

PHẦN 1. XÁC SUẤT

- Câu 1.** (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020) Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số mà tổng tất cả các chữ số của số đó bằng 7?
 A. 165. B. 1296. C. 343. D. 84.
- Câu 2.** (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An - 2020) Ban chỉ đạo phòng chống dịch Covid-19 của sở Y tế Nghệ An có 9 người, trong đó có đúng 4 bác sĩ. Chia ngẫu nhiên Ban đó thành ba tổ, mỗi tổ 3 người để đi kiểm tra công tác phòng dịch ở địa phương. Trong mỗi tổ, chọn ngẫu nhiên một người làm tổ trưởng. Xác suất để ba tổ trưởng đều là bác sĩ là
 A. $\frac{1}{42}$. B. $\frac{1}{21}$. C. $\frac{1}{14}$. D. $\frac{1}{7}$.
- Câu 3.** (Chuyên Hưng Yên - 2020) Cho tập $S = \{1; 2; \dots; 19; 20\}$ gồm 20 số tự nhiên từ 1 đến 20. Lấy ngẫu nhiên ba số thuộc S . Xác suất để ba số lấy được lập thành cấp số cộng là
 A. $\frac{5}{38}$. B. $\frac{7}{38}$. C. $\frac{3}{38}$. D. $\frac{1}{114}$.
- Câu 4.** (Chuyên KHTN - 2020) Xếp 4 bạn nam và 2 bạn nữ thành một hàng ngang. Xác suất để 2 bạn nữ không ngồi cạnh nhau bằng
 A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{1}{3}$.
- Câu 5.** (Chuyên KHTN - 2020) Một công ty may mặc có hai hệ thống máy chạy song song. Xác suất để hệ thống máy thứ nhất hoạt động tốt là 90%, xác suất để hệ thống máy thứ hai hoạt động tốt là 80%. Công ty chỉ có thể hoàn thành đơn hàng đúng hạn nếu ít nhất một trong hai hệ thống máy hoạt động tốt. Xác suất để công ty hoàn thành đúng hạn là
 A. 98%. B. 2%. C. 80%. D. 72%.
- Câu 6.** (Chuyên Lam Sơn - 2020) Giải bóng chuyền VTV cup gồm 12 đội tham gia, trong đó có 9 đội nước ngoài và 3 đội Việt Nam. Ban tổ chức bốc cho thăm ngẫu nhiên và chia thành 3 bảng đấu A, B, C mỗi bảng 4 đội. Xác suất để ba đội Việt Nam nằm ở 3 bảng gần nhất với số nào dưới đây?
 A. $\frac{11}{25}$. B. $\frac{3}{20}$. C. $\frac{39}{100}$. D. $\frac{29}{100}$.
- Câu 7.** (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020) Xếp ngẫu nhiên 5 học sinh A, B, C, D, E ngồi vào một dãy 5 ghế thẳng hàng (mỗi bạn ngồi một ghế). Tính xác suất để hai bạn A và B không ngồi cạnh nhau.
 A. $\frac{1}{5}$. B. $\frac{3}{5}$. C. $\frac{2}{5}$. D. $\frac{4}{5}$.
- Câu 8.** (Chuyên Lương Văn Tỵ - Ninh Bình - 2020) Hai bạn A và B mỗi bạn viết ngẫu nhiên một số tự nhiên gồm ba chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để các chữ số có mặt ở hai số bạn A và B viết giống nhau bằng
 A. $\frac{31}{2916}$. B. $\frac{1}{648}$. C. $\frac{1}{108}$. D. $\frac{25}{2916}$.
- Câu 9.** (Chuyên Nguyễn Bình Khiêm - Quảng Nam - 2020) Một nhóm gồm 10 học sinh trong đó có 7 học sinh nam và 3 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh từ nhóm 10 học sinh đó đi lao động. Tính xác suất để trong 3 học sinh được chọn có ít nhất 1 học sinh nữ.
 A. $\frac{4}{9}$. B. $\frac{17}{24}$. C. $\frac{17}{48}$. D. $\frac{2}{3}$.

- Câu 10. (Chuyên Thái Bình - 2020)** Có tất cả bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau trong đó có đúng 3 chữ số chẵn
- A. 72000. B. 64800. C. 36000. D. 60000.
- Câu 11. (Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Cho S là tập các số tự nhiên có 8 chữ số. Lấy một số bất kì của tập S . Tính xác suất để lấy được số lẻ và chia hết cho 9.
- A. $\frac{3}{8}$. B. $\frac{1}{9}$. C. $\frac{2}{9}$. D. $\frac{1}{18}$.
- Câu 12. (Chuyên Bến Tre - 2020)** Đội học sinh giỏi trường trung học phổ thông chuyên bến tre gồm có 8 học sinh khối 12, 6 học sinh khối 11 và 5 học sinh khối 10. Chọn ngẫu nhiên 8 học sinh. Xác suất để trong 8 học sinh được chọn có đủ 3 khối là
- A. $\frac{71131}{75582}$. B. $\frac{35582}{3791}$. C. $\frac{143}{153}$. D. $\frac{71128}{75582}$.
- Câu 13. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020)** Cho tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Gọi S là tập hợp các tam giác có độ dài ba cạnh là các phần tử của A . Chọn ngẫu nhiên một phần tử thuộc S . Xác suất để phần tử được chọn là một tam giác cân bằng.
- A. $\frac{6}{34}$. B. $\frac{19}{34}$. C. $\frac{27}{34}$. D. $\frac{7}{34}$.
- Câu 14. (Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020)** Cho một đa giác đều 18 đỉnh nội tiếp trong một đường tròn tâm O . Gọi X là tập hợp tất cả các tam giác có các đỉnh là các đỉnh của đa giác trên. Tính xác suất P để chọn được một tam giác từ tập X là tam giác cân nhưng không phải tam giác đều.
- A. $P = \frac{144}{136}$. B. $P = \frac{7}{816}$. C. $P = \frac{23}{136}$. D. $P = \frac{21}{136}$.
- Câu 15. (Chuyên Lào Cai - 2020)** Chọn ngẫu nhiên bốn số tự nhiên khác nhau từ 70 số nguyên dương đầu tiên. Tính xác suất để bốn số được chọn lập thành một cấp số nhân có công bội nguyên.
- A. $\frac{12}{916895}$. B. $\frac{11}{916895}$. C. $\frac{10}{916895}$. D. $\frac{9}{916895}$.
- Câu 16. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Có 6 học sinh gồm 2 học sinh lớp A, 2 học sinh lớp B và 2 học sinh lớp C xếp ngẫu nhiên thành một hàng ngang. Tính xác suất để nhóm bất kì 3 học sinh liên tiếp nhau trong hàng luôn có mặt học sinh của cả 3 lớp A, B, C.
- A. $\frac{1}{120}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{30}$. D. $\frac{1}{15}$.
- Câu 17. (Chuyên Sơn La - 2020)** Có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có ba ghế. Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh gồm 3 nam 3 nữ ngồi vào hai dãy ghế đó sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh ngồi. Xác suất để mỗi học sinh nam đều ngồi đối diện với một học sinh nữ bằng
- A. $\frac{1}{10}$. B. $\frac{3}{5}$. C. $\frac{1}{20}$. D. $\frac{2}{5}$.
- Câu 18. (Sở Phú Thọ - 2020)** Cho đa giác đều (H) có 30 đỉnh. Lấy tùy ý 3 đỉnh của (H) . Xác suất để 3 đỉnh lấy được tạo thành một tam giác tù bằng
- A. $\frac{39}{140}$. B. $\frac{39}{58}$. C. $\frac{45}{58}$. D. $\frac{39}{280}$.
- Câu 19. (Sở Hà Tĩnh - 2020)** Một hộp chứa 10 quả cầu được đánh số theo thứ tự từ 1 đến 10, lấy ngẫu nhiên 5 quả cầu. Xác suất để tích các số ghi trên 5 quả cầu đó chia hết cho 3 bằng
- A. $\frac{5}{12}$. B. $\frac{7}{12}$. C. $\frac{1}{12}$. D. $\frac{11}{12}$.
- Câu 20. (Sở Bắc Ninh - 2020)** Gọi A là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 8 chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc A . Xác suất để số tự nhiên được chọn chia hết cho 25 bằng

A. $\frac{43}{324}$. B. $\frac{1}{27}$. C. $\frac{11}{324}$. D. $\frac{17}{81}$.

Câu 21. (Sở Yên Bái - 2020) Gọi S là tập tất cả các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số

0,1,2,3,4,5,6. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S . Tính xác suất để số được chọn là một số chia hết cho 6.

A. $\frac{13}{60}$. B. $\frac{2}{9}$. C. $\frac{17}{45}$. D. $\frac{11}{45}$.

Câu 22. (Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020) Trường trung học phổ thông Bỉm Sơn có 23 lớp, trong đó khối 10 có 8 lớp, khối 11 có 8 lớp, khối 12 có 7 lớp, mỗi lớp có một chi đoàn, mỗi chi đoàn có một em làm bí thư. Các em bí thư đều giỏi và rất năng động nên Ban chấp hành Đoàn trường chọn ngẫu nhiên 9 em bí thư đi thi cán bộ đoàn giỏi cấp thị xã. Tính xác suất để 9 em được chọn có đủ cả ba khối?

A. $\frac{7345}{7429}$. B. $\frac{7012}{7429}$. C. $\frac{7234}{7429}$. D. $\frac{7123}{7429}$.

Câu 23. (Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020) Trước kì thi học sinh giỏi, nhà trường tổ chức buổi gặp mặt 10 em học sinh trong đội tuyển. Biết các em đó có số thứ tự trong danh sách lập thành cấp số cộng. Các em ngồi ngẫu nhiên vào hai dãy bàn đối diện nhau, mỗi dãy có 5 ghế và mỗi ghế chỉ được ngồi một học sinh. Tính xác suất để tổng các số thứ tự của hai em ngồi đối diện nhau là bằng nhau.

A. $\frac{1}{954}$. B. $\frac{1}{252}$. C. $\frac{1}{945}$. D. $\frac{1}{126}$.

Câu 24. (Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020) Người ta muốn chia tập hợp 16 học sinh gồm 3 học sinh lớp 12A, 5 học sinh lớp 12B và 8 học sinh lớp 12C thành hai nhóm, mỗi nhóm có 8 học sinh. Xác suất sao cho ở mỗi nhóm đều có học sinh lớp 12A và mỗi nhóm có ít nhất hai học sinh lớp 12B là

A. $\frac{42}{143}$. B. $\frac{84}{143}$. C. $\frac{356}{1287}$. D. $\frac{56}{143}$.

Câu 25. (Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020) Một hộp đựng 15 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 15. Chọn ngẫu nhiên 6 tấm thẻ trong hộp. Xác suất để tổng các số ghi trên 6 tấm thẻ được chọn là một số lẻ bằng.

A. $\frac{71}{143}$. B. $\frac{56}{715}$. C. $\frac{72}{143}$. D. $\frac{56}{143}$.

Câu 26. (Kim Liên - Hà Nội - 2020) Một số điện thoại có bảy chữ số, trong đó chữ số đầu tiên là 8. Số điện thoại này được gọi là

may mắn nếu bốn chữ số đầu là chữ số chẵn phân biệt và ba chữ số còn lại là lẻ, đồng thời hai chữ số 0 và 9 không đứng liền nhau. Tính xác suất để một người khi lắp điện thoại ngẫu nhiên được số điện thoại may mắn.

A. $P(A) = \frac{5100}{10^7}$. B. $P(A) = \frac{2850}{10^7}$. C. $P(A) = \frac{5100}{10^6}$. D. $P(A) = \frac{2850}{10^6}$.

Câu 27. (Lê Lai - Thanh Hóa - 2020) Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có ít nhất 3 chữ số, các chữ số đôi một khác nhau được lập thành từ các chữ số thuộc tập A . Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S , tính xác suất để số được chọn có tổng các chữ số bằng 10.

A. $\frac{1}{30}$. B. $\frac{3}{25}$. C. $\frac{22}{25}$. D. $\frac{2}{25}$.

Câu 28. (Liên trường Nghệ An - 2020) Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau lập thành từ các chữ số 0,1,2,3,4,5,6,7. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S . Tính xác suất để số được chọn có đúng 2 chữ số chẵn.

A. $\frac{24}{35}$.

B. $\frac{144}{245}$.

C. $\frac{72}{245}$.

D. $\frac{18}{35}$.

Câu 29. (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020) Cho tập $S = \{1; 2; 3; \dots; 19; 20\}$ gồm 20 số tự nhiên từ 1 đến 20. Lấy ngẫu nhiên ba số thuộc S . Xác suất để ba số lấy được lập thành một cấp số cộng là

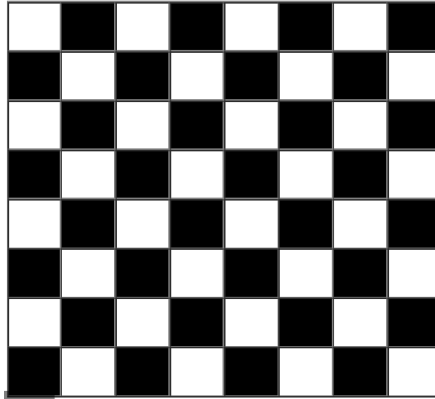
A. $\frac{7}{38}$.

