

**Câu I. (2,0 điểm)**

1) Cho hàm số  $y = \frac{2x+2}{x-1}$  có đồ thị  $(C)$  và đường thẳng  $(d)$  có phương trình  $y = -2x + m$  với  $m$  là tham số.

Tìm  $m$  để đường thẳng  $(d)$  cắt đồ thị  $(C)$  tại hai điểm  $A$  và  $B$  phân biệt sao cho  $AB = \sqrt{5}$ .

2) Cho hàm số  $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$  có đồ thị  $(C_m)$  với  $m$  là tham số. Tìm  $m$  để đồ thị  $(C_m)$  có 3 điểm cực trị là 3 đỉnh của tam giác vuông cân.

**Câu II. (2,0 điểm)**

1) Một nhóm 15 học sinh gồm 6 học sinh lớp A, 5 học sinh lớp B, 4 học sinh lớp C. Lấy ngẫu nhiên 7 học sinh trong nhóm trên. Tính xác suất để 7 học sinh lấy ra có đủ cả 3 lớp và số học sinh lớp B bằng số học sinh lớp C.

2) Giải phương trình:  $\frac{x^3 + 3x^2 - 4x + 1}{x^2 + 3} = \sqrt{x^2 - x + 1}$ .

**Câu III. (2,0 điểm)**

1) Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 2y^3 + 6y^2 + 7y + 3 + (3 - 2x)\sqrt{x - 2} = 0 \\ y + \sqrt{2y^2 + 4y + 3} = 3 + \sqrt{7 - x} \end{cases}$$

2) Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  có trọng tâm  $G$ ; gọi  $E, H$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC$ .  $D$  là điểm đối xứng với  $H$  qua  $A$ ,  $I$  là giao điểm của đường thẳng  $AB$  và đường thẳng  $CD$ . Biết  $D(-1; -1)$ , đường thẳng  $IG$  có phương trình  $6x - 3y - 7 = 0$  và điểm  $E$  có hoành độ bằng 1. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác  $ABC$ .

**Câu IV. (3,0 điểm)**

1) Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có cạnh đáy bằng  $a$ , góc giữa mặt phẳng  $(SAB)$  và mặt phẳng  $(ABCD)$  bằng  $60^\circ$ .

a) Tính thể tích khối chóp  $S.ABCD$  theo  $a$ .

b) Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $SAC$ ,  $M$  là điểm thuộc cạnh  $SB$  sao cho  $SM = \frac{1}{4}SB$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $GM$  và  $BC$ .

2) Cho hình lập phương  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$  có cạnh bằng  $a$ . Đường thẳng  $d$  đi qua  $D_1$  và tâm  $O$  của hình vuông  $BCC_1B_1$ . Đoạn thẳng  $MN$  có trung điểm  $K$  thuộc đường thẳng  $d$ , biết  $M$  thuộc mặt phẳng  $(BCC_1B_1)$ ,  $N$  thuộc mặt phẳng  $(ABCD)$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng  $MN$ .

**Câu V. (1,0 điểm)**

Cho  $a, b, c$  là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:  $P = \frac{a^2}{(a+b)^2} + \frac{b^2}{(b+c)^2} + \frac{4c^3}{3(c+a)^3}$ .

----- **HẾT** -----

*Giám thị coi thi không giải thích gì thêm./.*

**ĐÁP ÁN CHI TIẾT**

**Câu 1. (2 điểm)**

1) Cho hàm số  $y = \frac{2x+2}{x-1}$  có đồ thị  $(C)$  và đường thẳng  $(d)$  có phương trình  $y = -2x + m$  với  $m$  là tham số. Tìm  $m$  để đường thẳng  $(d)$  cắt đồ thị  $(C)$  tại hai điểm  $A$  và  $B$  phân biệt sao cho  $AB = \sqrt{5}$ .

**Lời giải**

Điều kiện  $x \neq 1$ .

