

A. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

	Hệ trục tọa độ Oxyz: Hệ trục gồm ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc nhau. Trục Ox: trục hoành, có vector đơn vị $\vec{i} = (1; 0; 0)$. Trục Oy: trục tung, có vector đơn vị $\vec{j} = (0; 1; 0)$. Trục Oz: trục cao, có vector đơn vị $\vec{k} = (0; 0; 1)$. Điểm $O(0; 0; 0)$ là gốc tọa độ. Tọa độ vector: Vector $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Leftrightarrow \vec{u} = (x; y; z)$. $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Ta có:
$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$	$\vec{a}$ cùng phương
$k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$	$\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \quad (k \in \mathbb{R})$
$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$	$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}, \quad (b_1, b_2, b_3 \neq 0).$
$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$	$ \vec{a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$	$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \cdot \vec{b} } = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$
Tọa độ điểm: $M(x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x; y; z)$. Cho $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, $C(x_C; y_C; z_C)$, ta có:	
$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$	$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
Toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB: $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right).$	Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC: $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$
QUY TẮC CHIẾU ĐẶC BIỆT	
Chiếu điểm trên trục tọa độ	Chiếu điểm trên mặt phẳng tọa độ
Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x)]{\text{Chiếu vào } Ox} M_1(x_M; 0; 0)$	Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x, y)]{\text{Chiếu vào } Oxy} M_1(x_M; y_M; 0)$
Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } y)]{\text{Chiếu vào } Oy} M_2(0; y_M; 0)$	Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } y, z)]{\text{Chiếu vào } Oyz} M_2(0; y_M; z_M)$
Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } z)]{\text{Chiếu vào } Oz} M_3(0; 0; z_M)$	Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x, z)]{\text{Chiếu vào } Oxz} M_3(x_M; 0; z_M)$
Đối xứng điểm qua trục tọa độ	Đối xứng điểm qua mặt phẳng tọa độ
$M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x; \text{ đổi dấu } y, z)]{\text{Đối xứng qua } Ox} M_1(x_M; -y_M; -z_M)$	$M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x, y; \text{ đổi dấu } z)]{\text{Đối xứng qua } Oxy} M_1(x_M; y_M; -z_M)$
$M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } y; \text{ đổi dấu } x, z)]{\text{Đối xứng qua } Oy} M_2(-x_M; y_M; -z_M)$	$M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x, z; \text{ đổi dấu } y)]{\text{Đối xứng qua } Oyz} M_2(x_M; -y_M; z_M)$
$M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } z; \text{ đổi dấu } x, y)]{\text{Đối xứng qua } Oz} M_3(-x_M; -y_M; z_M)$	$M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } y, z; \text{ đổi dấu } x)]{\text{Đối xứng qua } Oxz} M_3(-x_M; y_M; z_M)$

4. Tích có hướng của hai vector:			
Định nghĩa: Cho $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, tích có hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là: $[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1).$			
Tính chất:	$[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}$	$[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{b}$	$ \vec{a}, \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$
Điều kiện cùng phương của hai vector $\vec{a}$ & $\vec{b}$ là $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$ với $\vec{0} = (0; 0; 0)$.		Điều kiện đồng phẳng của ba vector $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ là $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$.	
Diện tích hình bình hành $ABCD$: $S_{\square ABCD} = [\vec{AB}, \vec{AD}] $.		Diện tích tam giác ABC : $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} [\vec{AB}, \vec{AC}] $.	
Thể tích khối hộp : $V_{ABCD.A'B'C'D'} = [\vec{AB}, \vec{AD}] \cdot \vec{AA'} $.		Thể tích tứ diện : $V_{ABCD} = \frac{1}{6} [\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} $.	

CÂU HỎI CÙNG MỨC ĐỘ ĐỀ MINH HỌA

- Câu 1.** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; -2; 1)$ trên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là
A. $(2; 0; 1)$. **B.** $(2; -2; 0)$. **C.** $(0; -2; 1)$. **D.** $(0; 0; 1)$.
- Câu 2.** Trong không gian $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (1; 0; 3)$ và $\vec{b} = (-2; 2; 5)$. Tích vô hướng $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ bằng
A. 25. **B.** 23. **C.** 27. **D.** 29.
- Câu 3.** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 1; -1)$ trên mặt phẳng (Ozx) có tọa độ là
A. $(0; 1; 0)$. **B.** $(2; 1; 0)$. **C.** $(0; 1; -1)$. **D.** $(2; 0; -1)$.
- Câu 4.** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 1; -1)$ trên trục Oy có tọa độ là
A. $(0; 0; -1)$. **B.** $(2; 0; -1)$. **C.** $(0; 1; 0)$. **D.** $(2; 0; 0)$.
- Câu 5.** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; -1; 1)$ trên trục Oz có tọa độ là
A. $(3; 0; 0)$. **B.** $(3; -1; 0)$. **C.** $(0; 0; 1)$. **D.** $(0; -1; 0)$.
- Câu 6.** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; 1; -1)$ trên trục Oy có tọa độ là
A. $(0; 1; 0)$. **B.** $(3; 0; 0)$. **C.** $(0; 0; -1)$. **D.** $(3; 0; -1)$.
- Câu 7.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; -1)$ và $B(2; 3; 2)$. Vectơ $\vec{AB}$ có tọa độ là
A. $(1; 2; 3)$. **B.** $(-1; -2; 3)$. **C.** $(3; 5; 1)$. **D.** $(3; 4; 1)$.
- Câu 8.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -4; 3)$ và $B(2; 2; 7)$. Trung điểm của đoạn AB có tọa độ là
A. $(1; 3; 2)$. **B.** $(2; 6; 4)$. **C.** $(2; -1; 5)$. **D.** $(4; -2; 10)$.
- Câu 9.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; -2; 3)$ và $B(-1; 2; 5)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .
A. $I(-2; 2; 1)$. **B.** $I(1; 0; 4)$. **C.** $I(2; 0; 8)$. **D.** $I(2; -2; -1)$.

- Câu 10.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$, B và $\overline{AB}(1;3;1)$. Xác định tọa độ B
A. $(2;5;0)$. **B.** $(0;-1;-2)$. **C.** $(0;1;2)$. **D.** $(-2;-5;0)$.
- Câu 11.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{a} = (3;2;1)$, $\vec{b} = (-2;0;1)$. Độ dài của véc-tơ $\vec{a} + \vec{b}$ bằng
A. 1. **B.** 3. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 2.
- Câu 12.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;2;5)$, $B(-2;0;1)$, $C(5;-8;6)$. Tìm tọa độ trọng tâm điểm G của tam giác ABC .
A. $G(1;-2;-4)$. **B.** $G(-1;2;-4)$. **C.** $G(1;-2;4)$. **D.** $G(3;-6;12)$.
- Câu 13.** Cho $\vec{a} = (2;1;3)$, $\vec{b} = (4;-3;5)$ và $\vec{c} = (-2;4;6)$. Tọa độ của véc-tơ $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ là
A. $(10;9;6)$. **B.** $(12;-9;7)$. **C.** $(10;-9;6)$. **D.** $(12;-9;6)$.
- Câu 14.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 3$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$. Độ dài vector $3\vec{a} - 2\vec{b}$ bằng
A. 9. **B.** 1. **C.** 6. **D.** 54.
- Câu 15.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1;1;2)$ và $B(3;4;5)$. Tọa độ vector $\overline{AB}$ là
A. $(4;5;3)$. **B.** $(2;3;3)$. **C.** $(-2;-3;3)$. **D.** $(2;-3;-3)$.
- Câu 16.** Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-3;4;0)$ và $\vec{b} = (5;0;12)$. Côsin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng
A. $\frac{3}{13}$. **B.** $\frac{5}{6}$. **C.** $-\frac{5}{6}$. **D.** $-\frac{3}{13}$.
- Câu 17.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vector $\vec{u} = (3;0;1)$ và $\vec{v} = (2;1;0)$. Tính tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v}$?
A. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$. **B.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$. **C.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. **D.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6$.
- Câu 18.** Cho điểm $M(1;2;-3)$. Hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (Oxy) là điểm
A. $M'(1;0;-3)$. **B.** $M'(0;2;-3)$. **C.** $M'(1;2;0)$. **D.** $M'(1;2;3)$.
- Câu 19.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(-3;1;2)$. Tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua trục Oy là
A. $(3;-1;-2)$. **B.** $(3;-1;2)$. **C.** $(3;1;-2)$. **D.** $(-3;-1;2)$.
- Câu 20.** Cho hai véc-tơ $\vec{a} = (1;-2;3)$, $\vec{b} = (-2;1;2)$. Khi đó tích vô hướng $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$ bằng
A. 12. **B.** 2. **C.** 11. **D.** 10.
- Câu 21.** Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1;2;1)$ và $\vec{b} = (-1;3;0)$. Vector $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$ có tọa độ là
A. $(1;7;2)$. **B.** $(1;5;2)$. **C.** $(3;7;2)$. **D.** $(1;7;3)$.
- Câu 22.** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(4;2;-1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A lên trục Ox là điểm
A. $M(0;2;-1)$. **B.** $M(-4;0;0)$. **C.** $M(4;0;0)$. **D.** $M(4;-2;1)$.
- Câu 23.** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của $A(2;3;1)$ lên trục tọa độ $x'Ox$ là
A. $Q(-2;0;0)$. **B.** $R(0;0;1)$. **C.** $S(0;3;1)$. **D.** $P(2;0;0)$.
- Câu 24.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(3;-4;0)$, $B(-1;1;3)$, $C(3;1;0)$. Tìm tọa độ điểm D trên trục hoành sao cho $AD = BC$.