B. $\frac{5}{38}$.

C. $\frac{3}{38}$.

D. $\frac{1}{114}$.

Câu 30. (Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020) Một bàn cờ vua gồm 8×8 ô vuông, mỗi ô có cạnh bằng 1 đơn vị. Một ô vừa là hình vuông hay hình chữ nhật, hai ô là hình chữ nhật, ... Chọn ngẫu nhiên một hình chữ nhật trên bàn cờ. Xác suất để hình được chọn là một hình vuông có cạnh lớn hơn 4 đơn vị bằng



A. $\frac{5}{216}$.

B. $\frac{17}{108}$.

C. $\frac{51}{196}$.

D. $\frac{29}{216}$.

Câu 31. (Tiên Du - Bắc Ninh - 2020) Gọi M là tập hợp các số tự nhiên có ba chữ số lập được từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 số từ tập M . Xác suất để cả 2 số lấy được đều có chữ số hàng chục nhỏ hơn các chữ số hàng trăm và hàng đơn vị là

A. $\frac{8}{21}$.

B. $\frac{5}{16}$.

C. $\frac{296}{2051}$.

D. $\frac{695}{7152}$.

Câu 32. (Hải Hậu - Nam Định - 2020) Một hộp có chứa 5 viên bi đỏ, 3 viên bi xanh và n viên bi vàng (các viên bi kích thước như nhau, n là số nguyên dương). Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp. Biết xác suất để trong ba viên bi lấy được có đủ 3 màu là $\frac{45}{182}$. Tính xác suất P để trong 3 viên bi lấy được có nhiều nhất hai viên bi đỏ.

A. $P = \frac{135}{364}$.

B. $P = \frac{177}{182}$.

C. $P = \frac{45}{182}$.

D. $P = \frac{31}{56}$.

Câu 33. (Kim Thành - Hải Dương - 2020) Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 9 chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số từ S . Tính xác suất để được chọn có đúng 4 chữ số lẻ và chữ số 0 đứng giữa hai chữ số lẻ. (Các chữ số liền trước và liền sau của chữ số 0 là các chữ số lẻ).

A. $\frac{5}{648}$.

B. $\frac{5}{27}$.

C. $\frac{5}{54}$.

D. $\frac{20}{189}$.

Câu 34. (Trường VINSCHOOL - 2020) Có 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ xếp thành hàng ngang. Xác suất để có đúng hai bạn nữ đứng cạnh nhau bằng

A. $\frac{1}{24}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{14}{17}$.

D. $\frac{7}{13}$.

Câu 35. (Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020) Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số mà các chữ số đều khác 0. Lấy ngẫu nhiên một số từ S . Xác suất để lấy được số chỉ có mặt 3 chữ số gần với số nào nhất trong các số sau?

A. 0,34.

B. 0,36.

C. 0,21.

D. 0,13.

Câu 36. (Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020) Một xưởng sản xuất thực phẩm gồm 4 kỹ sư chế biến thực phẩm, 3 kỹ thuật viên và 13 công nhân. Để đảm bảo sản xuất thực phẩm chống dịch Covid 19, xưởng cần chia thành 3 ca sản xuất theo thời gian liên tiếp nhau sao cho ca I có 6 người và 2 ca còn lại mỗi ca có 7 người. Tính xác suất sao cho mỗi ca có 1 kỹ thuật viên, ít nhất một kỹ sư chế biến thực phẩm.

A. $\frac{440}{3320}$.

B. $\frac{441}{3230}$.

C. $\frac{41}{230}$.

D. $\frac{401}{3320}$.

Câu 37. (Trần Phú - Quảng Ninh - 2020) Có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có năm ghế. Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh, gồm 5 nam và 5 nữ ngồi vào hai dãy ghế sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh ngồi. Xác suất để mỗi học sinh nam đều ngồi đối diện với một học sinh nữ bằng

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{30}$.

C. $\frac{8}{63}$.

D. $\frac{8}{37}$.

Câu 38. (Đại Học Hà Tĩnh - 2020) Cho đa giác đều 12 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm **A**. Chọn ngẫu nhiên 3 đỉnh của đa giác đó. Tính xác suất để 3 đỉnh được chọn tạo thành một tam giác không có cạnh nào là cạnh của đa giác đã cho.

A. $\frac{2}{5}$.

B. $\frac{31}{55}$.

C. $\frac{28}{55}$.

D. $\frac{52}{55}$.

Câu 39. (ĐHQG Hà Nội - 2020) Có 12 học sinh gồm 6 nam và 6 nữ ngồi vào hai hàng ghế đối diện nhau tùy ý. Xác suất để mỗi một em nam ngồi đối diện với một em nữ là?

A. $\frac{1}{924}$.

B. $\frac{4}{165}$.

C. $\frac{8}{165}$.

D. $\frac{16}{231}$.

Câu 40. (Sở Hưng Yên - 2020) Có 50 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 50. Rút ngẫu nhiên 3 thẻ. Xác suất để tổng các số ghi trên thẻ chia hết cho 3 bằng

A. $\frac{8}{89}$.

B. $\frac{11}{171}$.

C. $\frac{769}{2450}$.

D. $\frac{409}{1225}$.

PHẦN 2. MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÁC

Câu 41. (Chuyên Bắc Ninh - 2020) Cho $x > 0, x \neq 1$. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển Niu-ton của

$$P = \left(\frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1} - \frac{x-1}{x - \sqrt{x}} \right)^{20}.$$

A. 38760.

B. 167960.

C. 1600.

D. 125970.

Câu 42. (Sở Phú Thọ - 2020) Giả sử n là một số nguyên dương thỏa mãn $3C_n^2 - C_n^3 = 24$. Hệ số của số hạng chứa x^{12} trong khai triển $\left(x^2 \sqrt{x} - \frac{2}{x} \right)^n$ bằng

A. $672x^{12}$.

B. $-672x^{12}$.

C. 672.

D. -672.

Câu 43. (Sở Bình Phước - 2020) Trên một cái bảng đã ghi sẵn các số tự nhiên từ 1 đến 2020. Ta thực hiện công việc như sau: xóa hai số bất kỳ trên bảng rồi ghi lại một số tự nhiên bằng tổng của hai số vừa xóa, cứ thực hiện công việc như vậy cho đến khi trên bảng chỉ còn một số. Số cuối cùng còn lại trên bảng là

A. 4040.

B. 2041210.

C. 4082420.

D. 2020.

Câu 44. (Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020) Xác định n biết rằng hệ số của x^n trong khai triển $(1+x+2x^2+\dots+nx^n)^2$ bằng $6n$.

A. $n = 8$.

B. $n = 6$.

C. $n = 10$.

D. $n = 5$.

----- **HẾT** -----

Nguyễn Bảo Vương

TUYỂN CHỌN CÂU HỎI VẬN DỤNG - VẬN DỤNG CAO TỪ CÁC ĐỀ THI THỬ TRÊN CẢ NƯỚC NĂM 2020

CHƯƠNG 7. ĐẠI SỐ 11

PHẦN 1. XÁC SUẤT

Câu 1. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020) Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số mà tổng tất cả các chữ số của số đó bằng 7?

A. 165.

B. 1296.

C. 343.

D. 84.

Lời giải

Chọn D

7 có thể phân tích thành 11 nhóm sau:

$$7 = (7+0+0+0)$$

$$= (6+1+0+0)$$

$$= (5+2+0+0) = (5+1+1+0)$$

$$= (4+3+0+0) = (4+2+1+0) = (4+1+1+1)$$

$$= (3+3+1+0) = (3+2+2+0) = (3+2+1+1)$$

$$= (2+2+2+1)$$

+) Với nhóm $(7+0+0+0)$ viết được 1 số, đó là số: 7000.+) Với các nhóm $(6+1+0+0)$; $(2+2+0+0)$ và $(4+3+0+0)$: mỗi nhóm viết được 6 số (chẳng hạn: với nhóm $(6+1+0+0)$ ta có các số 6100, 6010, 6001 và hoán vị của số 6 và số 1).+) Với nhóm $(3+3+1+0)$; $(5+1+1+0)$ và $(3+2+2+0)$: mỗi nhóm viết được $\frac{4!-3!}{2} = 9$ số $(3!)$ là các số có số 0 đứng đầu, chia 2 vì có 1 số xuất hiện 2 lần).+) Với nhóm $(4+2+1+0)$ viết được: $4!-3! = 18$ số ($3!$ là các số có số 0 đứng đầu).+) Với nhóm $(3+2+1+1)$ viết được: $\frac{4!}{2} = 12$ số (vì xuất hiện 2 số 1).+) Với các nhóm $(4+1+1+1)$ và $(2+2+2+1)$: mỗi nhóm viết được 4 số(chẳng hạn: với nhóm $(4+1+1+1)$ ta có các số: 4111; 1411; 1141; 1114).Tổng số các số viết được là: $1 + 6.3 + 9.3 + 18 + 12 + 4.2 = 84$ (số).

Câu 2. (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An - 2020) Ban chỉ đạo phòng chống dịch Covid-19 của sở Y tế Nghệ An có 9 người, trong đó có đúng 4 bác sĩ. Chia ngẫu nhiên Ban đó thành ba tổ, mỗi tổ 3 người để đi kiểm tra công tác phòng dịch ở địa phương. Trong mỗi tổ, chọn ngẫu nhiên một người làm tổ trưởng. Xác suất để ba tổ trưởng đều là bác sĩ là

A. $\frac{1}{42}$.B. $\frac{1}{21}$.C. $\frac{1}{14}$.D. $\frac{1}{7}$.

Lời giải

Chọn B

Chọn 3 người vào nhóm A và có một tổ trưởng ta có: $C_9^3 \cdot 3$ cách.Chọn 3 người vào nhóm B và có một tổ trưởng ta có: $C_6^3 \cdot 3$ cách.3 người còn lại vào nhóm C và có một tổ trưởng ta có: $C_3^3 \cdot 3$ cách.Từ đó ta có số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_9^3 \cdot 3 \cdot C_6^3 \cdot 3 \cdot C_3^3 \cdot 3 = 45360$.Gọi M là biến cố thỏa mãn bài toán.

Vì có 4 bác sĩ nên phải có một nhóm có 2 bác sĩ.

Chọn nhóm có 2 bác sĩ mà có 1 tổ trưởng là bác sĩ có $C_4^2 \cdot C_5^1 \cdot 2$ Chọn nhóm có 1 bác sĩ và bác sĩ là tổ trưởng có: $C_2^1 \cdot C_4^2$.

1 bác sĩ còn lại và 2 người còn lại vào nhóm có 1 cách.

Chọn một trong 3 nhóm A, B, C có 2 bác sĩ có C_3^1 cách.

$$\Rightarrow n(M) = C_4^2 \cdot C_5^1 \cdot 2 \cdot C_2^1 \cdot C_4^2 \cdot C_3^1 = 2160. \Rightarrow P(M) = \frac{2160}{45360} = \frac{1}{21}.$$

Câu 3. (Chuyên Hưng Yên - 2020) Cho tập $S = \{1; 2; \dots; 19; 20\}$ gồm 20 số tự nhiên từ 1 đến 20. Lấy ngẫu nhiên ba số thuộc S . Xác suất để ba số lấy được lập thành cấp số cộng là

- A. $\frac{5}{38}$. B. $\frac{7}{38}$. C. $\frac{3}{38}$. D. $\frac{1}{114}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $n(\Omega) = C_{20}^3$.

Gọi A là biến cố: “ba số lấy được lập thành cấp số cộng”.

Giả sử ba số a, b, c theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng, khi đó ta có $a + c = 2b$. Hay $a + c$ là một số chẵn và mỗi cách chọn 2 số a và c thỏa mãn $a + c$ là số chẵn sẽ có duy nhất cách chọn b . Số cách chọn hai số có tổng chẵn sẽ là số cách chọn ba số tạo thành cấp số cộng.

TH1: Hai số lấy được đều là số chẵn, có: C_{10}^2 cách lấy.

TH2: Hai số lấy được đều là số lẻ, có: C_{10}^2 cách lấy.

$$\Rightarrow n(A) = C_{10}^2 + C_{10}^2$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_{10}^2 + C_{10}^2}{C_{20}^3} = \frac{3}{38}.$$

Câu 4. (Chuyên KHTN - 2020) Xếp 4 bạn nam và 2 bạn nữ thành một hàng ngang. Xác suất để 2 bạn nữ không ngồi cạnh nhau bằng

- A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Số phần tử không gian mẫu là $n_\Omega = 6! = 720$.

Gọi A là biến cố: “xếp 4 bạn nam và 2 bạn nữ thành một hàng ngang mà 2 bạn nữ không ngồi cạnh nhau”.

Khi đó $\bar{A}$ là biến cố: “xếp 4 bạn nam và 2 bạn nữ thành một hàng ngang mà 2 bạn nữ ngồi cạnh nhau”.

Xếp 4 bạn nam và 1 bạn nữ thành một hàng ngang, có $5! = 120$ cách.

Xếp bạn nữ còn lại ngồi cạnh bạn nữ đã xếp ở trên, có 2 cách.

Khi đó $n_{\bar{A}} = 120 \cdot 2 = 240$.

$$\text{Xác suất cần tìm bằng } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{n_{\bar{A}}}{n_\Omega} = 1 - \frac{240}{720} = \frac{2}{3}.$$

Câu 5. (Chuyên KHTN - 2020) Một công ty may mặc có hai hệ thống máy chạy song song. Xác suất để hệ thống máy thứ nhất hoạt động tốt là 90%, xác suất để hệ thống máy thứ hai hoạt động tốt là 80%. Công ty chỉ có thể hoàn thành đơn hàng đúng hạn nếu ít nhất một trong hai hệ thống máy hoạt động tốt. Xác suất để công ty hoàn thành đúng hạn là

- A. 98%. B. 2%. C. 80%. D. 72%.