Xét phương trình hoành độ giao điểm  $\frac{2x+2}{x-1} = -2x + m \Leftrightarrow 2x^2 - mx + m + 2 = 0 (x \neq 1) (1)$ .

Để đường thẳng  $(d)$  cắt đồ thị  $(C)$  tại hai điểm  $A$  và  $B$  phân biệt thì (1) phải có hai nghiệm

$$\text{phân biệt khác } 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8m - 16 > 0 \\ 2 \cdot 1 - m + m + 2 = 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 + 4\sqrt{2} \\ m < 4 - 4\sqrt{2} \end{cases} (2).$$

Với điều kiện (2) thì  $(d)$  cắt đồ thị  $(C)$  tại hai điểm  $A(x_A; -2x_A + m)$  và  $B(x_B; -2x_B + m)$

$$\text{phân biệt thỏa mãn } \begin{cases} x_A + x_B = \frac{m}{2} \\ x_A \cdot x_B = \frac{m+2}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Vì độ dài } AB = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{5(x_B - x_A)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x_A + x_B)^2 - 2x_A \cdot x_B = 1 \Leftrightarrow \frac{m^2}{4} - (m+2) = 1$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4m - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 6 \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện (2) ta thấy  $m = -2$  thỏa mãn.

2) Cho hàm số  $f(x) = x^4 - 2mx^2 + m - 1$  có đồ thị  $(C_m)$  với  $m$  là tham số. Tìm  $m$  để đồ thị  $(C_m)$  có 3 cực trị là 3 đỉnh của tam giác vuông cân.

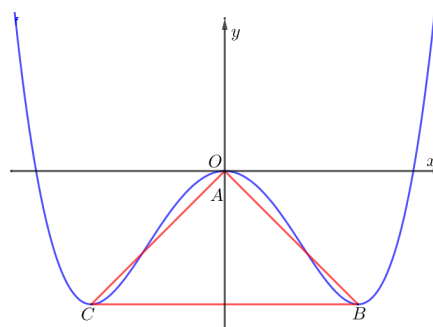
**Lời giải**

Ta có:  $y' = 4x^3 - 4mx$ .

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m} \end{cases}$$

Để đồ thị  $(C_m)$  có 3 cực trị  $\Leftrightarrow y' = 0$  có 3 nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow m > 0$ .

Với  $m > 0$  thì đồ thị  $(C_m)$  có 3 điểm cực trị lần lượt là  $A(0; m-1)$ ;  $B(-\sqrt{m}; -m^2 + m - 1)$ ;  $C(\sqrt{m}; -m^2 + m - 1)$ .



Ta có:  $\overrightarrow{AB} = (-\sqrt{m}; -m^2)$ ;  $\overrightarrow{AC} = (\sqrt{m}; -m^2)$

$$\text{Để tam giác } ABC \text{ vuông cân tại } A \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + m^4 = 0 \\ m^2 + m^4 = m^2 + m^4 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$$

Kết luận:  $m = 1$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 2. (2.0 điểm)**

1) Một nhóm 15 học sinh gồm 6 học sinh lớp A, 5 học sinh lớp B, 4 học sinh lớp C. Lấy ngẫu nhiên 7 học sinh trong nhóm trên. Tính xác suất để 7 học sinh lấy ra có đủ cả 3 lớp và số học sinh lớp B bằng số học sinh lớp C.

**Lời giải**

Số phần tử không gian mẫu:  $n(\Omega) = C_{15}^7 = 6435$

Gọi A là biến cố : “ 7 học sinh lấy ra có đủ cả 3 lớp và số học sinh lớp B bằng số học sinh lớp C” .

