$. **D.** $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{1-y}{-1}=\dfrac{1-z}{-1}$.

Lời giải

Chọn C



Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R=2$.

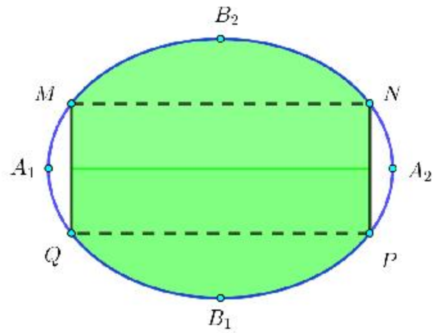
$OE=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}<R \Rightarrow$ điểm E nằm trong mặt cầu (S).

Gọi K là hình chiếu của O lên AB. Vì ΔOAB đều nên $OK=\dfrac{OA.\sqrt{3}}{2}=\dfrac{R.\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}=OE.$

Suy ra $K\equiv E$. Do đó $AB\perp OE$. Suy ra: $\overrightarrow{u_\Delta}=\left[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{OE}\right]=(8;-4;-4)=4(2;-1;-1)$.

Vậy phương trình của Δ là $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}\Leftrightarrow d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{1-y}{1}=\dfrac{1-z}{1}$.

Câu 46: Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí sơn phần tô đậm là 200.000 đồng/m^2 và phần còn lại là 100.000 đồng/m^2. Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 8m$, $B_1B_2 = 6m$ và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ = 3m$?



A. $7.322.000$ đồng. **B.** $7.213.000$ đồng. **C.** $5.526.000$ đồng. **D.** $5.782.000$ đồng.

Nam Phương, Duy Phạm Lê, Lê Thảo

Lời bình

Đây là dạng toán liên quan đến thực tiễn có sự kết hợp khéo léo giữa ba nội dung: Xác định phương trình của Elip trong hình học lớp 10, ứng dụng của tích phân trong việc tính diện tích hình phẳng và bài toán tính cho phí cho diện tích hình phẳng.

Với quan điểm cá nhân để giải quyết bài toán này ta sẽ có ba bước như sau:

*Bước 1:*Tính diện tích Elip

+ Tính theo công thức $S_{(E)} = \pi ab$

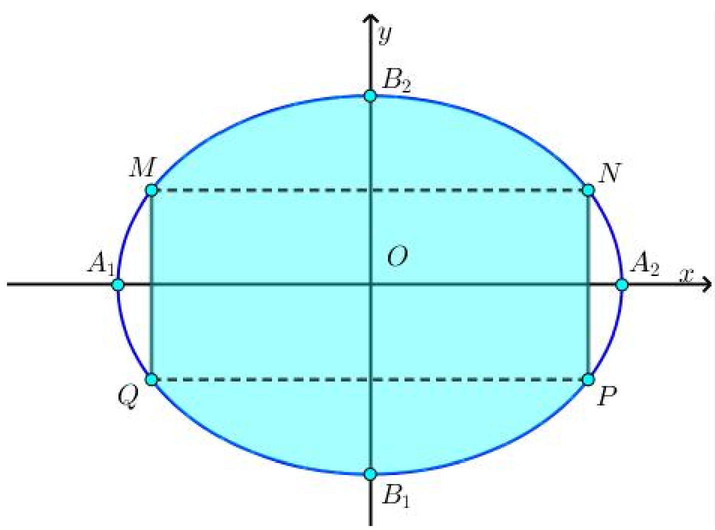
+ Tìm phương trình Elip rồi sau đó sử dụng công thức hình phẳng để tính diện tích Elip.

*Bước 2:*Tính diện tích hình phẳng theo yêu cầu đề bài.

Bước 3: Tính chi phí cho công việc của hình phẳng theo yên cầu của đề bài.

Lời giải

Chọn A



Giả sử phương trình elip $(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} A_1A_2 = 8 \\ B_1B_2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 8 \\ 2b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$

$\Rightarrow (E): \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow y = \pm\dfrac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$.

Diện tích của elip (E) là: $S_{(E)} = \pi ab = 12\pi\ (m^2)$.

Ta có: $MQ = 3 \Rightarrow \begin{cases} M = d \cap (E) \\ N = d \cap (E) \end{cases}$ với $d: y = \dfrac{3}{2} \Rightarrow M\left(-2\sqrt{3}; \dfrac{3}{2}\right)$ và $N\left(2\sqrt{3}; \dfrac{3}{2}\right)$.

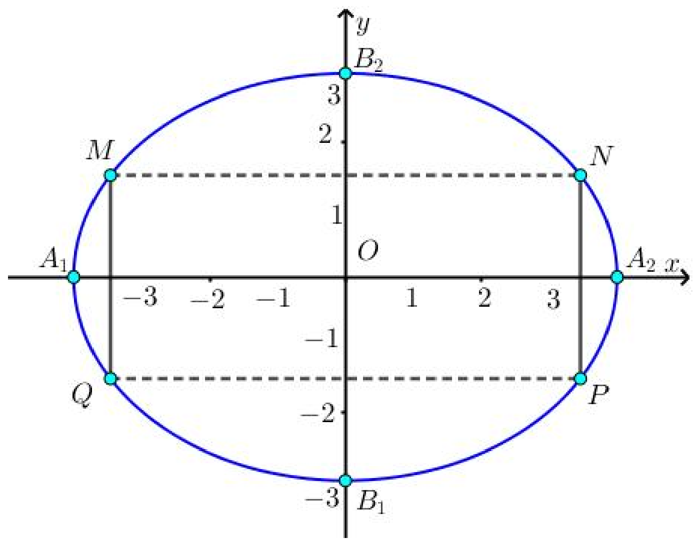
Khi đó, diện tích phần không tô màu là $S = 4\displaystyle\int_{2\sqrt{3}}^{4}\left(\dfrac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}\right)\mathrm{d}x = 4\pi - 6\sqrt{3}\ (m^2)$.

Diện tích phần tô màu là $S' = S_{(E)} - S = 8\pi + 6\sqrt{3}$.

Số tiền để sơn theo yêu cầu bài toán là:

$T = 100.000 \times \left(4\pi - 6\sqrt{3}\right) + 200.000 \times \left(8\pi + 6\sqrt{3}\right) \approx 7.322.000$ đồng.

Cách 2:



Vì elip có độ dài trục lớn $2a = 8 \Leftrightarrow a = 4$, độ dài trục bé $2b = 6 \Leftrightarrow b = 3$ nên elip có diện tích là $S = \pi ab = 12\pi$.

Gắn hệ trục tọa độ *Oxy* sao cho A_1A_2 trùng *Ox*, B_1B_2 trùng *Oy* khi đó elip có phương trình chính tắc $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Vì $MQ = 3$ nên $NP = 3$ nên điểm N có tọa độ là $N\left(x_0; \dfrac{3}{2}\right)$. N thuộc elip nên

$x_0 = \sqrt{16\left(1 - \dfrac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}{9}\right)} = 2\sqrt{3}$. Ta có $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow y^2 = 9\left(1 - \dfrac{x^2}{16}\right)$.

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=3.\sqrt{1-\frac{x^2}{16}},\ y=0,\ x=0,\ x=2\sqrt{3}.$

Do tính đối xứng của hình elip nên diện tích phần được tô đậm là $S=4S_1=4\int\limits_0^{2\sqrt{3}}3\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}\mathrm{d}x$.

Đặt $x=4\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=4\cos t.\mathrm{d}t$.

Khi $x=0\Rightarrow t=0$. Khi $x=2\sqrt{3}\Rightarrow t=\frac{\pi}{3}$

Do đó

$$S=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}3.4\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t.\mathrm{d}t=48\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 t.\mathrm{d}t=24\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\left(1+\cos 2t\right)\mathrm{d}t=24\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$=8\pi+6\sqrt{3}$.

Diện tích phần còn lại của elip là $12\pi-\left(8\pi+6\sqrt{3}\right)=4\pi-6\sqrt{3}$

Do đó số tiền cần làm biển quảng cáo là

$T=\left(8\pi+6\sqrt{3}\right).200000+\left(4\pi-6\sqrt{3}\right).100000\approx 7\,322\,000$ đồng.