A. $D(-2;1;0), D(-4;0;0)$

B. $D(0;0;0), D(-6;0;0)$

C. $D(6;0;0), D(12;0;0)$

D. $D(0;0;0), D(6;0;0)$

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;3;1)$ và $B(5; 6; 2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M . Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$.

A. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$

B. $\frac{AM}{BM} = 2$

C. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$

D. $\frac{AM}{BM} = 3$

Câu 26. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (2;1;0)$ và $\vec{b} = (-1;0;-2)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{25}$

B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{5}$

C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{25}$

D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{5}$

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $M(2;3;-1)$, $N(-1;1;1)$ và $P(1;m-1;2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .

A. $m = -6$.

B. $m = 0$.

C. $m = -4$.

D. $m = 2$.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$ và $D(1;-1;1)$, tọa độ điểm C là:

A. $(2;0;2)$.

B. $(2;2;2)$.

C. $(2;-2;2)$.

D. $(0;-2;0)$.

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (2;m-1;3)$, $\vec{b} = (1;3;-2n)$. Tìm m, n để các vector $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.

A. $m = 7; n = -\frac{3}{4}$.

B. $m = 4; n = -3$.

C. $m = 2; n = 0$.

D. $m = 7; n = -\frac{4}{3}$.

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vector $\vec{u} = (1;1;-2)$, $\vec{v} = (1;0;m)$. Tìm tất cả giá trị của m để góc giữa hai vector $\vec{u}, \vec{v}$ bằng 45° .

A. $m = 2$.

B. $m = 2 \pm \sqrt{6}$.

C. $m = 2 - \sqrt{6}$.

D. $m = 2 + \sqrt{6}$.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tọa độ của đỉnh A' là

A. $A' = (4;5;-6)$.

B. $A' = (3;4;-1)$.

C. $A' = (3;5;-6)$.

D. $A' = (3;5;6)$.

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;2;-2)$; $B(3;-3;3)$. Điểm M trong không gian thỏa mãn $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$. Khi đó độ dài OM lớn nhất bằng

A. $6\sqrt{3}$.

B. $12\sqrt{3}$.

C. $5\sqrt{3}$.

D. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;3;1)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;1)$. Tìm tất cả các điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và diện tích tứ giác $ABCD$ bằng 3 lần diện tích tam giác ABC .

A. $D(-12;-1;3)$.

B. $\begin{bmatrix} D(-8;-7;1) \\ D(12;1;-3) \end{bmatrix}$.

C. $D(8;7;-1)$.

D. $\begin{bmatrix} D(8;7;-1) \\ D(-12;-1;3) \end{bmatrix}$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;-2;0)$, $B(1;0;-1)$ và $C(0;-1;2)$, $D(0;m;k)$. Hệ thức giữa m và k để bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng là:

A. $2m - 3k = 0$.

B. $m + 2k = 3$.

C. $m + k = 1$.

D. $2m + k = 0$.

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(1;-3;-5)$ trên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

- A. $(0; -3; 5)$. B. $(0; -3; 0)$. C. $(1; -3; 0)$. D. $(0; -3; -5)$.

Câu 36. Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(-2; 4; 1)$ và $B(4; 5; 2)$. Điểm C thỏa mãn $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BA}$ có tọa độ là

- A. $(-6, -1, -1)$. B. $(-2, -9, -3)$. C. $(6, 1, 1)$. D. $(2, 9, 3)$.

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho các véc tơ $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = (m; 2; m+1)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m để $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

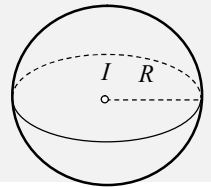
- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho $M(-1; 2; 3)$ và $N(1; 0; 2)$. Tìm tọa độ điểm P thỏa mãn $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{PM}$?

- A. $P(-2; 3; 7)$. B. $P(-4; 6; 7)$. C. $P(-2; 3; \frac{7}{2})$. D. $P(-2; -3; \frac{7}{2})$.

B. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

- Mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ và có bán kính R có phương trình $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.
- Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ là phương trình của mặt cầu có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.
- Để một phương trình là một phương trình mặt cầu, cần thỏa mãn hai điều kiện: Hệ số trước x^2, y^2, z^2 phải bằng nhau và $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.



B1. XÁC ĐỊNH TÂM VÀ BÁN KÍNH

Câu 39. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$. Tâm của (S) có tọa độ là

- A. $(-1; -2; -3)$. B. $(1; 2; 3)$. C. $(-1; 2; -3)$. D. $(1; -2; 3)$.

Câu 40. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+4)^2 + (z-1)^2 = 9$. Tâm của (S) có tọa độ là

- A. $(-2; 4; -1)$. B. $(2; -4; 1)$. C. $(2; 4; 1)$. D. $(-2; -4; -1)$.

Câu 41. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x+3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 2$. Tâm của (S) có tọa độ là

- A. $(3; 1; -1)$ B. $(3; -1; 1)$ C. $(-3; -1; 1)$ D. $(-3; 1; -1)$

Câu 42. Trong không gian hệ tọa độ Oxyz, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + m = 0$ là phương trình của một mặt cầu.

- A. $m \leq 6$ B. $m > 6$ C. $m < 6$ D. $m \geq 6$

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x-5)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$. Tính bán kính R của (S) .

- A. $R=3$ B. $R=18$ C. $R=9$ D. $R=6$

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$. Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của (S)

- A. $I(-1; 2; 1)$ và $R=3$ B. $I(1; -2; -1)$ và $R=3$ C. $I(-1; 2; 1)$ và $R=9$ D. $I(1; -2; -1)$ và $R=9$

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 25$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là

A. $I(2;3;-1); R=25$. B. $I(-2;-3;1); R=25$. C. $I(2;3;-1); R=5$. D. $I(-2;-3;1); R=5$.

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ phương trình nào sau đây không phải là phương trình của một mặt cầu?

A. $x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y + 4z - 3 = 0$. B. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - x - y - z = 0$.
C. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x + 8y + 6z + 3 = 0$. D. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z + 10 = 0$.

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 8$. Khi đó tâm I và bán kính R của mặt cầu là

A. $I(3;-1;-2), R=2\sqrt{2}$. B. $I(-3;1;2), R=2\sqrt{2}$.
C. $I(-3;1;2), R=4$. D. $I(3;-1;-2), R=4$.

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z - 25 = 0$. Tìm tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) .

A. $I(-2;4;-4); R=\sqrt{29}$. B. $I(-1;2;-2); R=5$.
C. $I(1;-2;2); R=\sqrt{34}$. D. $I(1;-2;2); R=6$.

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 10y - 6z + 49 = 0$. Tính bán kính R của mặt cầu (S) .

A. $R=\sqrt{151}$. B. $R=\sqrt{99}$. C. $R=1$. D. $R=7$.

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z - 7 = 0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

A. 9. B. 3. C. $\sqrt{15}$. D. $\sqrt{7}$.

Câu 51. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

A. $\sqrt{7}$. B. 9. C. 3. D. $\sqrt{15}$.

Câu 52. Trong không gian $Oxyz$, có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 + 4mx + 2my - 2mz + 9m^2 - 28 = 0$ là phương trình của mặt cầu?

A. 7. B. 8. C. 9. D. 6.

Câu 53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;a;1)$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z - 9 = 0$. Tập các giá trị của a để điểm A nằm trong khối cầu là

A. $(-3;1)$. B. $(-1;3)$. C. $(-\infty;-1) \cup (3;+\infty)$. D. $[-1;3]$.

B2. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

① **Dạng 1. Cơ bản** $(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(a;b;c) \\ \text{BK: } R \end{cases} \Rightarrow (S): \boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2}$.

② **Dạng 2. Viết phương trình mặt cầu** (S) có tâm I và đi qua điểm A .

Phương pháp: $(S): \begin{cases} \text{Tâm } I \\ \text{BK: } R = IA \end{cases}$ (dạng 1)

③ **Dạng 3. Viết phương trình mặt cầu** (S) có đường kính AB , với A, B cho trước.

Phương pháp: $(S): \begin{cases} \text{Tâm } I \text{ là trung điểm của } AB. \\ \text{BK: } R = \frac{1}{2}AB \end{cases}$

④ **Dạng 4. Viết phương trình mặt cầu** (S) có tâm I và tiếp xúc với các trục và mp tọa độ.

Phương pháp: $(S) : \begin{cases} \bullet \text{ Tâm } I \\ \bullet BK : R = IM \end{cases}$ với M là hình chiếu của I lên trục hoặc mp tọa

⑤ **Dạng 5.** Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) .