TH1: 3 học sinh lớp B, 3 học sinh lớp C, 1 học sinh lớp A:  $C_5^3 \cdot C_4^3 \cdot C_6^1 = 240$  (cách chọn)

TH2: 2 học sinh lớp B, 2 học sinh lớp C, 3 học sinh lớp A:  $C_5^2 \cdot C_4^2 \cdot C_6^3 = 1200$  (cách chọn)

TH3: 1 học sinh lớp B, 1 học sinh lớp C, 5 học sinh lớp A:  $C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_6^5 = 120$  (cách chọn)

$$n(A) = 240 + 1200 + 120 = 1560$$

$$\text{Xác suất của biến cố A là: } P(A) = \frac{1560}{6435} = \frac{8}{33}.$$

2) Giải phương trình  $\frac{x^3 + 3x^2 - 4x + 1}{x^2 + 3} = \sqrt{x^2 - x + 1}.$

**Lời giải**

Điều kiện  $x^2 - x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$

Ta có

$$\frac{x^3 + 3x^2 - 4x + 1}{x^2 + 3} = \sqrt{x^2 - x + 1}$$

$$\Leftrightarrow x + 3 - \frac{7x + 8}{x^2 + 3} = \sqrt{x^2 - x + 1}$$

$$\Leftrightarrow x + 3 - \sqrt{x^2 - x + 1} = \frac{7x + 8}{x^2 + 3} \quad (1)$$

Xét phương trình

$$x + 3 + \sqrt{x^2 - x + 1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} = -x - 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x - 3 \geq 0 \\ x^2 - x + 1 = x^2 + 6x + 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ 7x = -8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ x = -\frac{8}{7} \end{cases} \quad (1)$$

Do đó  $x + 3 + \sqrt{x^2 - x + 1} \neq 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}.$  Suy ra

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow \frac{(x+3)^2 - (x^2 - x + 1)}{x+3+\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{7x+8}{x^2+3} \\
 &\Leftrightarrow \frac{7x+8}{x+3+\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{7x+8}{x^2+3} \\
 &\Leftrightarrow (7x+8) \left( \frac{1}{x+3+\sqrt{x^2-x+1}} - \frac{1}{x^2+3} \right) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 7x+8=0 \\ x+3+\sqrt{x^2-x+1} = x^2+3 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{8}{7} \\ \sqrt{x^2-x+1} = x^2-x. \quad (*) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Đặt  $u = x^2 - x$ . Ta có  $(*) \Rightarrow \sqrt{u+1} = u \Leftrightarrow \begin{cases} u \geq 0 \\ u+1 = u^2 \end{cases} \Leftrightarrow u = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

Suy ra  $x^2 - x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{3+2\sqrt{5}}}{2}$ .

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là  $S = \left\{ -\frac{8}{7}; \frac{1 \pm \sqrt{3+2\sqrt{5}}}{2} \right\}$ .

**Câu 3. (2.0 điểm)**

1) Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 2y^3 + 6y^2 + 7y + 3 + (3-2x)\sqrt{x-2} = 0 & (1) \\ y + \sqrt{2y^2 + 4y + 3} = 3 + \sqrt{7-x} & (2) \end{cases}$$

**Lời giải**

Điều kiện :  $2 \leq x \leq 7$ .

Ta có (1)  $\Leftrightarrow 2(y^3 + 3y^2 + 3y + 1) + y + 1 = (2x-3)\sqrt{x-2}$

$\Leftrightarrow 2(y+1)^3 + y + 1 = 2(x-2)\sqrt{x-2} + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow 2(y+1)^3 + y + 1 = 2(\sqrt{x-2})^3 + \sqrt{x-2} \quad (3)$ .

Xét hàm số  $f(t) = 2t^3 + t$  với  $t \in \mathbb{R}$ .

Ta có:  $f'(t) = 6t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$  nên  $f(t)$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

Do (3)  $\Leftrightarrow f(y+1) = f(\sqrt{x-2}) \Leftrightarrow y+1 = \sqrt{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2 + 2y + 3 \quad (*) \\ y \geq -1 \end{cases}$ .