Lời giải

Chọn A

Gọi A là biến cố: « Hệ thống máy thứ nhất hoạt động tốt »

B là biến cố: « Hệ thống máy thứ hai hoạt động tốt »

C là biến cố: « Công ty hoàn thành đúng hạn »

Ta có $\bar{A}$ là biến cố : « Hệ thống máy thứ nhất hoạt động không tốt »

$\bar{B}$ là biến cố : « Hệ thống máy thứ hai hoạt động không tốt »

$$P(A) = 0,9 ; P(B) = 0,8 ; P(\bar{A}) = 0,1 ; P(\bar{B}) = 0,2 .$$

$$P(\bar{C}) = P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = 0,02 \Rightarrow P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 0,98 .$$

Câu 6. (Chuyên Lam Sơn - 2020) Giải bóng chuyên VTV cup gồm 12 đội tham gia, trong đó có 9 đội nước ngoài và 3 đội Việt Nam. Ban tổ chức bốc thăm ngẫu nhiên và chia thành 3 bảng đấu A, B, C mỗi bảng 4 đội. Xác suất để ba đội Việt Nam nằm ở 3 bảng gần nhất với số nào dưới đây?

A. $\frac{11}{25}$.

B. $\frac{3}{20}$.

C. $\frac{39}{100}$.

D. $\frac{29}{100}$.

Lời giải

Chọn D

Số cách chọn 4 đội cho bảng A là C_{12}^4 . Khi đó sẽ có C_8^4 số cách chọn 4 đội cho bảng B và số cách chọn 4 đội cho bảng C là C_4^4 .

Vậy số phần tử của không gian mẫu là: $n_{(\Omega)} = C_{12}^4 \cdot C_8^4 \cdot C_4^4$.

Đặt T là biến cố: “3 đội Việt Nam nằm ở 3 bảng khác nhau”.

Số cách chọn 1 đội Việt Nam và 2 đội nước ngoài cho bảng A là $C_3^1 \cdot C_9^2$. Với mỗi cách chọn cho bảng A ta có $C_2^1 \cdot C_6^2$ số cách chọn 1 đội Việt Nam và 2 đội nước ngoài cho bảng B . Khi đó, số cách chọn 1 đội Việt Nam và 2 đội nước ngoài cho bảng C là $C_1^1 \cdot C_3^2$.

Số phần tử của biến cố T là: $n_{(T)} = C_3^1 \cdot C_9^2 \cdot C_2^1 \cdot C_6^2 \cdot C_1^1 \cdot C_3^2$.

$$\text{Xác suất cần tính là } P_{(T)} = \frac{n_{(T)}}{n_{(\Omega)}} = \frac{C_3^1 \cdot C_9^2 \cdot C_2^1 \cdot C_6^2 \cdot C_1^1 \cdot C_3^2}{C_{12}^4 \cdot C_8^4 \cdot C_4^4} = \frac{16}{55}.$$

Câu 7. (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020) Xếp ngẫu nhiên 5 học sinh A, B, C, D, E ngồi vào một dãy 5 ghế thẳng hàng (mỗi bạn ngồi một ghế). Tính xác suất để hai bạn A và B không ngồi cạnh nhau.

A. $\frac{1}{5}$.

B. $\frac{3}{5}$.

C. $\frac{2}{5}$.

D. $\frac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = 5! = 120$.

Gọi X là biến cố “Hai bạn A và B không ngồi cạnh nhau”.

$\Rightarrow \bar{X}$ “Hai bạn A và B ngồi cạnh nhau”

Có 4 vị trí để hai bạn A và B ngồi cạnh nhau, hai bạn đổi chỗ được một cách xếp mới.

Nên số cách xếp để hai bạn A và B ngồi cạnh nhau là $4 \cdot 2! \cdot 3! = 48$

$$\text{Xác suất của biến cố } \bar{X} \text{ là: } P(\bar{X}) = \frac{n(\bar{X})}{n(\Omega)} = \frac{48}{120} = \frac{2}{5}$$

$$\text{Vậy xác suất của biến cố } X \text{ là: } P(X) = 1 - P(\bar{X}) = \frac{3}{5}$$

Câu 8. (Chuyên Lương Văn Tỵ - Ninh Bình - 2020) Hai bạn A và B mỗi bạn viết ngẫu nhiên một số tự nhiên gồm ba chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để các chữ số có mặt ở hai số bạn A và B viết giống nhau bằng

A. $\frac{31}{2916}$.

B. $\frac{1}{648}$.

C. $\frac{1}{108}$.

D. $\frac{25}{2916}$.

Lời giải

Chọn D

Mỗi bạn có $9.A_9^2$ cách viết nên số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = (9.A_9^2)^2$.

Ta tìm cách viết mà các chữ số các chữ số có mặt trong hai số mà bạn A và B viết giống nhau
Bạn A có tất cả $9.A_9^2$ cách viết, trong đó A_9^3 cách viết mà số không gồm chữ số 0 và có $(9.A_9^2 - A_9^3)$ cách viết mà số có chữ số 0.

TH1: Nếu A viết số không gồm chữ số 0 có A_9^3 cách, lúc này B có $3!$ cách viết.

TH2: Nếu A viết số có chữ số 0 có $(9.A_9^2 - A_9^3)$ cách, lúc này B có 4 cách viết.

Vậy có $A_9^3.3! + (9.A_9^2 - A_9^3).4$ cách viết thỏa mãn.

$$\text{Xác suất cần tính bằng } \frac{A_9^3.3! + (9.A_9^2 - A_9^3).4}{(A_9^2)^2} = \frac{25}{2916}.$$

Câu 9. (Chuyên Nguyễn Bình Khiêm - Quảng Nam - 2020) Một nhóm gồm 10 học sinh trong đó có 7 học sinh nam và 3 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh từ nhóm 10 học sinh đó đi lao động. Tính xác suất để trong 3 học sinh được chọn có ít nhất 1 học sinh nữ.

- A. $\frac{4}{9}$. B. $\frac{17}{24}$. C. $\frac{17}{48}$. D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $n(\Omega) = C_{10}^3 = 120$.

Đặt $A = \text{"3 học sinh được chọn có ít nhất 1 nữ"}$

$\bar{A} = \text{"3 học sinh được chọn không có nữ"}$

$$\text{Khi đó } n(\bar{A}) = C_7^3 = 35 \Rightarrow p(\bar{A}) = \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = \frac{7}{24}$$

$$\text{Vậy } p(A) = 1 - p(\bar{A}) = \frac{17}{24}.$$

Câu 10. (Chuyên Thái Bình - 2020) Có tất cả bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau trong đó có đúng 3 chữ số chẵn

- A. 72000. B. 64800. C. 36000. D. 60000.

Lời giải

Chọn B

TH1: 3 chữ số chẵn được chọn khác chữ số 0

Chọn 3 chữ số chẵn khác chữ số 0 là C_4^3

Chọn 3 chữ số lẻ là C_5^3

Số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau lập từ các số đã chọn là $C_4^3.C_5^3.6! = 28800$.

TH3: 3 chữ số chẵn được chọn có 1 chữ số là chữ số 0

Chọn 2 chữ số chẵn khác chữ số 0 là C_4^2

Chọn 3 chữ số lẻ là C_5^3

Số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau lập từ các số đã chọn là $C_4^2.C_5^3.(6! - 5!) = 36000$.

Số các số tự nhiên thỏa mãn là $28800 + 36000 = 64800$.

Câu 11. (Chuyên Bắc Ninh - 2020) Cho S là tập các số tự nhiên có 8 chữ số. Lấy một số bất kì của tập S . Tính xác suất để lấy được số lẻ và chia hết cho 9.

- A. $\frac{3}{8}$. B. $\frac{1}{9}$. C. $\frac{2}{9}$. D. $\frac{1}{18}$.

Lời giải

Chọn D

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 9 \cdot 10^7$.

Gọi A là biến cố: “lấy được số lẻ và chia hết cho 9”.

+ Dãy các số lẻ có 8 chữ số và chia hết cho 9 là 10000017; 10000035; 10000053;...; 99999999.

+ Dãy số trên là 1 cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 10000017$, số hạng cuối $u_n = 99999999$ và công sai $d = 18$, suy ra số phần tử của dãy số là $\frac{99999999 - 10000017}{18} + 1 = 5000000 = 5 \cdot 10^6$

Do đó $n(A) = 5 \cdot 10^6$.

Vậy xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{5 \cdot 10^6}{9 \cdot 10^7} = \frac{1}{18}$.

Câu 12. (Chuyên Bến Tre - 2020) Đội học sinh giỏi trường trung học phổ thông chuyên bến tre gồm có 8 học sinh khối 12, 6 học sinh khối 11 và 5 học sinh khối 10. Chọn ngẫu nhiên 8 học sinh. Xác suất để trong 8 học sinh được chọn có đủ 3 khối là

A. $\frac{71131}{75582}$.

B. $\frac{35582}{3791}$.

C. $\frac{143}{153}$.

D. $\frac{71128}{75582}$.

Lời giải

Chọn D

Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{19}^8 = 75582$.

Gọi A là biến cố: “trong 8 học sinh được chọn có đủ 3 khối”.

Ta có: $n(\Omega) = C_{19}^8 - (C_{14}^8 + C_{13}^8 + C_{11}^8 - C_8^8) = 21128$.

$$P(A) = \frac{21128}{75582}.$$

Câu 13. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020) Cho tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Gọi S là tập hợp các tam giác có độ dài ba cạnh là các phần tử của A . Chọn ngẫu nhiên một phần tử thuộc S . Xác suất để phần tử được chọn là một tam giác cân bằng.

A. $\frac{6}{34}$.

B. $\frac{19}{34}$.

C. $\frac{27}{34}$.

D. $\frac{7}{34}$.

Lời giải

Chọn C

Tập các bộ ba số khác nhau có giá trị bằng số đo 3 cạnh là:

$(2; 3; 4), (2; 4; 5), (2; 5; 6), (3; 4; 5), (3; 4; 6), (3; 5; 6), (4; 5; 6)$ có 7 tam giác không cân.

Xét các tam giác cân có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $b \Rightarrow 2b > a$. Ta xét các trường hợp

☐ $b = 1 \Rightarrow a = 1$: 1 tam giác cân.

☐ $b = 2 \Rightarrow a = \{1; 2; 3\}$: 3 tam giác cân.

☐ $b = 3 \Rightarrow a = \{1; 2; 3; 4; 5\}$: 5 tam giác cân.

☐ $b = 4; 5; 6 \Rightarrow a = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$: có 18 tam giác cân.

Vậy ta có $n(\Omega) = 7 + 1 + 3 + 5 + 18 = 34$. Gọi A là biến cố: “để phần tử được chọn là một tam giác cân”, suy ra $n(A) = 1 + 3 + 5 + 18 = 27$.

$$\text{Suy ra } p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{27}{34}.$$

Câu 14. (Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020) Cho một đa giác đều 18 đỉnh nội tiếp trong một đường tròn tâm O . Gọi X là tập hợp tất cả các tam giác có các đỉnh là các đỉnh của đa giác trên. Tính xác suất P để chọn được một tam giác từ tập X là tam giác cân nhưng không phải tam giác đều.

A. $P = \frac{144}{136}$.

B. $P = \frac{7}{816}$.

C. $P = \frac{23}{136}$.

D. $P = \frac{21}{136}$.

Lời giải

Chọn C

Số phần tử của không gian mẫu là $n(X) = C_{18}^3$.

Ký hiệu đa giác là $A_1 A_2 \dots A_{18}$ nội tiếp đường tròn (O) , xét đường kính $A_1 A_{10}$ khi đó số tam giác cân có đỉnh cân là A_1 hoặc A_{10} là $2 \times 8 = 16$ (tam giác cân); Mà có tất cả là 9 đường kính do vậy số tam giác cân có các đỉnh là đỉnh của đa giác là $9 \times 16 = 144$ (tam giác cân).

Ta lại có số tam giác đều có các đỉnh là đỉnh của đa giác đều 18 đỉnh là 6.

Vậy xác suất P để chọn được một tam giác từ tập X là tam giác cân nhưng không phải tam giác đều là $P = \frac{144 - 6}{C_{18}^3} = \frac{23}{136}$.

Câu 15. (Chuyên Lào Cai - 2020) Chọn ngẫu nhiên bốn số tự nhiên khác nhau từ 70 số nguyên dương đầu tiên. Tính xác suất để bốn số được chọn lập thành một cấp số nhân có công bội nguyên.

A. $\frac{12}{916895}$.

B. $\frac{11}{916895}$.

C. $\frac{10}{916895}$.

D. $\frac{9}{916895}$.

Lời giải

Chọn B

Xét phép thử “Chọn ngẫu nhiên bốn số tự nhiên khác nhau từ 70 số nguyên dương đầu tiên”.

Khi đó $n(\Omega) = C_{70}^4 = 916895$.

Xét biến cố A : “Bốn số được chọn lập thành một cấp số nhân có công bội nguyên”.

Ta gọi bốn số đó lần lượt là a, aq, aq^2, aq^3 . Theo giả thiết $aq^3 \leq 70 \Rightarrow q^3 \leq 70 \Rightarrow q \leq 4$.

Vì bốn số khác nhau và đều dương nên ta có $0 < q \neq 1 \Rightarrow q \in \{2; 3; 4\}$.

TH1. $q = 2 \Rightarrow 8a \leq 70 \Rightarrow a \leq 8$. Khi đó có 8 bộ số thỏa mãn.

