

BÀI 4. TIỆM CẬN

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Nắm được khái niệm đường tiệm cận của đồ thị hàm số, khái niệm đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
- + Nhận biết được các đồ thị của hàm số có tiệm cận
- + Nắm được tính chất của các đường tiệm cận với đồ thị của hàm số

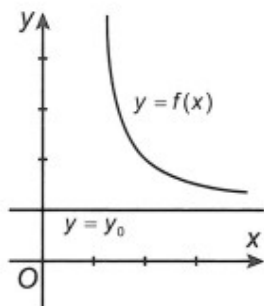
❖ Kỹ năng

- + Biết cách xác định phương trình đường tiệm cận của hàm số cho bởi công thức, cho bởi bảng biến thiên.
- + Biện luận số đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số chứa tham số.
- + Xác định các đường tiệm cận của đồ thị hàm số ẩn.
- + Áp dụng các tính chất của các đường tiệm cận vào các bài toán liên quan.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là đường tiệm cận ngang (gọi tắt là tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số

$$y = f(x) \text{ nếu } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$$

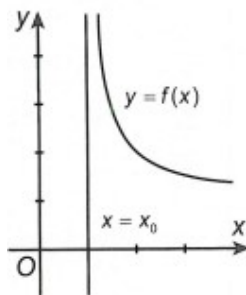


Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng (gọi tắt là tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số

$y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty.$$

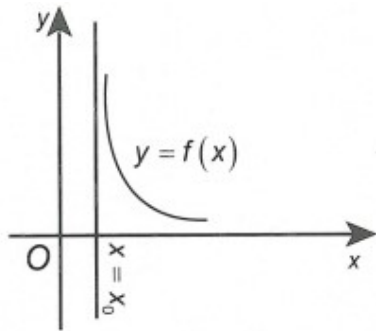


Tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$$

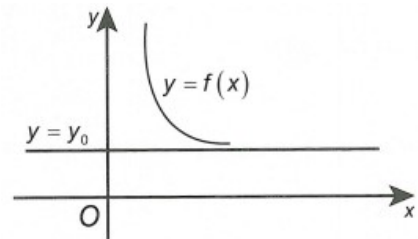


TIỆM CẬN

Tiệm cận ngang

Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$

hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$



II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Xác định các đường tiệm cận của đồ thị hàm số khi biết biểu thức, bảng biến thiên, đồ thị

Bài toán 1. Xác định các đường tiệm cận dựa vào định nghĩa

Phương pháp giải

Dựa vào định nghĩa của đường tiệm cận

Tiệm cận ngang

Đường thẳng $y = y_0$ là đường tiệm cận ngang của

đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$ hoặc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$$

Tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = x_0$ là đường tiệm cận đứng của đồ

thị hàm số $y = f(x)$ nếu một trong các điều kiện

sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$$

Ví dụ: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

Dựa vào định nghĩa đường tiệm cận ngang, ta có phương trình các đường tiệm cận ngang của đồ thị

hàm số $y = f(x)$ là $y = 1$ và $y = -1$.

Ví dụ: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$

$$\text{và } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty.$$

Dựa vào định nghĩa đường tiệm cận đứng, ta có phương trình các đường tiệm cận đứng của đồ thị

hàm số $y = f(x)$ là $x = -2$ và $x = 2$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là $y = 3$ và $y = -3$

B. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là $x = 3$ và $x = -3$

C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang

D. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang

Hướng dẫn giải

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$ nên $y = -3$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ nên $y = 3$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn A

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) và các giới hạn:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1; \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2. \text{ Mệnh đề nào sau đây đúng?}$$

A. Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của (C)

B. Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của (C)

C. Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của (C)

D. Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận ngang của (C)

Hướng dẫn giải

Ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \end{cases} \Rightarrow$ đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của (C)

Chọn B

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-2; -1)$ và có $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đúng hai tiệm cận đứng là $x = -2$ và $x = -1$

B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đúng một tiệm cận ngang là $y = 2$

C. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đúng một tiệm cận đứng là $x = -1$

D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đúng hai tiệm cận ngang là $y = 2$ và $y = -1$

Hướng dẫn giải

Do $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$ nên đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng là $x = -1$

Chọn C

Bài toán 2. Xác định các đường tiệm cận của đồ thị hàm số dựa vào bảng biến thiên và đồ thị hàm số

Phương pháp giải

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ xác định phương trình các đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang, số các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = f(x)$

Chú ý:

- Ứng với điểm $x = x_0$ trong bảng biến thiên thì ở dòng y phải ghi các kí hiệu $-\infty$ hoặc $+\infty$ (không phải các giá trị cụ thể) thì đường thẳng $x = x_0$ mới là đường tiệm cận đứng của đồ thị.

- Ứng với điểm $-\infty$ hoặc $+\infty$ trong bảng biến thiên thì ở dòng y phải ghi các giá trị cụ thể y_0 (không phải là $-\infty$ hoặc $+\infty$) thì đường thẳng $y = y_0$ mới là đường tiệm cận ngang của đồ thị.

Ví dụ: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
y'	+		+
y	y_0	$+\infty$	y_0

Dựa vào bảng biến thiên ta có đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng và đường thẳng $y = y_0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Hàm số có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+		- 0 +		+
y	-3	$+\infty$	-2	$+\infty$	3

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4

B. 1

C. 2

D. 3

Hướng dẫn giải

Từ bảng biến thiên của hàm số, ta có

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3 \Rightarrow y = -3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 \Rightarrow y = 3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

Vậy hàm số có hai tiệm cận đứng là $x = \pm 1$, hai tiệm cận ngang là $y = \pm 3$

Chọn A

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
y'	-		- +	
y	4	$+\infty$	2	$+\infty$

Phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. $x = -2$ và $x = 1$

B. không có tiệm cận đứng

C. $x = -2$

D. $x = 1$

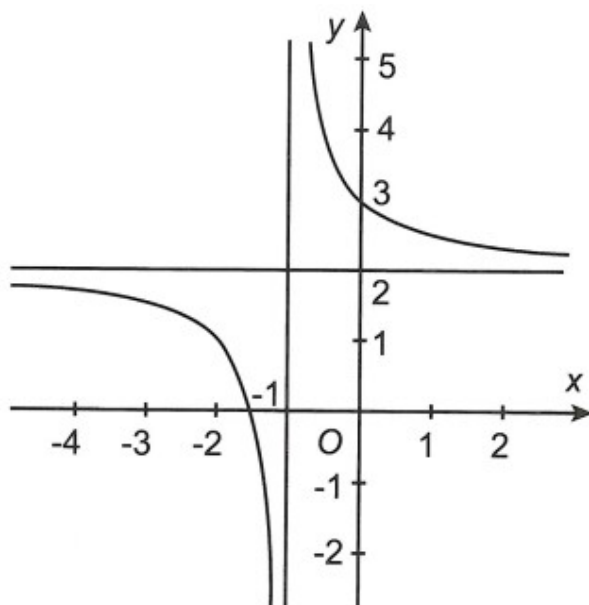
Hướng dẫn giải

Từ bảng biến thiên, ta có $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} y = +\infty$ nên $x = -2$ là đường tiệm cận đứng;

$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} y = 2$ nên $x = 1$ không là đường tiệm cận đứng.

Chọn C.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới.



Phương trình các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

A. $x = 1$ và $y = -2$

B. $x = 1$ và $y = 2$

C. $x = -1$ và $y = -2$

D. $x = -1$ và $y = 2$

Hướng dẫn giải

Dựa vào đồ thị, ta suy ra tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị lần lượt là các đường thẳng $x = -1$, $y = 2$.

Chọn D

Bài toán 3. Xác định các đường tiệm cận của đồ thị khi biết hàm số

 **Phương pháp giải**

Tiệm cận của đồ thị hàm số

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad c \neq 0, \quad ad - bc \neq 0$$

Ví dụ: Xác định các đường tiệm cận của đồ thị hàm

$$\text{số } y = \frac{2x + 3}{x - 1}$$

Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Bước 2. Xác định các đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị.

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \frac{a}{c}$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận

Khi đó $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2$ nên đồ thị có đường tiệm cận ngang là $y = 2$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$ nên đồ thị có đường tiệm cận đứng là $x = 1$

ngang là $y = \frac{a}{c}$

- $\lim_{x \rightarrow \frac{d}{c}^{\pm}} y = \pm\infty$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm

cận đứng là $x = -\frac{d}{c}$

Bước 3. Kết luận

Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có hai đường tiệm cận:

Tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$ và tiệm cận ngang $y = -\frac{a}{c}$.

Chú ý:

- Giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ là điểm $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ là tâm đối xứng của đồ thị.

- Hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ cùng với hai trục tọa độ tạo thành hình chữ nhật có chu vi là $2\left(\left|\frac{a}{c}\right| + \left|\frac{d}{c}\right|\right)$ và diện tích là $\left|\frac{ad}{c^2}\right|$

Tiệm cận của đồ thị hàm số hữu tỷ $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

Điều kiện xác định $g(x) \neq 0$.

Tính các giới hạn $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y$; $\lim_{x \rightarrow x_0^{\pm}} y$ nếu thỏa mãn định

nghĩa của đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang thì kết luận.

Chú ý:

- Đối với hàm số phân thức hữu tỷ $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ với

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ($a_n \neq 0$) và

$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ ($b_m \neq 0$)

Khi đó:

+ Nếu $n > m$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

+ Nếu $n = m$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x-1}$

nhận đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang

và nhận đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng.

Ví dụ: Xác định các đường tiệm cận của đồ thị hàm

số $y = \frac{x+1}{x^2+2x-3}$

Hướng dẫn giải

Tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{1; -3\}$

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \pm\infty$; $\lim_{x \rightarrow -3^+} y = \pm\infty$

Suy ra đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận đứng là $x = 1$; $x = -3$ và một tiệm cận ngang $y = 0$

$$y = \frac{a_n}{b_m}$$

+ Nếu $n < m$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 0$

- Nếu đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số thì $x = x_0$ là nghiệm của phương trình $g(x) = 0$ (ngược lại nghiệm của $g(x) = 0$ chưa chắc đã là tiệm cận đứng của đồ thị). Hay nói cách khác $x = x_0$ là các điểm gián đoạn của hàm số.

Tiệm cận của đồ thị hàm số vô tỷ.

Đối với hàm số vô tỷ, bước quan trọng nhất để xác định đồ thị hàm số có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là tìm tập xác định của hàm số.

Bước

Ví dụ: Xác định tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của

$$\text{đồ thị hàm số } y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+2}$$

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = [-1; 1]$

Không tồn tại các giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Mặt khác do hàm số liên tục trên khoảng $(-1; 1)$ và

$\lim_{x \rightarrow -1^+} y = f(-1)$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = f(1)$ nên hàm số liên tục trên đoạn $[-1; 1] \Rightarrow$ Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Phương trình các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ là

A. $x = -2$; $y = 1$

B. $x = 1$; $y = 2$

C. $x = 2$; $y = 1$

D. $x = 2$; $y = -1$

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-2} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty$ nên $x = 2$ là phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x-2} = 1$ nên $y = 1$ là phương trình đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

Chọn C

Ví dụ 2: Đồ thị hàm số nào sau đây nhận đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng?

A. $y = \frac{2x}{x-2}$

B. $y = 2$

C. $y = \frac{2x}{x+2}$

D. $y = x - 2 - \frac{2}{x}$

Hướng dẫn giải

Ta thấy hàm số $y = \frac{2x}{x-2}$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ và $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x}{x-2} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x}{x-2} = -\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 2$

Chọn A

Ví dụ 3: Tọa độ tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{x-1}$ là

A. $(-1; 3)$

B. $(-1; 1)$

C. $(3; 1)$

D. $(1; 3)$

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Ta có đường tiệm cận đứng của đồ thị là $x = 1$ và tiệm cận ngang của đồ thị là $y = 3$, tọa độ tâm đối xứng của đồ thị là giao của hai đường tiệm cận $I(1; 3)$.

Chọn D

Ví dụ 4: Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng

A. 2 (đvdt)

B. 3 (đvdt)

C. 1 (đvdt)

D. 4 (đvdt)

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 1$ và tiệm cận ngang là $y = 2$. Khi đó hình chữ nhật tạo bởi hai đường tiệm cận và hai trục tọa độ có các kích thước là 1 và 2 nên có diện tích $S = 1.2 = 2$ (đvdt)

Chọn A

Ví dụ 5: Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{|x-\sqrt{2}|}{x-2}$ là

A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$\lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-\sqrt{2}|}{x-2} = +\infty \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 2$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-\sqrt{2}}{x-2} = 1 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2}-x}{x-2} = -1 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -1$

Vậy số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là 3.

Chọn B

Ví dụ 6: Đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{x^2+2x-3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 3

B. 2

C. 1

D. 0

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1; -3\}$

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x^2+2x-3} = 0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 0$.

+ $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$;

+ $\lim_{x \rightarrow -3^-} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -3^+} y = +\infty \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -3$.

Vậy đồ thị hàm số có ba tiệm cận.

Chọn A

Ví dụ 7: Đồ thị hàm số $y = \frac{|x|+1}{|x|-1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1

B. 2

C. 4

D. 3

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 1$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = -\infty \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -1$

Vậy đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận

Chọn D

Ví dụ 8: Đồ thị hàm số $y = \frac{(x^2-3x+2)\sin x}{x^3-4x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0; \pm 2\}$

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-4} \right) \left(\frac{\sin x}{x} \right) \right] = \frac{0^2-3.0+2}{0^2-4} \cdot 1 = -\frac{1}{2}$ nên $x = 0$ không phải là đường tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow 2} y = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 3x + 2)\sin x}{x^3 - 4x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)\sin x}{x(x+2)} = \frac{\sin 2}{8}$ nên đường thẳng $x = 2$ không là đường tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow -2^+} y = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(x^2 - 3x + 2)\sin x}{x^3 - 4x} = -\infty$ nên đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị.

Vậy hàm số chỉ có một đường tiệm cận đứng là $x = -2$.

Chọn A

Ví dụ 9: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là

A. 3

B. 4

C. 2

D. 1

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = [-9; +\infty) \setminus \{0; -1\}$.

Khi đó, ta có

$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = +\infty, \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = -\infty \Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+9}+3)} = \frac{1}{6}$ và $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow x = 0$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn C.