Phương pháp: $(S) : \begin{cases} \bullet \text{ Tâm } I \\ \bullet BK : R = d[I; (P)] \end{cases}$

• Khoảng cách từ điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ đến mặt phẳng $(P) : ax + by + cz + d = 0$ được xác định

bởi công thức:
$$d(M; (P)) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

⑥ **Dạng 6.** Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm A, B, C, D .

Phương pháp: Gọi $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Vì $A, B, C, D \in (S)$ nên tìm được 4 phương trình $\Rightarrow a, b, c, d \Rightarrow (S)$.

⑦ **Dạng 7.** Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua 3 điểm A, B, C và tâm thuộc mp (P) .

Phương pháp: Gọi $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Vì $A, B, C \in (S)$ nên tìm được 3 phương trình và $I(a; b; c) \in (P)$ là phương trình thứ tư.

Giải hệ bốn phương trình này $\Rightarrow a, b, c, d \Rightarrow (S)$.

⑧ **Dạng 8.** Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính r .

Phương pháp: Dựa vào mối liên hệ $R^2 = d^2_{[I; (P)]} + r^2$ và cần nhớ $C = 2\pi r$ và $S_{\text{đt}} = \pi r^2$.

Câu 54. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0; 0; -3)$ và đi qua điểm $M(4; 0; 0)$.

Phương trình của (S) là

A. $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 25$.

B. $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 5$.

C. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 25$.

D. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 5$.

Câu 55. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $I(1; 1; 1)$ và $A(1; 2; 3)$. Phương trình của mặt cầu có tâm I và đi qua điểm A là

A. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 29$.

B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$.

C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25$.

D. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 5$.

Câu 56. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3), B(5; 4; -1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9$.

B. $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 6$.

C. $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 = 9$.

D. $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 36$.

Câu 57. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $I(2; 3; 4)$ và $A(1; 2; 3)$. Phương trình mặt cầu tâm I và đi qua A có phương trình là:

A. $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z+4)^2 = 3$.

B. $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z+4)^2 = 9$.

C. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 45$.

D. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 3$.

Câu 58. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(1; 2; 3)$, có bán kính 3 có phương trình là

A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$.

B. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 9$.

C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 3$.

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 3$.

- Câu 59.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;2)$, $B(-1;2;-4)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là
- A. $x^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 44$. B. $x^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 11$.
 C. $x^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 44$. D. $x^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 11$.
- Câu 60.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox . Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm I bán kính IM ?
- A. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{13}$ B. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13$
 C. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 17$ D. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 13$
- Câu 61.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu đi qua ba điểm $M(2;3;3)$, $N(2;-1;-1)$, $P(-2;-1;3)$ và có tâm thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x+3y-z+2=0$.
- A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 10 = 0$ B. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 2 = 0$
 C. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 6z + 2 = 0$ D. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 2 = 0$
- Câu 62.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu có tâm $I(1;2;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x-2y-2z-8=0$?
- A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$ B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$
 C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ D. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9$
- Câu 63.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x+y+2z+2=0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1. Viết phương trình của mặt cầu (S)
- A. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 8$ B. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 10$
 C. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 8$ D. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 10$
- Câu 64.** Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) , cho đường tròn (S) có tâm I nằm trên đường thẳng $y=-x$, bán kính $R=3$ và tiếp xúc với các trục tọa độ. Lập phương trình của (S) , biết hoành độ tâm I là số dương.
- A. $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$. B. $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 9$.
 C. $(x-3)^2 - (y-3)^2 = 9$. D. $(x+3)^2 + (y+3)^2 = 9$.
- Câu 65.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + m - 3 = 0$. Tìm số thực của tham số m để mặt phẳng $(\beta): 2x - y + 2z - 8 = 0$ cắt (S) theo một đường tròn có chu vi bằng 8π .
- A. $m = -3$. B. $m = -1$. C. $m = -2$. D. $m = -4$.
- Câu 66.** Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt cầu có tâm $I(1;-2;-3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) là
- A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 9$. B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$.
 C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 4$. D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 1$.
- Câu 67.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (α) có phương trình $2x + y - z - 1 = 0$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4$. Xác định bán kính r của đường tròn là giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S) .

A. $r = \frac{2\sqrt{42}}{3}$.

B. $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

C. $r = \frac{2\sqrt{15}}{3}$.

D. $r = \frac{2\sqrt{7}}{3}$.

Câu 68. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+2y-2z+3=0$ và mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích 2π . Mặt cầu (S) có phương trình là

A. $x^2+(y+2)^2+(z+1)^2=2$.

B. $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=3$.

C. $x^2+(y+2)^2+(z+1)^2=3$.

D. $x^2+(y+2)^2+(z+1)^2=1$.

Câu 69. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+y^2+(z+1)^2=9$ và mặt phẳng $(P):2x-y-2z-3=0$. Biết mặt cầu (S) cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn (C) . Tính bán kính r của (C) .

A. $r=2\sqrt{2}$.

B. $r=\sqrt{2}$.

C. $r=2$.

D. $r=\sqrt{5}$.

Câu 70. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-2y+2z-2=0$ và điểm $I(-1;2;-1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5.

A. $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$.

B. $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$.

C. $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=34$.

D. $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=34$.

Câu 71. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(1;2;-1)$ và cắt mặt phẳng $(P):2x-y+2z-1=0$ theo một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{8}$ có phương trình là

A. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9$.

B. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$.

C. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=3$.

D. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$.

Câu 72. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu tâm $I(-1;3;0)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P):2x-y+2z+11=0$.

A. $(x+1)^2+(y-3)^2+z^2=4$.

B. $(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=4$.

C. $(x+1)^2+(y-3)^2+z^2=2$.

D. $(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=\frac{4}{9}$.

Câu 73. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm $I(3;1;0)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P):2x+2y-z+1=0$?

A. $(x+3)^2+(y+1)^2+z^2=3$.

B. $(x+3)^2+(y+1)^2+z^2=9$.

C. $(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=3$.

D. $(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=9$.

Câu 74. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(-2;9;-1)$, tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) có phương trình là

A. $(x+2)^2+(y-9)^2+(z+1)^2=81$.

B. $(x+2)^2+(y-9)^2+(z+1)^2=9$.

C. $(x-2)^2+(y+9)^2+(z-1)^2=81$.

D. $(x-2)^2+(y+9)^2+(z-1)^2=9$.

Câu 75. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(1;-2;-3)$ và tiếp xúc với trục Oy có phương trình là

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=4$.

B. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4$.

C. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=10$.

D. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=14$.

Câu 76. Trong không gian $Oxyz$, tìm phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1; -4; 2)$ và diện tích 64π .

A. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-2)^2 = 4$.

B. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z+2)^2 = 16$.

C. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z+2)^2 = 4$.

D. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-2)^2 = 16$.

----- HẾT -----

-

Nguyễn Bảo Vương

A. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

	Hệ trục tọa độ Oxyz: Hệ trục gồm ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc nhau. Trục Ox: trục hoành, có vector đơn vị $\vec{i} = (1;0;0)$. Trục Oy: trục tung, có vector đơn vị $\vec{j} = (0;1;0)$. Trục Oz: trục cao, có vector đơn vị $\vec{k} = (0;0;1)$. Điểm $O(0;0;0)$ là gốc tọa độ. Tọa độ vector: Vector $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Leftrightarrow \vec{u} = (x; y; z)$. $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Ta có:
$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$ $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$ $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$	$\vec{a} \text{ cùng phương}$ $\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \quad (k \in \mathbb{R})$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}, \quad (b_1, b_2, b_3 \neq 0).$
$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$	$ \vec{a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ $\vec{a}^2 = \vec{a} ^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$
$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$	$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \cdot \vec{b} } = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$
Tọa độ điểm: $M(x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x; y; z)$. Cho $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, $C(x_C; y_C; z_C)$, ta có:	
$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$	$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
Toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB: $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right).$	Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC: $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$
QUY TẮC CHIỀU ĐẶC BIỆT	
Chiếu điểm trên trục tọa độ Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x)]{\text{Chiếu vào } Ox} M_1(x_M; 0; 0)$ Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } y)]{\text{Chiếu vào } Oy} M_2(0; y_M; 0)$ Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } z)]{\text{Chiếu vào } Oz} M_3(0; 0; z_M)$	Chiếu điểm trên mặt phẳng tọa độ Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x, y)]{\text{Chiếu vào } Oxy} M_1(x_M; y_M; 0)$ Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } y, z)]{\text{Chiếu vào } Oyz} M_2(0; y_M; z_M)$ Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x, z)]{\text{Chiếu vào } Oxz} M_3(x_M; 0; z_M)$
Đối xứng điểm qua trục tọa độ $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x; \text{ đổi dấu } y, z)]{\text{Đối xứng qua } Ox} M_1(x_M; -y_M; -z_M)$ $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } y; \text{ đổi dấu } x, z)]{\text{Đối xứng qua } Oy} M_2(-x_M; y_M; -z_M)$ $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } z; \text{ đổi dấu } x, y)]{\text{Đối xứng qua } Oz} M_3(-x_M; -y_M; z_M)$	Đối xứng điểm qua mặt phẳng tọa độ $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x, y; \text{ đổi dấu } z)]{\text{Đối xứng qua } Oxy} M_1(x_M; y_M; -z_M)$ $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x, z; \text{ đổi dấu } y)]{\text{Đối xứng qua } Oxz} M_2(x_M; -y_M; z_M)$ $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } y, z; \text{ đổi dấu } x)]{\text{Đối xứng qua } Oyz} M_3(-x_M; y_M; z_M)$