CÂU TƯƠNG TỰ

Câu 1: Một mặt bàn hình elip có chiều dài là 120 cm, chiều rộng là là 60 cm. Anh Hải muốn gắn đá hoa cương cho mặt bàn theo hình (phần đá hoa cương trắng và phần đá hoa cương màu vàng), biết rằng phần màu vàng cũng là elip có chiều dài 100 cm và chiều rộng là 40 cm. Biết rằng đá hoa cương màu trắng có giá $600.000\ \text{vnđ}/\text{m}^2$ và đá hoa cương màu trắng có giá $650.000\ \text{vnđ}/\text{m}^2$. Hỏi số tiền để gắn đá hoa cương theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A. 355.000 đồng. **B.** 339.000 đồng. **C.** 368.000 đồng. **D.** 353.000 đồng

Lời giải

Chọn A

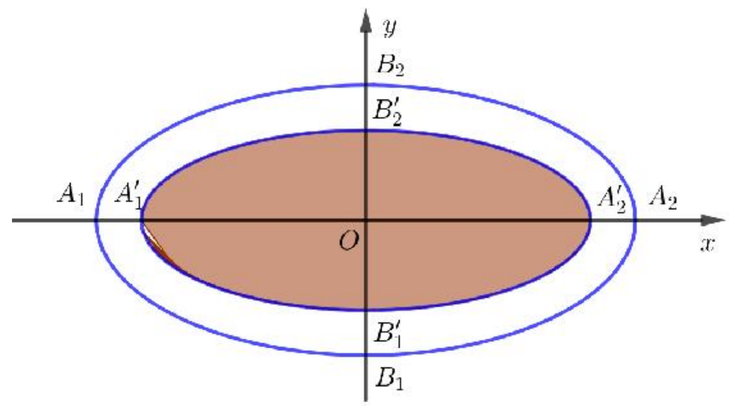
Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Với $\begin{cases} A_1A_2 = 1,2 = 2a \\ B_1B_2 = 0,6 = 2b \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,6 \\ b = 0,3 \end{cases}$

$\rightarrow (E_L): \dfrac{x^2}{0,36}+\dfrac{y^2}{0,09}=1.$

$\Leftrightarrow y = \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{0,36-x^2}$



Suy ra diện tích của hình elip lớn là:

$S_{(E_L)} = 4\int_0^{0,6}\dfrac{1}{2}\sqrt{0,36-x^2}dx = 2\int_0^{0,6}\sqrt{0,36-x^2}dx = 0,18\pi\left(m^2\right).$

Với $\begin{cases} A_1'A_2' = 1 = 2a \\ B_1'B_2' = 0,4 = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,5 \\ b = 0,2 \end{cases} \rightarrow (E_N): \dfrac{x^2}{0,25}+\dfrac{y^2}{0,04}=1 \Leftrightarrow y = \pm\dfrac{2}{5}\sqrt{0,25-x^2}$.

Suy ra diện tích của hình elip nhỏ là:

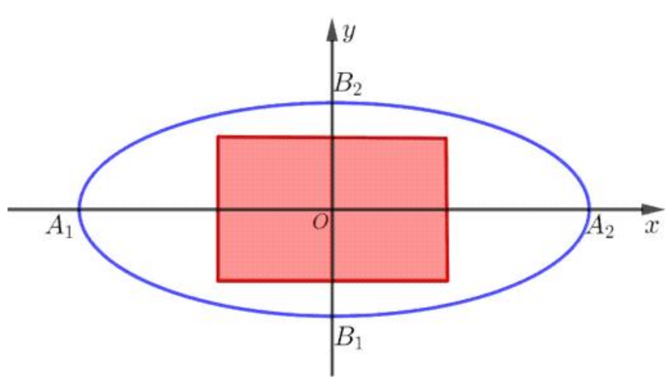
$S_{(E_N)} = 4\int_0^{0,5}\dfrac{2}{5}\sqrt{0,25-x^2}dx = \dfrac{8}{5}\int_0^{0,5}\sqrt{0,25-x^2}dx = 0,1\pi\left(m^2\right).$

Gọi $S_1;S_2$ lần lượt là diện tích phần gắn đá hoa cương màu trắng và phần gắn đá hoa cương màu vàng. Ta có: $S_2 = S_{(E_N)} = 0,1\pi\left(m^2\right)$.

Suy ra: $S_1 = S_{(E_L)} - S_{(E_N)} = 0,18\pi + 0,1\pi = 0,08\pi$. Gọi T là tổng chi phí. Khi đó ta có

$T = 0,08\pi.600000 + 0,1\pi.650000 \simeq 355.000$ (đồng).

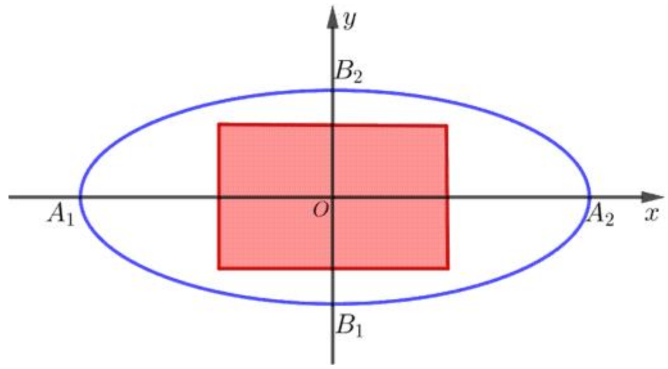
Câu 2: Một mặt bàn hình elip có chiều dài là 120 cm, chiều rộng là là 60 cm. Anh Phượng muốn gắn đá hoa cương và dán gạch tranh trên mặt bàn theo hình (phần đá hoa cương bên ngoài và điểm nhấn bên trong là bộ tranh gồm 2 miếng gạch với kích thước mỗi miếng là 25 cm x 40 cm). Biết rằng đá hoa cương có giá và bộ tranh gạch có giá 300.000 vnđ/bộ. Hỏi số tiền để gắn đá hoa cương và dán gạch tranh theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?



A. 519.000 đồng. **B.** 610.000 đồng. **C.** 639.000 đồng. **D.** 279.000 đồng.

Lời giải

Chọn A



Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Với $\begin{cases} A_1A_2=1,2=2a \\ B_1B_2=0,6=2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0,6 \\ b=0,3 \end{cases} \to (E): \frac{x^2}{0,36}+\frac{y^2}{0,09}=1 \Leftrightarrow y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{0,36-x^2}$.

Suy ra diên tích của hình elip là:

$S_{(E)}=4\int_0^{0,6}\frac{1}{2}\sqrt{0,36-x^2}dx=2\int_0^{0,6}\sqrt{0,36-x^2}dx=0,18\pi\left(m^2\right)$.

Gọi $S_1;S_2$ lần lượt là diện tích phần đá hoa cương và bộ tranh

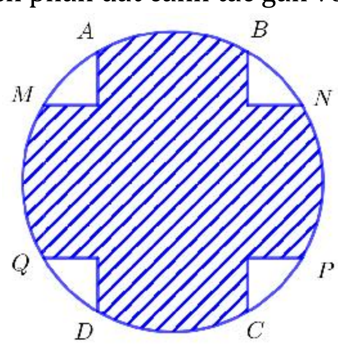
Ta có: $S_2=2\text{x}0,25\text{x}0,4=0,2\left(m^2\right)$

Suy ra: $S_1=S_{(E)}-S_2=0,18\pi-0,2\left(m^2\right)$.

Gọi T là tổng chi phí. Khi đó ta có

$T=\left(0,18\pi-0,2\right).600000+300000\simeq 519.000$ (đồng).