Thay (\*) vào (2), ta được

$y + \sqrt{2y^2 + 4y + 3} = 3 + \sqrt{7-x} \Leftrightarrow y-1 + \sqrt{2y^2 + 4y + 3} - 3 = \sqrt{4-y^2-2y} - 1$

$\Leftrightarrow y-1 + \frac{2y^2 + 4y - 6}{\sqrt{2y^2 + 4y + 3} + 3} = \frac{3 - y^2 - 2y}{\sqrt{4-y^2-2y} + 1}$

$\Leftrightarrow y-1 + \frac{(y-1)(2y+6)}{\sqrt{2y^2 + 4y + 3} + 3} = -\frac{(y-1)(y+3)}{\sqrt{4-y^2-2y} + 1}$

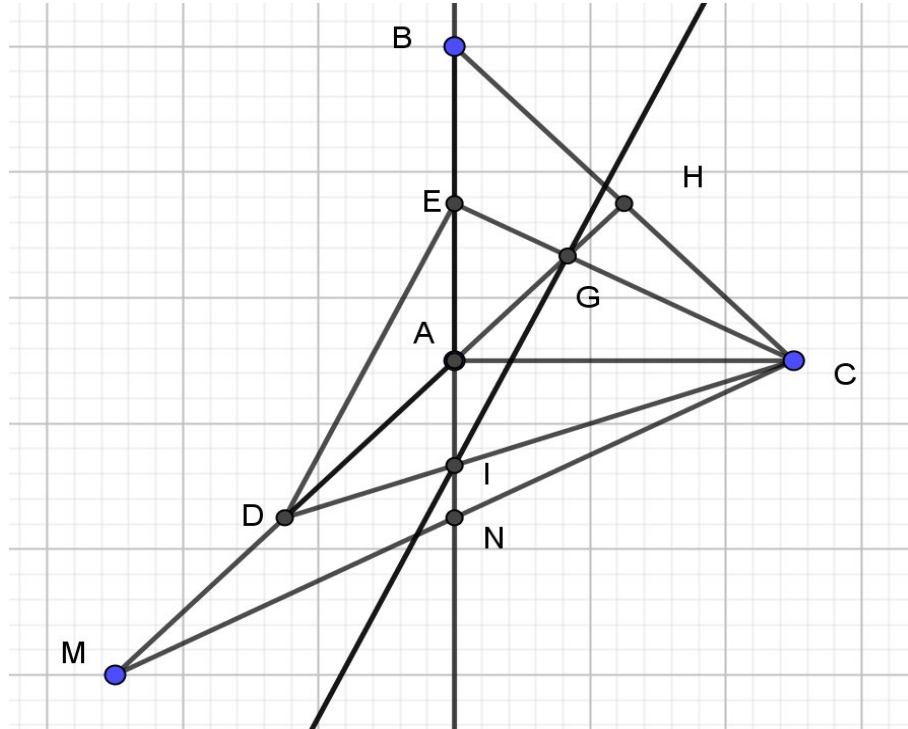
$\Leftrightarrow (y-1) \left( 1 + \frac{2y+6}{\sqrt{2y^2 + 4y + 3} + 3} + \frac{y+3}{\sqrt{4-y^2-2y} + 1} \right) = 0 \Leftrightarrow y=1 \Rightarrow x=6$ .

Vì với  $y \geq -1$  ta có  $1 + \frac{2y+6}{\sqrt{2y^2+4y+3}+3} + \frac{y+3}{\sqrt{4-y^2-2y+1}} > 0$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là  $(x; y) = (6; 1)$ .

2) Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  có trọng tâm  $G$ ; gọi  $E, H$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC$ .  $D$  là điểm đối xứng với  $H$  qua  $A$ ,  $I$  là giao điểm của đường thẳng  $AB$  và đường thẳng  $CD$ . Biết  $D(-1; -1)$ , đường thẳng  $IG$  có phương trình  $6x - 3y - 7 = 0$  và điểm  $E$  có hoành độ bằng 1. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác  $ABC$ .

**Lời giải**



Gọi  $N$  là điểm đối xứng với  $E$  qua  $A$ ,  $M$  là điểm đối xứng của  $A$  qua  $D$ . Khi đó  $I$  là trọng tâm của tam giác  $ACM$ .