TH2. $q = 3 \Rightarrow 27a \leq 70 \Rightarrow a \leq 2$. Khi đó có 2 bộ số thỏa mãn.

TH3. $q = 4 \Rightarrow 64a \leq 70 \Rightarrow a \leq 1$. Khi đó có 1 bộ số thỏa mãn.

Vậy $n(A) = 11 \Rightarrow P(A) = \frac{11}{916895}$.

Câu 16. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020) Có 6 học sinh gồm 2 học sinh lớp A, 2 học sinh lớp B và 2 học sinh lớp C xếp ngẫu nhiên thành một hàng ngang. Tính xác suất để nhóm bất kì 3 học sinh liên kề nhau trong hàng luôn có mặt học sinh của cả 3 lớp A, B, C.

A. $\frac{1}{120}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{30}$.

D. $\frac{1}{15}$.

Lời giải

Chọn D

Xét phép thử: Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh của 3 lớp thành một hàng ngang, ta có:

$n(\Omega) = 6!$

Gọi D là biến cố: nhóm bất kì 3 học sinh liên kề nhau trong hàng luôn có mặt học sinh của cả 3 lớp A, B, C.

Ta thấy rằng để 3 học sinh liên kề nhau trong hàng luôn có mặt học sinh của cả 3 lớp A, B, C thì các học sinh của cùng 1 lớp phải được xếp vào các vị trí $(1; 4), (2; 5), (3; 6)$.

Xếp 2 học sinh lớp A vào vị trí $(1; 4)$ có 2 cách, xếp 2 học sinh lớp B vào vị trí $(2; 5)$ có 2 cách, xếp 2 học sinh lớp C vào vị trí $(3; 6)$ có 2 cách và có $3!$ cách để hoán vị vị trí của các nhóm học sinh theo lớp.

Suy ra $n(D) = 3! \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48$.

Vậy xác suất cần tìm là: $P(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{48}{720} = \frac{1}{15}$.

- Câu 17. (Chuyên Sơn La - 2020)** Có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có ba ghế. Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh gồm 3 nam 3 nữ ngồi vào hai dãy ghế đó sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh ngồi. Xác suất để mỗi học sinh nam đều ngồi đối diện với một học sinh nữ bằng

A. $\frac{1}{10}$.

B. $\frac{3}{5}$.

C. $\frac{1}{20}$.

D. $\frac{2}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Sắp 6 học sinh vào 6 cái ghế có $6!$ cách.

Suy ra $n(\Omega) = 6!$.

Đánh số thứ tự 6 cái ghế như hình bên dưới

1	2	3
6	5	4

Gọi A là biến cố: “Nam nữ ngồi đối diện”.

Học sinh nam thứ nhất có 6 cách chọn một vị trí ngồi.

Học sinh nam thứ hai có 4 cách chọn một vị trí ngồi (trừ vị trí đối diện với người nam thứ nhất).

Học sinh nam thứ ba có hai cách chọn một vị trí ngồi (trừ hai vị trí đối diện với hai nam thứ nhất và thứ hai).

Xếp ba học sinh nữ vào ba vị trí còn lại có $3!$ cách.

$$n(A) = 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3!$$

$$P(A) = \frac{6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3!}{6!} = \frac{2}{5}.$$

- Câu 18. (Sở Phú Thọ - 2020)** Cho đa giác đều (H) có 30 đỉnh. Lấy tùy ý 3 đỉnh của (H) . Xác suất để 3 đỉnh lấy được tạo thành một tam giác tù bằng

A. $\frac{39}{140}$.

B. $\frac{39}{58}$.

C. $\frac{45}{58}$.

D. $\frac{39}{280}$.

Lời giải

Chọn B

Chọn ngẫu nhiên 3 đỉnh có C_{30}^3 .

Gọi (T) là đường tròn ngoại tiếp đa giác (H) .

Giả sử chọn được một tam giác tù ABC với góc A nhọn, B tù, C nhọn.

Chọn 1 đỉnh bất kì làm đỉnh A có 30 cách. Kẻ đường kính của đường tròn (T) đi qua đỉnh A và chọn chia đường tròn (T) thành hai phần. (Bên trái và bên phải).

Để tạo thành một tam giác tù thì hai đỉnh còn lại cùng nằm bên trái hoặc cùng nằm bên phải.

Hai đỉnh cùng nằm bên trái có C_{14}^2 cách.

Hai đỉnh cùng nằm bên phải có C_{14}^2 cách.

Vì trong mỗi tam giác vai trò của đỉnh A và C như nhau nên số tam giác tù tạo thành là:

$$\frac{30(C_{14}^2 + C_{14}^2)}{2} = 2730.$$

$$\text{Xác suất cần tìm là } P = \frac{2730}{C_{30}^3} = \frac{39}{58}.$$

Câu 19. (Sở Hà Tĩnh - 2020) Một hộp chứa 10 quả cầu được đánh số theo thứ tự từ 1 đến 10, lấy ngẫu nhiên 5 quả cầu. Xác suất để tích các số ghi trên 5 quả cầu đó chia hết cho 3 bằng

- A. $\frac{5}{12}$. B. $\frac{7}{12}$. C. $\frac{1}{12}$. D. $\frac{11}{12}$.

Lời giải

Chọn D

Không gian mẫu của phép thử là $n(\Omega) = C_{10}^5 = 252$.

Gọi A là biến cố để “tích các số ghi trên 5 quả cầu đó chia hết cho 3”.

Các quả cầu có số thứ tự chia hết cho 3 gồm các quả có số thứ tự 3, 6, 9.

Do vậy để tích các số ghi trên 5 quả cầu đó chia hết cho 3 thì 5 quả đó phải chứa ít nhất một quả có số thứ tự 3, 6, 9.

Suy ra $\bar{A}$ là biến cố để “tích các số ghi trên 5 quả cầu đó không chia hết cho 3”.

Số phần tử của $\bar{A}$ là cách lấy 5 quả từ tập hợp gồm các phần tử $\{1; 2; 4; 5; 7; 8; 10\}$.

$$\text{Vậy ta có } n(\bar{A}) = C_7^5 = 21 \Rightarrow P(\bar{A}) = \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = \frac{21}{252} = \frac{1}{12}.$$

Xác suất để tích các số ghi trên 5 quả cầu đó chia hết cho 3 là

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}.$$

Câu 20. (Sở Bắc Ninh - 2020) Gọi A là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 8 chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc A . Xác suất để số tự nhiên được chọn chia hết cho 25 bằng

- A. $\frac{43}{324}$. B. $\frac{1}{27}$. C. $\frac{11}{324}$. D. $\frac{17}{81}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $n(\Omega) = 9 \cdot A_9^7$.

Gọi a là số tự nhiên thuộc tập A .

Ta có $a = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8} = a_1 \cdot 10^7 + a_2 \cdot 10^6 + a_3 \cdot 10^5 + a_4 \cdot 10^4 + a_5 \cdot 10^3 + a_6 \cdot 10^2 + a_7 \cdot 10 + a_8$.

Do đó, $a : 25 \Leftrightarrow (10a_7 + a_8) : 25$ trong đó $a_8 = 5$ hoặc $a_8 = 0$. Suy ra $\overline{a_7 a_8}$ là một trong các số sau: 50; 25; 75.

Th1: Nếu $\overline{a_7 a_8} = 50$ thì có A_8^6 cách chọn các chữ số còn lại.

Th2: Nếu $\overline{a_7 a_8} = 25$ hoặc $\overline{a_7 a_8} = 75$ thì có $2 \cdot A_7^5$ cách chọn các chữ số còn lại.

$$\text{Vậy xác suất cần tìm là } \frac{A_8^6 + 2 \cdot A_7^5}{9 \cdot A_9^7} = \frac{11}{324}.$$

Câu 21. (Sở Yên Bái - 2020) Gọi S là tập tất cả các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S . Tính xác suất để số được chọn là một số chia hết cho 6.

- A. $\frac{13}{60}$. B. $\frac{2}{9}$. C. $\frac{17}{45}$. D. $\frac{11}{45}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau thỏa mãn bài toán có dạng $\overline{abc}$ ($a \neq 0$)

Theo bài ra: Vì $\overline{abc}$ chia hết cho 6 nên $\overline{abc}$ phải là số chẵn.

Như vậy, c có 4 cách chọn.

Trường hợp 1: $c = 0$

Khi đó, $(a;b)$ là hoán vị của bộ số $(1;2), (1;5), (2;4), (3;6), (4;5)$

Mỗi trường hợp có 2 cách sắp xếp

Như vậy có $5.2 = 10$ số tự nhiên thỏa mãn bài toán trong trường hợp 1.

Trường hợp 2: $c = 2$

Khi đó, $(a;b)$ là hoán vị của bộ số $(0;1), (0;4), (1;3), (1;6), (3;4), (4;6)$

Mỗi trường hợp có chữ số 0 có 1 cách sắp xếp

Mỗi trường hợp không có chữ số 0 có 2 cách sắp xếp

Như vậy, có $2 + 4.2 = 10$ số tự nhiên thỏa mãn bài toán trong trường hợp 2.

Trường hợp 3: $c = 4$

Khi đó, $(a;b)$ là hoán vị của bộ số $(0;2), (0;5), (2;3), (2;6), (3;5), (5;6)$

Làm tương tự trường hợp 2, có $2 + 4.2 = 10$ số tự nhiên thỏa mãn bài toán trong trường hợp 3.

Trường hợp 4: $c = 6$

Khi đó, $(a;b)$ là hoán vị của bộ số $(0;3), (1;2), (1;5), (2;4), (4;5)$

Làm tương tự trường hợp 2, trường hợp này có $1 + 4.2 = 9$ số tự nhiên thỏa mãn bài toán.

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = 6.6.5 = 180$

Xác suất để chọn được số chia hết cho 6:

$$P = \frac{10+10+10+9}{180} = \frac{39}{180} = \frac{13}{60}$$

Câu 22. (Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020) Trường trung học phổ thông Bỉm Sơn có 23 lớp, trong đó khối 10 có 8 lớp, khối 11 có 8 lớp, khối 12 có 7 lớp, mỗi lớp có một chi đoàn, mỗi chi đoàn có một em làm bí thư. Các em bí thư đều giỏi và rất năng động nên Ban chấp hành Đoàn trường chọn ngẫu nhiên 9 em bí thư đi thi cán bộ đoàn giỏi cấp thị xã. Tính xác suất để 9 em được chọn có đủ cả ba khối?

A. $\frac{7345}{7429}$.

B. $\frac{7012}{7429}$.

C. $\frac{7234}{7429}$.

D. $\frac{7123}{7429}$.

Lời giải

Chọn C

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) C_{23}^9 = 817190$.

Gọi X là biến cố “9 em được chọn có đủ cả ba khối”

$\Rightarrow \bar{X}$ “9 em được chọn không có đủ cả ba khối”

Vì mỗi khối số bí thư đều nhỏ hơn 9 nên có các khả năng sau:

TH1: Chỉ có học sinh ở khối 10 và 11. Có C_{16}^9 cách.

TH2: Chỉ có học sinh ở khối 11 và 12. Có C_{15}^9 cách.

TH3: Chỉ có học sinh ở khối 10 và 12. Có C_{15}^9 cách.

Số phần tử của biến cố $\bar{X}$ là: $n(\bar{X}) = C_{16}^9 + C_{15}^9 + C_{15}^9 = 21450$

Xác suất của biến cố $\bar{X}$ là: $P(\bar{X}) = \frac{21450}{817190} = \frac{195}{7429}$.

Xác suất của biến cố X là: $P(X) = 1 - P(\bar{X}) = \frac{7234}{7429}$.

Câu 23. (Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020) Trước kì thi học sinh giỏi, nhà trường tổ chức buổi gặp mặt 10 em học sinh trong đội tuyển. Biết các em đó có số thứ tự trong danh sách lập thành cấp số cộng. Các em ngồi ngẫu nhiên vào hai dãy bàn đối diện nhau, mỗi dãy có 5 ghế và mỗi ghế chỉ được ngồi một học sinh. Tính xác suất để tổng các số thứ tự của hai em ngồi đối diện nhau là bằng nhau.

A. $\frac{1}{954}$.

B. $\frac{1}{252}$.

C. $\frac{1}{945}$.

D. $\frac{1}{126}$.

Lời giải

Chọn C

Số phần tử của không gian mẫu là số cách sắp xếp 10 học sinh vào hai dãy bàn đối diện
 $n(\Omega) = 10!$.

Gọi A là biến cố “tổng các số thứ tự của hai em ngồi đối diện là bằng nhau”.

Đánh số thứ tự của các em từ 1 đến 10.

Để tổng các số thứ tự của hai em ngồi đối diện nhau là bằng nhau phải chia thành 5 cặp đối diện

$(1;10), (2;9), (3;8), (4;7), (5;6)$.

Ta xếp dãy 1, dãy 2 chỉ có một cách chọn.

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
B_1	B_2	B_3	B_4	B_5

Vị trí A_1 có 10 cách chọn 1 học sinh, B_1 có 1 cách chọn.

Vị trí A_2 có 8 cách chọn 1 học sinh, B_2 có 1 cách chọn.

Vị trí A_3 có 6 cách chọn 1 học sinh, B_3 có 1 cách chọn.

Vị trí A_4 có 4 cách chọn 1 học sinh, B_4 có 1 cách chọn.

Vị trí A_5 có 2 cách chọn 1 học sinh, B_5 có 1 cách chọn.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $n(A) = 10.8.6.4.2$

Vậy xác suất để biến cố A xảy ra là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{10.8.6.4.2}{10!} = \frac{1}{945}$.