Chú ý: Không tồn tại $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$ vì trong tập xác định không có x tiến tới $-\infty$

Ví dụ 10: Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{16-x^2}}{x(x-16)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4

B. 2

C. 0

D. 1

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = [-4; 4] \setminus \{0\}$

Do $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = +\infty; \lim_{x \rightarrow 0^+} y = -\infty$ nên đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có một đường tiệm cận.

Chọn D.

Ví dụ 11: Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+1}}{|x|-1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = (-1; +\infty) \setminus \{1\}$

Ta có :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y \frac{\sqrt{x+1}}{x-1} = 0 \Rightarrow \text{Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là } y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x+1}}{x-1} = +\infty; \lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{x+1}}{x-1} = - \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = -\infty$$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -1$

Vậy đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

Chọn D

Ví dụ 12: Phương trình các đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1+\sqrt{x^2+1}}{x-3}$ là

A. $y = 1$

B. $y = 3$ và $y = 1$

C. $y = 2$

D. $y = 3$

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1+\sqrt{x^2+1}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{3}{x}} = 3$$

$\Rightarrow y = 3$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1+\sqrt{x^2+1}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{3}{x}} = 1$$

$\Rightarrow y = 1$ là đường tiệm cận ngang.

Chọn B

Ví dụ 13: Biết các đường tiệm cận của đường cong $(C): y = \frac{6x+1-\sqrt{x^2-2}}{x-5}$ và trục tung cắt nhau tạo thành một đa giác (H) . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. (H) là một hình chữ nhật có diện tích bằng 8

B. (H) là một hình vuông có diện tích bằng 4

C. (H) là một hình vuông có diện tích bằng 25

D. (H) là một hình chữ nhật có diện tích bằng 10

Hướng dẫn giải

Tập xác định $(-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty) \setminus \{5\}$

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x+1-\sqrt{x^2-2}}{x-5} = 5 \Rightarrow y = 5$ là tiệm cận ngang của (C)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x+1-\sqrt{x^2-2}}{x-5} = 7 \Rightarrow y = 7$ là tiệm cận ngang của (C)

$\lim_{x \rightarrow 5^+} y = +\infty; \lim_{x \rightarrow 5^-} y = -\infty \Rightarrow x = 5$ là tiệm cận đứng của (C)

Vậy đồ thị có ba đường tiệm cận là $y = 5; y = 7; x = 5$ cùng với trục tung tạo thành một hình chữ nhật có kích thước 2×5 nên có diện tích bằng 10.

Chọn D

Ví dụ 14 : Cho hàm số $y = x + \sqrt{x^2 + 2x + 3}$. Khi đó, đồ thị hàm số

A. có tiệm cận đứng và không có tiệm cận ngang

B. có tiệm cận ngang và không có tiệm cận đứng

C. có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang

D. không có cả tiệm cận đứng và tiệm cận ngang

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Do hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên đồ thị không có tiệm cận đứng

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 2x + 3} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x} = -1$

$\Rightarrow y = -1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 2x + 3} \right) = +\infty$

Vậy đồ thị chỉ có một đường tiệm cận ngang là $y = -1$

Chọn B

Ví dụ 15: Phương trình các đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - 1}}$ là

A. $y = 1$ và $y = -1$

B. $y = 1$

C. $y = -1$

D. Không có tiệm cận ngang

Hướng dẫn giải

Tập xác định $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 1$

$\Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn B

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 2$ và $y = -2$
- B. Đồ thị hàm số đã cho không có đường tiệm cận ngang
- C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một đường tiệm cận ngang
- D. Đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 2$ và $x = -2$

Câu 2: Hàm số $y = f(x)$ xác định với mọi $x \neq \pm 1$, có $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng
- B. Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng
- C. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng
- D. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$
- B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có tiệm cận đứng
- C. Đường thẳng $x = 3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$
- D. Đường thẳng $x = 3$ không phải là tiệm cận của đồ thị hàm số $y = f(x)$

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		- 0 +	
$f(x)$	$-\infty$	2	$+\infty$	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang
- B. Hàm số không có đạo hàm tại $x = -1$
- C. Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 1$
- D. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình dưới

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
y'	-		- 0 +	
y	3 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ -2	-2 ↗ 5	

Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 3

B. 1

C. 2

D. 4

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	-		+ 0 -	
y	2 ↘ $-\infty$	$-\infty$ ↗ 1	1 ↘ $-\infty$	$-\infty$

Hỏi đồ thị hàm số có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
y'	-		- 0 +	
y	1 ↘ $-\infty$	2 ↘ -3	-3 ↗ 3	

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 3

B. 4

C. 1

D. 2

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị của hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'			+	-
y			$+\infty$ 1	0

A. 4

B. 1

C. 3

D. 2

Câu 9: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'	-		+	-
y	$+\infty$ 1	$-\infty$	$+\infty$ 1	0

A. 0

B. 1

C. 3

D. 2

Câu 10: Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{1-x}$ là

A. $y = -1$ B. $x = -1$ C. $x = 1$ D. $y = 1$

Câu 11: Đồ thị của hàm số $y = \frac{x+2}{3-x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2

B. 3

C. 1

D. 4

Câu 12: Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ là

A. $y = -2$ B. $x = 1$ C. $y = 2$ D. $x = -1$

Câu 13: Hàm số nào dưới đây có đồ thị nhận đường thẳng $x = 2$ là đường tiệm cận?

A. $y = \frac{5x}{2-x}$ B. $y = x - 2 + \frac{1}{x+1}$ C. $y = \frac{2}{x+2}$ D. $y = \frac{1}{x+1}$

Câu 14: Tọa độ giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2-5x}{2x+3}$ là

A. $\left(-\frac{3}{5}; \frac{5}{2}\right)$ B. $\left(-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ C. $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right)$ D. $\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right)$

Câu 15: Tổng khoảng cách từ điểm $M(1; -2)$ đến hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ là

A. 4

B. 2

C. 1

D. 3

Câu 16: Đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{x^2+1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

A. 2**B. 1****C. 3****D. 0**

Câu 17: Đường thẳng $y = -1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nào sau đây?

A. $y = \frac{1+x}{1-x}$

B. $y = \frac{2x^2 + 3x + 2}{x - 2}$

C. $y = \frac{2x - 2}{x + 2}$

D. $y = \frac{1+x^2}{1+x}$

Câu 18: Phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{2x - 4}$ là

A. $x = 2$

B. $x = -1$

C. $y = 1$

D. $x = 1$

Câu 19: Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{x+1} - \frac{3x}{2x-1}$ là

A. $y = 2$

B. $x = \frac{1}{2}$

C. $y = \frac{1}{2}$

D. $y = -\frac{3}{2}$

Câu 20: Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 1**B. 3****C. 0****D. 2**

Câu 21: Cho hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x - 3}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận**B.** Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là $x = -1$ và $x = 3$ **C.** Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = \frac{1}{2}$ **D.** Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 2$

Câu 22: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x + 2017}{|x| + 1}$ là

A. 1**B. 2****C. 3****D. 4**

Câu 23: Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3 + x}{x^2 - x - 2}$ là

A. 2**B. 1****C. 3****D. 0**

Câu 24: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{1 - \sqrt{4 - x^2}}{x^2 - 2x - 3}$ là

A. 0**B. 2****C. 3****D. 1**

Câu 25: Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}{x - 2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 3**B. 1****C. 2****D. 4**

Câu 26: Phương trình các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{4 - x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$ là

A. $x = 1; y = 2$

B. $x = 1$

C. $x = 0; y = -1$

D. $x = 1; y = -1$

Câu 27: Đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2**B. 0****C. 1****D. 4****Câu 28:** Đồ thị hàm số nào sau đây có đúng hai đường tiệm cận ngang?

A. $y = \frac{\sqrt{x^2 - x}}{|x| + 2}$

B. $y = \frac{\sqrt{x + 2}}{|x| - 2}$

C. $y = \frac{|x| - 2}{x + 1}$

D. $y = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x + 1}$

Câu 29: Gọi n, d lần lượt là số đường tiệm cận ngang và số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$$y = \frac{\sqrt{1 - x}}{(x - 1)\sqrt{x}}$$
. Giá trị của n, d là

A. $n = 1; d = 2$ **B.** $n = 0; d = 1$ **C.** $n = 0; d = 2$ **D.** $n = d = 1$ **Câu 30:** Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{3x^2 + 2}}{\sqrt{2x + 1} - x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?**A. 1****B. 4****C. 3****D. 2****Câu 31:** Phương trình các đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 1}{\sqrt{4x^2 + 3}}$ là**A.** $y = 1$ **B.** $y = 1$ và $y = -1$ **C.** $y = 2$ **D.** $y = 2$ và $y = -2$ **Câu 32:** Đồ thị hàm số $y = 2x - 1 + \sqrt{4x^2 - 4}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?**A. 1****B. 0****C. 3****D. 2****Câu 33:** Đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?**A. 2****B. 1****C. 3****D. 4****Câu 34:** Đồ thị hàm số $y = \sqrt{4x^2 + 4x + 3} - \sqrt{4x^2 + 1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?**A. 2****B. 0****C. 1****D. 3****Câu 35:** Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2x^2 - 5x + 2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?**A. 2****B. 1****C. 3****D. 4****ĐÁP ÁN**

1-A	2-A	3-C	4-D	5-A	6-B	7-A	8-C	9-C	10-A
11-A	12-D	13-A	14-C	15-A	16-B	17-A	18-A	19-C	20-A
21-C	22-B	23-B	24-D	25-C	26-B	27-A	28-C	29-C	30-D
31-B	32-A	33-B	34-A	35-A					

Dạng 2: Xác định các đường tiệm cận của đồ thị hàm số chứa tham số

Bài toán 1: Tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

Phương pháp giải

Để tồn tại các đường tiệm cận của đồ thị hàm số **Ví dụ:** Tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ thì } c \neq 0 \text{ và } ad - bc \neq 0$$

$$\text{thị hàm số } y = \frac{2x+4}{x-m} \text{ có tiệm cận đứng là}$$

Khi đó phương trình các đường tiệm cận là

A. $m < -2$

+ Tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$

B. $m \neq -2$

C. $m > -2$

+ Tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$

D. $m = -2$

Hướng dẫn giải

Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận là

$$-2m - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2$$

Chọn B

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{(2m-1)x+1}{x-m}$ có đường tiệm cận ngang $y = 3$ là

A. $m = 1$

B. $m = 0$

C. $m = 2$

D. $m = 3$

Hướng dẫn giải

Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận là

$$-m(2m-1) - 1 \neq 0 \Leftrightarrow 2m^2 - m + 1 \neq 0 \Rightarrow \forall m \in \mathbb{R}$$

Phương trình đường tiệm cận ngang là $y = 2m - 1$ nên có $2m - 1 = 3 \Leftrightarrow m = 2$.

Chọn C

Ví dụ 2: Tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{mx-1}$ có tiệm cận đứng là

A. $\mathbb{R}$

B. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

C. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

D. $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận là } \begin{cases} m \neq 0 \\ -1+m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$$

Chọn D

Ví dụ 3. Tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{mx-1}$ không có tiệm cận đứng là

A. $\mathbb{R}$

B. $\left\{0; \frac{1}{3}\right\}$

C. $\left\{\frac{1}{3}\right\}$

D. $\{0\}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện để đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng là

$$\begin{cases} m = 0 \\ -1 + 3m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Chọn B

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+1}$. Biết đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $A(0; -1)$ và có đường tiệm cận ngang là $y = 1$. Giá trị $a + b$ bằng

A. 1

B. 0

C. 3

D. 2

Hướng dẫn giải

Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận là $a - b \neq 0$

Do đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0; -1)$ nên $b = -1$

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y = a \Rightarrow a = 1$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy $a + b = 0$

Chọn B

Ví dụ 5: Biết rằng đồ thị của hàm số $y = \frac{(a-3)x + a + 2019}{x - (b+3)}$ nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung làm tiệm cận đứng. Khi đó giá trị của $a + b$ bằng

A. 3

B. -3

C. 6

D. 0

Hướng dẫn giải

Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận là $-(a-3)(b+3) - (a+2019) \neq 0$

Phương trình các đường tiệm cận là

$$\begin{cases} x = b + 3 \\ y = a - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + 3 = 0 \\ a - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3 \\ a = 3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy $a + b = 0$

Chọn D

Ví dụ 6: Giá trị thực của tham số m để đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{2x+m}$ đi qua điểm $A(1; 2)$ là

A. $m = 4$

B. $m = -2$

C. $m = -4$

D. $m = 2$

Hướng dẫn giải

Điều kiện để đồ thị hàm số có đường tiệm cận là $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$

Đường tiệm cận đứng là $x = -\frac{m}{2} \Rightarrow -\frac{m}{2} = 1 \Leftrightarrow m = -2$ (thỏa mãn)

Chọn B

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = \frac{mx+1}{x-2m}$ với tham số $m \neq 0$. Giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số thuộc đường thẳng nào dưới đây?

A. $x + 2y = 0$

B. $2x + y = 0$

C. $x - 2y = 0$

D. $y = 2x$

Hướng dẫn giải

Điều kiện để đồ thị hàm số có đường tiệm cận là $-2m^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow \forall m \in \mathbb{R}$.

Phương trình các đường tiệm cận là $x = 2m$; $y = m$ nên tọa độ giao điểm của hai đường tiệm cận là $I(2m; m)$ thuộc đường thẳng $x = 2y$

Chọn C

Ví dụ 8: Tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{4x-5}{x-m}$ có tiệm cận đứng nằm bên phải trục tung là

A. $m > 0$ và $m \neq \frac{5}{4}$

B. $m > 0$

C. $m > 0$ và $m \neq \frac{3}{4}$

D. $m < 0$

Hướng dẫn giải

Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận là $-4m + 5 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{5}{4}$

Phương trình đường tiệm cận đứng là $x = m$

Để tiệm cận đứng nằm bên phải trục tung thì $m > 0$

Vậy điều kiện cần tìm là $\begin{cases} m > 0 \\ m \neq \frac{5}{4} \end{cases}$

Chọn A.

Bài toán 2: Tiệm cận của đồ thị hàm số phân thức hữu tỷ



Phương pháp giải

- Tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{A}{f(x)}$ với A là số

thực khác 0 và $f(x)$ là đa thức bậc $n > 0$.