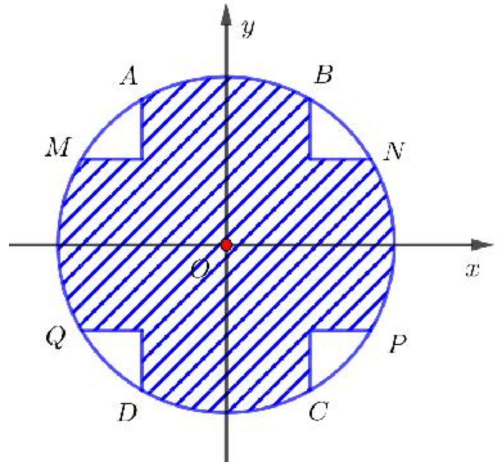
Câu 3: Một mảnh vườn có dạng hình tròn bán kính bằng $5\,\text{m}$. Phần đất canh tác trồng rau (*phần tô đen*) trong hình vẽ bên dưới, hình chữ nhật $ABCD$ và $MNPQ$ có $AB=MQ=5\,\text{m}$. Biết rằng cứ $1\,\text{m}^2$ đất canh tác thì cần 30.000 (đồng) tiền mua hạt giống. Hỏi số tiền cần để mua hạt giống trồng hết diện tích phần đất canh tác gần với số nào sau đây



A. 2.119.800 đồng. **B.** 2.191.000 đồng. **C.** 2.218.000 đồng. **D.** 2.218.900 đồng.

Lời giải

Chọn A



Phương trình đường tròn là $x^2 + y^2 = 25\ \left(C\right)$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường tròn $\left(C\right)$ và các đường thẳng $AD,\ BC$ là:

$$S_1 = 4\int\limits_0^{\frac{5}{2}} \sqrt{25 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{25\pi}{3} + \frac{25\sqrt{3}}{2}.$$

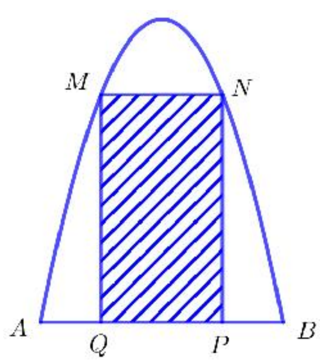
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường tròn $\left(C\right)$ và các đường thẳng $MN,\ QP$ là $S_2 = S_1$.

Suy ra diện tích đất canh tác

$$S = S_1 + S_2 - S_{IJKL} = \frac{50\pi}{3} + 25\sqrt{3} - 25\ \left(m^2\right).$$

Do đó số tiền là: $2.119.800$ đồng.

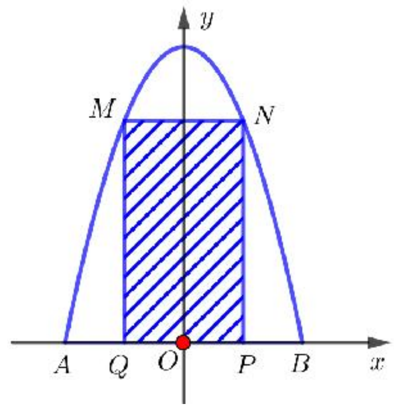
Câu 4: Một chiếc cổng có hình dạng là một Parabol có khoảng cách giữa 2 chân cổng là $8\,\mathrm{m}$. Người ra treo một tâm phông hình chữ nhật có 2 đỉnh $M,\ N$ nằm trên Parabol và hai đỉnh $P,\ Q$ nằm trên mặt đất (*như hình vẽ*). Ở phần phía ngoài phông (*phần không tô đen*) người ta mua hoa để trang trí với chi phí cho $1\,\mathrm{m}^2$ cần số tiền mua hoa là 200.000 (VNĐ), biết $MN = 4\mathrm{m},\ PQ = 6\mathrm{m}$. Hỏi số tiền dùng để mua hoa trang trí chiếc cổng gần với số tiền nào sau đây



A. $3.733.300$ đồng. **B.** $3.373.400$ đồng. **C.** $3.437.300$ đồng. **D.** $3.434.300$ đồng.

Lời giải

Chọn A



Phương trình $\left(P\right)$ có dạng $y=ax^2+b\ \left(P\right)$.

$\left(P\right)$ đi qua $B(4;0)$ và $M(2;6)\Rightarrow\left(P\right): y=-\dfrac{1}{2}x^2+8$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\left(P\right)$ và trục Ox là

$S=2\int\limits_0^4\left(8-\dfrac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x=\dfrac{128}{3}\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Diện tích phần trồng hoa là

$S=S_1-S_{MNPQ}=\dfrac{128}{3}-24=\dfrac{56}{3}\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Do đó số tiền là: $3.733.300$ đồng.

Câu 47: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AA' và BB'. Đường thẳng CM cắt đường thẳng $C'A'$ tại P, đường thẳng CN cắt đường thẳng $C'B'$ tại Q. Thể tích khối đa diện lồi $A'MPB'NQ$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Nguyễn Văn Ái, Phạm Chí Tuân, Phi Hung Hoang

Lời bình

Với các bài toán tính thể tích các khối đa diện (H) thuộc dạng không quen thuộc, ta có hai cách phổ biến:

+ Phân chia khối đa diện (H) thành các khối nhỏ hơn.

+ Dùng phương pháp phần bù thể tích.

Lưu ý thêm rằng, để so sánh thể tích hai khối chóp, hai khối lăng trụ ta thường quy về so sánh diện tích đáy và chiều cao.

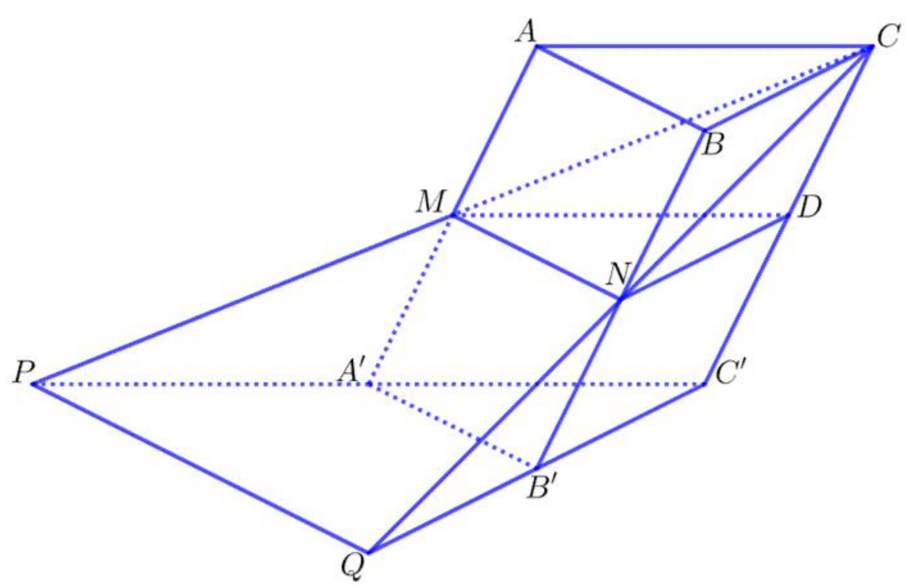
Lời giải

Chọn D

Gọi D là trung điểm của CC', h, S, V lần lượt là chiều cao, diện tích đáy và thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Thế thì ta có: $S_{DMN} = S$; $S_{C'PQ} = 4S$.

Cách 1:

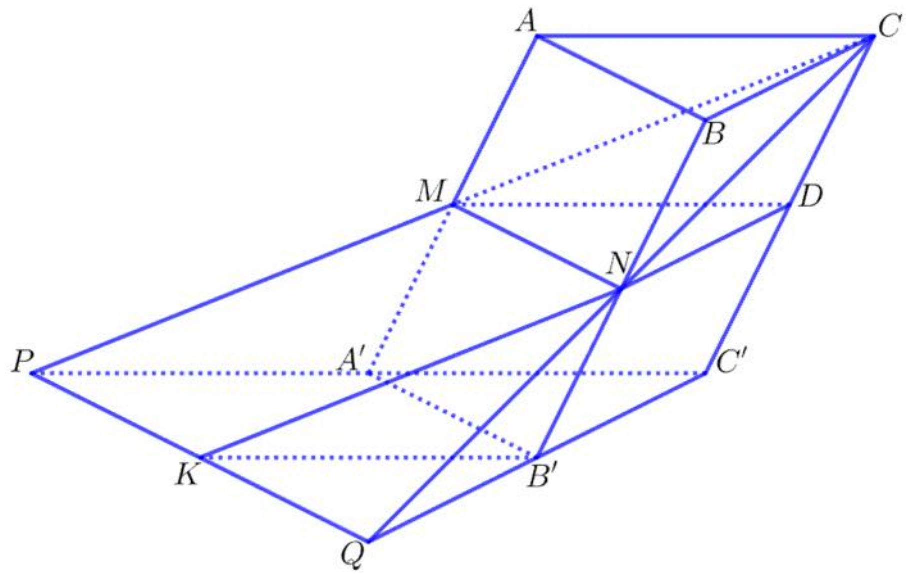


Suy ra

$$\frac{V_{A'MPB'NQ}}{V} = \frac{V_{C.C'PQ} - \left(V_{MND.A'B'C'} + V_{C.MND}\right)}{V} = \frac{\frac{1}{3}.4S.h - \left(S.\frac{h}{2} + \frac{1}{3}.S.\frac{h}{2}\right)}{S.h} = \frac{4}{3} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3}$$

Do đó $V_{A'MPB'NQ} = \frac{2}{3}$.