Câu 24. (Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020) Người ta muốn chia tập hợp 16 học sinh gồm 3 học sinh lớp 12A, 5 học sinh lớp 12B và 8 học sinh lớp 12C thành hai nhóm, mỗi nhóm có 8 học sinh. Xác suất sao cho ở mỗi nhóm đều có học sinh lớp 12A và mỗi nhóm có ít nhất hai học sinh lớp 12B là

A. $\frac{42}{143}$.

B. $\frac{84}{143}$.

C. $\frac{356}{1287}$.

D. $\frac{56}{143}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi A là biến cố mỗi nhóm đều có học sinh lớp 12A và mỗi nhóm có ít nhất hai học sinh lớp 12B.

Chọn ra 8 học sinh từ 16 học sinh được 1 nhóm, 8 học sinh còn lại tạo thành nhóm thứ 2. Vì ở

đây không phân biệt thứ tự các nhóm nên ta có $n(\Omega) = \frac{C_{16}^8}{2!}$.

Mỗi nhóm đều có học sinh lớp 12A và mỗi nhóm có ít nhất hai học sinh lớp 12B nên 1 nhóm có 1 hoặc 2 học sinh lớp 12A và có 2 hoặc 3 học sinh lớp 12B. Do đó

$$n(A) = \frac{C_3^1 \cdot C_5^2 \cdot C_8^5 + C_3^2 \cdot C_5^3 \cdot C_8^4}{2!}.$$

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{84}{143}.$$

Câu 25. (Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020) Một hộp đựng 15 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 15. Chọn ngẫu nhiên 6 tấm thẻ trong hộp. Xác suất để tổng các số ghi trên 6 tấm thẻ được chọn là một số lẻ bằng.

A. $\frac{71}{143}$.

B. $\frac{56}{715}$.

C. $\frac{72}{143}$.

D. $\frac{56}{143}$.

Lời giải

Chọn C

Số phần tử của không gian mẫu của phép thử: $n(\Omega) = C_{15}^6 = 5005$

Chia 15 tấm thẻ thành 2 tập hợp nhỏ gồm:

+ Tập các tấm ghi số lẻ: $\{1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15\} \rightarrow 8$ số

+ Tập các tấm ghi số chẵn: $\{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14\} \rightarrow 7$ số

Các trường hợp thuận lợi cho biến cố:

TH1. 1 tấm số lẻ: 5 tấm số chẵn

- Số phần tử: $C_8^1 \cdot C_7^5 = 168$

TH2. 3 tấm số lẻ: 3 tấm số chẵn

- Số phần tử: $C_8^3 \cdot C_7^3 = 1960$

TH3. 5 tấm số lẻ: 1 tấm số chẵn

- Số phần tử: $C_8^5 \cdot C_7^1 = 392$

Tổng số phần tử thuận lợi của biến cố là: $168 + 1960 + 392 = 2520$

Vậy xác suất của biến cố là: $P = \frac{2520}{5005} = \frac{72}{143}$.

Câu 26. (Kim Liên - Hà Nội - 2020) Một số điện thoại có bảy chữ số, trong đó chữ số đầu tiên là 8. Số điện thoại này được gọi là

may mắn nếu bốn chữ số đầu là chữ số chẵn phân biệt và ba chữ số còn lại là lẻ, đồng thời hai chữ số 0 và 9 không đứng liền nhau. Tính xác suất để một người khi lắp điện thoại ngẫu nhiên được số điện thoại may mắn.

A. $P(A) = \frac{5100}{10^7}$. **B.** $P(A) = \frac{2850}{10^7}$. **C.** $P(A) = \frac{5100}{10^6}$. **D.** $P(A) = \frac{2850}{10^6}$.

Lời giải

Chọn D

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = 10^6$.

Gọi A là biến cố: “Số điện thoại may mắn”. Có 2 trường hợp xảy ra:

TH1: Số điện thoại may mắn dạng: $8a_2a_30a_5a_6a_7$

Chọn a_2, a_3 từ $\{2; 4; 6\}$ có $A_3^2 = 6$ cách.

Chọn a_5 từ $\{1; 3; 5; 7\}$ có 4 cách.

Chọn a_6, a_7 từ $\{1; 3; 5; 7; 9\}$ có $5 \cdot 5 = 25$ cách.

Các số may mắn $6 \cdot 4 \cdot 125 = 600$ số.

TH2: Số điện thoại may mắn dạng: $8a_2a_3a_4a_5a_6a_7$ trong đó $a_4 \neq 0$.

Chọn a_4 từ $\{2; 4; 6\}$ có 3 cách.

Chọn a_2, a_3 từ $\{0; 2; 4; 6\}$ có $A_3^2 = 6$ cách (do phải khác a_4).

Chọn a_5, a_6, a_7 từ có $5^3 = 125$ cách.

Các số may mắn $3 \cdot 6 \cdot 125 = 2250$ số.

$n(A) = 600 + 2250 = 2850$.

$$P(A) = \frac{2850}{10^6}.$$

Câu 27. (Lê Lai - Thanh Hóa - 2020) Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có ít nhất 3 chữ số, các chữ số đôi một khác nhau được lập thành từ các chữ số thuộc tập A . Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S , tính xác suất để số được chọn có tổng các chữ số bằng 10.

A. $\frac{1}{30}$. **B.** $\frac{3}{25}$. **C.** $\frac{22}{25}$. **D.** $\frac{2}{25}$.

Lời giải

Chọn B

Vì S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có ít nhất 3 chữ số, các chữ số đôi một khác nhau được lập thành từ các chữ số thuộc tập A nên ta tính số phần tử thuộc tập S như sau:

✗ Số các số thuộc S có 3 chữ số là A_5^3 .

✗ Số các số thuộc S có 4 chữ số là A_5^4 .

✗ Số các số thuộc S có 5 chữ số là A_5^5 .

Suy ra số phần tử của tập S là $A_5^3 + A_5^4 + A_5^5 = 300$.

Số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = C_{300}^1 = 300$

Gọi X là biến cố "Số được chọn có tổng các chữ số bằng 10". Các tập con của A có tổng số phần tử bằng 10 là $A_1 = \{1; 2; 3; 4\}$, $A_2 = \{2; 3; 5\}$, $A_3 = \{1; 4; 5\}$.

• Từ A_1 lập được các số thuộc S là $4!$.

• Từ A_2 lập được các số thuộc S là $3!$.

• Từ A_3 lập được các số thuộc S là $3!$.

Suy ra số phần tử của biến cố X là $n_X = 4! + 3! + 3! = 36$.

Vậy xác suất cần tính $P(X) = \frac{n_X}{n_\Omega} = \frac{36}{300} = \frac{3}{25}$.

Câu 28. (**Liên trường Nghệ An - 2020**) Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau lập thành từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S . Tính xác suất để số được chọn có đúng 2 chữ số chẵn.

A. $\frac{24}{35}$.

B. $\frac{144}{245}$.

C. $\frac{72}{245}$.

D. $\frac{18}{35}$.

Lời giải**Chọn D**

Có $7.A_7^3$ số có 4 chữ số khác nhau được lập từ tập S .

Xét các số có đúng hai chữ số chẵn, hai chữ số lẻ.

+ **TH1:** Số đó có chữ số 0

Có C_3^1 cách chọn thêm chữ số chẵn khác và C_4^2 cách chọn 2 chữ số lẻ; có $3.3!$ cách sắp xếp 4 chữ số được chọn, suy ra có $C_3^1.C_4^2.3.3! = 324$ số thỏa mãn.

+ **TH2:** Số đó không có chữ số 0

Có C_3^2 cách chọn 2 chữ số chẵn, C_4^2 cách chọn 2 chữ số lẻ; có $4!$ cách sắp xếp 4 chữ số đã chọn, suy ra có $C_3^2.C_4^2.4! = 432$ số thỏa mãn.

Vậy có $324 + 432 = 756$ số có đúng hai chữ số chẵn thỏa mãn.

Xác suất cần tìm là $P = \frac{756}{7.A_7^3} = \frac{18}{35}$.

Câu 29. (**Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020**) Cho tập $S = \{1; 2; 3; \dots; 19; 20\}$ gồm 20 số tự nhiên từ 1 đến 20. Lấy ngẫu nhiên ba số thuộc S . Xác suất để ba số lấy được lập thành một cấp số cộng là

A. $\frac{7}{38}$.

B. $\frac{5}{38}$.

C. $\frac{3}{38}$.

D. $\frac{1}{114}$.

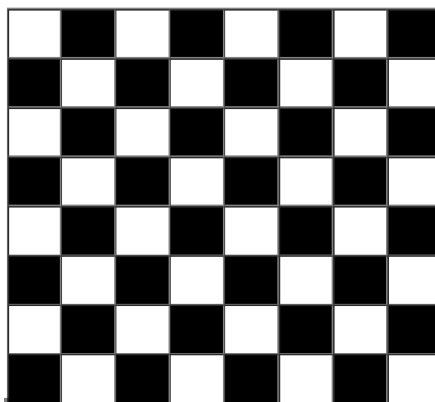
Lời giải**Chọn C**

Số phần tử không gian mẫu $n(\Omega) = C_{20}^3$.

Gọi a, b, c là ba số lấy ra theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng, nên $b = \frac{a+c}{2} \in \mathbb{N}$. Do đó a và c cùng chẵn hoặc cùng lẻ và hơn kém nhau ít nhất 2 đơn vị.

Số cách chọn bộ $(a; b; c)$ theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng bằng số cặp $(a; c)$ cùng chẵn hoặc cùng lẻ, số cách chọn là $2.C_{10}^2$. Vậy xác suất cần tính là $P = \frac{2C_{10}^2}{C_{20}^3} = \frac{3}{38}$.

Câu 30. (Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020) Một bàn cờ vua gồm 8×8 ô vuông, mỗi ô có cạnh bằng 1 đơn vị. Một ô vừa là hình vuông hay hình chữ nhật, hai ô là hình chữ nhật, ... Chọn ngẫu nhiên một hình chữ nhật trên bàn cờ. Xác suất để hình được chọn là một hình vuông có cạnh lớn hơn 4 đơn vị bằng



A. $\frac{5}{216}$.

B. $\frac{17}{108}$.

C. $\frac{51}{196}$.

D. $\frac{29}{216}$.

Lời giải

Chọn A

Bàn cờ 8×8 cần 9 đoạn thẳng nằm ngang và 9 đoạn thẳng dọc. Ta coi bàn cờ vua được xác định bởi các đường thẳng $x = 0, x = 1, \dots, x = 8$ và $y = 0, y = 1, \dots, y = 8$.

Mỗi hình chữ nhật được tạo thành từ hai đường thẳng x và hai đường thẳng y nên có $C_8^2.C_8^2$ hình chữ nhật hay không gian mẫu là $n(\Omega) = C_9^2.C_9^2 = 1296$.

Gọi A là biến cố hình được chọn là hình vuông có cạnh a lớn hơn 4.

Trường hợp 1: $a = 5$. Khi đó mỗi ô được tạo thành do 2 đường thẳng x cách nhau 5 đơn vị và hai đường thẳng y cách nhau 5 đơn vị có $4.4 = 16$ cách chọn.

Trường hợp 2: $a = 6$. Khi đó mỗi ô được tạo thành do 2 đường thẳng x cách nhau 6 đơn vị và hai đường thẳng y cách nhau 6 đơn vị có $3.3 = 9$ cách chọn.

Trường hợp 3: $a = 7$. Khi đó mỗi ô được tạo thành do 2 đường thẳng x cách nhau 7 đơn vị và hai đường thẳng y cách nhau 7 đơn vị có $2.2 = 4$ cách chọn.

Trường hợp 3: $a = 8$. Khi đó mỗi ô được tạo thành do 2 đường thẳng x cách nhau 8 đơn vị và hai đường thẳng y cách nhau 8 đơn vị có $1.1 = 1$ cách chọn.

Suy ra $n(A) = 16 + 9 + 4 + 1 = 30$.

Xác suất để hình được chọn là một hình vuông có cạnh lớn hơn 4 đơn vị là

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{30}{1296} = \frac{5}{216}.$$

Câu 31. (Tiên Du - Bắc Ninh - 2020) Gọi M là tập hợp các số tự nhiên có ba chữ số lập được từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 số từ tập M . Xác suất để cả 2 số lấy được đều có chữ số hàng chục nhỏ hơn các chữ số hàng trăm và hàng đơn vị là

A. $\frac{8}{21}$.

B. $\frac{5}{16}$.

C. $\frac{296}{2051}$.

D. $\frac{695}{7152}$.

Lời giải

Chọn D

Số tự nhiên có ba chữ số có dạng $\overline{abc}$.

Số các số tự nhiên có ba chữ số được lập từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 là $7.8.8 = 448$ số.

Số phần tử không gian mẫu $|\Omega| = C_{448}^2$.

Gọi A là biến cố: “ 2 số lấy được đều có chữ số hàng chục nhỏ hơn các chữ số hàng trăm và hàng đơn vị”.

Trường hợp $b = 0$ có $7.7 = 49$ số.

Trường hợp $b = 1$ có $6.6 = 36$ số.

Trường hợp $b = 2$ có $5.5 = 25$ số.

Trường hợp $b = 3$ có $4.4 = 16$ số.

Trường hợp $b = 4$ có $3.3 = 9$ số.

Trường hợp $b = 5$ có $2.2 = 4$ số.

Trường hợp $b = 6$ có $1.1 = 1$ số.