- Đồ thị hàm số $y = \frac{A}{f(x)}$ luôn có tiệm cận ngang

Ví dụ: Cho hàm số $y = \frac{2}{x^2 - 2mx + 3m - 1}$. Giá trị

của tham số thực m để đồ thị hàm số đã cho nhận đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng là

A. $m = 3$

B. $m = 2$

$$y = 0.$$

- Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị

hàm số $y = \frac{A}{f(x)}$ khi và chỉ khi x_0 là nghiệm của

$$f(x) \text{ hay } f(x_0) = 0$$

$$\text{C. } m \neq 3$$

$$\text{D. } m \neq 2$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Điều kiện: } x^2 - 2mx + 3m - 1 \neq 0$$

$$\text{Đặt } g(x) = x^2 - 2mx + 3m - 1$$

Để đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho thì

$$g(2) = 0 \Leftrightarrow 4 - 4m + 3m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 3$$

Chọn A

- Tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ với

$f(x), g(x)$ là các đa thức bậc khác 0.

- Điều kiện để đồ thị hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ có tiệm

cận ngang là bậc $f(x) \leq$ bậc $g(x)$.

- Điều kiện để đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận

đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ là x_0 là nghiệm

của $g(x)$ nhưng không là nghiệm của $f(x)$ hoặc

x_0 là nghiệm bội n của $g(x)$, đồng thời là nghiệm

bội m của $f(x)$ và $m < n$

Ví dụ: Giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số

$$y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m} \text{ không có tiệm cận đứng là}$$

$$\text{A. } m = 0$$

$$\text{B. } m = 1$$

$$\text{C. } m = 0; m = 1$$

$$\text{D. } m = 0; m = -1$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Điều kiện } x \neq m$$

$$\text{Đặt } f(x) = 2x^2 - 3x + m$$

Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng thì

$$f(m) = 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 3m + m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

Chọn C.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2 - 2x + 1}{2x + 1}$ có tiệm cận đứng là

$$\text{A. } m = 8$$

$$\text{B. } m = 0$$

$$\text{C. } m \neq 4$$

$$\text{D. } m \neq -8$$

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$. Đặt $g(x) = mx^2 - 2x + 1$

Để đồ thị hàm số có tiệm cận đứng thì $x = -\frac{1}{2}$ không là nghiệm của $g(x)$

$$\Leftrightarrow g\left(-\frac{1}{2}\right) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{m}{4} + 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -8$$

Chọn D

Ví dụ 2: Biết đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2-2mx+n+6}$ (m, n là tham số) nhận đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng, giá trị của $m+n$ bằng

A. 6

B. 10

C. -4

D. -7

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x^2 - 2mx + n + 6 \neq 0$. Đặt $g(x) = x^2 - 2mx + n + 6$

Do $x=1$ là nghiệm của $f(x) = x-1$ nên đồ thị hàm số đã cho nhận đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng thì $x=1$ phải là nghiệm kép của phương trình

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(1) = -2m + n + 7 = 0 \\ \Delta' = m^2 - n - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2m - 7 \\ m^2 - 2m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = -5 \end{cases}$$

Vậy $m+n = -4$.

Chọn C

Ví dụ 3: Biết đồ thị hàm số $y = \frac{(2m-n)x^2 + mx + 1}{x^2 + mx + n - 6}$ nhận trục hoành và trục tung làm hai tiệm cận. Giá trị $m+n$ bằng

A. 8

B. 9

C. 6

D. -6

Hướng dẫn giải

Điều kiện $x^2 + mx + n - 6 \neq 0$

Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = 2m - n$

$$\Rightarrow 2m - n = 0 \quad (1)$$

Đặt $f(x) = (2m-n)x^2 + mx + 1$ và $g(x) = x^2 + mx + n - 6$

Nhận thấy $f(0) \neq 0$ với mọi m, n nên đồ thị nhận trục tung $x=0$ là tiệm cận đứng thì $g(0) = 0 \Leftrightarrow n - 6 = 0 \Leftrightarrow n = 6$. Kết hợp với (1) suy ra $m = 3$.

Vậy $m+n = 9$

Chọn B

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + x - 1}{4x^2 + bx + 9}$ có đồ thị (C) (a, b là các số thực dương và $ab = 4$). Biết rằng (C) có tiệm cận ngang $y = c$ và có đúng một tiệm cận đứng.

Giá trị của tổng $T = 3a + b - 24c$ bằng

A. 8

B. 9

C. 6

D. 11

Hướng dẫn giải

Điều kiện $4x^2 + bx + 9 \neq 0$

Phương trình tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = \frac{a}{4} \Rightarrow \frac{a}{4} = c$

Đồ thị (C) có một tiệm cận đứng nên ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Phương trình $4x^2 + bx + 9 = 0$ có nghiệm kép $x = x_0$ và không là nghiệm của $ax^2 + bx + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow b^2 - 144 = 0 \Leftrightarrow b = \pm 12. \text{ Vì } b > 0 \text{ nên } b = 12 \Rightarrow a = \frac{1}{3} \Rightarrow c = \frac{1}{12}$$

Thử lại ta có hàm số $y = \frac{\frac{1}{3}x^2 + x - 1}{4x^2 + 12x - 9}$ (thỏa mãn)

$$\text{Vậy } T = 3 \cdot \frac{1}{3} + 12 - 24 \cdot \frac{1}{12} = 11$$

Trường hợp 2: $4x^2 + bx + 9 = 0$ có hai nghiệm phân biệt và một trong hai nghiệm thỏa mãn $ax^2 + bx + 1 = 0$. Điều này không xảy ra vì $ab = 4$.

Chọn D

Chú ý: $a; b > 0$ nên mẫu số (nếu có) hai nghiệm đều âm, tử số hai nghiệm trái dấu.

Bài toán 3 Tiệm cận của đồ thị hàm số vô tỷ

Cho hàm số vô tỷ $y = f(x)$

- Tìm tập xác định D của hàm số.

- Để tồn tại tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

$y = f(x)$ thì trong tập xác định D của hàm số phải

chứa ít nhất một trong hai kí hiệu $-\infty$ hoặc $+\infty$ và

tồn tại ít nhất một trong hai giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$ hoặc

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y$ hữu hạn.

Ví dụ: Tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ

thị hàm số $y = \frac{(2m+1)x^2 + 3}{\sqrt{x^4 + 1}}$ có đường tiệm cận

ngang đi qua điểm $A(1; -3)$ là

A. $m = 0$

B. $m = \pm 1$

C. $m = -2$

D. $m = 2$

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 2m + 1$ nên đồ thị chỉ có một đường

tiệm cận ngang là $y = 2m + 1$

Để tiệm cận ngang đi qua điểm $A(1; -3)$ thì

$$2m + 1 = -3 \Leftrightarrow m = -2$$

Chọn C

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Biết đồ thị hàm số $y = 2x + \sqrt{ax^2 + bx + 4}$ có tiệm cận ngang $y = -1$

Giá trị $2a - b^3$ bằng

A. 56

B. -56

C. -72

D. 72

Hướng dẫn giải

Điều kiện $ax^2 + bx + 4 \geq 0$

Để đồ thị hàm số có tiệm cận ngang thì $a > 0$

Khi đó, ta có

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + \sqrt{ax^2 + bx + 4}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{ax^2 + bx + 4}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(a-4)x^2 + bx + 4}{\sqrt{ax^2 + bx + 4} - 2x} = -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-4=0 \\ \frac{b}{-\sqrt{a-2}} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=4 \end{cases}. \text{ Vậy } 2a - b^3 = -56$$

Chọn B.

Chú ý: Để $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -1$ thì bậc tử phải bằng bậc mẫu nên phải có $a-4=0$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \frac{b}{-\sqrt{a-2}}$

Ví dụ 2: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx + \sqrt{x^2 - 2x + 3}}{2x - 1}$ có một đường tiệm cận ngang là $y = 2$?

A. 0

B. Vô số

C. 1

D. 2

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{m+1}{2}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \frac{m-1}{2}$

Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là $y = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m+1}{2} = 2 \\ \frac{m-1}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=3 \\ m=5 \end{cases}$

Chọn D

 Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Biết rằng đồ thị hàm số $y = \frac{ax+1}{x-b}$ có tiệm cận đứng là $x = 2$, tiệm cận ngang là $y = -3$. Khi đó $a+b$ bằng

A. -1

B. 2

C. 1

D. -2

Câu 2: Các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{(m+1)x - 2m + 1}{x - 1}$ không có tiệm cận đứng là

- A. $m = 2$ B. $m = \frac{1}{2}$ C. $m = 1$ D. $m = -1$

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$. Giá trị của tham số a và b để đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 1$ làm tiệm cận đứng và đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ làm tiệm cận ngang là

- A. $a = 2; b = 2$ B. $a = 2; b = -2$ C. $a = 1; b = 2$ D. $a = -1; b = -2$

Câu 4: Giá trị của tham số m để đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{mx-1}{2x+m}$ đi qua điểm $A(1; 2)$ là

- A. $m = -2$ B. $m = -4$ C. $m = -5$ D. $m = 2$

Câu 5: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+m}{mx+1}$ không có đường tiệm cận đứng?

- A. 0 B. 1 C. 3 D. 2

Câu 6: Biết đồ thị hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ có đường tiệm cận đứng là $x = 2$ và đường tiệm cận ngang là $y = 3$, giá trị của $a + b$ bằng

- A. 4 B. 0 C. 1 D. 5

Câu 7: Tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx+2}{x-1}$ có tiệm cận đứng là

- A. $m \neq 2$ B. $m \neq -2$ C. $m \leq -2$ D. $m < 2$

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{2mx+1}{x-m}$ với tham số $m \neq 0$. Giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho thuộc đường thẳng nào dưới đây?

- A. $2x + y = 0$ B. $y = 2x$ C. $x - 2y = 0$ D. $x + 2y = 0$

Câu 9: Giá trị của tham số m để đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{x+m-1}$ đi qua điểm $A(5; 2)$ là

- A. $m = -1$ B. $m = 6$ C. $m = 4$ D. $m = -4$

Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{mx+1}{x+3n+1}$. Biết đồ thị hàm số nhận trục hoành và trục tung làm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng. Khi đó tổng $m + n$ bằng

- A. 0 B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

Câu 11: Tất cả các giá trị thực của tham số m để đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{mx+5}{x+1}$ đi qua điểm $M(10; -3)$ là

- A. $m = 5$ B. $m = -3$ C. $m = 3$ D. $m = -\frac{1}{2}$

Câu 12: Tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{-3x+1}{x-2m}$ có hai đường tiệm cận và hai đường tiệm cận đó cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 1 là

- A. $m = \pm \frac{1}{6}$ B. $m = \pm \frac{1}{3}$ C. $m = -\frac{1}{6}$ D. $m = \frac{1}{6}$

Câu 13: Biết đồ thị của hàm số $y = \frac{(n-3)x+n-2019}{x+m+3}$ (m, n là tham số) nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung là tiệm cận đứng. Tổng $m - 2n$ bằng

- A. 0 B. -3 C. -9 D. 6

Câu 14: Đồ thị hàm số $f(x) = \frac{ax-1}{x+b}$ đi qua điểm $M(1; 2)$ và có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$. Giá trị $f(-1)$ bằng

- A. 2 B. -8 C. $-\frac{1}{2}$ D. 6

Câu 15: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-m-1}{x-m^2}$ cắt nhau tại điểm thuộc đường thẳng $y = x + 1$?

- A. 1 B. -1 C. 0 D. 2

Câu 16: Đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{3x+9}$ có đường tiệm cận đứng là $x = a$ và đường tiệm cận ngang là $y = b$. Giá trị nguyên của tham số m nhỏ nhất thỏa mãn $m \geq a + b$ là

- A. $m = -1$ B. $m = -2$ C. $m = 0$ D. $m = -3$

Câu 17: Biết đồ thị hàm số $y = \frac{ax+1}{x+d}$ đi qua $M(2; 5)$ và có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$ thì tổng $a + d$ bằng

- A. 1 B. 8 C. 7 D. 3

Câu 18: Biết đồ thị của hàm số $y = \frac{(a-2b)x^2+bx+1}{x^2+x-b}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 0$. Giá trị $a + 2b$ bằng

- A. 7 B. 8 C. 10 D. 6

Câu 19: Biết đồ thị hàm số $y = \frac{(4a-b)x^2+ax+1}{x^2+ax+b-12}$ nhận trục hoành và trục tung làm hai tiệm cận thì giá trị $a + b$ bằng

- A. 10 B. 15 C. 2 D. -10

Câu 20: Biết đồ thị hàm số $y = \frac{x^3+ax^2+bx+c}{(x-2)^2}$ không có tiệm cận đứng. Giá trị $b + c$ bằng

- A. 9 B. 4 C. 1 D. 7

Câu 21: Biết đồ thị hàm số $y = \frac{x^4+ax^2+b}{(x-1)^2}$ không có tiệm cận đứng. Giá trị ab bằng

A. 2

B. -1

C. -2

D. 1

Câu 22: Biết rằng đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{3x+1} + ax + b}{(x-1)^2}$ không có tiệm cận đứng. Giá trị ab bằng

A. -2

B. 2

C. $\frac{15}{16}$ D. $-\frac{15}{16}$

Câu 23: Biết đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{5x+1} + ax + b}{(x-3)^2}$ không có tiệm cận đứng. Giá trị $a + 2b$ bằng

A. $-\frac{11}{4}$ B. $\frac{29}{8}$ C. $-\frac{39}{8}$ D. $-\frac{27}{8}$

Câu 24: Với các số thực dương a, b để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{a+bx} - \sqrt{2}}{x-2}$ có đúng một đường tiệm cận.

Giá trị lớn nhất của biểu thức $\log_{a+1} \frac{b}{2}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$

B. 2

C. -1

D. -2

ĐÁP ÁN

1-A	2-A	3-C	4-A	5-C	6-A	7-B	8-B	9-D	10-B
11-B	12-C	13-C	14-B	15-A	16-B	17-A	18-B	19-B	20-B
21-C	22-C	23-C	24-D						

Dạng 3. Xác định các đường tiệm cận của đồ thị hàm ẩn

Bài toán 1: Biết đồ thị, bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, xác định tiệm cận của đồ thị hàm số

$y = \frac{A}{g(x)}$ với A là số thực khác 0, $g(x)$ xác định theo $f(x)$

Phương pháp giải

- Xác định tiệm cận đứng:

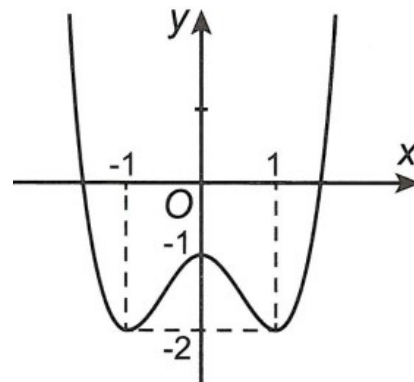
Ví dụ: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có

+ Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{A}{g(x)}$ là số đồ thị như hình vẽ.

nghiệm của phương trình $g(x) = 0$.