Cách 2:



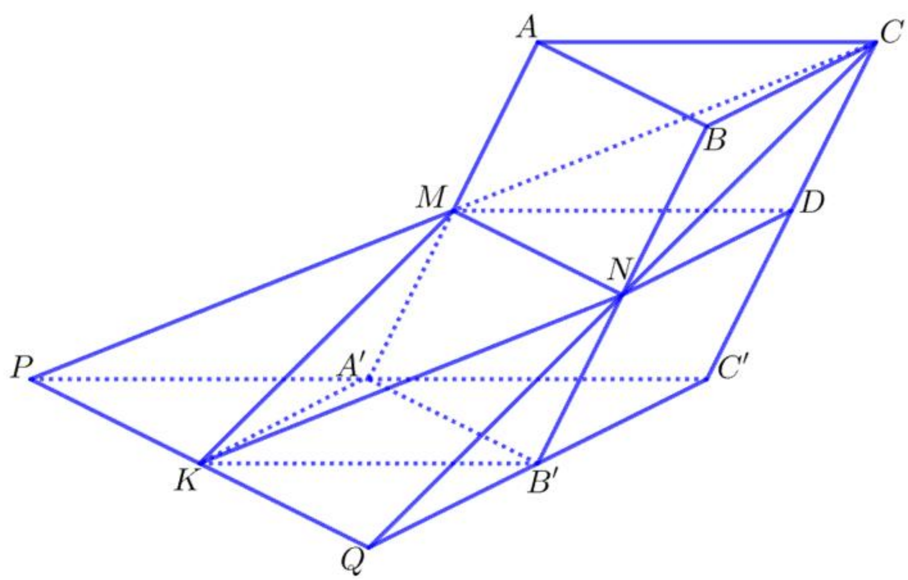
Gọi K là trung điểm PQ. Ta có $V_{A'MP.B'NQ} = V_{NB'K.MA'P} + V_{N.B'KQ}$.

Mặt khác: $V_{NB'K.MA'P} = S_{MA'P}.d\left(N,\left(MA'P\right)\right) = S_{CDM}.d\left(N,\left(CDM\right)\right) = 3V_{C.MND} = \dfrac{Sh}{2}$.

$V_{N.B'KQ} = \dfrac{1}{3}.S_{B'KQ}.d\left(N,\left(B'KQ\right)\right) = \dfrac{1}{3}.S.\dfrac{h}{2} = \dfrac{S.h}{6}$

Vậy $V_{A'MPB'NQ} = V_{NB'K.MA'P} + V_{N.B'KQ} = \dfrac{S.h}{2} + \dfrac{S.h}{6} = \dfrac{2}{3}$.

Cách 3:



Nếu nắm kỹ ví dụ SGK (Ví dụ ở trang 11) thì ta có nhận xét rằng: Có thể phân chia khối lăng trụ tam giác thành 3 khối tứ diện có thể tích bằng nhau. Từ đó ta có:

$V_{A'MPB'NQ} = V_{NB'K.MA'P} + V_{N.B'KQ} = 3V_{M.A'KP} + V_{N.B'KQ} = 4V_{N.B'KQ} = 4.\dfrac{1}{3}.S.\dfrac{h}{2} = \dfrac{2}{3}.S.h = \dfrac{2}{3}$.

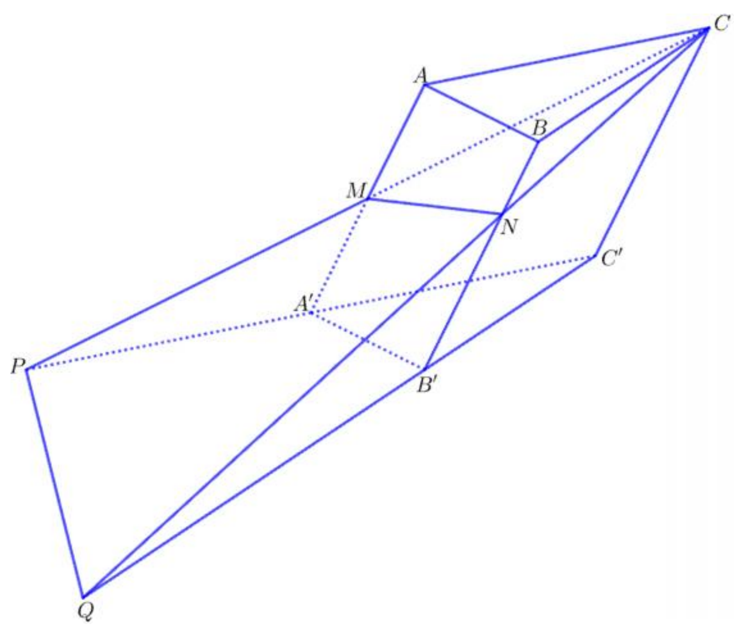
CÂU TƯƠNG TỰ

Câu 1: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 2. Gọi M , N lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh AA' và BB' sao cho M là trung điểm của AA' và $BN = \frac{2}{3}BB'$. Đường thẳng CM cắt đường thẳng $C'A'$ tại P và đường thẳng CN cắt đường thẳng $C'B'$ tại Q. Thể tích khối đa diện lồi $A'MPB'NQ$ bằng

A. $\frac{13}{18}$. **B.** $\frac{23}{9}$. **C.** $\frac{7}{18}$. **D.** $\frac{5}{9}$.

Lời giải

Chọn B

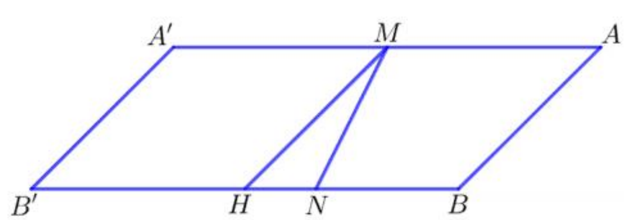


Ta có: $V_{A'B'C'.CMN} = \frac{1}{3}\left(\frac{A'M}{A'A} + \frac{B'N}{B'B} + \frac{CC'}{CC'}\right)V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + 1\right).2 = \frac{13}{9}.(*)$

Mặt khác: $S_{C'PQ} = 6S_{A'B'C'} \Rightarrow V_{C.C'PQ} = 6V_{C.A'B'C'} = 6.\frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = 4$.

Vậy $V_{A'MPB'NQ} = V_{C.C'PQ} - V_{A'B'C'.CMN} = 4 - \frac{13}{9} = \frac{23}{9}$.

Chú ý chỗ $(*)$ có thể tính cách khác như sau:



Ta có:

$S_{A'B'NM} = S_{A'B'HM} + S_{MHN}$

$= \frac{1}{2}S_{ABB'A'} + \frac{1}{6}S_{A'B'B} = \frac{7}{12}S_{ABB'A'} \Rightarrow S_{ABMN} = 1 - \frac{7}{12}S_{ABB'A'} = \frac{5}{12}S_{ABB'A'}$.