4. Tích có hướng của hai vector:		
Định nghĩa: Cho $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, tích có hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là: $[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1).$		
Tính chất:	$[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}$	$[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{b}$
Điều kiện cùng phương của hai vector $\vec{a}$ & $\vec{b}$ là $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$ với $\vec{0} = (0; 0; 0)$.	Điều kiện đồng phẳng của ba vector $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ là $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$.	
Diện tích hình bình hành $ABCD$: $S_{\square ABCD} = [\vec{AB}, \vec{AD}] $.	Diện tích tam giác ABC : $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} [\vec{AB}, \vec{AC}] $.	
Thể tích khối hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = [\vec{AB}, \vec{AD}] \cdot \vec{AA'} $.	Thể tích tứ diện: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} [\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} $.	

CÂU HỎI CÙNG MỨC ĐỘ ĐỀ MINH HỌA

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; -2; 1)$ trên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

- A. $(2; 0; 1)$. B. $(2; -2; 0)$. C. $(0; -2; 1)$. D. $(0; 0; 1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có hình chiếu của điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm $M'(x_0; y_0; 0)$.

Do đó hình chiếu của điểm $M(2; -2; 1)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm $M'(2; -2; 0)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (1; 0; 3)$ và $\vec{b} = (-2; 2; 5)$. Tích vô hướng $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ bằng

- A. 25. B. 23. C. 27. D. 29.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\vec{a} + \vec{b} = (-1; 2; 8)$.

Suy ra $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 8 = 23$.

Vậy $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 23$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 1; -1)$ trên mặt phẳng (Ozx) có tọa độ là

- A. $(0; 1; 0)$. B. $(2; 1; 0)$. C. $(0; 1; -1)$. D. $(2; 0; -1)$.

Lời giải

Chọn D

Hình chiếu của $M(2; 1; -1)$ lên mặt phẳng (Ozx) là điểm có tọa độ $(2; 0; -1)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 1; -1)$ trên trục Oy có tọa độ là

- A. $(0; 0; -1)$. B. $(2; 0; -1)$. C. $(0; 1; 0)$. D. $(2; 0; 0)$.

Lời giải

Chọn C

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 1; -1)$ trên trục Oy có tọa độ là $(0; 1; 0)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; -1; 1)$ trên trục Oz có tọa độ là

- A. $(3;0;0)$. B. $(3;-1;0)$. C. $(0;0;1)$. D. $(0;-1;0)$.

Lời giải

Chọn C

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;-1;1)$ trên trục Oz có tọa độ là $(0;0;1)$

- Câu 6.** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;1;-1)$ trên trục Oy có tọa độ là
A. $(0;1;0)$. B. $(3;0;0)$. C. $(0;0;-1)$. D. $(3;0;-1)$.

Lời giải

Chọn A

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;1;-1)$ trên trục Oy có tọa độ là $(0;1;0)$.

- Câu 7.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-1)$ và $B(2;3;2)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là
A. $(1;2;3)$. B. $(-1;-2;3)$. C. $(3;5;1)$. D. $(3;4;1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;2;3)$.

- Câu 8.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-4;3)$ và $B(2;2;7)$. Trung điểm của đoạn AB có tọa độ là
A. $(1;3;2)$. B. $(2;6;4)$. C. $(2;-1;5)$. D. $(4;-2;10)$.

Lời giải

$$\text{Gọi } M \text{ là trung điểm của } AB. \text{ Khi đó } \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = 2 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = -1 \\ z_M = \frac{z_A + z_B}{2} = 5 \end{cases} \Rightarrow M(2;-1;5).$$

- Câu 9.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;3)$ và $B(-1;2;5)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .
A. $I(-2;2;1)$. B. $I(1;0;4)$. C. $I(2;0;8)$. D. $I(2;-2;-1)$.

Lời giải

Chọn B

Tọa độ trung điểm I của đoạn AB với $A(3;-2;3)$ và $B(-1;2;5)$ được tính bởi

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = 1 \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = 0 \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow I(1;0;4)$$

- Câu 10.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$, B và $\overrightarrow{AB}(1;3;1)$. Xác định tọa độ B
A. $(2;5;0)$. B. $(0;-1;-2)$. C. $(0;1;2)$. D. $(-2;-5;0)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $B(x;y;z) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(x-1;y-2;z+1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ y-2=3 \\ z+1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=5 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow B(2;5;0)$$

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{a} = (3; 2; 1)$, $\vec{b} = (-2; 0; 1)$. Độ dài của véc-tơ $\vec{a} + \vec{b}$ bằng

- A. 1. B. 3. C. $\sqrt{2}$. D. 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\vec{a} + \vec{b} = (1; 2; 2)$.

Độ dài của véc-tơ $\vec{a} + \vec{b}$ là $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$.

Câu 12. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; 2; 5)$, $B(-2; 0; 1)$, $C(5; -8; 6)$. Tìm tọa độ trọng tâm điểm G của tam giác ABC .

- A. $G(1; -2; -4)$. B. $G(-1; 2; -4)$. C. $G(1; -2; 4)$. D. $G(3; -6; 12)$.

Lời giải

Chọn C

Với G là trọng tâm của tam giác ABC thì ta có:

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = 1 \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = -2 \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = 4 \end{cases} \text{ . Từ đó suy ra } G(1; -2; 4).$$

Câu 13. Cho $\vec{a} = (2; 1; 3)$, $\vec{b} = (4; -3; 5)$ và $\vec{c} = (-2; 4; 6)$. Tọa độ của véc-tơ $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ là

- A. $(10; 9; 6)$. B. $(12; -9; 7)$. C. $(10; -9; 6)$. D. $(12; -9; 6)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} = (2 + 2 \cdot 4 - (-2); 1 + 2 \cdot (-3) - 4; 3 + 2 \cdot 5 - 6) = (12; -9; 7)$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 3$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$. Độ dài vector $3\vec{a} - 2\vec{b}$ bằng

- A. 9. B. 1. C. 6. D. 54.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $(3\vec{a} - 2\vec{b})^2 = 9(\vec{a})^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 4(\vec{b})^2 = 36$. Độ dài vector $3\vec{a} - 2\vec{b}$ bằng 6

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1; 1; 2)$ và $B(3; 4; 5)$. Tọa độ vector $\overrightarrow{AB}$ là

- A. $(4; 5; 3)$. B. $(2; 3; 3)$. C. $(-2; -3; 3)$. D. $(2; -3; -3)$.

Lời giải

Chọn B

Tọa độ vector $\overrightarrow{AB} = (3 - 1; 4 - 1; 5 - 2) = (2; 3; 3)$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-3; 4; 0)$ và $\vec{b} = (5; 0; 12)$. Côsin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

A. $\frac{3}{13}$.

B. $\frac{5}{6}$.

C. $-\frac{5}{6}$.

D. $-\frac{3}{13}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-15}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2} \cdot \sqrt{5^2 + 12^2}} = -\frac{3}{13}.$$

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vector $\vec{u} = (3; 0; 1)$ và $\vec{v} = (2; 1; 0)$. Tính tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v}$?

A. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$.

B. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$.

C. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

D. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 6.$$

Câu 18. Cho điểm $M(1; 2; -3)$. Hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (Oxy) là điểm

A. $M'(1; 0; -3)$.

B. $M'(0; 2; -3)$.

C. $M'(1; 2; 0)$.

D. $M'(1; 2; 3)$.

Lời giải

Chọn C

Vì M' là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (Oxy) nên tọa độ M' là $(1; 2; 0)$.

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(-3; 1; 2)$. Tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua trục Oy là

A. $(3; -1; -2)$.

B. $(3; -1; 2)$.

C. $(3; 1; -2)$.

D. $(-3; -1; 2)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi M là hình chiếu của điểm A lên trục $Oy \Rightarrow M(0; 1; 0)$.