Ta có  $\frac{CG}{CE} = \frac{CI}{CD} = \frac{2}{3} \Rightarrow IG \parallel DE$ .  $IG$  có véc tơ chỉ phương  $\vec{u} = (1; 2)$ .

Giả sử  $E(1; y_0) \Rightarrow \overrightarrow{DE} = (2; y_0 + 1)$ . Mà  $IG \parallel DE \Rightarrow \frac{y_0 + 1}{2} = \frac{2}{1} \Rightarrow y_0 = 3 \Rightarrow E(1; 3)$ .

Giả sử tọa  $A(a_1; b_1) \Rightarrow \begin{cases} B(2-a_1; 6-b_1) \\ H(2a_1+1; 2b_1+1) \end{cases} \Rightarrow C(5a_1; 5b_1-4) \Rightarrow G\left(\frac{5a_1+2}{3}; \frac{5b_1+2}{3}\right)$ .

Do  $G \in GI \Rightarrow 2a_1 - b_1 - 1 = 0 \Rightarrow b_1 = 2a_1 - 1$  (1). Ta có  $\overrightarrow{AE} = (1-a_1; 3-b_1)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (4a_1; 4b_1-4)$ .

Do tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  nên ta có

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow 4a_1(1-a_1) + (4b_1-4)(3-b_1) = 0 \Leftrightarrow a_1(1-a_1) + (b_1-1)(3-b_1) = 0$$
 (2).

$$\text{Từ (1) và (2) ta được } a_1(1-a_1) + (2a_1-2)(4-2a_1) = 0 \Leftrightarrow (a_1-1)(8-5a_1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_1 = \frac{8}{5} \end{cases}.$$

Với  $a_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1 \Rightarrow A(1; 1), B(1; 5), C(5; 1)$ .

Với  $a_1 = \frac{8}{5} \Rightarrow b_1 = \frac{11}{5} \Rightarrow A\left(\frac{8}{5}; \frac{11}{5}\right), B\left(\frac{2}{5}; \frac{19}{5}\right), C(8; 7)$ .

**Câu 4. (3.0 điểm)**

1) Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có cạnh đáy bằng  $a$ , góc giữa mặt phẳng  $(SAB)$  và mặt phẳng  $(ABCD)$  bằng  $60^\circ$ .

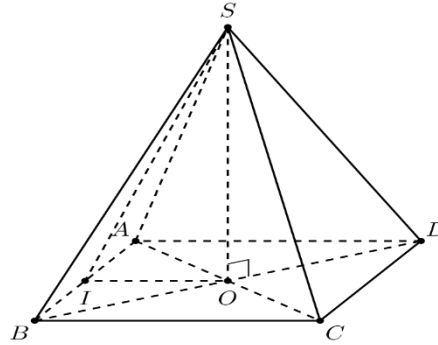
a) Tính thể tích khối chóp  $S.ABCD$  theo  $a$ .

b) Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $SAC$ ,  $M$  là điểm thuộc cạnh  $SB$  sao cho  $SM = \frac{1}{4}SB$ .

Tính góc giữa hai đường thẳng  $GM$  và  $BC$ .

**Lời giải**

a) Tính thể tích khối chóp  $S.ABCD$  theo  $a$ .



Gọi  $O$  là tâm của hình vuông  $ABCD$ , theo giả thiết ta có  $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp AB$ . (1)

Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$ . Suy ra  $OI = \frac{1}{2}AD = \frac{a}{2}$  và  $OI \perp AB$ . (2)

Từ (1) và (2) ta có  $AB \perp (SIO) \Rightarrow ((SAB), (ABCD)) = \widehat{SIO}$ .

Từ giả thiết ta có  $\widehat{SIO} = 60^\circ$ , do đó  $SO = IO \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Vậy thể tích khối chóp  $S.ABCD$  bằng  $V = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ .

b) Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $SAC$ ,  $M$  là điểm thuộc cạnh  $SB$  sao cho  $SM = \frac{1}{4}SB$ .