Vậy có $49 + 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 140$ số thỏa mãn chữ số hàng chục nhỏ hơn chữ số hàng đơn vị và hàng trăm.

$$|\Omega_A| = C_{140}^2.$$

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{695}{7152}.$$

Câu 32. (Hải Hậu - Nam Định - 2020) Một hộp có chứa 5 viên bi đỏ, 3 viên bi xanh và n viên bi vàng (các viên bi kích thước như nhau, n là số nguyên dương). Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp. Biết xác suất để trong ba viên bi lấy được có đủ 3 màu là $\frac{45}{182}$. Tính xác suất P để trong 3 viên bi lấy được có nhiều nhất hai viên bi đỏ.

A. $P = \frac{135}{364}$.

B. $P = \frac{177}{182}$.

C. $P = \frac{45}{182}$.

D. $P = \frac{31}{56}$.

Lời giải

Chọn B

Số cách lấy 3 viên bi bất kì từ hộp là: C_{8+n}^3 .

Số cách lấy 3 viên đủ 3 màu là: $C_5^1 \cdot C_3^1 \cdot C_n^1 = 15n$.

$$\text{Vì xác suất để trong ba viên bi lấy được có đủ 3 màu là } \frac{45}{182} \Rightarrow \frac{15n}{C_{8+n}^3} = \frac{45}{182} \Rightarrow n = 6.$$

$\Rightarrow$ có 5 viên bi đỏ, 3 viên bi xanh và 6 viên bi vàng.

Số cách lấy 3 bi bất kì là C_{14}^3 .

Trường hợp 1: 3 bi lấy ra không có bi đỏ, khi đó số cách lấy là C_9^3 .

Trường hợp 2: 3 bi lấy ra có 1 bi đỏ, khi đó số cách lấy là $C_5^1 \cdot C_9^2$.

Trường hợp 2: 3 bi lấy ra có 2 bi đỏ, khi đó số cách lấy là $C_5^2 \cdot C_9^1$.

$$\text{Vậy xác suất để trong 3 viên bi lấy được có nhiều nhất hai viên bi đỏ là } P = \frac{177}{182}$$

Câu 33. (Kim Thành - Hải Dương - 2020) Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 9 chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số từ S . Tính xác suất để được chọn có đúng 4 chữ số lẻ và chữ số 0 đứng giữa hai chữ số lẻ. (Các chữ số liền trước và liền sau của chữ số 0 là các chữ số lẻ).

A. $\frac{5}{648}$.

B. $\frac{5}{27}$.

C. $\frac{5}{54}$.

D. $\frac{20}{189}$.

Lời giải

Chọn C

Xem nhóm 3 chữ số gồm số 0 ở giữa 2 chữ số lẻ là một

Chọn 2 chữ số lẻ và sắp xếp có A_5^2 cách.

Chọn thêm 2 chữ số lẻ có C_3^2 cách.

Chọn 4 chữ số chẵn có C_4^4 cách.

Sắp xếp có $7!$ cách.

Như vậy có $A_5^2 \cdot C_3^2 \cdot C_4^4 \cdot 7! = 302400$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Xác suất cần tìm $\frac{302400}{9 \cdot A_9^8} = \frac{5}{54}$.

Câu 34. (Trường VINSCHOOL - 2020) Có 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ xếp thành hàng ngang. Xác suất để có đúng hai bạn nữ đứng cạnh nhau bằng

A. $\frac{1}{24}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{14}{17}$.

D. $\frac{7}{13}$.

Lời giải

Chọn B

Chọn 2 trong 4 bạn nữ và xếp vào 2 vị trí cạnh nhau có A_4^2 (cách).

Hai bạn nữ được chọn và đã được xếp chỗ đứng cạnh nhau kết hợp với 2 bạn nữ còn lại xem là A, B, C .

Lấy 6 bạn nam làm vách ngăn, số cách tạo vách ngăn là $6!$ (cách).

Có 6 vách ngăn sẽ có 7 khoảng trống, sắp xếp A, B, C vào 7 khoảng trống có A_7^3 (cách).

Từ đó suy ra số cách xếp 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ thành hàng ngang mà có đúng hai bạn nữ đứng cạnh nhau là: $A_4^2 \cdot 6! \cdot A_7^3$

Số cách xếp 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ xếp thành hàng ngang tùy ý là: $10!$.

Vậy xác suất để xếp 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ thành hàng ngang mà có đúng hai bạn nữ đứng cạnh nhau là: $\frac{A_4^2 \cdot 6! \cdot A_7^3}{10!} = \frac{1}{2}$.

Câu 35. (Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020) Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số mà các chữ số đều khác 0. Lấy ngẫu nhiên một số từ S . Xác suất để lấy được số chỉ có mặt 3 chữ số gần với số nào nhất trong các số sau?

A. 0,34.

B. 0,36.

C. 0,21.

D. 0,13.

Lời giải

Chọn C

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 9^5$.

Gọi A là biến cố số được chọn chỉ có mặt 3 chữ số:

Chọn 3 chữ số khác nhau ta có C_9^3 cách

Trường hợp 1: Có 1 chữ số bị lặp 3 lần, 2 chữ số khác xuất hiện 1 lần $C_3^1 \cdot \frac{5!}{3!}$ cách

Trường hợp 2: Có 2 chữ số xuất hiện 2 lần, 1 chữ số xuất hiện 1 lần $C_3^2 \cdot \frac{5!}{2!2!}$ cách

$$\Rightarrow n(A) = C_9^3 \left[C_3^1 \frac{5!}{3!} + C_3^2 \frac{5!}{2!2!} \right] = 12600$$

$$\Rightarrow P(A) \approx 0,213.$$

Câu 36. (Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020) Một xưởng sản xuất thực phẩm gồm 4 kỹ sư chế biến thực phẩm, 3 kỹ thuật viên và 13 công nhân. Để đảm bảo sản xuất thực phẩm chống dịch Covid 19, xưởng cần chia thành 3 ca sản xuất theo thời gian liên tiếp nhau sao cho ca I có 6 người và 2 ca

còn lại mỗi ca có 7 người. Tính xác suất sao cho mỗi ca có 1 kĩ thuật viên, ít nhất một kĩ sư chế biến thực phẩm.

A. $\frac{440}{3320}$.

B. $\frac{441}{3230}$.

C. $\frac{41}{230}$.

D. $\frac{401}{3320}$.

Lời giải

Chọn B

Ca I có 6 người, ca II có 6 người và ca III có 6 người nên số phần tử của không gian mẫu là:

$$n(\Omega) = C_{20}^6 \cdot C_{14}^7 \cdot C_7^7 = 133024320$$

Gọi biến cố X “mỗi ca có 1 kĩ thuật viên, ít nhất một kĩ sư chế biến thực phẩm”.

Để mỗi ca có 1 kĩ thuật viên, ít nhất một kĩ sư chế biến thực phẩm, ta có các trường hợp:

TH1: Ca I có 1 kĩ thuật viên, 2 kĩ sư và 3 công nhân.

Ca II có 1 kĩ thuật viên, 1 kĩ sư và 5 công nhân.

Ca III có 1 kĩ thuật viên, 1 kĩ sư và 5 công nhân.

Số cách chọn cho trường hợp này là: $(C_3^1 \cdot C_4^2 \cdot C_{13}^3) \cdot (C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot C_{10}^5) \cdot (C_1^1 \cdot C_1^1 \cdot C_5^5) = 5189184$.

TH2: Ca I có 1 kĩ thuật viên, 1 kĩ sư và 4 công nhân.

Ca II có 1 kĩ thuật viên, 2 kĩ sư và 4 công nhân.

Ca III có 1 kĩ thuật viên, 1 kĩ sư và 5 công nhân.

Số cách chọn cho trường hợp này là: $(C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_{13}^4) \cdot (C_2^1 \cdot C_3^2 \cdot C_9^4) \cdot (C_1^1 \cdot C_1^1 \cdot C_5^5) = 6486480$.

TH2: Ca I có 1 kĩ thuật viên, 1 kĩ sư và 4 công nhân.

Ca II có 1 kĩ thuật viên, 1 kĩ sư và 5 công nhân.

Ca III có 1 kĩ thuật viên, 2 kĩ sư và 4 công nhân.

Số cách chọn cho trường hợp này là: $(C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_{13}^4) \cdot (C_2^1 \cdot C_3^1 \cdot C_9^5) \cdot (C_1^1 \cdot C_2^2 \cdot C_4^4) = 6486480$.

Số phần tử của biến cố X là: $n(X) = 5189184 + 6486480 + 6486480 = 18162144$.

Xác suất của biến cố X là: $P(X) = \frac{18162144}{133024320} = \frac{441}{3230}$.

Câu 37. (Trần Phú - Quảng Ninh - 2020) Có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có năm ghế. Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh, gồm 5 nam và 5 nữ ngồi vào hai dãy ghế sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh ngồi. Xác suất để mỗi học sinh nam đều ngồi đối diện với một học sinh nữ bằng

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{30}$.

C. $\frac{8}{63}$.

D. $\frac{8}{37}$.

Lời giải

Chọn C

Số cách xếp 10 học sinh vào 10 ghế là $10!$.

Ta có $n(\Omega) = 10!$.

Để xếp chỗ ngồi cho 10 học sinh mà mỗi học sinh nam đều ngồi đối diện với một học sinh nữ ta làm như sau:

Xếp chỗ ngồi cho bạn nam thứ nhất có 10 cách xếp.

Xếp chỗ ngồi cho bạn nam thứ hai có 8 cách xếp vì trừ đi ghế ngồi đối diện với bạn nam đầu tiên.

Tương tự:

Xếp chỗ ngồi cho bạn nam thứ ba có 6 cách xếp.

Xếp chỗ ngồi cho bạn nam thứ tư có 4 cách xếp.

Xếp chỗ ngồi cho bạn nam thứ năm có 2 cách xếp.

Xếp chỗ ngồi cho 5 bạn nữ vào 5 ghế còn lại có $5!$.

Theo quy tắc nhân, ta có $n(A) = 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5! = 460800$.

Do vậy xác suất để mỗi học sinh nam đều ngồi đối diện với một học sinh nữ là:

$$p = \frac{460800}{10!} = \frac{8}{63}.$$

Câu 38. (Đại Học Hà Tĩnh - 2020) Cho đa giác đều 12 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm A . Chọn ngẫu nhiên 3 đỉnh của đa giác đó. Tính xác suất để 3 đỉnh được chọn tạo thành một tam giác không có cạnh nào là cạnh của đa giác đã cho.

A. $\frac{2}{5}$.

B. $\frac{31}{55}$.

C. $\frac{28}{55}$.

D. $\frac{52}{55}$.

Lời giải

Chọn C

Số tam giác được tạo thành là C_{12}^3 .

Số tam giác có chung 1 cạnh với đa giác là $12C_8^1$.

Số tam giác có chung 2 cạnh với đa giác là 12.

Vậy xác suất để được tam giác không có chung cạnh với đa giác là $1 - \frac{12C_8^2 + 12}{C_{12}^3} = \frac{28}{55}$.

Câu 39. (ĐHQG Hà Nội - 2020) Có 12 học sinh gồm 6 nam và 6 nữ ngồi vào hai hàng ghế đối diện nhau tùy ý. Xác suất để mỗi một em nam ngồi đối diện với một em nữ là?

A. $\frac{1}{924}$.

B. $\frac{4}{165}$.

C. $\frac{8}{165}$.

D. $\frac{16}{231}$.

Lời giải

Chọn D

Số cách xếp 12 học sinh vào 12 chỗ là $12! \Rightarrow n(\Omega) = 12!$

Gọi A là biến cố “Xếp mỗi một em nam ngồi đối diện với một em nữ”.

1

3

5

--

--

--

2

4

--

--

--

--

Ta có vị trí 1 có 12 cách chọn; vị trí 2 có 6 cách chọn; vị trí 3 có 10 cách chọn; vị trí 4 có 5 cách chọn.

Nên $n(A) = 12 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{16}{231}$

Câu 40. (Sở Hưng Yên - 2020) Có 50 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 50. Rút ngẫu nhiên 3 thẻ. Xác suất để tổng các số ghi trên thẻ chia hết cho 3 bằng

A. $\frac{8}{89}$.

B. $\frac{11}{171}$.

C. $\frac{769}{2450}$.

D. $\frac{409}{1225}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử rút ngẫu nhiên 3 thẻ.

Ta có: $n(\Omega) = C_{50}^3 = 19600$.

Gọi A là biến cố “tổng các số ghi trên thẻ chia hết cho 3”.

50 thẻ được chia thành 3 loại gồm:

+ 16 thẻ có số chia hết cho 3 là $\{3; 6; \dots; 48\}$.

+ 17 thẻ có số chia cho 3 dư 1 là $\{1; 4; 7; \dots; 49\}$.

+ 17 thẻ có số chia cho 3 dư 2 là $\{2; 5; 8; \dots; 50\}$.

Ta xét các trường hợp sau:

TH1: 3 thẻ được chọn cùng một loại có $(C_{16}^3 + C_{17}^3 + C_{17}^3)$ cách.

TH2: 3 thẻ được chọn mỗi loại 1 thẻ có $C_{16}^1 \cdot C_{17}^1 \cdot C_{17}^1$ cách.

Do đó $n(A) = (C_{16}^3 + C_{17}^3 + C_{17}^3) + C_{16}^1 \cdot C_{17}^1 \cdot C_{17}^1 = 6544$.

Xác suất để tổng các số ghi trên thẻ chia hết cho 3 bằng: $P(A) = \frac{n(\Omega)}{n(A)} = \frac{6544}{19600} = \frac{409}{1225}$.