+ Dựa vào đồ thị, bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ để xác định số nghiệm của phương trình $g(x) = 0$ để suy ra số đường tiệm cận đứng.

- Xác định tiệm cận ngang: dựa vào nhánh vô tận của đồ thị, bảng biến thiên của hàm số để xác định.



Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$$y = \frac{1}{f(x)+1} \text{ là}$$

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Số đường tiệm cận đứng của đồ thị là số nghiệm của phương trình $f(x)+1=0 \Leftrightarrow f(x)=-1$.

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình có ba nghiệm nên có ba tiệm cận đứng.

Chọn B.

 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	-	0	+
y	1	$\searrow$ -2	$\nearrow$ 3

Tổng số đường tiệm cận của hàm số $y = \frac{1}{f(x)+1}$ là

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Số đường tiệm cận đứng của đồ thị là số nghiệm của phương trình $f(x)+1=0 \Leftrightarrow f(x)=-1$.

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình có hai nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)+1}$ có hai đường tiệm cận đứng.

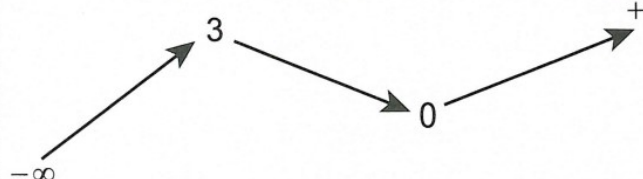
Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)+1} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ nên đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận

ngang là $y = \frac{1}{4}$ và $y = \frac{1}{2}$.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)+1}$ có bốn đường tiệm cận.

Chọn D.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y					

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x^3+x)+3}$ là

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = x^3 + x$, ta có khi $x \rightarrow -\infty$ thì $t \rightarrow -\infty$ và khi $x \rightarrow +\infty$ thì $t \rightarrow +\infty$.

Mặt khác ta có $t' = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên với mọi $t \in \mathbb{R}$ phương trình $x^3 + x = t$ có duy nhất một nghiệm x .

Số đường tiệm cận đứng của đồ thị là số nghiệm của phương trình

$$f(t) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(t) = -3.$$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình có duy nhất một nghiệm nên đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x^3+x)+3}$

có một tiệm cận đứng.

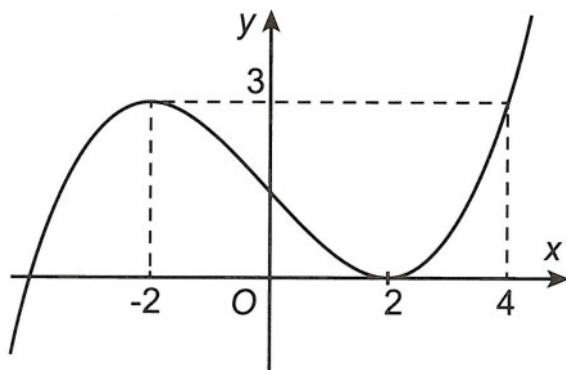
Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x^3+x)+3} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(t)+3} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x^3+x)+3} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(t)+3} = 0$ nên đồ thị hàm số

$y = \frac{1}{f(x^3+x)+3}$ có một tiệm cận ngang là $y = 0$.

Vậy đồ thị có hai đường tiệm cận

Chọn A.

Ví dụ 3. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{f(4-x^2)-3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = 4 - x^2$, ta có khi $x \rightarrow \pm\infty$ thì $t \rightarrow -\infty$.

Khi đó $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(t)-3} = 0$ nên $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $g(x)$.

$$\text{Mặt khác } f(4-x^2)-3=0 \Leftrightarrow f(4-x^2)=3 \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x^2=-2 \\ 4-x^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{6} \\ x=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $g(x)$ có ba đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có bốn đường tiệm cận.

Chọn C.

Bài toán 2: Biết đồ thị, bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, xác định tiệm cận của đồ thị hàm số

$y = \frac{\varphi(x)}{g(x)}$ với $\varphi(x)$ là một biểu thức theo x , $g(x)$ là biểu thức theo $f(x)$

Phương pháp giải

- Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ tìm nghiệm của phương trình $g(x) = 0$ và xác định biểu thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.

$g(x)$.

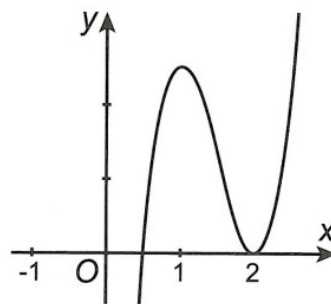
- Rút gọn biểu thức $\frac{\varphi(x)}{g(x)}$ và tìm tiệm cận đứng,

tiệm cận ngang.

Chú ý:

- Điều kiện tồn tại của $\varphi(x)$.

- Sử dụng tính chất nếu đa thức $g(x)$ có nghiệm



là $x = x_0$ thì $g(x) = (x - x_0) \cdot g_1(x)$, ở đó $g_1(x)$ là một đa thức.

Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{2x+1}}{(x^4 - 5x^2 + 4)f(x)}$ có bao

nhiều đường tiệm cận đứng?

- A. 2. B. 6.
C. 4. D. 3.

Hướng dẫn giải

Điều kiện xác định $\begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \neq 1; x \neq 2. \\ f(x) \neq 0 \end{cases}$

Với điều kiện trên, ta có

$$g(x) = \frac{\sqrt{2x+1}}{(x+1)(x+2) \cdot f(x)}.$$

Khi đó số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$ là số nghiệm của phương trình $f(x) = 0$

thỏa mãn $x \geq -\frac{1}{2}$.

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = k \in (0; 1) \\ x = 2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy đồ thị hàm số $y = g(x)$ có hai đường tiệm cận đứng.

Chọn A.

Ví dụ mẫu

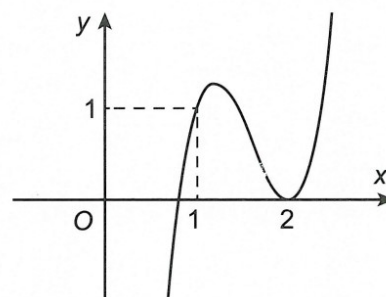
Ví dụ 1. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.

Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-1}}{x[f^2(x) - f(x)]}$ có bao nhiêu

đường tiệm cận đứng?

- A. 4. B. 6.
C. 3. D. 5.

Hướng dẫn giải



$$\text{Điều kiện xác định } \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 0 \\ f^2(x) - f(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ f(x) \neq 0 \\ f(x) \neq 1 \end{cases}.$$

$$\text{Xét phương trình } f^2(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & (1) \\ f(x) = 1 & (2) \end{cases}.$$

Dựa vào đồ thị ta thấy

- Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x = x_1 < 1$ (loại) và $x = 2$ (nghiệm kép).

- Phương trình (2) có ba nghiệm phân biệt $x = 1$, $x = x_2 \in (1; 2)$, $x = x_3 > 2$.

Khi đó

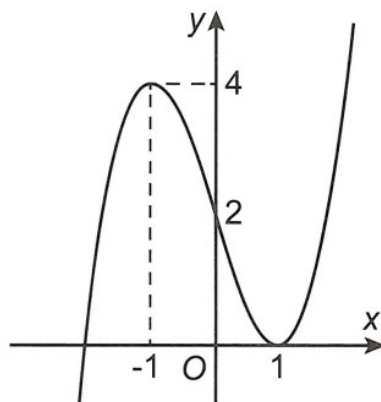
$$f^2(x) - f(x) = f(x)[f(x) - 1] = a^2(x - x_1)(x - 2)^2(x - 1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$\text{Suy ra } g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{a^2 x(x - x_1)(x - 2)(x - x_2)(x - x_3)},$$

trong đó $x_1 < 1$, $x_2 \in (1; 2)$, $x_3 > 2$ nên đồ thị hàm số $y = g(x)$ có ba tiệm cận đứng là $x = 2$; $x = x_2$; $x = x_3$.

Chọn C.

Ví dụ 2. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Đặt $g(x) = \frac{x^2 - x}{f^2(x) - 2f(x)}$. Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 4.

B. 2.

C. 5.

D. 3.

Hướng dẫn giải

$$\text{Điều kiện xác định } f^2(x) - 2f(x) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \neq 0 \\ f(x) \neq 2 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } f^2(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases}.$$

Dựa vào đồ thị ta có $f(x) = 0$ có hai nghiệm $x = x_1 < 0$ và $x = 1$ (nghiệm kép).

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_2 \in (x_1; -1) \\ x = 0 \\ x = x_3 > 1 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy biểu thức } f^2(x) - 2f(x) &= f(x)[f(x) - 2] \\ &= a^2(x - x_1)(x - 1)^2 \cdot x(x - x_2)(x - x_3). \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó ta có } g(x) = \frac{x^2 - x}{f^2(x) - 2f(x)} = \frac{1}{a^2(x - 1)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}.$$

Vậy đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận đứng.

Chọn A.

Ví dụ 3. Cho $f(x)$ là hàm đa thức bậc 6 có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	$+\infty$				$+\infty$

Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x-3)(x^2 - 4x + 3)}{f'(x)[f(x) - 2]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Hướng dẫn giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} f'(x) \neq 0 \\ f(x) \neq 2 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } (x-3)(x^2 - 4x + 3) = (x-3)^2(x-1); f'(x) \cdot [f(x) - 2] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases}.$$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có

$f'(x) = 0$ có nghiệm là $x = 1$; $x = 2$ (nghiệm kép); $x = 3$ (nghiệm kép)

$$\Rightarrow f'(x) = a(x-1)(x-2)^2(x-3)^2 \text{ với } a > 0.$$

$f(x) = 2$ có hai nghiệm $\begin{cases} x = x_1 < 1 \\ x = x_2 \in (2; 3) \end{cases}$ nên $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot p(x)$ với $p(x)$ là một đa thức

bậc 4 và $p(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

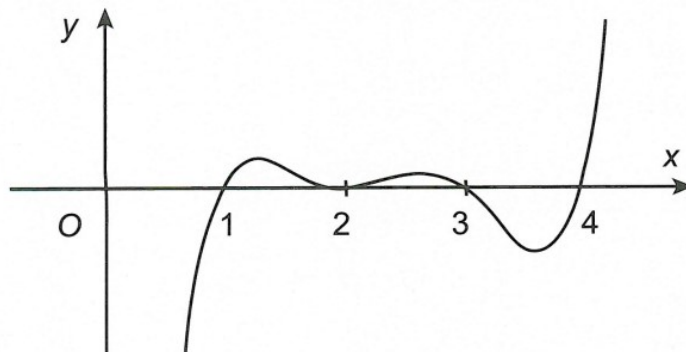
Khi đó $g(x) = \frac{1}{a(x-2)^2(x-x_1)(x-x_2).p(x)}$.

Vậy đồ thị hàm số $y = g(x)$ có ba đường tiệm cận đứng.

Chọn A.

Chú ý: Do $f(x)$ là hàm đa thức bậc 6 nên $f'(x)$ là hàm đa thức bậc 5.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 6 thỏa mãn $3f(1) - 2 < 0$ và $3f(a) - a^3 + 3a > 0, \forall a > 2$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x+1}{3f(x+2) - x^3 + 3x}$ là

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

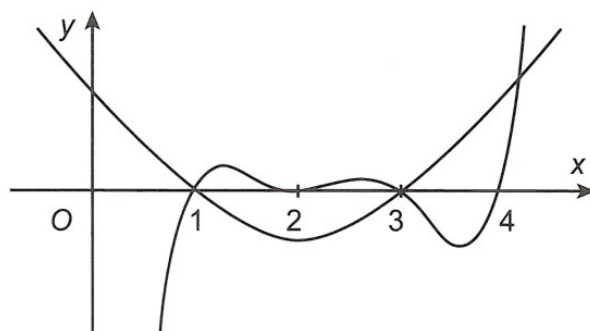
Hướng dẫn giải

Đặt $h(x) = 3f(x+2) - x^3 + 3x$. Điều kiện $h(x) \neq 0$.

Ta có $h'(x) = 3f'(x+2) - 3x^2 + 3$, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x+2) = x^2 - 1$.

Đặt $t = x + 2$, ta được $f'(t) = t^2 - 4t + 3$. (*)

Vẽ đồ thị hàm số $y = t^2 - 4t + 3$ vào cùng hệ trục có đồ thị hàm số $y = f'(t)$ ta được hình vẽ sau



Dựa vào đồ thị ta thấy (*) có ba nghiệm là $t = 1$; $t = 3$; $t = a > 4$.

Suy ra phương trình $h'(x) = 0$ có nghiệm đơn $x = -1$; $x = 1$; $x = a - 2 = b > 2$.

Ta có bảng biến thiên của $h(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	1	b	$+\infty$	
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
$h(x)$	$+\infty$		$h(-1)$	$h(1)$	$h(b)$	$+\infty$

Vì $h(-1) = 3f(1) - 2 < 0$ và $h(b) = 3f(a) - (a-2)^3 + 3(a-2) = 3f(a) - a^3 + 3a + 6a^2 - 12a + 2 > 0$ với mọi $a > 4$ nên phương trình $h(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x = x_1 < -1; x = x_2 \in (-1; 1)$.

Vậy đồ thị hàm số $y = g(x)$ có hai tiệm cận đứng.

Chọn B.

Bài tập tự luyện dạng 3

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$					
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		
y		$+\infty$			$+\infty$			3		$-\infty$
				2			$-\infty$			$-\infty$

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x) - 5}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 0.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên từng khoảng xác định và có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	0	$+$
$f(x)$	-2	5	3	$+\infty$

Tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x) - 5}$ là

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	$+\infty$ ↘	2 ↘	1 ↘	-1 ↗	1

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3f(x)-2}$ là

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	-2 ↗	-1 ↘	$+\infty$ ↘	0

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)+3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	3	0	$+\infty$	

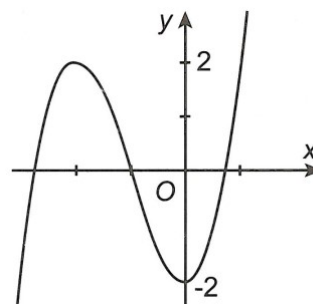
Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(3-x)-2}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

- A. 3. B. 1. C. 0. D. 2.

Câu 6: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ

bên. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2020}{f(x)-1}$ là

- A. 1. B. 2.
C. 3. D. 4.



Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'			+	-
y			$+\infty$	0

Đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'			+	-
y			$+\infty$	0

Đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

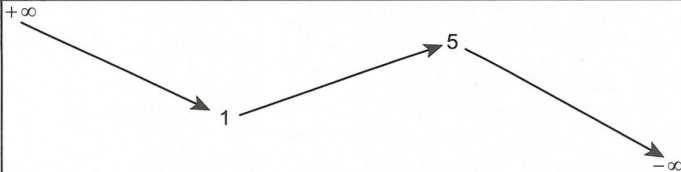
Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$, có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	-		0	+	+
y	$+\infty$	$+\infty$	1	$+\infty$	0

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)-1}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$					

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x^3 + 2x) - 5}$ là

A. 2.

B. 4.

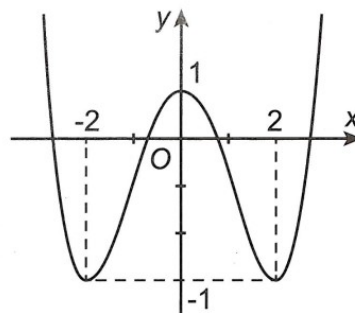
C. 3.

D. 1.

Câu 11: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$$y = \frac{(x^2 - 4) \cdot (x^2 + 2x)}{[f(x)]^2 + 2f(x) - 3} \text{ là}$$

- A. 2. B. 5.
C. 3. D. 4.

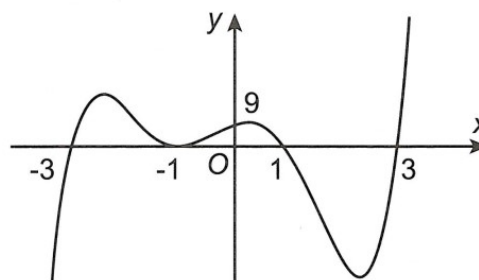


Câu 12: Cho hàm số $f(x) = (x+3)(x+1)^2(x-1)(x-3)$ có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số

$$g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{f^2(x) - 9f(x)}$$

có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

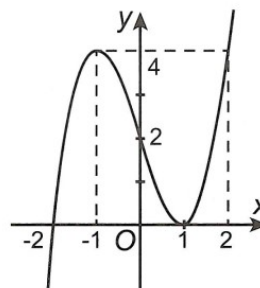
- A. 8. B. 3.
C. 4. D. 9.



Câu 13: Cho hàm bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

$$y = \frac{x^4 - 4x^2 + 3}{(x-1)(f^2(x) - 2f(x))} \text{ là}$$

- A. 4. B. 5.
C. 2. D. 3.

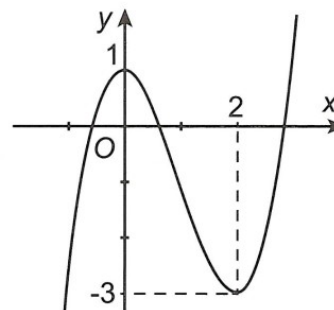


Câu 14: Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đồ thị hàm số

$$g(x) = \frac{(x^2 - 2x)\sqrt{1-x}}{(x-3)[f^2(x) + 3f(x)]}$$

có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- A. 5. B. 4.
C. 6. D. 3.

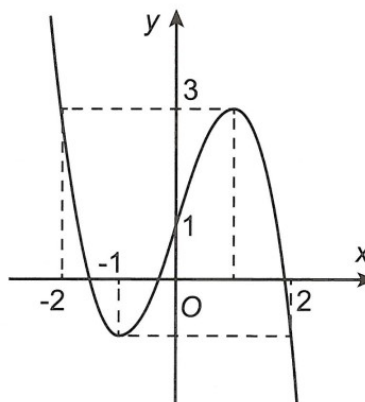


Câu 15: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ bên dưới. Đồ thị hàm số

$$g(x) = \frac{\sqrt{x}}{(x+1)[f^2(x) - f(x)]}$$

đúng?

- A. 3. B. 0.
C. 1. D. 2.



Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
y'	+		- 0 +	
y	$-\infty$	1	$+\infty$	1

Tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{e^{f^2(x)} - 3}$ là

A. 4.

B. 3.

C. 5.

D. 2.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	- 0 +	
$f(x)$	$-\infty$	4	0	$+\infty$

Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{x^4 - 1}{f^2(x) - 4f(x)}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 5.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	-		-
y	2	$+\infty$	-1

Đặt $g(x) = \frac{2f(x) - 3}{f(x) - 1}$. Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = g(x)$ là

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 3.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	3	-1	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{e^{2f(x)-1} - 1}$ có bao nhiêu tiệm cận ngang và tiệm cận đứng?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-1	3	-5	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = \frac{f^2(x) + 2f(x) + 1}{f^2(x) - 9}$ có tổng số tất cả các đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang là

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

ĐÁP ÁN

1 – B	2 – D	3 – D	4 – C	5 – A	6 – C	7 – A	8 – C	9 – C	10 – C
11 – D	12 – C	13 – A	14 – D	15 – A	16 – A	17 – D	18 – A	19 – C	20 – C

Dạng 4. Biện luận số đường tiệm cận của đồ thị hàm số

Bài toán 1: Biện luận số đường tiệm cận của đồ thị hàm số phân thức $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, với $f(x)$ và $g(x)$ là các đa thức

Phương pháp giải

Điều kiện để đồ thị hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ có tiệm cận ngang khi và chỉ khi bậc $f(x) \leq$ bậc $g(x)$. Khi đó đồ thị hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ có đúng một đường tiệm cận ngang.

Điều kiện để đồ thị hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ có tiệm cận đứng $x = x_0$

Ví dụ: Xét đồ thị của hàm số

$$y = \frac{x-1}{x^3-3x+2} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Khi đó, do bậc của $f(x)$ nhỏ hơn bậc $g(x)$ nên đồ thị có một đường tiệm cận ngang $y = 0$.

Ta có $x = -2$ là nghiệm $g(x) = 0$ nhưng không là nghiệm của $f(x) = 0$ nên $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Trường hợp 1: $x = x_0$ là nghiệm của phương trình $g(x) = 0$ nhưng không là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Trường hợp 2: $x = x_0$ là nghiệm bội n của phương trình $g(x) = 0$, đồng thời là nghiệm bội m của phương trình $f(x) = 0$ thì $n > m$.

Ta có $f(x) = (x - x_0)^m \cdot f_1(x)$ với $f_1(x)$ không có nghiệm $x = x_0$ và $g(x) = (x - x_0)^n \cdot g_1(x)$ với $g_1(x)$ không có nghiệm $x = x_0$. Khi đó

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x - x_0)^m \cdot f_1(x)}{(x - x_0)^n \cdot g_1(x)} = \frac{f_1(x)}{(x - x_0)^{n-m} \cdot g_1(x)}$$

nên $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Vì $x = 1$ là nghiệm kép của $g(x) = 0$ và là nghiệm đơn của $f(x) = 0$ nên $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 3 tiệm cận là $y = 0$; $x = -2$; $x = 1$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Gọi S là tập các giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x^2+2x+m^2-3m}$ có ba tiệm cận. Tổng các giá trị của tập S bằng

A. 6.

B. 19.

C. 3.

D. 15.

Hướng dẫn giải

Điều kiện $x^2 + 2x + m^2 - 3m \neq 0$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số luôn có một tiệm cận ngang $y = 0$.

Số đường tiệm cận đứng của hàm số đã cho là số nghiệm khác -2 của phương trình $x^2 + 2x + m^2 - 3m = 0$ nên để đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x^2+2x+m^2-3m}$ có ba tiệm cận thì phương trình $x^2 + 2x + m^2 - 3m = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác -2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m^2 + 3m > 0 \\ m^2 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{13}}{2} < m < \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \\ m \neq 0, m \neq 3 \end{cases}.$$

Do m nguyên dương nên $m \in \{1; 2\}$.

Vậy tổng các giá trị của tập S bằng 3.

Chọn C.

Ví dụ 2. Tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + m}{x^2 - 3x + 2}$ có đúng hai đường tiệm cận là

A. -5

B. 4

C. -1

D. 5

Hướng dẫn giải

Điều kiện $x \neq 1; x \neq 2$.

Vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1$ nên đồ thị luôn có một đường tiệm cận ngang $y = 1$ với mọi m .

Ta có $x^2 - 3x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Xét $f(x) = x^2 + m$. Để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận thì $f(x)$ phải nhận $x = 1$ hoặc

$x = 2$ là nghiệm hay $\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 = 0 \\ m + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -4 \end{cases}$.

- Với $m = -1$, ta có hàm số $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x + 1}{x - 2}$ nên đồ thị có hai đường tiệm cận là $x = 2; y = 1$ (thỏa mãn).

- Với $m = -4$, ta có hàm số $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x + 2}{x - 1}$ nên đồ thị có hai đường tiệm cận là $x = 1; y = 1$ (thỏa mãn).

Vậy $S = \{-1; -4\}$ nên tổng các giá trị m bằng -5.

Chọn A.

Ví dụ 3. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - mx - m + 5}$ không có đường tiệm cận đứng

A. -12.

B. 12.

C. 15.

D. -15.

Hướng dẫn giải

Điều kiện $x^2 - mx - m + 5 \neq 0$.

Đặt $f(x) = x^2 - 3x + 2, g(x) = x^2 - mx - m + 5$.

Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$ là nghiệm đơn của tử thức.

Để đồ thị không có tiệm cận đứng, ta có các trường hợp sau

Trường hợp 1. Phương trình $g(x) = 0$ vô nghiệm $\Delta = m^2 + 4m - 20 < 0 \Leftrightarrow -2 - 2\sqrt{6} < m < -2 + 2\sqrt{6}$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-6; -5; \dots; 2\}$

Trường hợp 2. $f(x) = 0$ nhận đồng thời $x = 1$ và $x = 2$ làm nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m - m + 5 = 0 \\ 4 - 2m - m + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$.

Thử lại, ta có $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 3x + 2} = 1$, khi đó đồ thị hàm số $y = 1$ không có tiệm cận $\Rightarrow$ loại.

Vậy các giá trị nguyên của m để đồ thị không có tiệm cận đứng là $m \in \{-6; -5; \dots; 2; 3\}$ nên tổng bằng -15.

Chọn D.

Ví dụ 4. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{(mx^2-2x+1)(4x^2+4mx+1)}$ có

đúng một đường tiệm cận là

A. $\{-1; 0\}$

B. $\{0\}$

C. $(-\infty; -1) \cup \{0\}$

D. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

Hướng dẫn giải

Điều kiện $\begin{cases} mx^2 - 2x + 1 \neq 0 \\ 4x^2 + 4mx + 1 \neq 0 \end{cases}$.

- Với $m = 0$, hàm số có dạng $y = \frac{-1}{4x^2 + 1}$.

Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận ngang $y = 0$.

Do đó $m = 0$ là một giá trị cần tìm.

- Với $m \neq 0$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $y = 0$.

Để đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận thì

+ Trường hợp 1. Hai phương trình $f(x) = mx^2 - 2x + 1 = 0$ và $g(x) = 4x^2 + 4mx + 1 = 0$ cùng vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m < 0 \\ 4m^2 - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ -1 < m < 1 \end{cases} \Rightarrow \text{vô nghiệm}$$

+ Trường hợp 2. Phương trình $(mx^2 - 2x + 1)(4x^2 + 4mx + 1) = 0$ có nghiệm duy nhất là $x = \frac{1}{2}$. Khi đó

$x = \frac{1}{2}$ là nghiệm của một trong hai phương trình $f(x) = 0$ hoặc $g(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m}{4} = 0 \\ 1 + 2m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}.$$

Do $m \neq 0$ nên $m = -1$.

Thử lại, với $m = -1$ thì hàm số là

$$y = \frac{2x-1}{(-x^2-2x+1)(4x^2-4x+1)} = \frac{1}{(-x^2-2x+1)(2x-1)}$$

Khi đó, đồ thị hàm số đã cho có các tiệm cận đứng là $x = -1 \pm \sqrt{2}$, $x = \frac{1}{2} \Rightarrow m = -1$ không thỏa mãn.

Vậy tập hợp tham số m cần tìm là $m \in \{0\}$.

Chọn B.

Bài toán 2: Biện luận số đường tiệm cận của đồ thị hàm số chứa căn thức

Phương pháp giải

Thực hiện theo các bước sau

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2. Xác định các đường tiệm cận.

- Tiệm cận ngang

+ Điều kiện cần: Để đồ thị hàm số chứa căn thức có tiệm cận ngang thì trong tập xác định phải có các khoảng $(-\infty; a)$ hoặc $(b; +\infty)$.

+ Điều kiện đủ là: Tồn tại một trong các giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = a$ hoặc $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = b$ thì đường thẳng $y = a$ hoặc $y = b$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

* Tiệm cận đứng: Tồn tại giá trị x_0 để một trong các giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0^+} y = -\infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^-} y = +\infty$ thì $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho

Ví dụ: Xác định các đường tiệm cận của đồ thị hàm

$$\text{số } y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^3-3x+2}.$$

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = [-1; 1)$.

Xét hàm số $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^3-3x+2}$ có tập xác định là $D = [-1; 1)$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Ngoài ra, $x = 2$ là nghiệm của mẫu nhưng không có lân cận trong tập xác định nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 2^2} y$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x^2}}{(2-x)\sqrt{1-x}} = +\infty$ nên đồ thị có một tiệm cận đứng $x = 1$.

Chú ý: Lân cận của x_0 trong tập xác định là các khoảng dạng $(a; x_0); (x_0; b) \subset D$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2-4}}{x-3}$ có đúng ba tiệm cận là

A. $m \geq \frac{4}{9}$

B. $m > 0$

C. $0 < m < \frac{4}{9}$

D. $\forall m \in \mathbb{R}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} mx^2 - 4 \geq 0 \\ x \neq 3 \end{cases}.$$

Để đồ thị hàm số có tiệm cận ngang thì $m > 0$.

Khi đó tập xác định của hàm số là $D = \left[-\infty; -\frac{2}{\sqrt{m}}\right) \cup \left(\frac{2}{\sqrt{m}}; +\infty\right] \setminus \{3\}$.

Nếu $m \leq 0$ thì $mx^2 - 4 < 0$

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{mx^2 - 4}}{x - 3} = \sqrt{m}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{mx^2 - 4}}{x - 3} = -\sqrt{m}$ nên đồ thị hàm số

có hai tiệm cận ngang là $y = \pm\sqrt{m}$

Để tồn tại tiệm cận đứng $x = 3$ thì $3 \geq \frac{2}{\sqrt{m}} \Leftrightarrow m \geq \frac{4}{9}$.