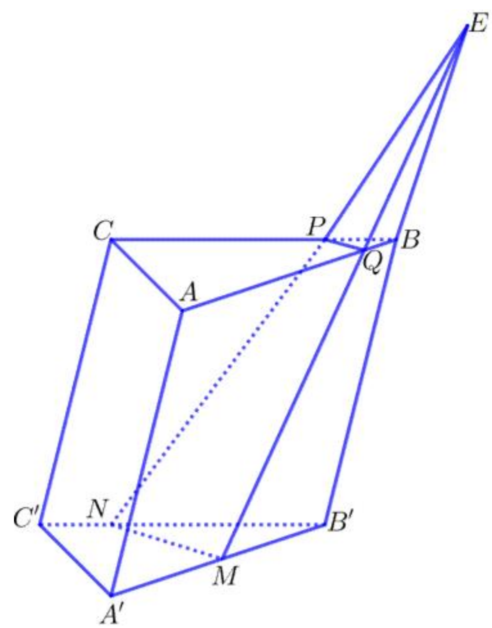
Lại có: $V_{A'B'C'.CMN} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{C.ABMN} = 2 - \frac{1}{3}d\left(C,\left(ABMN\right)\right).S_{ABMN} = 2 - \frac{5}{12}.\frac{2}{3}.2 = \frac{13}{9}$.

Câu 2: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 6. Gọi M, N và P lần lượt các điểm nằm trên cạnh $A'B'$, $B'C'$ và BC sao cho M là trung điểm của $A'B'$; $B'N = \frac{3}{4}B'C'$ và $BP = \frac{1}{4}BC$. Đường thẳng NP cắt đường thẳng BB' tại E và đường thẳng EM cắt đường thẳng AB tại Q. Thể tích khối đa diện lồi $AQPCA'MNC$ bằng

A. $\frac{23}{6}$. **B.** $\frac{23}{3}$. **C.** $\frac{19}{3}$. **D.** $\frac{19}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Theo Thalets ta có: $\frac{EB}{EB'} = \frac{EQ}{EM} = \frac{EP}{EN} = \frac{BP}{B'N} = \frac{1}{3}$.

Suy ra $d\left(E,\left(A'B'C'\right)\right) = 3d\left(B,\left(A'B'C'\right)\right)$.

Mặt khác: $\frac{S_{B'MN}}{S_{A'B'C'}} = \frac{B'M}{B'A'}.\frac{B'N}{B'C'} = \frac{1}{2}.\frac{3}{4} = \frac{3}{8}$.

Lại có:

$V_{E.MB'N} = \frac{1}{3}d\left(E,\left(MB'N\right)\right).S_{MB'N} = \frac{1}{3}.3d\left(B,\left(A'B'C'\right)\right).\frac{3}{8}S_{A'B'C'} = \frac{3}{8}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3}{8}.6 = \frac{9}{4}$.

Có: $\frac{V_{E.QPB}}{V_{E.MB'N}} = \left(\frac{EB}{EB'}\right)^3 = \frac{1}{27}$.

Suy ra: $V_{BQP.B'MN} = V_{E.MB'N} - V_{E.BQP} = V_{E.MB'N} - \frac{1}{27}V_{E.MB'N} = \frac{26}{27}V_{E.MB'N}$.

Vậy $V_{AQPCAMNC} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{BQP.B'MN} = 6 - \frac{26}{27}.\frac{9}{4} = \frac{23}{6}$.

Câu 48: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y = 3f\left(x+2\right) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(1;+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;-1\right)$. **C.** $\left(-1;0\right)$. **D.** $\left(0;2\right)$.

Trương Đức Thịnh, Trần Minh Ngọc

Lời bình

- Đây là dạng toán xét tính đơn điệu của hàm số cho bởi công thức $y = f\left[u\left(x\right)\right] + g\left(x\right)$ trong đó ta đã biết dấu của $f'\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ là một hàm cụ thể. Hướng giải là tính đạo hàm $y' = u'\left(x\right)f'\left[u\left(x\right)\right] + g'\left(x\right)$, từ dấu của $u'\left(x\right)f'\left[u\left(x\right)\right]$ và dấu của $g'\left(x\right)$ ta đưa ra kết luận phù hợp với bài toán.
- Dạng này ngoài cách cho dấu của $f'\left(x\right)$ thông qua bảng biến thiên, ta còn gặp trường hợp cho dấu của $f'\left(x\right)$ thông qua đồ thị.
- *Ngoài ra ta với bài toán trắc nghiệm ta còn có cách nữa là thử trực tiếp để loại trừ các đáp án sai từ đó đưa ra được đáp án đúng*.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Ta có $y' = 3\left[f'\left(x+2\right) + \left(-x^2+1\right)\right]$.

Giả thiết suy ra $f'\left(x+2\right) = 0 \Leftrightarrow x+2 \in \left\{1;2;3;4\right\} \Leftrightarrow x \in \left\{-1;0;1;2\right\}$

Xét dấu của $f'\left(x+2\right)$ và $-x^2+1$ ta có bảng:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x+2)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$-x^2+1$		$-$	0		$+$		0		$-$		
y'		$-$	0		$+$		0	$-$	|	chưa xác định	

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-1;1\right)$. Do đó ta chọn **C**

Cách 2:

$y'\left(\frac{3}{2}\right) = 3\left[f'\left(\frac{7}{2}\right) + \left(-\frac{25}{4}+1\right)\right] < 0$ suy ra **A** và **D sai.**

$y'\left(-2\right) = 3\left[f'\left(0\right) + \left(-4+1\right)\right] < 0$ suy ra **B sai.** Vậy **C đúng.**

CÂU TƯƠNG TỰ

Câu 1: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		1		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=3f\left(x+3\right)-x^3+12x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\infty;-1\right)$. **B.** $\left(-1;0\right)$. **C.** $\left(0;2\right)$. **D.** $\left(2;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=3f'\left(x+3\right)-3x^2+12=3\left[f'\left(x+3\right)+\left(-x^2+4\right)\right]$. Xét dấu của $f'\left(x+3\right)$ và $-x^2+4$ ta có bảng:

x	$-\infty$		-4		-2		-1		2		$+\infty$
$f'(x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$-x^2+4$		$-$	0		$+$		0	$-$			
y'		chưa xác định			$-$		0	$+$	0	$-$	

Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-4;-2\right);\left(2;+\infty\right)$. Do đó ta chọn **D.**

Câu 2: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		1		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=3f\left(-x+2\right)+x^3+3x^2-9x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\infty;-2\right)$. **B.** $\left(2;+\infty\right)$. **C.** $\left(0;2\right)$. **D.** $\left(-2;1\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=-3f'\left(-x+2\right)+3x^2+6x-9=3\left[-f'\left(-x+2\right)+\left(x^2+2x-3\right)\right]$. Xét dấu của $f'\left(-x+1\right)$ và x^2+2x-3 ta có bảng:

x	$-\infty$		-3		0		1		3		$+\infty$
$-f'(-x+2)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
x^2+2x-3		$+$	0		$-$		0	$+$			
y'		$+$	0		$-$		0	$+$		chưa xác định	

Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-3;1\right)$. Do đó ta chọn **D**

Câu 3: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=3f\left(x+2\right)-2x^3-\dfrac{3}{2}x^2+3x+2018$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(1;+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;-1\right)$. **C.** $\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(0;2\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=3f'\left(x+2\right)-6x^2-3x+3$.

Xét $y'\geq 0\Leftrightarrow f'\left(x+2\right)\geq 2x^2+x-1$.

Từ bảng biến thiên của $f'\left(x\right)$ ta suy ra bảng biến thiên của $f'\left(x+2\right)$ như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra: $f'\left(x+2\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x<1\\x>2\end{array}\right.\Rightarrow -1<x<\dfrac{1}{2}$.

Mà $2x^2+x-1<0\Leftrightarrow -1<x<\dfrac{1}{2}$.

Do đó $f'\left(x+2\right)\geq 2x^2+x-1\Rightarrow -1<x<\dfrac{1}{2}$.

Câu 4: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-4		-1		2		7		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=f\left(2x+1\right)+\dfrac{2}{3}x^3-8x+5$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(1;+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;-2\right)$. **C.** $\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(-1;7\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=2f'\left(2x+1\right)+2x^2-8$.

Xét $y' \le 0 \Leftrightarrow f'\left(2x+1\right) \le 4-x^2$.

Từ bảng biến thiên của $f'\left(x\right)$ ta suy ra bảng biến thiên của $f'\left(2x+1\right)$ như sau

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		-1		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Từ đó suy ra: $f'\left(2x+1\right) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{5}{2} < x < \dfrac{1}{2} \\ x > 2 \end{array}\right. \Rightarrow -1 < x < \dfrac{1}{2}$

Mà $4-x^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2 \Rightarrow -1 < x < \dfrac{1}{2}$. Do đó $f'\left(2x+1\right) \le 4-x^2 \Rightarrow -1 < x < \dfrac{1}{2}$.