PHẦN 2. MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÁC

Câu 41. (Chuyên Bắc Ninh - 2020) Cho $x > 0, x \neq 1$. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển Niu-tơn của

$$P = \left(\frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1} - \frac{x-1}{x - \sqrt{x}} \right)^{20}.$$

A. 38760.

B. 167960.

C. 1600.

D. 125970.

Lời giải

Chọn D

+) Ta có:

$$\frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1} - \frac{x-1}{x - \sqrt{x}} = \frac{(\sqrt[3]{x} + 1)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1} - \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} = (\sqrt[3]{x} + 1) - \frac{(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}} = \sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$+) P = \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{20} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k \cdot (\sqrt[3]{x})^{20-k} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^k.$$

$$= \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k \cdot (-1)^k \cdot x^{\frac{20-k}{3}} \cdot x^{-\frac{k}{2}} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k \cdot (-1)^k \cdot x^{\frac{40-5k}{6}}$$

+) Số hạng không chứa x trong khai triển ứng với $\frac{40-5k}{6} = 0 \Leftrightarrow k = 8$.

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là $C_{20}^8 \cdot (-1)^8 = 125970$.

Câu 42. (Sở Phú Thọ - 2020) Giả sử n là một số nguyên dương thỏa mãn $3C_n^2 - C_n^3 = 24$. Hệ số của số hạng chứa x^{12} trong khai triển $\left(x^2 \sqrt{x} - \frac{2}{x} \right)^n$ bằng

A. $672x^{12}$.

B. $-672x^{12}$.

C. 672.

D. -672.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định: $n \in \mathbb{N}^*; n \geq 3$.

Khi đó:

$$3C_n^2 - C_n^3 = 24 \Leftrightarrow \frac{3n!}{(n-2)!2!} - \frac{n!}{(n-3)!3!} = 24 \Leftrightarrow \frac{3n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 24$$

$$\Leftrightarrow n^3 - 12n^2 + 11n + 144 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 9 \\ n = \frac{3 \pm \sqrt{73}}{2} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện xác định suy ra $n = 9$.

$$\text{Ta có: } \left(x^2 \sqrt{x} - \frac{2}{x} \right)^9 = \sum_{k=0}^9 C_9^k \cdot (x^2 \sqrt{x})^{9-k} \cdot \left(-\frac{2}{x} \right)^k = \sum_{k=0}^9 C_9^k \cdot (-2)^k \cdot x^{\frac{45-7k}{2}}.$$

Số hạng chứa x^{12} trong khai triển ứng với k thỏa mãn: $\frac{45-7k}{2} = 12 \Leftrightarrow k = 3$.

Vậy hệ số của số hạng chứa x^{12} là $C_9^3 \cdot (-2)^3 = -672$.

- Câu 43. (Sở Bình Phước - 2020)** Trên một cái bảng đã ghi sẵn các số tự nhiên từ 1 đến 2020. Ta thực hiện công việc như sau: xóa hai số bất kì trên bảng rồi ghi lại một số tự nhiên bằng tổng của hai số vừa xóa, cứ thực hiện công việc như vậy cho đến khi trên bảng chỉ còn một số. Số cuối cùng còn lại trên bảng là

A. 4040. B. 2041210. C. 4082420. D. 2020.

Lời giải

Chọn B

Với cách thực hiện công việc như vậy, số cuối cùng còn lại trên bảng sẽ là tổng của tất cả các số tự nhiên ban đầu đã ghi, tức là tổng các số tự nhiên từ 1 đến 2020.

Dễ dàng nhận thấy đây là tổng 2020 số hạng đầu tiên của cấp số cộng có số hạng đầu bằng 1 và công sai bằng 1.

Vậy, số cuối cùng còn lại trên bảng là: $\frac{2020(1+2020)}{2} = 2041210$.

- Câu 44. (Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020)** Xác định n biết rằng hệ số của x^n trong khai triển $(1+x+2x^2+\dots+nx^n)^2$ bằng $6n$.

A. $n=8$. B. $n=6$. C. $n=10$. D. $n=5$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$(1+x+2x^2+\dots+nx^n)^2 = (1+x+2x^2+\dots+(n-1)x^{n-1}+nx^n)(nx^n+(n-1)x^{n-1}+\dots+x^2+x+1)$$

Suy ra hệ số của x^n là:

$$\begin{aligned} & n+1.(n-1)+2.(n-2)+\dots+(n-2).2+(n-1).1+n \\ &= n+1.(n-1)+2.(n-2)+\dots+(n-2).[n-(n-2)]+(n-1).[n-(n-1)]+n \\ &= 2n+1.n+2.n+\dots+(n-1).n+n.n-\left(1^2+2^2+\dots+(n-1)^2+n^2\right) \\ &= 2n+n(1+2+\dots+n)-\left(1^2+2^2+\dots+(n-1)^2+n^2\right) \\ &= 2n+n.\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n^3+11n}{6} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \frac{n^3+11n}{6}=6n \Leftrightarrow n^3+11n=36n \Rightarrow n=5 \text{ (Vì } n \in \mathbb{N}^* \text{).}$$

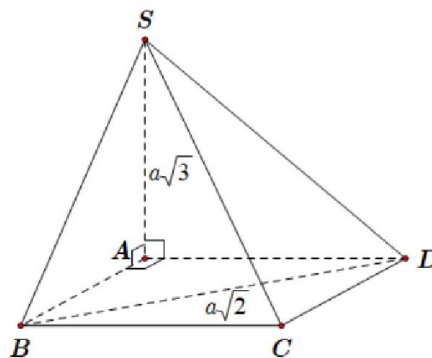
----- HẾT -----

PHẦN 1. GÓC

Câu 1. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020) Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC . Khi đó $\cos(AB, DM)$ bằng

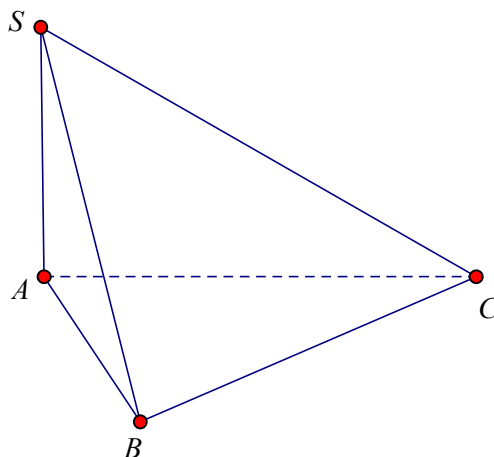
- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 2. (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a\sqrt{3}$, tứ giác $ABCD$ là hình vuông, $BD = a\sqrt{2}$ (minh họa như hình bên). Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD) bằng



- A. 0° . B. 30° . C. 45° . D. 60° .

Câu 3. (Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020) Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, tam giác ABC đều cạnh bằng a (minh họa như hình dưới). Góc tạo bởi giữa mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng



- A. 90° . B. 30° . C. 45° . D. 60° .

Câu 4. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O , cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC . Góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính $\cos$ của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) .

- A. $\frac{\sqrt{41}}{4}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{2\sqrt{41}}{4}$.

- Câu 5. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = AB = AC = 1$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi I là trung điểm cạnh CC' . Cosin góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$ bằng
- A. $\frac{\sqrt{370}}{20}$. B. $\frac{\sqrt{70}}{10}$. C. $\frac{\sqrt{30}}{20}$. D. $\frac{\sqrt{30}}{10}$.
- Câu 6. (ĐHQG Hà Nội - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông. Cho tam giác SAB vuông tại S và góc SBA bằng 30° . Mặt phẳng (SAB) vuông góc mặt phẳng đáy. Gọi M, N là trung điểm AB, BC . Tìm cosin góc tạo bởi hai đường thẳng (SM, DN) .
- A. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. B. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.
- Câu 7. (Sở Ninh Bình)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , độ dài cạnh $AC = 2a$, các tam giác $\triangle SAB, \triangle SCB$ lần lượt vuông tại A và C . Khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) bằng a . Giá trị cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCB) bằng
- A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$.
- Câu 8. (Sở Bắc Ninh - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , $\widehat{ABC} = 120^\circ$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng 60° , khi đó
- A. $SA = \frac{a\sqrt{6}}{4}$. B. $SA = a\sqrt{6}$. C. $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. D. $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- Câu 9. (Sở Bình Phước - 2020)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân đỉnh A . Biết $BC = a\sqrt{3}$ và $\widehat{ABC} = 30^\circ$, cạnh bên $AA' = a$. Gọi M là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{CC'}$. Gọi α là góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'M)$, khi đó $\sin \alpha$ có giá trị bằng
- A. $\frac{\sqrt{66}}{22}$. B. $\frac{\sqrt{481}}{22}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{22}$. D. $\frac{\sqrt{418}}{22}$.
- Câu 10. (Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , tâm O . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC . Biết rằng góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng 60° , cosin của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) bằng:
- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{\sqrt{41}}{41}$. C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{2\sqrt{41}}{41}$.
- Câu 11. (Kim Liên - Hà Nội - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm của đoạn AB . Khẳng định nào sau đây là **sai**?
- A. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° .
 B. $\triangle SBC$ là tam giác vuông.
 C. $SI \perp (ABCD)$.
 D. Khoảng cách giữa đường thẳng DC và mặt phẳng (SAB) bằng a .
- Câu 12. (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và CC' . Biết thể tích

khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. Gọi α là góc giữa mặt phẳng (AMN) và mặt phẳng (ABC) . Khi đó

- A. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\cos \alpha = \frac{1}{2}$. C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{13}}{4}$. D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 13. (Tiên Du - Bắc Ninh - 2020) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = \frac{a}{2}$. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 45° . B. 90° . C. 30° . D. 60° .

Câu 14. (Kim Thành - Hải Dương - 2020) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = 2a$, SA vuông góc với mặt đáy và góc giữa SB và mặt đáy bằng 60° . Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) . Giá trị $\cos \alpha$ bằng

A. $\frac{\sqrt{15}}{5}$. B. $\frac{2}{5}$. C. $\frac{1}{\sqrt{7}}$. D. $\frac{2}{\sqrt{7}}$.

PHẦN 2. KHOẢNG CÁCH

Câu 15. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D ; $AB = AD = 2a$; $DC = a$. Điểm I là trung điểm đoạn AD , hai mặt phẳng (SIB) và (SIC) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60° . Tính khoảng cách từ D đến (SBC) theo a .

- A. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. B. $\frac{9a\sqrt{15}}{10}$. C. $\frac{2a\sqrt{15}}{5}$. D. $\frac{9a\sqrt{15}}{20}$.

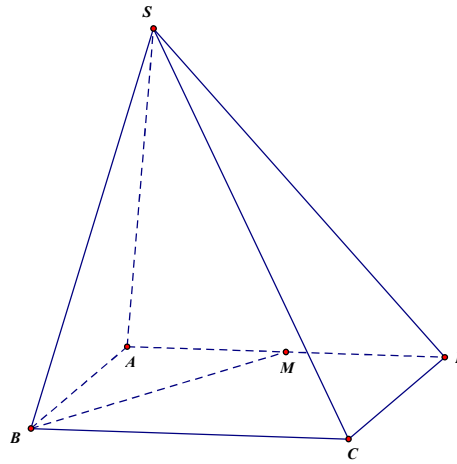
Câu 16. (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An - 2020) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AC = a$, I là trung điểm SC . Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) là trung điểm H của BC . Mặt phẳng (SAB) tạo với (ABC) một góc 60° . Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SAB) .

- A. $\frac{\sqrt{3}a}{4}$. B. $\frac{\sqrt{3}a}{5}$. C. $\frac{\sqrt{5}a}{4}$. D. $\frac{\sqrt{2}a}{3}$.

Câu 17. (Chuyên Hưng Yên - 2020) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân, $BA = BC = a$ và $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi D là điểm đối xứng với B qua AC . Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

- A. $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{21}}{14}$. D. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 18. (Chuyên KHTN - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $AB = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi M là trung điểm của AD . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và SD .

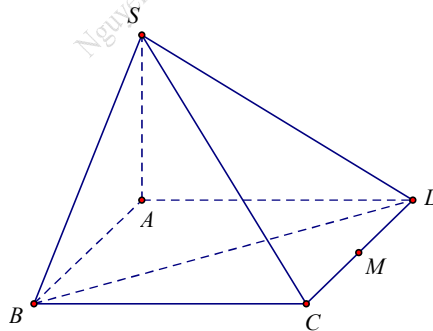


- A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Câu 19. (**Chuyên Lam Sơn - 2020**) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a . Tam giác ABC là tam giác đều, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm tam giác ABC . Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30° . Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) theo a .

- A. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. B. $a\sqrt{3}$ C. a . D. $\frac{2a\sqrt{21}}{3}$.

Câu 20. (**Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020**) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$ (minh họa như hình vẽ bên dưới). Gọi M là trung điểm của CD , khoảng cách giữa điểm M và mặt phẳng (SBD) bằng



- A. $\frac{2a}{3}$. B. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. C. $\frac{a}{2}$. D. $\frac{a}{3}$.

Câu 21. (**Chuyên Lương Văn Ty - Ninh Bình - 2020**) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , mặt bên (SBC) là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{5}}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 22. (**Chuyên Nguyễn Bình Khiêm - Quảng Nam - 2020**) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh a và có góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Đường thẳng SO vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ và $SO = \frac{3a}{4}$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $\frac{3a}{4}$. B. $\frac{a}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{3a}{8}$.