A' đối xứng với điểm A qua trục Oy nên M là trung điểm của AA'

$$\Rightarrow x_{A'} = 2x_M - x_A = 0 + 3 = 3; y_{A'} = 2y_M - y_A = 2 \cdot 1 - 1 = 1; z_{A'} = 2z_M - z_A = 0 - 2 = -2.$$

Câu 20. Cho hai véc tơ $\vec{a} = (1; -2; 3)$, $\vec{b} = (-2; 1; 2)$. Khi đó tích vô hướng $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$ bằng

A. 12.

B. 2.

C. 11.

D. 10.

Lời giải

Chọn C

$$\vec{a} + \vec{b} = (-1; -1; 5) \Rightarrow (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} = -1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 11.$$

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1; 2; 1)$ và $\vec{b} = (-1; 3; 0)$. Vector $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$ có tọa độ là

A. $(1; 7; 2)$.

B. $(1; 5; 2)$.

C. $(3; 7; 2)$.

D. $(1; 7; 3)$.

Lời giải

Chọn A

Có $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$, gọi $\vec{c} = (c_1; c_2; c_3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \cdot 1 + (-1) = 1 \\ c_2 = 2 \cdot 2 + 3 = 7 \\ c_3 = 2 \cdot 1 + 0 = 2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \vec{c} = (1; 7; 2)$$

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(4; 2; -1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A lên trục Ox là điểm

- A. $M(0;2;-1)$. B. $M(-4;0;0)$. C. $M(4;0;0)$. D. $M(4;-2;1)$.

Lời giải

Chọn C

Hình chiếu vuông góc của điểm A lên trục Ox là điểm $M(4;0;0)$.

- Câu 23.** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của $A(2;3;1)$ lên trục tọa độ $x'Ox$ là
A. $Q(-2;0;0)$. B. $R(0;0;1)$. C. $S(0;3;1)$. D. $P(2;0;0)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: hình chiếu vuông góc của $A(2;3;1)$ lên trục tọa độ $x'Ox$ là $P(2;0;0)$.

- Câu 24.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(3;-4;0)$, $B(-1;1;3)$, $C(3;1;0)$. Tìm tọa độ điểm D trên trục hoành sao cho $AD = BC$.
A. $D(-2;1;0)$, $D(-4;0;0)$ B. $D(0;0;0)$, $D(-6;0;0)$
C. $D(6;0;0)$, $D(12;0;0)$ D. $D(0;0;0)$, $D(6;0;0)$

Lời giải

Chọn D

Gọi $D(x;0;0) \in Ox$

$$AD = BC \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + 16} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

- Câu 25.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;3;1)$ và $B(5; 6; 2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M . Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$.
A. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$ B. $\frac{AM}{BM} = 2$ C. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$ D. $\frac{AM}{BM} = 3$

Lời giải

Chọn D

$M \in (Oxz) \Rightarrow M(x;0;z)$; $\overrightarrow{AB} = (7;3;1) \Rightarrow AB = \sqrt{59}$; $\overrightarrow{AM} = (x+2; -3; z-1)$ và

$$A, B, M \text{ thẳng hàng} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB} \quad (k \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 7k \\ -3 = 3k \\ z-1 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9 \\ -1 = k \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow M(-9;0;0).$$

$$\overrightarrow{BM} = (-14; -6; -2); \overrightarrow{AM} = (-7; -3; -1) \Rightarrow BM = 2AB.$$

- Câu 26.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (2;1;0)$ và $\vec{b} = (-1;0;-2)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.
A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{25}$ B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{5}$ C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{25}$ D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{5}$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = -\frac{2}{5}.$$

- Câu 27.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $M(2;3;-1)$, $N(-1;1;1)$ và $P(1;m-1;2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .
A. $m = -6$. B. $m = 0$. C. $m = -4$. D. $m = 2$.

Lời giải

Chọn B

$$\overrightarrow{MN}(-3; -2; 2); \overrightarrow{NP}(2; m-2; 1)$$

Tam giác MNP vuông tại $N \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} = 0 \Leftrightarrow -6 - 2(m-2) + 2 = 0 \Leftrightarrow m-2 = -2 \Leftrightarrow m = 0$.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$ và $D(1; -1; 1)$, tọa độ điểm C là:

- A.** $(2; 0; 2)$. **B.** $(2; 2; 2)$. **C.** $(2; -2; 2)$. **D.** $(0; -2; 0)$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Do } ABCD \text{ là hình bình hành nên } \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{cases} x_C = x_B + x_D - x_A = 2 + 1 - 1 = 2 \\ y_C = y_B + y_D - y_A = 1 - 1 + 0 = 0 \\ z_C = z_B + z_D - z_A = 2 + 1 - 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow C(2; 0; 2).$$

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (2; m-1; 3)$, $\vec{b} = (1; 3; -2n)$. Tìm m, n để các vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.

- A.** $m = 7; n = -\frac{3}{4}$. **B.** $m = 4; n = -3$. **C.** $m = 2; n = 0$. **D.** $m = 7; n = -\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$\vec{a} = (2; m-1; 3)$, $\vec{b} = (1; 3; -2n)$ cùng hướng

$$\Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b}, k \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k.1 \\ m-1 = k.3 \\ 3 = k.(-2n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ m = 7 \\ n = -\frac{3}{4} \end{cases}.$$

Vậy các vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng khi $m = 7; n = -\frac{3}{4}$.

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = (1; 1; -2)$, $\vec{v} = (1; 0; m)$. Tìm tất cả giá trị của m để góc giữa hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ bằng 45° .

- A.** $m = 2$. **B.** $m = 2 \pm \sqrt{6}$. **C.** $m = 2 - \sqrt{6}$. **D.** $m = 2 + \sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{1-2m}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{1+m^2}}.$$

$$\text{Góc giữa hai vectơ } \vec{u}, \vec{v} \text{ bằng } 45^\circ \Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-2m}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{1+m^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2m \geq 0 \\ (1-2m)^2 = 3(1+m^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ m^2 - 4m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2 - \sqrt{6}.$$

Vậy với $m = 2 - \sqrt{6}$ thì góc giữa hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ bằng 45° .

- Câu 31.** Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tọa độ của đỉnh A' là
- A.** $A' = (4;5;-6)$. **B.** $A' = (3;4;-1)$. **C.** $A' = (3;5;-6)$. **D.** $A' = (3;5;6)$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử tọa độ các đỉnh lần lượt là $C = (x_C; y_C; z_C)$, $A' = (x_{A'}; y_{A'}; z_{A'})$. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên ta có:

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C - 1 = 1 \\ y_C + 1 = 1 \\ z_C - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow C = (2; 0; 2)$$

Tứ giác $AA'C'C$ là hình bình hành nên ta có

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} - 1 = 2 \\ y_{A'} = 5 \\ z_{A'} - 1 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow A' = (3; 5; -6).$$

- Câu 32.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;2;-2)$; $B(3;-3;3)$. Điểm M trong không gian thỏa mãn $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$. Khi đó độ dài OM lớn nhất bằng

- A.** $6\sqrt{3}$. **B.** $12\sqrt{3}$. **C.** $5\sqrt{3}$. **D.** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(x; y; z)$.

$$\text{Ta có } \frac{MA}{MB} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3MA = 2MB \Leftrightarrow 9MA^2 = 4MB^2$$

$$\Leftrightarrow 9[(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2] = 4[(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2]$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 12y + 12z = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+6)^2 + (y-6)^2 + (z+6)^2 = 108.$$

Như vậy, điểm M thuộc mặt cầu (S) tâm $I(-6;6;-6)$ và bán kính $R = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$.

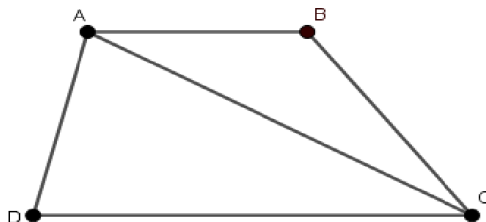
Do $O \in (S)$ nên OM lớn nhất bằng $2R = 12\sqrt{3}$.

- Câu 33.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;3;1)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;1)$. Tìm tất cả các điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và diện tích tứ giác $ABCD$ bằng 3 lần diện tích tam giác ABC .

- A.** $D(-12;-1;3)$. **B.** $\begin{bmatrix} D(-8;-7;1) \\ D(12;1;-3) \end{bmatrix}$. **C.** $D(8;7;-1)$. **D.** $\begin{bmatrix} D(8;7;-1) \\ D(-12;-1;3) \end{bmatrix}$.

Lời giải

Chọn A



$$\text{Ta có: } S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot d(A, BC) \Leftrightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC}.$$

$$\Leftrightarrow 3S_{\triangle ABC} = \frac{(AD + BC) \cdot S_{\triangle ABC}}{BC} \Leftrightarrow 3BC = AD + BC \Leftrightarrow AD = 2BC.$$

Mà $ABCD$ là hình thang có đáy AD nên $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$ (1).

$$\overrightarrow{BC} = (-5; -2; 1), \overrightarrow{AD} = (x_D + 2; y_D - 3; z_D - 1).$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_D + 2 = -10 \\ y_D - 3 = -4 \\ z_D - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -12 \\ y_D = -1 \\ z_D = 3 \end{cases}.$$

Vậy $D(-12; -1; 3)$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; -2; 0)$, $B(1; 0; -1)$ và $C(0; -1; 2)$, $D(0; m; k)$. Hệ thức giữa m và k để bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng là:

A. $2m - 3k = 0$. **B.** $m + 2k = 3$. **C.** $m + k = 1$. **D.** $2m + k = 0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{AB} = (0; 2; -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; 1; 2)$.

Mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C có véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (5; 1; 2)$.

Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C là $5x + y + 2z - 3 = 0$.

Bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng $\Leftrightarrow D \in (ABC) \Leftrightarrow m + 2k - 3 = 0 \Leftrightarrow m + 2k = 3$.

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(1; -3; -5)$ trên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

A. $(0; -3; 5)$. **B.** $(0; -3; 0)$. **C.** $(1; -3; 0)$. **D.** $(0; -3; -5)$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Gọi N là hình chiếu của M trên mặt phẳng (Oyz) nên $N(0; b; c) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (-1; b+3; c+5)$

Do $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với véc tơ đơn vị $\vec{i} = (1; 0; 0)$ trên trục Ox nên: $[\overrightarrow{MN}, \vec{i}] = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow (0; c+5; b+3) = (0; 0; 0) \Leftrightarrow \begin{cases} c = -5 \\ b = -3 \end{cases}.$$

Vậy $N(0; -3; -5)$.

Cách 2

Gọi N là hình chiếu của M trên mặt phẳng (Oyz) nên $N(0; b; c) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (-1; b+3; c+5)$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} \overrightarrow{MN} \perp \vec{j} \\ \overrightarrow{MN} \perp \vec{k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{j} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{k} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \cdot 0 + (b+3) \cdot 1 + (c+5) \cdot 0 = 0 \\ -1 \cdot 0 + (b+3) \cdot 0 + (c+5) \cdot 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3 \\ c = -5 \end{cases}.$$

Vậy $N(0; -3; -5)$.

- Câu 36.** Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(-2; 4; 1)$ và $B(4; 5; 2)$. Điểm C thỏa mãn $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BA}$ có tọa độ là
- A.** $(-6, -1, -1)$. **B.** $(-2, -9, -3)$. **C.** $(6, 1, 1)$. **D.** $(2, 9, 3)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi tọa độ điểm $C(x; y; z)$

Ta có $\overrightarrow{OC} = (x; y; z)$; $\overrightarrow{BA} = (-6; -1; -1)$

$$\text{Theo bài ra } \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm C là $C(-6; -1; -1)$.

- Câu 37.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho các véc tơ $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = (m; 2; m+1)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m để $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\vec{u} = (2; -2; 1)$

$$\text{Khi đó } |\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3 \text{ và } |\vec{v}| = \sqrt{m^2 + 2^2 + (m+1)^2} = \sqrt{2m^2 + 2m + 5}$$

$$\text{Do đó } |\vec{u}| = |\vec{v}| \Leftrightarrow 9 = 2m^2 + 2m + 5 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

- Câu 38.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho $M(-1; 2; 3)$ và $N(1; 0; 2)$. Tìm tọa độ điểm P thỏa mãn $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{PM}$?

- A.** $P(-2; 3; 7)$. **B.** $P(-4; 6; 7)$. **C.** $P(-2; 3; \frac{7}{2})$. **D.** $P(-2; -3; \frac{7}{2})$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $P(x; y; z)$, ta có $\overrightarrow{MN} = (2; -2; -1)$ và $\overrightarrow{PM} = (-1-x; 2-y; 3-z)$.

Suy ra $2\overrightarrow{PM} = (-2-2x; 4-2y; 6-2z)$.

$$\text{Từ } \overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{PM}, \text{ suy ra } \begin{cases} -2-2x = 2 \\ 4-2y = -2 \\ 6-2z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \\ z = \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow P(-2; 3; \frac{7}{2}).$$

B. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

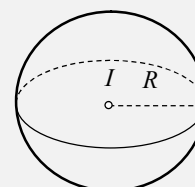
• Mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ và có bán kính R có phương trình (S): $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

• Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

là phương trình của mặt cầu có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

• Để một phương trình là một phương trình mặt cầu, cần thỏa mãn hai điều kiện:

Hệ số trước x^2 , y^2 , z^2 phải bằng nhau và $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.



B1. XÁC ĐỊNH TÂM VÀ BÁN KÍNH

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$. Tâm của (S) có tọa độ là

- A. $(-1; -2; -3)$. B. $(1; 2; 3)$. C. $(-1; 2; -3)$. D. $(1; -2; 3)$.

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ có tâm là $I(a; b; c)$.

Suy ra, mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$ có tâm là $I(1; -2; 3)$.

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+4)^2 + (z-1)^2 = 9$. Tâm của (S) có tọa độ là

- A. $(-2; 4; -1)$. B. $(2; -4; 1)$. C. $(2; 4; 1)$. D. $(-2; -4; -1)$.

Lời giải

Chọn B

Tâm của mặt cầu (S) có tọa độ là $(2; -4; 1)$.

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 2$. Tâm của (S) có tọa độ là

- A. $(3; 1; -1)$ B. $(3; -1; 1)$ C. $(-3; -1; 1)$ D. $(-3; 1; -1)$

Lời giải

Chọn C

Tâm của (S) có tọa độ là $(-3; -1; 1)$.

Câu 42. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + m = 0$ là phương trình của một mặt cầu.

- A. $m \leq 6$ B. $m > 6$ C. $m < 6$ D. $m \geq 6$

Lời giải

Chọn C

Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + m = 0$ là một phương trình mặt cầu

$$\Leftrightarrow 1^2 + 1^2 + 2^2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 6.$$

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-5)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$. Tính bán kính R của (S) .

- A. $R = 3$ B. $R = 18$ C. $R = 9$ D. $R = 6$

Lời giải

Chọn A

Phương trình mặt cầu tâm $I(a; b; c)$, bán kính R có dạng:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \Rightarrow R = 3.$$

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu

$(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$. Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của (S)

- A. $I(-1; 2; 1)$ và $R = 3$ B. $I(1; -2; -1)$ và $R = 3$ C. $I(-1; 2; 1)$ và $R = 9$ D. $I(1; -2; -1)$ và $R = 9$

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$ có tâm $I(-1; 2; 1)$ và bán kính $R = 3$

- Câu 45.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 25$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là
- A.** $I(2;3;-1); R=25$. **B.** $I(-2;-3;1); R=25$. **C.** $I(2;3;-1); R=5$. **D.** $I(-2;-3;1); R=5$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;-1)$ và bán kính $R=5$.

- Câu 46.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ phương trình nào sau đây không phải là phương trình của một mặt cầu?
- A.** $x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y + 4z - 3 = 0$. **B.** $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - x - y - z = 0$.
C. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x + 8y + 6z + 3 = 0$. **D.** $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z + 10 = 0$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ là phương trình mặt cầu nếu thỏa điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

Phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z + 10 = 0$ có $1^2 + (-2)^2 + (2)^2 - 10 = -1 < 0$. Do đó phương trình này không là phương trình của mặt cầu.

- Câu 47.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 8$. Khi đó tâm I và bán kính R của mặt cầu là
- A.** $I(3;-1;-2), R=2\sqrt{2}$. **B.** $I(-3;1;2), R=2\sqrt{2}$.
C. $I(-3;1;2), R=4$. **D.** $I(3;-1;-2), R=4$.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;-1;-2)$ và bán kính $R=2\sqrt{2}$.

- Câu 48.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z - 25 = 0$. Tìm tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) .
- A.** $I(-2;4;-4); R=\sqrt{29}$. **B.** $I(-1;2;-2); R=5$. **C.** $I(1;-2;2); R=\sqrt{34}$. **D.** $I(1;-2;2); R=6$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;2)$ và bán kính $R = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2 - (-25)} = \sqrt{34}$.

Vậy: $I(1;-2;2); R=\sqrt{34}$.

- Câu 49.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 10y - 6z + 49 = 0$. Tính bán kính R của mặt cầu (S) .
- A.** $R=\sqrt{151}$. **B.** $R=\sqrt{99}$. **C.** $R=1$. **D.** $R=7$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 10y - 6z + 49 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 + 10y + 25 + z^2 - 6z + 9 = 1$

$\Leftrightarrow (x-4)^2 + (y+5)^2 + (z-3)^2 = 1$

Vậy mặt cầu có bán kính $R=1$.

- Câu 50.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z - 7 = 0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng
- A.** 9. **B.** 3. **C.** $\sqrt{15}$. **D.** $\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $R = \sqrt{1^2 + (-1)^2 - (-7)} = 3$.

Câu 51. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

A. $\sqrt{7}$.

B. 9.

C. 3.

D. $\sqrt{15}$.

Lời giải

Chọn C

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2 \cdot (-1) \cdot x + 2 \cdot 0 \cdot y - 2 \cdot 1 \cdot z - 7 = 0.$$

$$\Rightarrow a = -1, b = 0, c = 1, d = -7.$$

$$\Rightarrow \text{Tâm mặt cầu } I(-1; 0; 1) \text{ bán kính } R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 7} = 3.$$

Câu 52. Trong không gian $Oxyz$, có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 + 4mx + 2my - 2mz + 9m^2 - 28 = 0$ là phương trình của mặt cầu?