Câu 49: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2\left(x^4-1\right)+m\left(x^2-1\right)-6\left(x-1\right)\geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. $-\dfrac{3}{2}$. **B.** 1. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Trương Quốc Toản, Nguyễn Ngọc Hoá

Lời bình

Đây là bài toán xác định tham số m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$;

Thông thường để giải bài toán này chúng ta cô lập tham số m dưới dạng $m\geq f\left(x\right),\forall x\in\mathbb{R}$ hoặc $m\leq f\left(x\right),\forall x\in\mathbb{R}$, song chúng ta để ý việc cô lập tham số m trong trường hợp này gặp nhiều khó khăn;

Dễ thấy bất phương trình đã cho có một nghiệm $x=1$ và đây chính là nút thắt để giải bài toán, thật vậy bài toán trở thành: $\left(x-1\right)\left[m^2\left(x^3+x^2+x+1\right)+m\left(x+1\right)-6\right]\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\ \left(1\right)$.

Đến đây chúng ta sẽ nhận xét rằng nếu biểu thức $g\left(x\right)=m^2\left(x^3+x^2+x+1\right)+m\left(x+1\right)-6=0$ không có nghiệm $x=1$ thì hàm số $f\left(x\right)=\left(x-1\right)\left[m^2\left(x^3+x^2+x+1\right)+m\left(x+1\right)-6\right]$ sẽ đổi dấu qua điểm $x=1$. Nghĩa là, yêu cầu bài toán không được thoả mãn

Do đó, yêu cầu bài toán được thoả mãn thì một điều kiện cần là $g\left(x\right)=m^2\left(x^3+x^2+x+1\right)+m\left(x+1\right)-6=0$ có nghiệm $x=1$, từ đó ta tìm được các giá trị của tham số m;

Kiểm tra lần lượt các giá trị của m tìm được từ đó ta đi tới lời giải bài toán.

Lời giải

Chọn C

Đặt $f\left(x\right)=m^2\left(x^4-1\right)+m\left(x^2-1\right)-6\left(x-1\right)$

Ta có: $f\left(x\right)=\left(x-1\right)\left[m^2\left(x^3+x^2+x+1\right)+m\left(x+1\right)-6\right]$. Giả sử $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình $g\left(x\right)=m^2\left(x^3+x^2+x+1\right)+m\left(x+1\right)-6=0$ thì hàm số $f\left(x\right)=\left(x-1\right)\left[m^2\left(x^3+x^2+x+1\right)+m\left(x+1\right)-6\right]$ sẽ đổi dấu qua điểm $x=1$, nghĩa là $m^2\left(x^4-1\right)+m\left(x^2-1\right)-6\left(x-1\right)\geq 0$ không có nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Do đó, yêu cầu bài toán được thoả mãn thì một điều kiện cần là $g\left(x\right)=m^2\left(x^3+x^2+x+1\right)+m\left(x+1\right)-6=0$ có nghiệm $x=1$

$$\Rightarrow 4m^2+2m-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right..$$

Điều kiện đủ:

Với $m=1$, $f(x)=(x-1)^2(x^2+2x+4)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Với $m=-\dfrac{3}{2}$, $f(x)=\dfrac{3(x-1)^2}{4}(3x^2+6x+7)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy $S=\left\{1;-\dfrac{3}{2}\right\}$, tổng các phần tử thuộc S bằng $1-\dfrac{3}{2}=-\dfrac{1}{2}$.

CÂU TƯƠNG TỰ

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số $y=x^9+(m^2-m)x^5+(3m^3-7m^2+4m)x^4+2019$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=9x^8+5(m^2-m)x^4+4m(3m^2-7m+4)x^3$

$=x^3\left[9x^5+5m(m-1)x+4m(3m^2-7m+4)\right]=x^3.g(x)$

với $g(x)=9x^5+5m(m-1)x+4m(3m^2-7m+4)$.

Nếu $g(0)\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ m\neq\dfrac{4}{3}\\ m\neq 1\end{cases}$. Thì y' sẽ đổi dấu khi đi qua điểm $x=0$, do đó hàm số sẽ không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ một điều kiện cần là $g(0)=0\Leftrightarrow m(m^2-7m+4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=\dfrac{4}{3}\\ m=1\end{array}\right.$.

Điều kiện đủ :

Với $m=0$ có $y'=9x^8\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Với $m=1$ có $y'=9x^8\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Với $m=\dfrac{4}{3}$ có $y'=x^4\left(9x^4+\dfrac{20}{9}\right)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy với $\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=\dfrac{4}{3}\\ m=1\end{array}\right.$ thì hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 2: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{5}m^2x^5-\frac{1}{3}mx^3+10x^2-\left(m^2-m-20\right)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** -2. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'\left(x\right)=m^2x^4-mx^2+20x-\left(m^2-m-20\right)$

$\Leftrightarrow f'\left(x\right)=m^2\left(x^4-1\right)-m\left(x^2-1\right)+20\left(x+1\right)$

$\Leftrightarrow f'\left(x\right)=\left(x+1\right)\left[m^2\left(x^3-x^2+x-1\right)-m\left(x-1\right)+20\right]=\left(x+1\right).g\left(x\right)$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $f'\left(x\right)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$

- Nếu $x=-1$ không phải là nghiệm của $g\left(x\right)$ thì $f\left(x\right)$ sẽ đổi dấu khi x đi qua $x=-1$. Do đó điều kiện cần để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ là $x=-1$ phải là nghiệm của $g\left(x\right)=0$

$\Rightarrow -4m^2+2m+20=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2\\ m=\frac{5}{2}\end{array}\right.$.

- Với $m=-2$ thì $f'\left(x\right)=\left(x+1\right)^2\left(4x^2-8x+14\right)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, do đó $m=-2$ thỏa mãn.

- Với $m=\frac{5}{2}$ thì $f'\left(x\right)=\frac{1}{4}\left(x+1\right)^2\left(25x^2-50x+60\right)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, do đó $m=\frac{5}{2}$ thỏa mãn.

Vậy $S=\left\{\frac{5}{2};-2\right\}$, tổng các phần tử của S bằng $\frac{5}{2}-2=\frac{1}{2}$.

Câu 3: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2\left(\ln^4x-16\right)+3m\left(\ln^2x-4\right)-14\left(\ln x-2\right)\ge 0$ đúng với mọi $x\in\left(0;+\infty\right)$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng:

A. $-\frac{3}{8}$. **B.** -2. **C.** $-\frac{7}{8}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\ln x, t\in\mathbb{R}$ ta được

$f\left(t\right)=m^2\left(t^4-16\right)+3m\left(t^2-4\right)-14\left(t-2\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow\left(t-2\right)\left[m^2\left(t^3+2t^2+4t+8\right)+3m\left(t+2\right)-14\right]\ge 0\Leftrightarrow\left(t-2\right)g\left(t\right)\ge 0$

Ta có bất phương trình đã cho nghiệm đúng $\forall x\in\left(0;+\infty\right)\Leftrightarrow f\left(t\right)\ge 0,\forall t\in\mathbb{R}$.

- Nếu $t=2$ không phải là nghiệm của $g\left(t\right)$ thì $f\left(t\right)$ sẽ đổi dấu khi t đi qua $t=2$. Do đó điều kiện cần để $f\left(t\right)\ge 0,\ \forall t\in\mathbb{R}$ là $t=2$ phải là nghiệm của $g\left(t\right)=0$

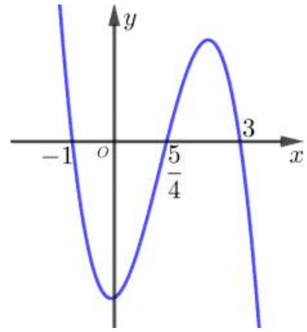
$\Rightarrow g\left(2\right)=0 \Leftrightarrow 32m^2+12m-14=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{1}{2} \\ m=-\dfrac{7}{8} \end{array}\right.$.