Kết hợp lại ta có $m \geq \frac{4}{9}$.

Chọn A.

Ví dụ 2. Tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+1-\sqrt{x^2+3x}}{x^2+(m+1)x-m-2}$ có đúng hai đường tiệm cận là

- A. $m \in \mathbb{R}$ B. $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -2 \\ m \neq -3 \end{cases}$ C. $\begin{cases} m \leq -2 \\ m \neq -3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -2 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện $\begin{cases} x^2 + 3x \geq 0 \\ x^2 + (m+1)x - m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3; x \geq 0 \\ x \neq 1; x \neq -m-2 \end{cases}$.

Tập xác định $D = (-\infty; -3] \cup [0; +\infty) \setminus \{1; -m-2\}$

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0, \forall m \in D \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận thì phải có một đường tiệm cận đứng.

- Với $m = -3$ thì $D = (-\infty; -3] \cup [0; +\infty) \setminus \{1\}$.

Khi đó, ta có hàm số $y = \frac{x+1-\sqrt{x^2+3x}}{x^2-2x+1} = \frac{-1}{(x-1)(x+1+\sqrt{x^2+3x})}$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$ nên $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $\Rightarrow m = -3$ thỏa mãn.

- Với $m \neq -3$, ta có

$\lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1-\sqrt{x^2+3x}}{x^2+(m+1)x-m-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(x+m+2)(x+1+\sqrt{x^2+3x})} = \frac{-1}{4(m+3)}$

$\Rightarrow x = 1$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Để đường $x = -m-2$ là tiệm cận đứng thì $\begin{cases} -m-2 \leq -3 \\ -m-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -2 \end{cases}$.

Khi đó $\lim_{x \rightarrow (-m-2)^+} y = \pm\infty$ (tùy theo m) nên $x = -m-2$ là tiệm cận đứng khi $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -2 \\ m \neq -3 \end{cases}$.

Kết hợp cả hai trường hợp, ta có $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -2 \end{cases}$.

Chọn D.

Ví dụ 3. Tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x + \sqrt{mx^2 + 1}$ có tiệm cận ngang là

- A. $m > 1$ B. $0 < m < 1$ C. $m = 1$ D. $m = -1$

Hướng dẫn giải

Trường hợp 1. Với $m = 0$ thì hàm số là $y = x + 1$ nên đồ thị không có tiệm cận ngang. Do đó $m = 0$ không phải giá trị cần tìm.

Trường hợp 2. Với $m < 0$ thì hàm số có tập xác định là $D = \left[-\frac{1}{\sqrt{-m}}; \frac{1}{\sqrt{-m}}\right]$ nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$

và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y \Rightarrow$ đồ thị không có tiệm cận ngang.

Do đó $m < 0$ không phải giá trị cần tìm.

Trường hợp 3. Với $m > 0$ thì hàm số có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

Xét $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{mx^2 + 1}) = +\infty$.

Xét $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{mx^2 + 1}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1-m)x^2 - 1}{x - \sqrt{mx^2 + 1}}$.

Để đồ thị hàm số có tiệm cận ngang thì $1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Chọn C.

Ví dụ 4. Tập tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{mx^2 - 3mx + 2}}$ có bốn

đường tiệm cận phân biệt là

- A. $(0; +\infty)$ B. $\left(\frac{9}{8}; +\infty\right)$ C. $\left(\frac{8}{9}; +\infty\right)$ D. $\left(\frac{8}{9}; +\infty\right) \setminus \{1\}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện $mx^2 - 3mx + 2 > 0$. (*)

Trường hợp 1. Với $m = 0$, ta có $y = \frac{x-1}{\sqrt{2}}$ nên đồ thị không có đường tiệm cận.

Do đó $m = 0$ không phải giá trị cần tìm.

Trường hợp 2. Với $m < 0$.

Phương trình $mx^2 - 3mx + 2 = 0$ có $\Delta = 9m^2 - 8m > 0, \forall m < 0$ nên Nếu $\Delta \leq 0$ thì hàm số có tập xác định là

$$mx^2 - 3mx + 2 > 0 \Leftrightarrow x \in [x_1; x_2] \text{ (với } x_1, x_2 \text{ là hai nghiệm của phương trình } mx^2 - 3mx + 2 = 0 \text{)} \Rightarrow D = \emptyset$$

trình $mx^2 - 3mx + 2 = 0$) nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang, chỉ có tối đa hai tiệm cận đứng

Do đó $m < 0$ không phải giá trị cần tìm.

Trường hợp 3. Với $m > 0$.

Xét phương trình $mx^2 - 3mx + 2 = 0$.

- Nếu $\Delta = 9m^2 - 8m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{8}{9}$. Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $mx^2 - 3mx + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng mà chỉ có hai tiệm cận

ngang là $y = \pm \frac{1}{\sqrt{m}}$ vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} = \frac{1}{\sqrt{m}}$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} = \frac{-1}{\sqrt{m}}$.

- Nếu $\Delta = 9m^2 - 8m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{8}{9}$.

Khi đó, hàm số trở thành $y = \frac{3(x-2)}{\sqrt{8x^2 - 24x + 18}} = \frac{3(x-2)}{\sqrt{2}|2x-3|}$ nên đồ thị hàm số chỉ có một tiệm cận

đứng và hai tiệm cận ngang.

- Nếu $\Delta = 9m^2 - 8m > 0 \Rightarrow m > \frac{8}{9}$.

Hàm số xác định trên các khoảng $(-\infty; x_1)$ và $(x_2; +\infty)$.

Khi đó đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y = \pm \frac{1}{\sqrt{m}}$.

Để đồ thị hàm số đã cho có bốn đường tiệm cận thì đồ thị hàm số phải có hai đường tiệm cận đứng.

Vì $x = 1$ là nghiệm của tử $f(x) = x - 1$ nên để đồ thị có hai tiệm cận đứng thì $x = 1$ không phải là nghiệm của phương trình $mx^2 - 3mx + 2 = 0 \Leftrightarrow m - 3m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

Vậy giá trị của m cần tìm là $\begin{cases} m > \frac{8}{9} \\ m \neq 1 \end{cases}$.

Chọn D.

Nếu $x = 1$ là nghiệm của phương trình $g(x) = 0$,

do phương trình $g(x) = 0$

có hai nghiệm phân biệt

nên phương trình

$g(x) = 0$ có một nghiệm

nữa $x = a \neq 1$ thì

$g(x) = m(x-1)(x-a)$.

Khi đó hàm số có dạng

$$y = \frac{x-1}{\sqrt{m(x-1)(x-a)}}$$

nên chỉ có một tiệm cận

đứng là $x = a$.

Ví dụ 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1 + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2 - (1-m)x + 2m}}$ có hai

tiệm cận đứng?

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Hướng dẫn giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - (1-m)x + 2m > 0 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } f(x) = x^2 - (1-m)x + 2m$$

Để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng thì phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \geq -1$.

Trường hợp 1. $f(x)$ có nghiệm $x = -1 \Leftrightarrow f(-1) = 0 \Leftrightarrow m = -2$.

Khi đó hàm số có dạng $y = \frac{1 + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}$ có tập xác định là $D = (4; +\infty)$ nên chỉ có một tiệm cận đứng.

$$\text{Trường hợp 2. } f(x) \text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2 > -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0 \\ x_1 + x_2 > -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-m)^2 - 8m > 0 \\ 2m + 1 - m + 1 > 0 \\ 1 - m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 - 2\sqrt{6} \\ m > 5 + 2\sqrt{6} \\ m > -2 \\ m < 3 \end{cases} \Rightarrow -2 < m < 5 - 2\sqrt{6}$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = -1; m = 0$

Chọn B.

Bài toán 3: Biện luận số đường tiệm cận của đồ thị hàm ẩn

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f''(x)$	+		+	0	-
$f'(x)$					

Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2020}{f(x) - m}$ có nhiều nhất bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Điều kiện $f(x) \neq m$.

Để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2020}{f(x) - m}$ có đường tiệm cận đứng thì phương trình $f(x) = m$ phải có nghiệm.

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ suy ra phương trình $f'(x) = 0$ có đúng hai nghiệm là $\begin{cases} x = a \\ x = b \end{cases}$

với $-1 < a < 1 < b$.

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	a	1	b	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$						

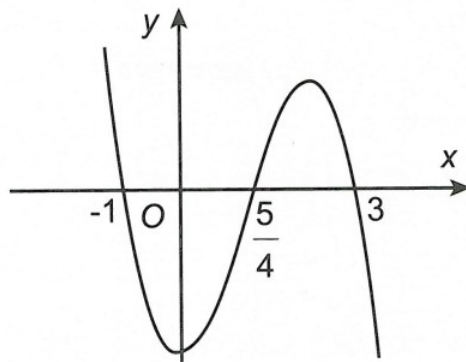
Suy ra phương trình $y = f(x)$ có nhiều nhất là ba nghiệm phân biệt.

Vậy đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2020}{f(x) - m}$ có nhiều nhất ba đường tiệm cận đứng.

Chọn C.

Ví dụ 2. Cho hàm số $g(x) = \frac{2020}{h(x) - m^2 - m}$ với $h(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx$. ($m, n, p, q \in \mathbb{R}, m \neq 0$),

$h(0) = 0$. Hàm số $y = h'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $g(x)$ có hai tiệm cận đứng?

A. 2.

B. 11.

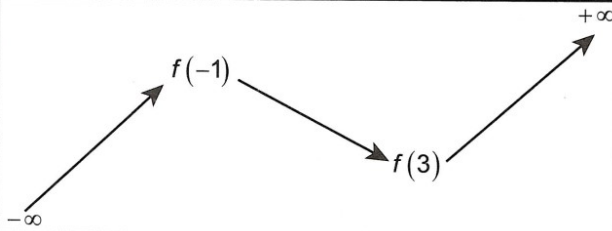
C. 71.

D. 2019

Hướng dẫn giải

Điều kiện $f(x) \neq m$.

Từ đồ thị hàm số $f'(x)$, ta có bảng biến thiên hàm số $f(x)$ là

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

- Nếu $m = 20$ thì đồ thị hàm số không có đủ bốn tiệm cận.

- Nếu $m \neq 20$ thì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x) - 20}{f(x) - m} = 1 \Rightarrow$ Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có phương trình $f(x) = 20$ có một nghiệm $x = a > 3$ vì $f(-1) < 20$.

Suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có bốn tiệm cận khi phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm phân biệt khác

$$a \Leftrightarrow f(3) < m < f(-1).$$

Chọn B.

Ví dụ 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Có bao nhiêu giá trị

nguyên của tham số m thuộc $[-2020; 2020]$ để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3x + x}}{\sqrt{2f(x) - f^2(x)} + m}$ có tiệm cận

ngang nằm bên dưới đường thẳng $y = -1$.

A. 2.

B. 0.

C. 1.

D. 3.

Hướng dẫn giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \leq -3; x \geq 0 \\ 0 \leq f(x) \leq 2 \\ \sqrt{2f(x) - f^2(x)} + m \neq 0 \end{cases}$$

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ nên khi $x \rightarrow +\infty$ thì $2f(x) - f^2(x) \rightarrow -\infty$ vì vậy $\sqrt{2f(x) - f^2(x)}$ không có nghĩa khi x đủ lớn. Do đó không tồn tại $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

Xét $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \text{ nên } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2f(x) - f^2(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} [2f(x) - f^2(x)]} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{-\left(\sqrt{1 - \frac{3}{x}} + 1 \right)} = -\frac{3}{2}$$

Từ đó $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{-3}{2m+2}$ với $m \neq -1$.

Khi đó đồ thị hàm số $g(x)$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \frac{-3}{2m+2}$.

Để tiệm cận ngang tìm được ở trên nằm dưới đường thẳng $y = -1$ thì

$$\frac{-3}{2m+2} < -1 \Leftrightarrow -1 < m < \frac{1}{2}$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 0$.

Chọn C.

Bài tập tự luyện dạng 4

Câu 1: Tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{mx^2-2x+3}$ có ba đường tiệm cận là

- A. $\begin{cases} m < \frac{1}{5} \\ m \neq 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -1 \\ m < \frac{1}{3} \end{cases}$ C. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m < \frac{1}{3} \end{cases}$ D. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -1 \\ m < \frac{1}{5} \end{cases}$

Câu 2: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2-1}{x^2-3x+2}$ có đúng hai đường tiệm cận?

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

Câu 3: Tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+x-2}{x^2-2x+m}$ có ba đường tiệm cận là

- A. $m < 1$ B. $m \neq 1$ và $m \neq -8$ C. $m \leq 1$ và $m \neq -8$ D. $m < 1$ và $m \neq -8$

Câu 4: Tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x^2-4x+m}$ có một đường tiệm cận đứng và một đường tiệm cận ngang là

- A. $m \in \{4; -12\}$ B. $m \in [4; 12]$ C. $m = -4$ D. $m = 12$

Câu 5: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-10; 10)$ để đồ thị hàm số

$$y = \frac{6x-3}{(mx^2-6x+3)(9x^2+6mx+1)}$$
 có đúng một đường tiệm cận?

- A. 6. B. 7. C. 5. D. 10.

Câu 6: Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-mx-3m}}$ có đúng hai tiệm cận đứng là

A. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$

B. $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$

C. $\left(0; \frac{1}{2}\right]$

D. $(0; +\infty)$

Câu 7: Tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1} - \frac{m}{2}x$ có tiệm cận ngang là

A. Không tồn tại m B. $m = -2$ C. $m = -1$ và $m = 2$ D. $m = 2$ và $m = -2$

Câu 8: Tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{\sqrt{(1-m)x^2+3x-1}}$ có đường tiệm cận ngang là

A. $m > 1$ B. $0 < m < 1$ C. $m < 1$ D. $m \neq 1$

Câu 9: Tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2+3mx+1}}{x+2}$ có ba đường tiệm cận là

A. $m \leq 0$ B. $0 < m \leq \frac{1}{2}$ C. $0 < m < \frac{1}{2}$ D. $m \geq \frac{1}{2}$

Câu 10: Tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-1}+2019}{\sqrt{x^2-2mx+m+2}}$ có đúng ba đường tiệm cận là

A. $m > 2$ hoặc $m < -1$ B. $2 \leq m \leq 3$ C. $m < 2$ D. $2 < m < 3$

Câu 11: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{-x^2+2019x+2020}-12\sqrt{70}}{x^2-(m+1)x+m}$

có đúng hai đường tiệm cận?