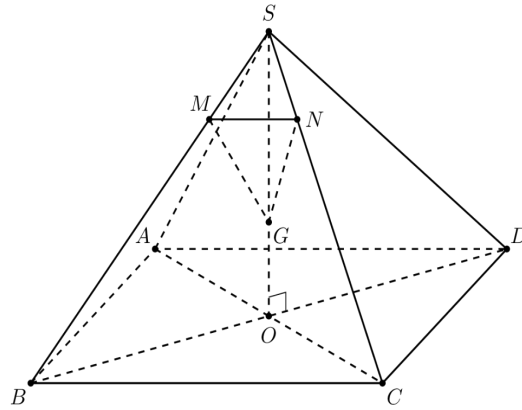
Tính góc giữa hai đường thẳng  $GM$  và  $BC$ .

Qua  $M$  vẽ đường thẳng song song với  $BC$ , cắt  $SC$  tại  $N$ , khi đó ta có  $SN = \frac{1}{4}SC$ .

Ta có

$$SB = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow SM = \frac{1}{4}SB = \frac{a\sqrt{5}}{8} \quad \text{và} \quad SG = \frac{2}{3}SO = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad \text{do} \quad \text{đó}$$

$$\cos \widehat{GSM} = \frac{SO}{SB} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}.$$



Áp dụng định lý côsin trong tam giác  $GMN$  ta có

$$MG^2 = SM^2 + SG^2 - 2SM \cdot SG \cos \widehat{GSM} = \frac{5a^2}{64} + \frac{a^2}{3} - 2 \cdot \frac{a\sqrt{5}}{8} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{31a^2}{192} \Rightarrow MG = \frac{a\sqrt{93}}{24}.$$

Xét tam giác  $GMN$  có  $MN = \frac{1}{4}BC = \frac{a}{4}$ ,  $GM = GN = \frac{a\sqrt{93}}{24}$ .

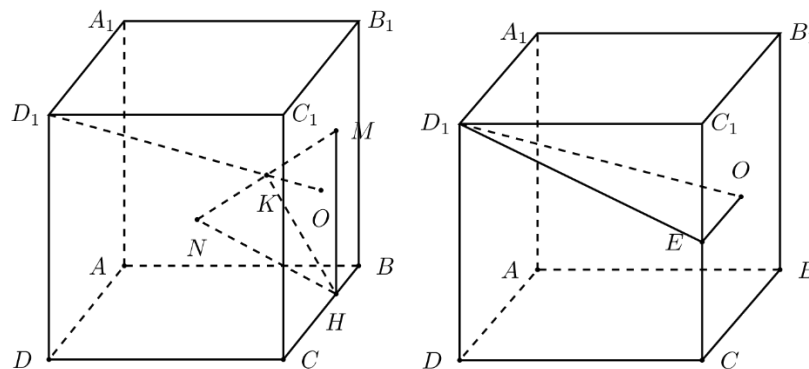
Áp dụng định lý côsin ta có

$$\cos \widehat{GMN} = \frac{MG^2 + MN^2 - GN^2}{2MG \cdot MN} = \frac{MN}{2MG} = \frac{\sqrt{93}}{31} > 0$$

Vì  $MN \parallel BC$  và góc  $\widehat{GMN}$  nhọn nên  $\cos(GM, BC) = \cos(GM, MN) = \cos \widehat{GMN} = \frac{\sqrt{93}}{31}$ .

2) Cho hình lập phương  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$  có cạnh bằng  $a$ . Đường thẳng  $d$  đi qua  $D_1$  và tâm  $O$  của hình vuông  $BCC_1B_1$ . Đoạn thẳng  $MN$  có trung điểm  $K$  thuộc đường thẳng  $d$ , biết  $M$  thuộc mặt phẳng  $(BCC_1B_1)$ ,  $N$  thuộc mặt phẳng  $(ABCD)$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng  $MN$ .