Với $m=\dfrac{1}{2}$ thì $f\left(t\right)=\dfrac{1}{4}\left(t-2\right)^2\left(t^2+4t+18\right)\geq 0, \forall t\in\mathbb{R}$ nên $m=\dfrac{1}{2}$ thoả mãn

Với $m=-\dfrac{7}{8}$ thì $f\left(t\right)=\dfrac{1}{64}\left(t-2\right)^2\left(49t^2+196t+420\right)\geq 0, \forall t\in\mathbb{R}$ nên $m=-\dfrac{7}{8}$ thoả mãn

Vậy $S=\left\{\dfrac{1}{2};-\dfrac{7}{8}\right\}$. Nên tổng các phần tử của S là $\dfrac{1}{2}-\dfrac{7}{8}=-\dfrac{3}{8}$.

Câu 50: Cho hàm số $f\left(x\right) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$, (với $m, n, p, q, r \in \mathbb{R}$). Hàm số $y = f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tập nghiệm của phương trình $f\left(x\right) = r$ có số phần tử là

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Đoàn Trí Dũng, Đinh Xuân Thạch, Tôn Thất Thái Sơn

Lời bình

Các câu hỏi liên quan đến giả thiết đồ thị của hàm $f'\left(x\right)$ ngày càng được mở rộng.

Câu hỏi không ở mức đánh đố, nhưng đòi hỏi ở người giải cần có kiến thức tốt ở phần đồ thị.

Chìa khóa của bài toán là giả thiết hàm số $f\left(x\right)$ có dạng cụ thể là bậc 4, nên $f'\left(x\right)$ là hàm bậc ba, từ đó ta dễ dàng tìm được dạng của hàm số $f'\left(x\right)$. Đến đây ta có hai hướng giải quyết:

Hướng 1: Do $r = f\left(0\right)$, đồng thời khi kẻ bảng biến thiên, ta thấy được một nhu cầu cần giải quyết là so sánh r và $f\left(3\right)$. Như vậy, ta có thể nghĩ đến việc dùng tích phân để so sánh, do $f\left(3\right) - f\left(0\right) = \int\limits_0^3 f'\left(x\right)\mathrm{d}x$ nên việc tính tích phân này cũng khá dễ. Tuy nhiên, ta vẫn phải dựa vào hàm số $f'\left(x\right)$ đã tìm từ trước, chứ không thể dùng diện tích hình phẳng, do hình vẽ rất khó so sánh diện tích.

Hướng 2: Đồng nhất hệ số của $f'\left(x\right)$ ta vừa tìm được với $f'\left(x\right)$ suy ra từ giả thiết. Từ đó, $f\left(x\right) = r$ chỉ đơn thuần là phương trình đại số thông thường. Đây là một hướng rất tự nhiên.

Lời giải

Chọn B

Cách 1. Ta có $f'\left(x\right) = 4mx^3 + 3nx^2 + 2px + q \quad \left(1\right)$

Dựa vào đồ thị $y = f'\left(x\right)$ ta thấy phương trình $f'\left(x\right) = 0$ có ba nghiệm đơn là -1, $\dfrac{5}{4}$, 3.

Do đó $f'\left(x\right) = m\left(x+1\right)\left(4x-5\right)\left(x-3\right)$ và $m < 0$.

Hay $f'\left(x\right) = 4mx^3 - 13mx^2 - 2mx + 15m \quad \left(2\right)$.

Từ (1) và (2) suy ra $n=-\dfrac{13}{3}m$, $p=-m$ và $q=15m$.

Khi đó phương trình $f(x)=r \Leftrightarrow mx^4+nx^3+px^2+qx=0$

$\Leftrightarrow m\left(x^4-\dfrac{13}{3}x^3-x^2+15x\right)=0$

$\Leftrightarrow 3x^4-13x^3-3x^2+45x=0$

$\Leftrightarrow x(3x+5)(x-3)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\dfrac{5}{3} \\ x=3 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $f(x)=r$ là $S=\left\{-\dfrac{5}{3};0;3\right\}$.

Cách 2.

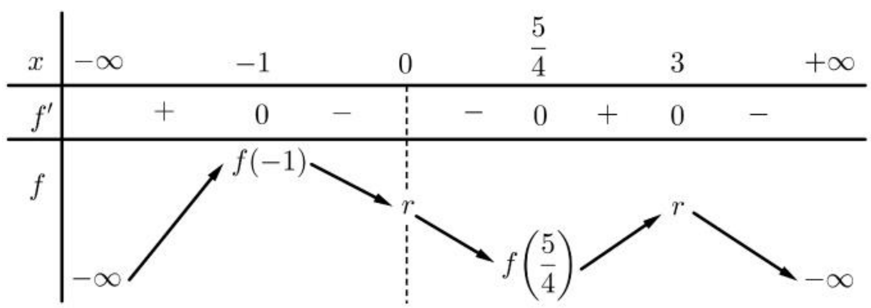
Dựa vào đồ thị $y=f'(x)$ ta thấy phương trình $f'(x)=0$ có ba nghiệm đơn là -1, $\dfrac{5}{4}$, 3.

Do đó $f'(x)=m(x+1)(4x-5)(x-3)$ và $m<0$.

$\Rightarrow f(3)-f(0)=\int_0^3 f'(x)\,\mathrm{d}x=m\int_0^3 (x+1)(4x-5)(x-3)\,\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow f(3)=f(0)=r$.

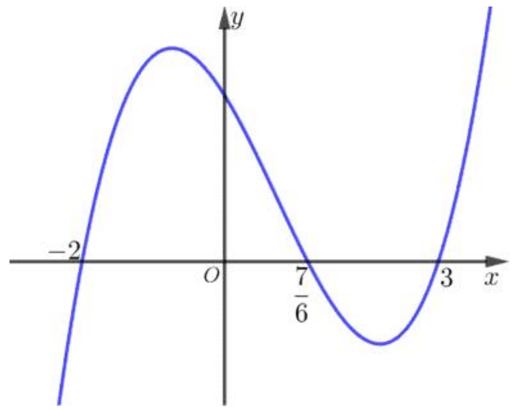
Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ như sau:



Vậy phương trình $f(x)=r$ có 3 nghiệm phân biệt.

CÂU TƯƠNG TỰ

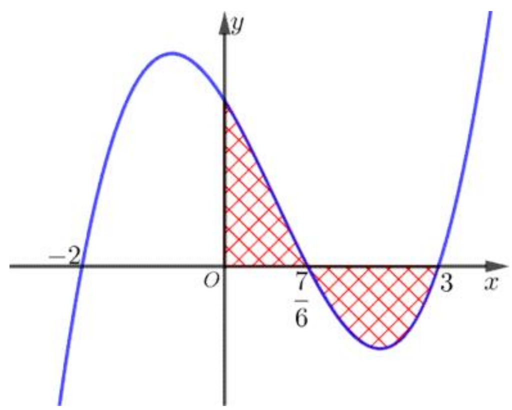
Câu 1: Cho hàm số $y = f\left(x\right) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$ trong đó $m, n, p, q, r \in \mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tập nghiệm của phương trình $f\left(x\right) = r$ có tất cả bao nhiêu phần tử?



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

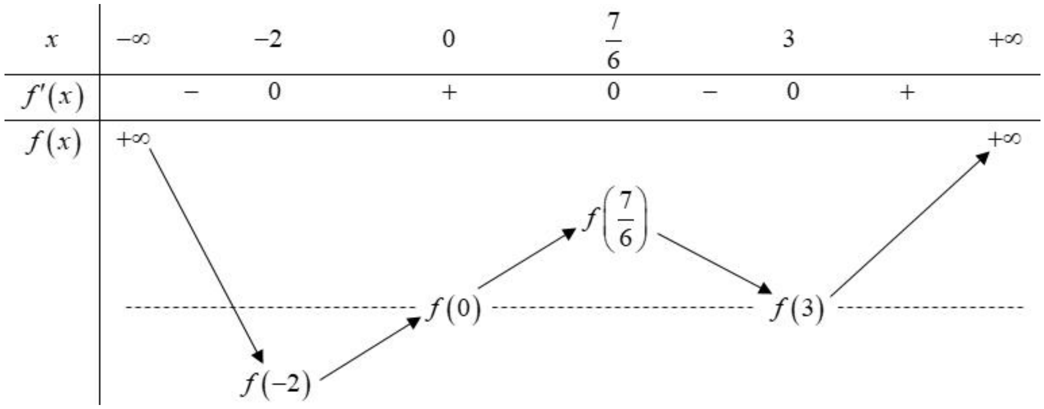


Ta đặt $y = f'\left(x\right) = k\left(x+2\right)\left(x-\frac{7}{6}\right)\left(x-3\right)$.