A. 2019.

B. 2018.

C. 2021.

D. 2020.

Câu 12: Tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai tiệm cận ngang là

A. $m > 0$.B. $m < 0$.C. $m = 0$.D. Không có m .

Câu 13: Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \sqrt[3]{x^3+3x^2+2} - \sqrt{4x^2+3x+2} + mx$ có tiệm cận ngang. Tổng các phần tử của S bằng

A. -2.

B. -3.

C. 2.

D. 3.

Câu 14: Tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{m(x-1)^2+4}}$ có hai tiệm cận đứng

là

A. $\begin{cases} m < 0 \\ m \neq -1 \end{cases}$.B. $m < 1$.C. $m < 0$.D. $m = 0$.

Câu 15: Tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{(m-1)x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}$ có đúng một đường tiệm cận ngang là

A. không có giá trị nào của m thỏa mãn.B. $\forall m \in \mathbb{R}$.C. $m = 1$.D. $m = 0$.

Câu 16: Tất cả các giá trị của tham số a để đồ thị hàm số $y = ax + \sqrt{4x^2 + 1}$ có tiệm cận ngang là

- A. $a = -2$ và $a = \frac{1}{2}$. B. $a = \pm \frac{1}{2}$. C. $a = \pm 2$. D. $a = \pm 1$.

Câu 17: Tất cả các giá trị của tham số a để đồ thị hàm số $y = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{ax^2 + 2}}$ có tiệm cận ngang là

- A. $a > 0$. B. $a = 1$ hoặc $a = 4$. C. $a \leq 0$. D. $a \geq 0$.

Câu 18: Cho hàm số $y = \frac{12 + \sqrt{4x - x^2}}{\sqrt{x^2 - 6x + 2m}}$ có đồ thị (C_m) . Tập hợp các giá trị của tham số thực m để (C_m) có đúng hai tiệm cận đứng là

- A. $(0; 9)$. B. $[8; 9)$. C. $\left[4; \frac{9}{2}\right)$. D. $\left(4; \frac{9}{2}\right)$.

Câu 19: Tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{(2m+1)x^2 + 3}{\sqrt{x^4 + 1}}$ có đường tiệm cận ngang đi qua điểm $A(-1; 3)$ là

- A. $m = 0$. B. $m = \pm 1$. C. $m = -2$. D. $m = 2$.

Câu 20: Tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{\sqrt{x^2 + m}}$ có ba tiệm cận là

- A. $m = 0$. B. $\begin{cases} m < 0 \\ m \neq -9 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m = 0 \\ m = -9 \end{cases}$. D. $m > 0$.

Câu 21: Tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị $y = \frac{mx-3}{\sqrt{m^2x^2 + 2016}}$ có hai đường tiệm cận ngang là

- A. $m < 0$. B. $m = 0$. C. $m > 0$. D. $m \neq 0$.

Câu 22: Tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2 + 1}}{x+1}$ có đúng một đường tiệm cận là

- A. $-1 \leq m < 0$. B. $-1 \leq m \leq 0$. C. $m < -1$. D. $m > 0$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x-m}-3}{x^2-4x+3}$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để đồ thị (C) có đúng hai đường tiệm cận?

- A. 3. B. 1. C. 0. D. 2.

Câu 24: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Gọi S là tập hợp các giá trị

của tham số m để đồ thị của hàm số $g(x) = \frac{(x-1)[f^2(x)+3]}{x^2+2(m-1)x+m^2-2}$ có tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang bằng 2. Tổng các phần tử của S bằng

A. $-\frac{1}{2}$.

B. -2.

C. -3.

D. $\frac{3}{2}$.

ĐÁP ÁN

1 – B	2 – B	3 – D	4 – A	5 – B	6 – A	7 – D	8 – C	9 – B	10 – D
11 – A	12 – A	13 – A	14 – A	15 – C	16 – C	17 – D	18 – D	19 – D	20 – C
21 – D	22 – A	23 – D	24 – A						

Dạng 5. Bài toán liên quan đến đồ thị hàm số và các đường tiệm cận

Bài toán 1: Bài toán liên quan đến đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

 Phương pháp giải

Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đường tiệm cận

khi và chỉ khi $ad - bc \neq 0, c \neq 0$.

Khi đó, phương trình đường tiệm cận đứng là

$$x = -\frac{d}{c}.$$

Phương trình đường tiệm cận ngang là $y = \frac{a}{c}$.

- Tọa độ giao điểm của hai đường tiệm cận là điểm $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ và cũng là tâm đối xứng của đồ thị.

- Hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có các

kích thước là $\left|-\frac{d}{c}\right|$ và $\left|\frac{a}{c}\right|$ nên có chu vi là

$$C = 2\left(\left|\frac{d}{c}\right| + \left|\frac{a}{c}\right|\right) \text{ và diện tích là } S = \left|\frac{ad}{c^2}\right|$$

 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx-1}{2x+m}$ có đường tiệm cận đứng đi qua điểm

$$A(-1; \sqrt{2}) \text{ là}$$

Ví dụ: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+2}$ có đồ thị (C) . Tọa

độ giao điểm I của hai đường tiệm cận của đồ thị

(C) là

A. $(2; -2)$.

B. $(-2; -2)$.

C. $(-2; 2)$.

D. $(2; 2)$.

Hướng dẫn giải

Ta có phương trình hai đường tiệm cận là $x = -2$ và $y = 2$ nên tọa độ giao điểm I của hai đường tiệm cận là $I(-2; 2)$.

Chọn C.

A. $m = -2$.

B. $m = 2$.

C. $m = \sqrt{2}$.

D. $m = -1$.

Hướng dẫn giải

Ta có $ad - bc = m^2 + 2 \neq 0, \forall m$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -\frac{m}{2}$.

Để tiệm cận đứng đi qua điểm $A(-1; \sqrt{2})$ thì $-\frac{m}{2} = -1 \Leftrightarrow m = 2$.

Chọn B.

Ví dụ 2. Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x-1}$ tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng

A. 3 (đvdt)

B. 6 (đvdt)

C. 1 (đvdt)

D. 2 (đvdt)

Hướng dẫn giải

Phương trình các đường tiệm cận là $x = 1; y = 2$.

Do đó hai đường tiệm cận và hai trục tọa độ tạo thành hình chữ nhật diện tích bằng $1.2 = 2$ (đvdt).

Chọn D.

Ví dụ 3. Tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2mx+m}{x-1}$ có đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cùng hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 8 là

A. $m \neq \pm 2$.

B. $m = 2$.

C. $m = \pm \frac{1}{2}$.

D. $m = \pm 4$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận là $-2m - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó phương trình hai đường tiệm cận là $x = 1$ và $y = 2m$.

Theo công thức tính diện tích hình chữ nhật tạo bởi hai tiệm cận và hai trục tọa độ, ta có $S = |2m|$.

Theo giả thiết thì $|2m| = 8 \Leftrightarrow m = \pm 4$.

Chọn D.

Ví dụ 4. Cho đồ thị hai hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$ và $g(x) = \frac{ax+1}{x+2}$ với $a \neq \frac{1}{2}$. Tất cả các giá trị thực dương của tham số a để các tiệm cận của hai đồ thị hàm số tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 4 là

A. $a = 6$.

B. $a = 4$.

C. $a = 3$.

D. $a = 1$.

Hướng dẫn giải

Đồ thị hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$ có hai đường tiệm cận là $x = -1$ và $y = 2$.

Điều kiện để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{ax+1}{x+2}$ có tiệm cận là $2a - 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \frac{1}{2}$.

Với điều kiện đó thì đồ thị hàm số $g(x)$ có hai đường tiệm cận là $x = -2$ và $y = a$.

Hình chữ nhật được tạo thành từ bốn đường tiệm cận của hai đồ thị trên có hai kích thước là 1 và $|a - 2|$.

Theo giả thiết, ta có $|a - 2| \cdot 1 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ a = -2 \end{cases}$.

Vì $a > 0$ nên $a = 6$.

Chọn A.

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Hai đường tiệm cận của (C) cắt nhau tại I . Đường thẳng $d: y = 2x + b$ (b là tham số thực) cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B . Biết $b < 0$ và diện tích tam giác AIB bằng $\frac{15}{4}$. Giá trị của b bằng

A. -1.

B. -3.

C. -2.

D. -4

Hướng dẫn giải

Ta có tọa độ điểm $I(1;1)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$$\frac{x+1}{x-1} = 2x+b \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ f(x) = 2x^2 + (b-3)x - b - 1 = 0 (*) \end{cases}$$

Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\text{khác 1} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = b^2 + 2b + 17 > 0 \\ f(1) = -2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall b \in \mathbb{R}.$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của $(*)$.

Khi đó $A(x_1; 2x_1 + b)$, $B(x_2; 2x_2 + b)$.

Ta có $\overline{IA} = (x_1 - 1; 2x_1 + b - 1)$; $\overline{IB} = (x_2 - 1; 2x_2 + b - 1)$.

Diện tích tam giác IAB là $S = \frac{1}{2} |(x_1 - 1)(2x_2 + b - 1) - (x_2 - 1)(2x_1 + b - 1)|$

$$= \frac{1}{2} |(b+1)(x_1 - x_2)| = \frac{1}{2} |b+1| \cdot \frac{\sqrt{b^2 + 2b + 17}}{2}.$$

Theo giả thiết thì $\frac{|b+1|\sqrt{b^2 + 2b + 17}}{4} = \frac{15}{4}$

$$\Leftrightarrow (b+1)^2 [(b+1)^2 + 16] = 225 \Leftrightarrow (b+1)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ b = -4 \end{cases}.$$

Do $b < 0$ nên $b = -4$.

Chọn D.

Chú ý:

- Với tam giác ABC có

$$\overrightarrow{AB} = (a; b); \overrightarrow{AC} = (c; d)$$

$$\text{thì } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |ad - bc|.$$

- Nếu phương trình bậc

hai $ax^2 + bx + c = 0$ có

hai nghiệm phân biệt

$$x_1, x_2 \text{ thì } |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

Ví dụ 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) lần lượt có phương trình $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ và $(x+1)^2 + y^2 = 1$. Biết đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ đi qua tâm của (C_1) , đi qua tâm của (C_2) và có các đường tiệm cận tiếp xúc với cả (C_1) và (C_2) . Tổng $a+b+c$ là

A. 5.

B. 8.

C. 2.

D. -1.

Hướng dẫn giải

Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(1;2)$; $R_1 = 1$ và (C_2) có tâm $I_2(-1;0)$; $R_2 = 1$.

Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận là $ac - b \neq 0$.

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$.

Khi đó ta có các đường tiệm cận (C) là $x = -c$ và $y = a$.

$$\text{Ta có } I_1, I_2 \in (C) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{c+1} = 2 \\ \frac{-a+b}{c-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c \neq \pm 1 \\ a = b \\ a = c+1 \end{cases}.$$

Đường thẳng $x = -c$ tiếp xúc với cả (C_1) và (C_2) nên $\begin{cases} |c+1| = 1 \\ |c-1| = 1 \end{cases} \Rightarrow c = 0$

$$\Rightarrow a = b = 1$$

Khi đó tiệm cận ngang của (C) là $y = 1$ tiếp xúc với cả (C_1) , (C_2) thỏa mãn bài toán.

Vậy $a = b = 1; c = 0 \Rightarrow a + b + c = 2$.

Chọn C.

Bài toán 2: Bài toán về khoảng cách từ điểm trên đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ đến các đường tiệm cận

Phương pháp giải

Giả sử đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có các đường tiệm cận là $\Delta_1 : x = -\frac{d}{c}$ và $\Delta_2 : y = \frac{a}{c}$.

Gọi $M\left(x_0; \frac{ax_0+b}{cx_0+d}\right)$ là điểm bất kì trên đồ thị.

Khi đó $d_1 = d(M; \Delta_1) = \left|x_0 + \frac{d}{c}\right| = \left|\frac{cx_0+d}{c}\right|$ và

$$d_2 = d(M; \Delta_2) = \left|\frac{ax_0+b}{cx_0+d} - \frac{a}{c}\right| = \left|\frac{ad-bc}{c(cx_0+d)}\right|.$$

Ví dụ: Xét hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có hai đường tiệm cận là $x = 1$ và $y = 2$. Khi đó tích các khoảng cách từ điểm M bất kỳ trên đồ thị đến hai đường tiệm cận là $d = \left|\frac{-2+1}{1}\right| = 1$.

Vậy ta luôn có $d_1.d_2 = \left| \frac{ad-bc}{c^2} \right| = K$ là một số

không đổi.

Khi đó $d_1 + d_2 \geq 2\sqrt{d_1.d_2} = 2\sqrt{K}$ nên

$\min(d_1 + d_2) = 2\sqrt{K}$ khi $d_1 = d_2$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{cx_0 + d}{c} \right| = \left| \frac{ad-bc}{c(cx_0 + d)} \right| \Leftrightarrow (cx_0 + d)^2 = |ad-bc|.$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Gọi M là giao điểm của đồ thị $y = \frac{2x-1}{2x+3}$ với trục hoành. Khi đó tích các khoảng cách từ điểm

M đến hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho bằng

- A. 4. B. 2. C. 8. D. 6.

Hướng dẫn giải

Gọi d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Áp dụng công thức, ta có $d_1.d_2 = \left| \frac{6+2}{4} \right| = 2$.

Chọn B.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-2}$ (C). Gọi M là điểm bất kỳ trên (C), d là tổng khoảng cách từ M đến

hai đường tiệm cận của đồ thị. Giá trị nhỏ nhất của d bằng

- A. 10. B. 6. C. 2. D. 5.

Hướng dẫn giải

Gọi d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Áp dụng công thức, ta có $d_1.d_2 = \left| \frac{-4+3}{1} \right| = 1$.

Khi đó $d = d_1 + d_2 \geq 2\sqrt{d_1.d_2} = 2$.

Vậy $d_{\min} = 2$.

Chọn C.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = \frac{1-3x}{3-x}$ có đồ thị (C). Điểm M có hoành độ dương, nằm trên (C) sao cho

khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng gấp hai lần khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang của (C). Khoảng cách từ M đến tâm đối xứng của (C) bằng

- A. 5. B. $3\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{5}$. D. 4.

Hướng dẫn giải

Giả sử $M\left(x_0; \frac{3x_0-1}{x_0-3}\right) \in (C) \ (x_0 > 0; x_0 \neq 3)$.

Đồ thị (C) có tiệm cận đứng $\Delta_1 : x = 3$, tiệm cận ngang $\Delta_2 : y = 3$ và tâm đối xứng $I(3; 3)$.