A. 7.

B. 8.

C. 9.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4mx + 2my - 2mz + 9m^2 - 28 = 0 \Leftrightarrow (x + 2m)^2 + (y + m)^2 + (z - m)^2 = -3m^2 + 28$$

Phương trình đã cho là phương trình của mặt cầu khi và chỉ khi m thỏa:

$$-3m^2 + 28 > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{28}{3}} < m < \sqrt{\frac{28}{3}} \quad (-3,055 < m < 3,055).$$

Tập các giá trị nguyên của m là: $S = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Câu 53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; a; 1)$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z - 9 = 0$. Tập các giá trị của a để điểm A nằm trong khối cầu là

A. $(-3; 1)$.

B. $(-1; 3)$.

C. $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

D. $[-1; 3]$.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(0; 1; -2)$, bán kính $R = \sqrt{14}$.

$$\text{Điểm } A \text{ nằm trong khối cầu} \Leftrightarrow IA < R \Leftrightarrow \sqrt{1 + (a-1)^2 + 9} < \sqrt{14} \Leftrightarrow (a-1)^2 < 4 \Leftrightarrow -1 < a < 3.$$

B2. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

① **Dạng 1. Cơ bản** $(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(a; b; c) \\ BK: R \end{cases} \Rightarrow (S): \boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2}.$

② **Dạng 2. Viết phương trình mặt cầu** (S) có tâm I và đi qua điểm A .

Phương pháp: $(S): \begin{cases} \text{Tâm } I \\ BK: R = IA \end{cases} \text{ (dạng 1)}$

③ **Dạng 3. Viết phương trình mặt cầu** (S) có đường kính AB , với A, B cho trước.

Phương pháp: $(S): \begin{cases} \text{Tâm } I \text{ là trung điểm của } AB. \\ BK: R = \frac{1}{2} AB \end{cases}$

④ **Dạng 4. Viết phương trình mặt cầu** (S) có tâm I và tiếp xúc với các trục và mp tọa độ.

Phương pháp: $(S) : \begin{cases} \bullet \text{ Tâm } I \\ \bullet BK : R = IM \end{cases}$ với M là hình chiếu của I lên trục hoặc mp tọa

⑤ **Dạng 5.** Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) .

Phương pháp: $(S) : \begin{cases} \bullet \text{ Tâm } I \\ \bullet BK : R = d[I; (P)] \end{cases}$

• Khoảng cách từ điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ đến mặt phẳng $(P) : ax + by + cz + d = 0$ được xác định bởi

$$\text{công thức: } d(M; (P)) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

⑥ **Dạng 6.** Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm A, B, C, D .

Phương pháp: Gọi $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Vì $A, B, C, D \in (S)$ nên tìm được 4 phương trình $\Rightarrow a, b, c, d \Rightarrow (S)$.

⑦ **Dạng 7.** Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua 3 điểm A, B, C và tâm thuộc mp (P) .

Phương pháp: Gọi $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Vì $A, B, C \in (S)$ nên tìm được 3 phương trình và $I(a; b; c) \in (P)$ là phương trình thứ tư.

Giải hệ bốn phương trình này $\Rightarrow a, b, c, d \Rightarrow (S)$.

⑧ **Dạng 8.** Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính r .

Phương pháp: Dựa vào mối liên hệ $R^2 = d_{[I; (P)]}^2 + r^2$ và cần nhớ $C = 2\pi r$ và $S_{\text{đt}} = \pi r^2$.

Câu 54. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0; 0; -3)$ và đi qua điểm $M(4; 0; 0)$.

Phương trình của (S) là

A. $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 25.$

B. $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 5.$

C. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 25.$

D. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 5.$

Lời giải

Chọn A

Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(0; 0; -3)$ và bán kính R là: $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = R^2$.

Ta có: $M \in (S) \Rightarrow 4^2 + 0^2 + (0+3)^2 = R^2 \Leftrightarrow R^2 = 25$.

Vậy phương trình cần tìm là: $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 25$.

Câu 55. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $I(1; 1; 1)$ và $A(1; 2; 3)$. Phương trình của mặt cầu có tâm I và đi qua điểm A là

A. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 29.$

B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5.$

C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25.$

D. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 5.$

Lời giải

Chọn B.

Mặt cầu có bán kính $R = IA = \sqrt{0+1+4} = \sqrt{5}$.

Suy ra phương trình mặt cầu là $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$.

Câu 56. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3), B(5; 4; -1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9.$

B. $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 6.$

C. $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 = 9$.

D. $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 36$.

Lời giải

Chọn A

+ Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(3;3;1)$.

$$\overline{AB}(4;2;-4) \Rightarrow AB = \sqrt{16+4+16} = 6$$

+ Mặt cầu đường kính AB có tâm $I(3;3;1)$, bán kính $R = \frac{AB}{2} = 3$ có phương trình là:

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9.$$

Câu 57. Trong không gian Oxyz cho điểm $I(2;3;4)$ và $A(1;2;3)$. Phương trình mặt cầu tâm I và đi qua A có phương trình là:

A. $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z+4)^2 = 3$.

B. $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z+4)^2 = 9$.

C. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 45$.

D. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 3$.

Lời giải

Chọn D

Bán kính mặt cầu là $R = IA = \sqrt{3}$.

Phương trình mặt cầu tâm $I(2;3;4)$ và $R = IA = \sqrt{3}$ là $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 3$

Câu 58. Trong không gian tọa độ Oxyz, mặt cầu tâm $I(1;2;3)$, có bán kính 3 có phương trình là

A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$.

B. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 9$.

C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 3$.

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 3$.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R = 3$ có phương trình là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$.

Câu 59. Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(1;0;2)$, $B(-1;2;-4)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $x^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 44$.

B. $x^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 11$.

C. $x^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 44$.

D. $x^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 11$.

Lời giải

Chọn B

Gọi I , R lần lượt là tâm và bán kính của mặt cầu có đường kính AB .

Ta có I là trung điểm $AB \Rightarrow I(0;1;-1)$ và $R = \frac{AB}{2} = \sqrt{11}$.

Phương trình mặt cầu là $x^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 11$.

Câu 60. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $M(1;-2;3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm I bán kính IM ?

A. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{13}$

B. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13$

C. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 17$

D. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 13$

Lời giải

Chọn B

Hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox là $I(1;0;0) \Rightarrow IM = \sqrt{13}$. Suy ra phương trình mặt cầu tâm I bán kính IM là: $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13$.

Câu 61. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu đi qua ba điểm $M(2;3;3)$, $N(2;-1;-1)$, $P(-2;-1;3)$ và có tâm thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x+3y-z+2=0$.

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 10 = 0$

B. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 2 = 0$

C. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 6z + 2 = 0$

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 2 = 0$

Lời giải

Chọn B

Giả sử phương trình mặt cầu (S) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.

Điều kiện: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0 (*)$

Vì mặt cầu (S) đi qua 3 điểm $M(2;3;3)$, $N(2;-1;-1)$, $P(-2;-1;3)$ và có tâm I thuộc $mp(P)$ nên

$$\text{ta có hệ phương trình } \begin{cases} 4a + 6b + 6c - d = 22 \\ 4a - 2b - 2c - d = 6 \\ 4a + 2b - 6c + d = -14 \\ 2a + 3b - c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 3 \\ d = -2 \end{cases} : T / m(*)$$

Vậy phương trình mặt cầu là: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 2 = 0$.

Câu 62. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu có tâm $I(1;2;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x-2y-2z-8=0$?

A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$

B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$

C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$

D. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9$

Lời giải

Chọn C

Gọi mặt cầu cần tìm là (S) .

Ta có (S) là mặt cầu có tâm $I(1;2;-1)$ và bán kính R .

Vì (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x-2y-2z-8=0$ nên ta có

$$R = d(I; (P)) = \frac{|1 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) - 8|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = 3.$$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$.

Câu 63. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x+y+2z+2=0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1. Viết phương trình của mặt cầu (S)

A. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 8$

B. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 10$

C. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 8$

D. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 10$

Lời giải

Chọn D

Gọi R, r lần lượt là bán kính của mặt cầu (S) và đường tròn giao tuyến

$$\text{Ta có } R^2 = r^2 + \left(d(I, (P)) \right)^2 = 1 + \left(\frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2|}{\sqrt{2^2 + 1 + 2^2}} \right)^2 = 10$$

Mặt cầu (S) tâm $I(2;1;1)$ bán kính $R = \sqrt{10}$ là $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 10$.

Câu 64. Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) , cho đường tròn (S) có tâm I nằm trên đường thẳng $y = -x$, bán kính $R = 3$ và tiếp xúc với các trục tọa độ. Lập phương trình của (S) , biết hoành độ tâm I là số dương.

A. $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$.

B. $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 9$.

C. $(x-3)^2 - (y-3)^2 = 9$.

D. $(x+3)^2 + (y+3)^2 = 9$.

Lời giải

Chọn B

Do tâm I nằm trên đường thẳng $y = -x \Rightarrow I(a; -a)$, điều kiện $a > 0$.