Xét: $\begin{cases} S_1 = \left|k\displaystyle\int_0^{\frac{7}{6}}\left(x+2\right)\left(x-\frac{7}{6}\right)\left(x-3\right)dx\right| = \dfrac{65219}{1552}k \\ S_2 = \left|k\displaystyle\int_{\frac{7}{6}}^{3}\left(x+2\right)\left(x-\frac{7}{6}\right)\left(x-3\right)dx\right| = \dfrac{65219}{1552}k \end{cases}$

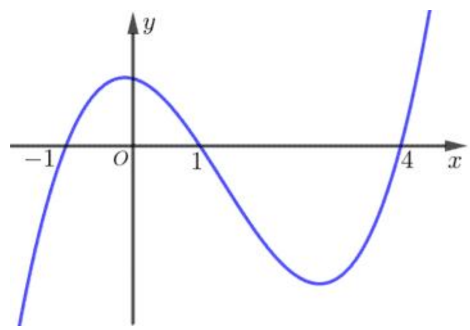
Do đó: $S_1 = S_2 \Leftrightarrow \displaystyle\int_0^{\frac{7}{6}} f'\left(x\right)dx = -\int_{\frac{7}{6}}^{3} f'\left(x\right)dx \Leftrightarrow f\left(0\right) = f\left(3\right)$.

Lập bảng biến thiên ta được:



Từ bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f\left(x\right)=r=f\left(0\right)$ có tất cả 3 nghiệm.

Câu 2: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$ trong đó $m,n,p,q,r\in\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tập nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=16m+8n+4p+2q+r$ có tất cả bao nhiêu phần tử?



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Ta đặt $y=f'\left(x\right)=k\left(x+1\right)\left(x-1\right)\left(x-4\right)$.

Xét:

$$\begin{cases} S_1=\left|k\int\limits_{-1}^{1}\left(x+1\right)\left(x-1\right)\left(x-4\right)dx\right|=\dfrac{16}{3}k \\ S_2=\left|k\int\limits_{1}^{2}\left(x+1\right)\left(x-1\right)\left(x-4\right)dx\right|=\dfrac{37}{12}k \end{cases}\Rightarrow S_1>S_2\Leftrightarrow\int\limits_{-1}^{1}f'\left(x\right)dx>-\int\limits_{1}^{2}f'\left(x\right)dx\Leftrightarrow f\left(2\right)>f\left(-1\right)$$

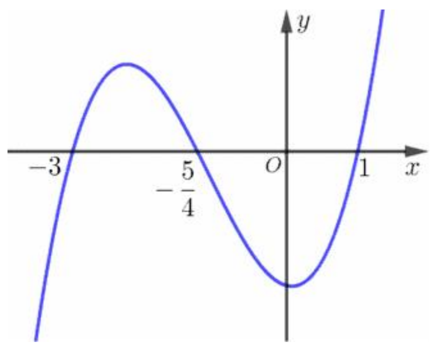
Lại thấy: $\int\limits_{-1}^{1}f'\left(x\right)dx<-\int\limits_{1}^{4}f'\left(x\right)dx\Rightarrow f\left(4\right)<f\left(-1\right)$.

Lập bảng biến thiên ta được:

x	$-\infty$		-1		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(2)$	$\searrow$	$f(4)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f(x) = 16m + 8n + 4p + 2q + r = f(2)$ có tất cả 4 nghiệm.

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + m$, (với $a, b, c, d, m \in \mathbb{R}$). Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tập nghiệm của phương trình $f(x) = m$ có số phần tử là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Ta có $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$ (1).

Dựa vào đồ thị ta có $f'(x) = a(x-1)(4x+5)(x+3) = 4ax^3 + 13ax^2 - 2ax - 15a$ (2) và $a \neq 0$.

Từ (1) và (2) suy ra $b = \frac{13}{3}a$, $c = -a$ và $d = -15a$.

Khi đó: $f(x) = m \Leftrightarrow ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx = 0 \Leftrightarrow a\left(x^4 + \frac{13}{3}x^3 - x^2 - 15x\right) = 0$

$$\Leftrightarrow 3x^4 + 13x^3 - 3x^2 - 45x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{5}{3} \\ x = -3 \end{array}\right. .$$

Vậy tập nghiệm của phương trình $f(x) = m$ là $S = \left\{\frac{5}{3}; 0; -3\right\}$.

Cách 2: Từ đồ thị ta có $a \neq 0$.

$$f\left(x\right) = m \Leftrightarrow ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + m = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \ \ (2) \end{array}\right.$$

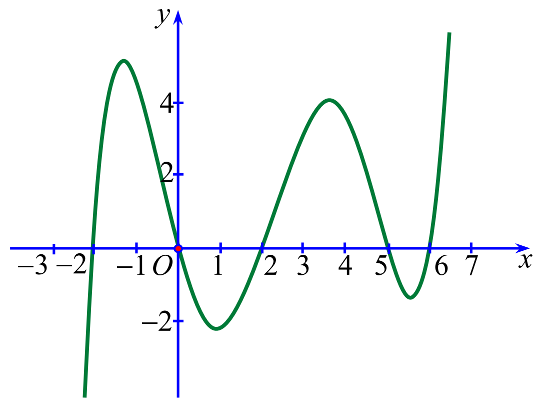
Ta có $f'\left(x\right) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$ có 3 nghiệm $x_1 = -3;\ x_2 = -\frac{5}{4};\ x_3 = 1$.

Áp dụng định lý Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{3b}{4a} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \dfrac{2c}{4a} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{4a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{13}{4} = -\dfrac{3b}{4a} \\ -\dfrac{1}{2} = \dfrac{2c}{4a} \\ \dfrac{15}{4} = -\dfrac{d}{4a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{13}{3}a \\ c = -a \\ d = -15a \end{cases}$.

Thế vào (2) ta có: $a\left(x^3 + \frac{13}{3}x^2 - x - 15\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = \dfrac{5}{3} \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $f\left(x\right) = m$ là $S = \left\{\frac{5}{3}; 0; -3\right\}$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:

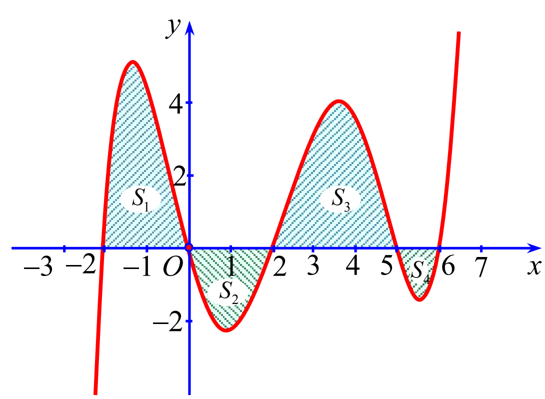


Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-2; 6\right]$ của phương trình $f\left(x\right) = f\left(0\right)$ là

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B



• Quan sát hình vẽ, ta có: $f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-2; 0; 2; 5; 6\right\}$.

• Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 lần lượt là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ với và trục hoành (hình vẽ trên).

• Ta có: $\int\limits_0^6 f'\left(x\right)\mathrm{d}x = f\left(6\right) - f\left(0\right) = S_3 - S_2 - S_4 > 0 \Rightarrow f\left(6\right) > f\left(0\right)$.

• Bảng biến thiên :

x	-2		0		2		5		6
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$f(-2)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(5)$	$\searrow$	$f(6)$

Vậy phương trình $f\left(x\right) = f\left(0\right)$ có đúng 2 nghiệm phân biệt trên $\left[-2;6\right]$.

Nhận xét: Tương tự ta cũng tìm được số nghiệm thuộc đoạn $\left[-2;6\right]$ của các phương trình $f\left(x\right) = f\left(2\right)$; $f\left(x\right) = f\left(6\right)$; $f\left(x\right) = f\left(5\right)$.