Khi đó $d_1 = d(M; \Delta_1) = |x_0 - 3|$ và $d_2 = d(M; \Delta_2) = \frac{8}{|x_0 - 3|}$.

Theo giả thiết $d_1 = 2d_2 \Leftrightarrow |x_0 - 3| = \frac{16}{|x_0 - 3|} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 7 \\ x_0 = -1 \end{cases} \Rightarrow x_0 = 7 \text{ (do } x_0 > 0 \text{)}.$

Vậy $M(7; 5) \Rightarrow IM = 2\sqrt{5}$.

Chọn C.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = \frac{4x-5}{x+1}$ có đồ thị (H) . Gọi $M(x_0; y_0)$ với $x_0 < 0$ là một điểm thuộc đồ thị

(H) thỏa mãn tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của (H) bằng 6. Giá trị của biểu thức

$S = (x_0 + y_0)^2$ bằng

A. 4.

B. 0.

C. 9.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Đồ thị (H) có tiệm cận đứng $\Delta_1 : x = -1$ và tiệm cận ngang $\Delta_2 : y = 4$.

Gọi $M\left(x_0; \frac{4x_0-5}{x_0+1}\right) \in (H), x_0 \neq -1, x_0 < 0$.

Khi đó $d_1 = d(M; \Delta_1) = |x_0 + 1|$ và $d_2 = d(M; \Delta_2) = \frac{9}{|x_0 + 1|} \Rightarrow d_1 \cdot d_2 = 9$.

Ta có $d_1 + d_2 \geq 2\sqrt{d_1 d_2} = 6$ nên $\min(d_1 + d_2) = 6$ khi

$$d_1 = d_2 \Leftrightarrow |x_0 + 1| = \frac{9}{|x_0 + 1|} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ x_0 = -4 \end{cases}.$$

Do $x_0 < 0$ nên $M(-4; 7) \Rightarrow S = 9$.

Chọn C.

Bài toán 3: Bài toán liên quan giữa tiếp tuyến và tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$



Phương pháp giải

Giả sử đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị (C) có

Ta có các dạng câu hỏi thường gặp sau

Câu 1: Tính diện tích tam giác IAB .

các đường tiệm cận là $\Delta_1 : x = -\frac{d}{c}$, $\Delta_2 : y = \frac{a}{c}$ và $S_{\triangle IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB = \frac{2|ad-bc|}{c^2} = \frac{1}{2} K$.

$$I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right).$$

Gọi $M\left(x_0; \frac{ax_0+b}{cx_0+d}\right)$ là điểm bất kỳ trên đồ thị.

Khi đó tiếp tuyến của (C) tại M là

$$d: y = \frac{ad-bc}{(cx_0+d)^2}(x-x_0) + \frac{ax_0+b}{cx_0+d}.$$

Gọi $A = d \cap \Delta_1$

$$\Rightarrow A\left(-\frac{d}{c}; \frac{2bc-ad+acx_0}{c(cx_0+d)}\right) \Rightarrow IA = \left|\frac{2(ad-bc)}{c(cx_0+d)}\right|.$$

$B = d \cap \Delta_2$

$$\Rightarrow B\left(2x_0 + \frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right) \Rightarrow IB = \left|\frac{2(cx_0+d)}{c}\right|.$$

Do đó $IA \cdot IB = \frac{4|ad-bc|}{c^2} = K$ là một số không đổi.

Do $\triangle IAB$ vuông tại I nên

$S_{\triangle IAB} = \frac{1}{2}IA \cdot IB = \frac{2|ad-bc|}{c^2} = \frac{1}{2}K$ là một số không đổi.

Ngoài ra, ta có $\begin{cases} x_A + x_B = 2x_M \\ y_A + y_B = 2y_M \end{cases}$ nên M luôn là trung điểm của AB .

Câu 2: Tìm điểm $M \in (C)$ hoặc viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông có

a) Cạnh huyền nhỏ nhất.

$$AB = \sqrt{IA^2 + IB^2} \geq \sqrt{2IA \cdot IB} = \sqrt{2K}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $IA = IB$.

b) Chu vi nhỏ nhất

Ta có

$$IA + IB + AB \geq 2\sqrt{IA \cdot IB} + \sqrt{2IA \cdot IB} = 2\sqrt{K} + \sqrt{2K}$$

Dấu bằng xảy ra khi $IA = IB$.

c) Bán kính đường tròn ngoại tiếp nhỏ nhất.

$$\text{Ta có } R = \frac{1}{2}AB \geq \sqrt{\frac{K}{2}}$$

Dấu bằng xảy ra khi $IA = IB$.

d) Bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất.

$$\text{Ta có } r = \frac{S}{p} = \frac{K}{IA + IB + AB}$$

Vậy r lớn nhất khi $IA + IB + AB$ nhỏ nhất và bằng $2\sqrt{K} + \sqrt{2K}$.

Dấu bằng xảy ra khi $IA = IB$.

e) Khoảng cách từ I đến tiếp tuyến lớn nhất.

Gọi H là hình chiếu của I lên d , ta có

$$\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IA^2} + \frac{1}{IB^2} \geq \frac{2}{IA \cdot IB} = \frac{2}{K} \Rightarrow IH \leq \sqrt{\frac{K}{2}}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $IA = IB$.

Nhận xét: Các câu hỏi trên thì đẳng thức đều xảy ra khi $IA = IB$ nên $\triangle IAB$ vuông cân tại I . Gọi α là góc giữa tiếp tuyến d và tiệm cận ngang Δ_2 thì $\alpha = (d; \Delta_2) = (d; Ox) = 45^\circ$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k = \pm \tan 45^\circ = \pm 1$.

Vậy các bài toán trong câu 2 ta quy về bài toán viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số

$y = \frac{ax+b}{cx+d}$ khi biết hệ số góc $k = 1$ hoặc $k = -1$.

 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng 3 thuộc (C) cắt các đường tiệm cận của (C) tạo thành tam giác có diện tích bằng

- A. 4. B. $2 + \sqrt{2}$. C. $4 + 2\sqrt{2}$. D. 2

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức, ta có $S = \frac{2|-2+1|}{1} = 2$.

Chọn D.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{2x-3}$ (C) . Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của đồ thị hàm số (C) .

Khoảng cách từ I đến tiếp tuyến bất kỳ của đồ thị (C) đạt giá trị lớn nhất bằng

- A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. B. 1. C. $\sqrt{2}$. D. $\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Tọa độ giao điểm của hai đường tiệm cận là $I\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Gọi A, B là giao điểm của tiếp tuyến d tại $M \in (C)$ bất kỳ với hai đường tiệm cận.

Khi đó ta có $IA \cdot IB = \frac{4|ad - bc|}{c^2} = \frac{4|-3+2|}{4} = 1$.

Gọi H là hình chiếu của I trên d , ta có $\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IA^2} + \frac{1}{IB^2} \geq \frac{2}{IA \cdot IB} = 2 \Rightarrow IH \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $IH_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn A.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-2}$ có đồ thị (C) . Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của (C) . Biết tiếp tuyến Δ của (C) tại M cắt các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang tại A và B sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất. Khi đó, diện tích lớn nhất của tam giác tạo bởi Δ và hai trục tọa độ thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $(28; 29)$. B. $(29; 30)$. C. $(27; 28)$. D. $(26; 27)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = \frac{-3}{(x-2)^2} < 0$.

Theo lý thuyết thì để diện tích đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB nhỏ nhất thì AB nhỏ nhất. Khi đó hệ số góc của tiếp tuyến Δ phải là $k = \pm 1$.

Do $y' < 0, \forall x$ nên $k = -1$.

$$\text{Xét phương trình } y' = k \Rightarrow \frac{-3}{(x-2)^2} = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{3} \\ x = 2 + \sqrt{3} \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} - \text{ Với } x = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow y = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow \text{Tiếp tuyến } \Delta_1 : y &= -(x - 2 + \sqrt{3}) + 2 - \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow y = -x + 4 - 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } \Delta_1 \text{ cắt } Ox, Oy \text{ tại hai điểm } M(4 - 2\sqrt{3}; 0), N(0; 4 - 2\sqrt{3}) \text{ và } S_{OMN} = \frac{1}{2}(4 - 2\sqrt{3})^2.$$

$$\begin{aligned} - \text{ Với } x = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow y = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow \text{tiếp tuyến } \Delta_1 : y &= -(x - 2 - \sqrt{3}) + 2 + \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow y = -x + 4 + 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } \Delta_1 \text{ cắt } Ox, Oy \text{ tại hai điểm } P(4 + 2\sqrt{3}; 0), N(0; 4 + 2\sqrt{3}) \text{ và } S_{OPQ} = \frac{1}{2}(4 + 2\sqrt{3})^2 \approx 27,85.$$

Chọn C.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$, gọi d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng $m-2$.

Biết đường thẳng d cắt tiệm cận đứng của đồ thị hàm số tại điểm $A(x_1; y_1)$ và cắt tiệm cận ngang của đồ thị hàm số tại điểm $B(x_2; y_2)$. Gọi S là tập hợp các số m sao cho $x_2 + y_1 = -5$. Tổng bình phương các phần tử của S bằng

A. 4. B. 9. C. 0. D. 10.

Hướng dẫn giải

Điều kiện $m-2 \neq 2 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $\Delta : x = -2$ và tiệm cận ngang $\Delta' : y = 1$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{3}{(x+2)^2} \Rightarrow y'(m-2) = \frac{3}{m^2} \text{ và } y(m-2) = \frac{m-3}{m}.$$

$$\text{Phương trình đường thẳng } d \text{ là } y = \frac{3}{m^2}(x - m + 2) + \frac{m-3}{m}.$$

$$A = d \cap \Delta \Rightarrow A\left(-2; \frac{m-6}{m}\right); B = d \cap \Delta' \Rightarrow B(2m-2; 1)$$

$$\text{Do đó } x_2 + y_1 = -5 \Leftrightarrow 2m-2 + \frac{m-6}{m} = -5 \Leftrightarrow 2m^2 + 4m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } S = (-3)^2 + 1^2 = 10.$$

Chọn D.

Bài tập tự luyện dạng 5

Câu 1: Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-2018}$ cùng với hai trục tọa độ tạo thành hình chữ nhật có diện tích bằng

- A. 4036. B. 1009. C. 2018. D. 1.

Câu 2: Khoảng cách từ gốc tọa độ đến giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ bằng

- A. $\sqrt{3}$. B. $\sqrt{2}$. C. $\sqrt{5}$. D. 5.

Câu 3: Tất cả các giá trị thực của tham số m để đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{mx+1}{2m+1-x}$ cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 3 là

- A. $m = 1; m = -\frac{3}{2}$. B. $m = -1; m = 3$. C. $m = 1; m = \frac{3}{2}$. D. $m = -1; m = -\frac{3}{2}$.

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{mx-1}{x-n}$ trong đó m, n là tham số. Biết giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số nằm trên đường thẳng $x-2y+3=0$ và đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;1)$. Giá trị của $m+n$ bằng

- A. -3. B. 3. C. 1. D. -1.

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-3}$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận ngang bằng 5 lần khoảng cách từ điểm M đến tiệm cận đứng?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) và A là điểm thuộc (C) . Giá trị nhỏ nhất của tổng các khoảng cách từ A đến các đường tiệm cận của (C) bằng

- A. $2\sqrt{2}$. B. 2. C. 3. D. $2\sqrt{3}$.

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$ có đồ thị là (C) . Tọa độ điểm M có hoành độ dương thuộc (C) sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận nhỏ nhất là

- A. $(0; -1)$. B. $(2; 2)$. C. $(1; -3)$. D. $(4; 3)$.

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{2x-2}{x-2}$ có đồ thị (C) . M là điểm thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai đường tiệm cận của (C) tại hai điểm A, B thỏa mãn $AB = 2\sqrt{5}$. Tổng các hoành độ của tất cả các điểm M thỏa mãn bài toán bằng

- A. 5. B. 8. C. 7. D. 6.

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x+1}$ có đồ thị (C) . Gọi d là khoảng cách từ giao điểm hai tiệm cận của đồ thị (C) đến một tiếp tuyến của (C) . Giá trị lớn nhất của d bằng

A. $\sqrt{2}$.

B. $3\sqrt{3}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. $2\sqrt{2}$.

Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ có đồ thị là (C) . Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của (C) . Các điểm M trên (C) sao cho độ dài đoạn IM ngắn nhất là

A. $M_1(1;1)$ và $M_2(-3;0)$

B. $M_1(1;-1)$ và $M_2(-3;3)$

C. $M_1(1;-1)$ và $M_2(-3;2)$

D. $M_1(1;-2)$ và $M_2(-3;-3)$

Câu 11: Cho đồ thị (C) : $y = \frac{2x+1}{x-1}$. Gọi M là điểm bất kì thuộc đồ thị (C) . Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M cắt hai đường tiệm cận của (C) tại hai điểm P và Q . Gọi G là trọng tâm tam giác IPQ (với I là giao điểm hai đường tiệm cận của (C)). Diện tích tam giác GPQ là

A. 2.

B. 4.

C. $\frac{2}{3}$.

D. 1.

Câu 12: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị là (C) . Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận và $M(x_0, y_0)$ ($x_0 > 0$) là một điểm trên (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai đường tiệm cận lần lượt tại A, B thỏa mãn $AI^2 + IB^2 = 40$. Khi đó tích $x_0 y_0$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. 2.

C. 1.

D. $\frac{15}{4}$.

Câu 13: Tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x^2+mx+1}$ có hai đường tiệm cận đứng là các đường thẳng $x = x_1$ và $x = x_2$ sao cho $\frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2} > 7$ là

A. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$.

B. $-2 < m < 2$.

C. $\begin{cases} 2 < m < \sqrt{5} \\ -\sqrt{5} < m < -2 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} m > \sqrt{5} \\ m < -\sqrt{5} \end{cases}$.

Câu 14: Biết rằng đồ thị của hàm số $f(x) = \frac{x-1}{x^2+mx+n}$ có hai tiệm cận đứng là $x = x_1$ và $x = x_2$ sao

cho $\begin{cases} x_1 - x_2 = 5 \\ x_1^3 - x_2^3 = 35 \end{cases}$. Giá trị $m+n$ bằng

A. -1.

B. -7.

C. 1.

D. 7.

ĐÁP ÁN

1 – A	2 – C	3 – A	4 – B	5 – B	6 – A	7 – D	8 – B	9 – A	10 – B
11 – A	12 – B	13 – D	14 – C						