Đường tròn (S) có bán kính $R = 3$ và tiếp xúc với các trục tọa độ nên:

$$d(I; Ox) = d(I; Oy) = 3 \Leftrightarrow |a| = 3 \Leftrightarrow a = 3(n) \vee a = -3(l) \Rightarrow I(3; -3).$$

Vậy phương trình $(S): (x-3)^2 + (y+3)^2 = 9$.

Câu 65. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + m - 3 = 0$. Tìm số thực của tham số m để mặt phẳng $(\beta): 2x - y + 2z - 8 = 0$ cắt (S) theo một đường tròn có chu vi bằng 8π .

A. $m = -3$.

B. $m = -1$.

C. $m = -2$.

D. $m = -4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + m - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 17 - m$.

(S) là phương trình của mặt cầu thì $17 - m > 0 \Leftrightarrow m < 17$.

Khi đó $I(-1; 2; 3); R = \sqrt{17 - m}$ lần lượt là tâm và bán kính của (S) .

Đề mặt phẳng $(\beta): 2x - y + 2z - 8 = 0$ cắt (S) theo thiết diện là một đường tròn có chu vi bằng 8π thì đường tròn đó có bán kính $r = 4$.

Ta có $R^2 = d^2(I, (\beta)) + r^2 \Leftrightarrow 17 - m = 16 + 2 \Leftrightarrow m = -1$ (TMĐK).

Câu 66. Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt cầu có tâm $I(1; -2; -3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) là

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 9$.

B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$.

C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 4$.

D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 1$.

Lời giải

Chọn D

Mặt phẳng (Oyz) có phương trình là: $x = 0$.

$$d(I, (Oyz)) = \frac{|1 - 2 \cdot 0 - 3|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = 1$$

Vì mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) suy ra: $R = d(I, (Oyz)) = 1$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 1$.

Câu 67. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (α) có phương trình $2x + y - z - 1 = 0$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4$. Xác định bán kính r của đường tròn là giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S) .

- A. $r = \frac{2\sqrt{42}}{3}$. B. $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. $r = \frac{2\sqrt{15}}{3}$. D. $r = \frac{2\sqrt{7}}{3}$

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;-2)$ và bán kính $R = 2$. Gọi d là khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (α) . Ta có $d = d(I, (\alpha)) = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Khi đó ta có: $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 68. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 3 = 0$ và mặt cầu (S) có tâm $I(0; -2; 1)$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích 2π . Mặt cầu (S) có phương trình là

- A. $x^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 2$. B. $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$.
C. $x^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 3$. D. $x^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 1$.

Lời giải

Chọn B

Gọi R, r lần lượt là bán kính của mặt cầu và đường tròn giao tuyến. Theo giả thiết ta có:

$$\pi r^2 = 2\pi \Leftrightarrow r^2 = 2$$

Mặt khác $d(I, (P)) = 1$ nên $R^2 = r^2 + [d(I, (P))]^2 = 3$.

Vậy phương trình mặt cầu là $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$.

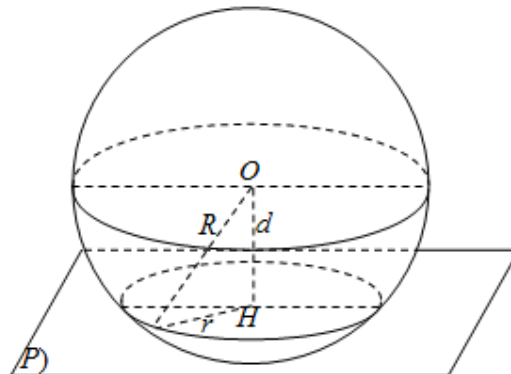
Câu 69. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z - 3 = 0$. Biết mặt cầu (S) cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn (C) . Tính bán kính r của (C) .

- A. $r = 2\sqrt{2}$. B. $r = \sqrt{2}$. C. $r = 2$. D. $r = \sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Hình vẽ



Mặt cầu (S) có tâm $I(2;0;-1)$, bán kính $R=3$.

Khoảng cách từ tâm I đến (P) là $d = d(I, (P)) = \frac{|2 \cdot 2 - 0 - 2 \cdot (-1) - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = 1 < R = 3$

Bán kính đường tròn giao tuyến (C) là $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$.

Câu 70. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 2 = 0$ và điểm $I(-1;2;-1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5.

A. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 25$.

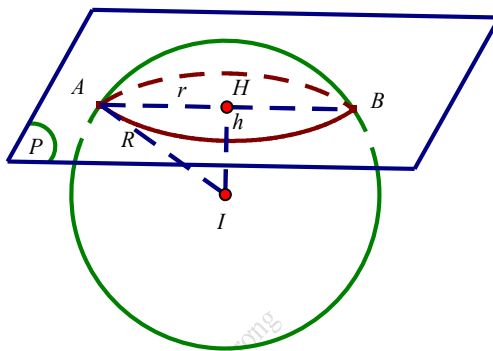
B. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 16$.

C. $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 34$.

D. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 34$.

Lời giải

Chọn D



Gọi h là khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) ta có:

$$h = d(I; (P)) = \frac{|-1 - 4 - 2 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 3.$$

Bán kính mặt cầu (S) là: $R = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$.

Phương trình mặt cầu (S) là: $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 34$.

Câu 71. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(1;2;-1)$ và cắt mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 1 = 0$ theo một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{8}$ có phương trình là

A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9$.

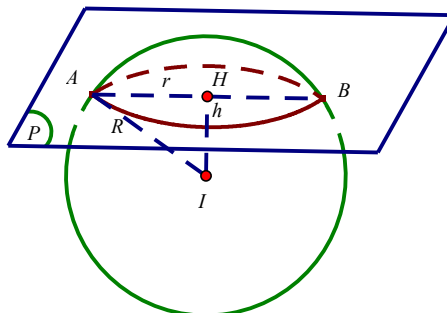
B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$.

C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$.

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P) . Khi đó H là tâm của đường tròn giao tuyến của (P) với mặt cầu (S) .

Khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (P) là: $h = d(I; (P)) = \frac{|2 - 2 - 2 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 1$.

Bán kính mặt cầu (S) là: $R = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{8})^2} = 3$.

Phương trình mặt cầu (S) : $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$.

Câu 72. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu tâm $I(-1; 3; 0)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 11 = 0$.

A. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 4$.

B. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 4$.

C. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 2$.

D. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 = \frac{4}{9}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có bán kính mặt cầu là $R = d(I, P) = \frac{|2 \cdot (-1) - 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 11|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 2$.

Nên mặt cầu cần lập có phương trình là: $(x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 4$.

Câu 73. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm $I(3; 1; 0)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 1 = 0$?

A. $(x+3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 3$.

B. $(x+3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 9$.

C. $(x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 3$.

D. $(x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$.

Lời giải

Chọn D

Gọi (S) là mặt cầu có tâm I và tiếp xúc với (P) có R là bán kính. Khi đó ta có:

$$d(I, (P)) = R \Rightarrow R = \frac{|2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 - 0 + 1|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} \Leftrightarrow R = 3.$$

Vậy phương trình của (S) là $(x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$.

Câu 74. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(-2; 9; -1)$, tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) có phương trình là

A. $(x+2)^2 + (y-9)^2 + (z+1)^2 = 81$.

B. $(x+2)^2 + (y-9)^2 + (z+1)^2 = 9$.

C. $(x-2)^2 + (y+9)^2 + (z-1)^2 = 81$.

D. $(x-2)^2 + (y+9)^2 + (z-1)^2 = 9$.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu có tâm $I(-2; 9; -1)$, tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) nên có bán kính

$$R = d(I, (Oxz)) = |9| = 9, \text{ do đó nó có phương trình là: } (x+2)^2 + (y-9)^2 + (z+1)^2 = 9^2$$

$$\text{hay } (x+2)^2 + (y-9)^2 + (z+1)^2 = 81.$$

Câu 75. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(1; -2; -3)$ và tiếp xúc với trục Oy có phương trình là

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 4$.

B. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$.

C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 10.$

D. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14.$

Lời giải

Chọn C

Gọi H là hình chiếu vuông góc của $I(1; -2; -3)$ trên trục $Oy \Rightarrow H(0; -2; 0) \Rightarrow IH = \sqrt{10}$

Mặt cầu tâm $I(1; -2; -3)$ tiếp xúc với trục Oy có bán kính $R = IH = \sqrt{10}$ nên có phương trình:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 10.$$

Câu 76. Trong không gian $Oxyz$, tìm phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1; -4; 2)$ và diện tích 64π .

A. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-2)^2 = 4.$

B. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z+2)^2 = 16.$

C. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z+2)^2 = 4.$

D. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-2)^2 = 16.$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $S = 4\pi R^2 \Rightarrow 4\pi R^2 = 64\pi \Leftrightarrow R^2 = 16 \Rightarrow R = 4.$

Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1; -4; 2)$ và bán kính $R = 4$ là:

$$(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-2)^2 = 16.$$

Kết luận: Mặt cầu (S) có phương trình là $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-2)^2 = 16.$

----- HẾT -----

Nguyễn Bảo Vương