**Lời giải**



Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $M$  trên  $BC$ .

Vì hai mặt phẳng  $(ABCD)$  và  $(BCC_1B_1)$  vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến  $BC$  nên ta có  $MH \perp (ABCD) \Rightarrow MH \perp HN$ .

Tam giác  $MHN$  vuông tại  $H$ ,  $K$  là trung điểm cạnh huyền  $MN$  nên ta có  $MN = 2KH$ .

Do đó  $MN$  nhỏ nhất khi và chỉ khi  $KH$  nhỏ nhất, tức là khi  $KH$  là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng  $d$  và  $BC$ .

Gọi  $E$  là trung điểm  $CC_1$ , khi đó  $BC \parallel OE$  cho nên

$$d(D_1O, BC) = d(BC, (D_1OE)) = d(C, (D_1OE)).$$



Vì  $OE \parallel BC$  và  $BC \perp (CDD_1C_1)$  nên  $(CDD_1C_1) \perp (D_1OE)$ , do đó

$$d(C, (D_1OE)) = d(C, D_1E) = d(C_1, D_1E) = \frac{C_1D_1 \cdot C_1E}{\sqrt{C_1D_1^2 + C_1E^2}} = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

Khi  $KH$  là đoạn vuông góc chung của  $D_1O$  và  $BC$ , khi đó với  $M \in (BCC_1B_1)$  thỏa mãn  $MH \perp BC$  và  $KH = KM$ , ta lấy  $N$  sao cho  $K$  là trung điểm  $MN$ . Suy ra tam giác  $MHN$  vuông tại  $N$ .

Vì  $MH \perp (ABCD)$  và  $MH \perp HN$  nên  $N \in (ABCD)$ .

Vậy giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng  $MN$  bằng  $\frac{2a}{\sqrt{5}}$ .

**Câu 5. (1.0 điểm)**

Cho  $a, b, c$  là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^2}{(a+b)^2} + \frac{b^2}{(b+c)^2} + \frac{4c^3}{3(c+a)^3}.$$

**Lời giải**

♦ Ta có  $P = \frac{a^2}{(a+b)^2} + \frac{b^2}{(b+c)^2} + \frac{4c^3}{3(c+a)^3} = \frac{1}{\left(1+\frac{b}{a}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+\frac{c}{b}\right)^2} + \frac{4}{3\left(1+\frac{a}{c}\right)^3}.$

♦ Đặt  $x = \frac{b}{a}, y = \frac{c}{b}, z = \frac{a}{c}; x, y, z > 0; xyz = 1.$

♦ Khi đó  $P = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{4}{3(1+z)^3}.$

♦ Ta đi chứng minh bất đẳng thức phụ:  $\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{1+xy}.$

Thật vậy:

Theo bất đẳng thức Bunhiacopski cho 2 số ta có:  $(ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2).$

Từ đó  $(1+x)^2 = \left(1 \cdot 1 + \sqrt{xy} \cdot \sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2 \leq (1+xy)\left(1+\frac{x}{y}\right) = (1+xy)\left(\frac{x+y}{y}\right).$

Hay  $\frac{1}{(1+x)^2} \geq \frac{y}{(1+xy)(x+y)}.$  Tương tự  $\frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{x}{(1+xy)(x+y)}.$

Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều ta được:  $\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{1+xy}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi  $x = y = 1.$

♦ Áp dụng bất đẳng thức trên ta có:

$$P \geq \frac{1}{1+xy} + \frac{4}{3(1+z)^3} = \frac{z}{1+z} + \frac{4}{3(1+z)^3} = \frac{3z(1+z)^2 + 4}{3(1+z)^3}.$$

♦ Ta đi chứng minh  $P \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{3z(1+z)^2 + 4}{3(1+z)^3} \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow (z-1)^2(z+2) \geq 0$  luôn đúng.

----- TOANMATH.com -----