Câu 23. (Chuyên Nguyễn Bình Khiêm - Quảng Nam - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , $AB = 3a$, $AD = DC = a$. Gọi I là trung điểm của AD , biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60° . Tính theo a khoảng cách từ trung điểm cạnh SD đến mặt phẳng (SBC) .

- A. $\frac{a\sqrt{17}}{5}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{19}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{15}$. D. $\frac{a\sqrt{15}}{20}$.

Câu 24. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 2a$, $BC = a$, tam giác đều SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Khoảng cách giữa BC và SD là

- A. $\sqrt{3}a$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}a$. D. $\frac{\sqrt{5}}{5}a$.

Câu 25. (Chuyên Bắc Ninh - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = a$ và SA vuông góc với mặt đáy. M là trung điểm SD . Tính khoảng cách giữa SB và CM .

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

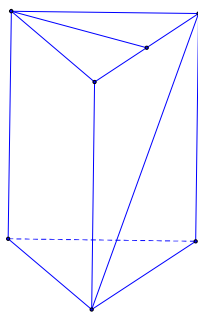
Câu 26. (Chuyên Bến Tre - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = 2a$ và vuông góc với $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của SD . Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SB và CM .

- A. $d = \frac{a}{3}$. B. $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $d = \frac{2a}{3}$. D. $d = \frac{a}{6}$.

Câu 27. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{6}$, $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AD = 2a$. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) bằng

- A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 28. (Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020) Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là một tam giác vuông cân tại B , $AB = AA' = 2a$, M là trung điểm BC (minh họa như hình dưới). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$ bằng



- A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{2a}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{7}}{7}$. D. $a\sqrt{3}$.

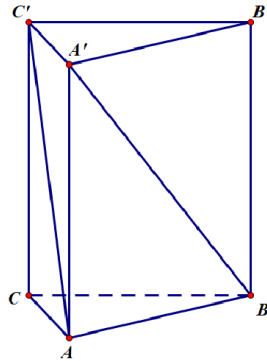
Câu 29. (Chuyên Lào Cai - 2020) Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$ và $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$. Biết góc giữa đường thẳng SA và mặt đáy bằng 45° . Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) .

- A. $\frac{\sqrt{15}}{5}a$. B. $\frac{2\sqrt{15}}{5}a$. C. $\frac{2\sqrt{15}}{3}a$. D. $\frac{2\sqrt{51}}{5}a$.

Câu 30. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020) Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của cạnh AD . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CM .

- A. $\frac{a\sqrt{33}}{11}$. B. $\frac{a}{\sqrt{33}}$. C. $\frac{a}{\sqrt{22}}$. D. $\frac{a\sqrt{22}}{11}$.

Câu 31. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020) Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh có độ dài bằng 2 (tham khảo hình vẽ). Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC' và $A'B$.



- A. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.

Câu 32. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2020) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) ; góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng ABC bằng 60° . Gọi M là trung điểm cạnh AB . Khoảng cách từ B đến (SMC) bằng

- A. $\frac{a\sqrt{39}}{13}$. B. $a\sqrt{3}$. C. a . D. $\frac{a}{2}$.

Câu 33. (Đại Học Hà Tĩnh - 2020) Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông và $AB = BC = a$, $AA' = a\sqrt{2}$, M là trung điểm của BC . Tính khoảng cách d của hai đường thẳng AM và $B'C'$.

- A. $d = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. B. $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $d = \frac{a\sqrt{7}}{7}$. D. $d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 34. (ĐHQG Hà Nội - 2020) Cho lăng trụ đứng $ABCA'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của AA' . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và $B'C'$.

- A. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}a$. B. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}a$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a$. D. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}a$.

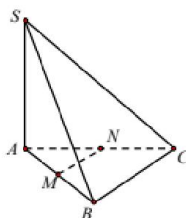
Câu 35. (Sở Phú Thọ - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O , cạnh $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của đoạn OA . Góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30° . Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

- A. $\frac{9\sqrt{22}a}{44}$. B. $\frac{3\sqrt{22}a}{11}$. C. $\frac{\sqrt{22}a}{11}$. D. $\frac{3\sqrt{22}a}{44}$.

Câu 36. (Sở Phú Thọ - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của cạnh AB , góc giữa mặt phẳng (SAC) và đáy bằng 45° . Gọi M là trung điểm của cạnh SD . Khoảng cách giữa hai đường AM và SC bằng

- A. a . B. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{5}}{10}$. D. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

- Câu 37. (Sở Hà Tĩnh - 2020)** Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau và $AD = 2, AB = AC = 1$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BC , khoảng cách giữa hai đường thẳng AI và BD bằng
- A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. D. $\frac{2}{3}$.
- Câu 38. (Sở Ninh Bình)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a$, tam giác ABC đều, tam giác SAB vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng
- A. $\frac{a\sqrt{42}}{7}$. B. $\frac{a\sqrt{42}}{14}$. C. $\frac{a\sqrt{42}}{12}$. D. $\frac{a\sqrt{42}}{6}$.
- Câu 39. (Sở Yên Bái - 2020)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại B , biết $AB = BC = a$, $AA' = a\sqrt{2}$, M là trung điểm của BC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C'$.
- A. $\frac{a\sqrt{7}}{7}$. B. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$.
- Câu 40. (Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = 2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Gọi M là trung điểm của SD , hãy tính theo a khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAC) .
- A. $d = \frac{2a\sqrt{1513}}{89}$. B. $d = \frac{a\sqrt{1315}}{89}$. C. $d = \frac{2a\sqrt{1315}}{89}$. D. $d = \frac{a\sqrt{1513}}{89}$.
- Câu 41. (Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh SA tạo với mặt phẳng đáy một góc 30° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD bằng
- A. $\frac{2\sqrt{15}a}{5}$. B. $\frac{3\sqrt{14}a}{5}$. C. $\frac{2\sqrt{10}a}{5}$. D. $\frac{4\sqrt{5}a}{5}$.
- Câu 42. (Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AD = 2AB = 2BC = 2a$, SA vuông góc với đáy, góc giữa SB và mặt phẳng đáy bằng 60° . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SB . Khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD) bằng
- A. $a\sqrt{3}$. B. $\frac{3a\sqrt{30}}{20}$. C. $\frac{3a\sqrt{30}}{10}$. D. $\frac{3a\sqrt{30}}{40}$.
- Câu 43. (Kim Liên - Hà Nội - 2020)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy là 60° (minh họa như hình dưới đây). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC .



Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và MN bằng

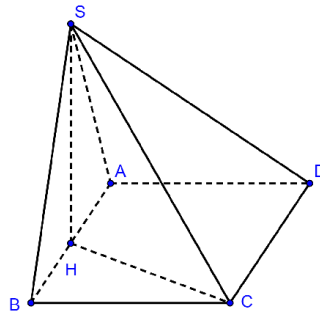
- A. $\frac{3a}{8}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. C. $\frac{3a}{4}$. D. $a\sqrt{6}$.

- Câu 44. (Lê Lai - Thanh Hóa - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại B và C , $CD = 2AB$, $AD = a$, $\angle ADC = 30^\circ$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$ (minh họa như hình bên dưới). Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC) bằng
- A. $\frac{2\sqrt{57}a}{19}$. B. $\frac{\sqrt{57}a}{19}$. C. $\frac{4\sqrt{57}a}{19}$. D. $\sqrt{3}a$.
- Câu 45. (Liên trường Nghệ An - 2020)** Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = \widehat{ACD} = 90^\circ$, $BC = 2a$, $CD = a$, góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BD .
- A. $\frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{31}}$. B. $\frac{2a\sqrt{6}}{\sqrt{31}}$. C. $\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{31}}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{31}}$.
- Câu 46. (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = a$, $OC = 2a$. Gọi M là trung điểm của AB . Khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AC bằng
- A. $\frac{\sqrt{2}a}{3}$. B. $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$. C. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. D. $\frac{2a}{3}$.
- Câu 47. (Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SG và BC bằng
- A. $\frac{2a}{7}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. C. $\frac{2a\sqrt{6}}{9}$. D. $\frac{4a}{7}$.
- Câu 48. (Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và $SA = SB = SC = 11$, góc $\angle SAB = 30^\circ$, góc $\angle SBC = 60^\circ$, góc $\angle SCA = 45^\circ$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SD .
- A. $2\sqrt{22}$. B. $\sqrt{22}$. C. $\frac{\sqrt{22}}{2}$. D. $4\sqrt{11}$.
- Câu 49. (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tâm O . Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với O . Biết tam giác $AA'C$ vuông cân tại A' . Tính khoảng cách h từ điểm D đến mặt phẳng $(ABB'A')$.
- A. $h = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. B. $h = \frac{a\sqrt{2}}{6}$. C. $h = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. D. $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.
- Câu 50. (Tiên Du - Bắc Ninh - 2020)** Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$, đáy ABC là tam giác vuông tại B , $BC = a\sqrt{3}$, $AB = a$. Biết hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt đáy là điểm M thỏa mãn $3\overline{AM} = \overline{AC}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng
- A. $\frac{a\sqrt{210}}{15}$. B. $\frac{a\sqrt{210}}{45}$. C. $\frac{a\sqrt{714}}{17}$. D. $\frac{a\sqrt{714}}{51}$.
- Câu 51. (Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AD = 2AB = 2a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SD . Tính khoảng cách d từ điểm S đến mặt phẳng (AMN) .
- A. $d = 2a$. B. $d = \frac{3a}{2}$. C. $d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. D. $d = a\sqrt{5}$.

- Câu 52. (Hải Hậu - Nam Định - 2020)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$. Biết rằng bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp bằng $\frac{9a\sqrt{2}}{8}$, độ dài cạnh bên lớn hơn độ dài cạnh đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD bằng
- A. $\frac{2a\sqrt{17}}{17}$. B. $\frac{4a\sqrt{17}}{17}$. C. $\frac{4a\sqrt{34}}{17}$. D. $\frac{2a\sqrt{34}}{17}$.

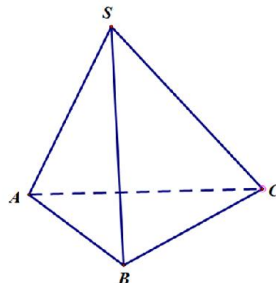
- Câu 53. (Kim Thành - Hải Dương - 2020)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , biết $SA \perp (ABC)$ và $AB = 2a$, $AC = 3a$, $SA = 4a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng
- A. $d = \frac{2a}{\sqrt{11}}$. B. $d = \frac{6a\sqrt{29}}{29}$. C. $d = \frac{12a\sqrt{61}}{61}$. D. $\frac{a\sqrt{43}}{12}$.

- Câu 54. (Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a$, $AD = 3a$ (tham khảo hình vẽ). Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy; góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt đáy là 45° . Gọi H là trung điểm cạnh AB . Tính theo a khoảng cách giữa hai đoạn thẳng SD và CH .



- A. $\frac{3\sqrt{11}a}{11}$. B. $\frac{3\sqrt{14}a}{7}$. C. $\frac{3\sqrt{10}a}{\sqrt{109}}$. D. $\frac{3\sqrt{85}a}{17}$.
- Câu 55. (Trường VINSCHOOL - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, cạnh $AB = 2AD = a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) bằng
- A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a}{2}$. D. $2a$.

- Câu 56. (Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020)** Cho hình chóp $SABC$, có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = 4a$, $AC = 3a$. Biết $SA = 2a\sqrt{3}$, $\widehat{SAB} = 30^\circ$ và $(SAB) \perp (ABC)$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng



- A. $\frac{3\sqrt{7}a}{14}$. B. $\frac{8\sqrt{7}a}{3}$. C. $\frac{6\sqrt{7}a}{7}$. D. $\frac{3\sqrt{7}a}{2}$.

Câu 57. (Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, $AC = 2a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi M là trung điểm cạnh CC' thì $\widehat{BMA'} = 90^\circ$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BMA') .

A. $\frac{a\sqrt{7}}{7}$.

B. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{5}}{7}$.

D. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

----- HẾT -----

Nguyễn Bảo Vương

TUYỂN CHỌN CÂU HỎI VẬN DỤNG - VẬN DỤNG CAO TỪ CÁC ĐỀ THI THỬ TRÊN CẢ NƯỚC NĂM 2020

57 CÂU VD - VDC CHƯƠNG 6. HÌNH HỌC 11

PHẦN 1. GÓC

Câu 1. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020) Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC . Khi đó $\cos(AB, DM)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

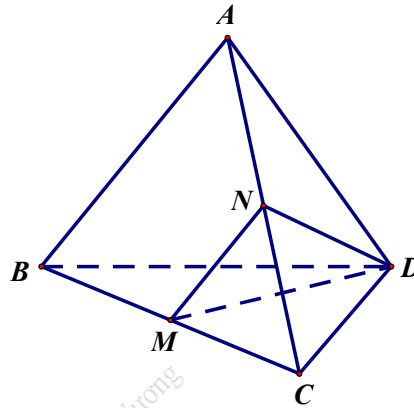
B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi N là trung điểm của AC . Suy ra $MN \parallel AB$

Do đó: $\cos(AB, DM) = \cos(MN, DM)$

Gọi a là độ dài cạnh của tứ diện đều $ABCD$, suy ra $MN = \frac{a}{2}$; $ND = MD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong tam giác MND ta có: $\cos \widehat{NMD} = \frac{MN^2 + MD^2 - ND^2}{2 \cdot MN \cdot MD} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

$\cos(AB, DM) = \cos \widehat{NMD} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 2. (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a\sqrt{3}$, tứ giác $ABCD$ là hình vuông, $BD = a\sqrt{2}$ (minh họa như hình bên). Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD) bằng

A. 0° .

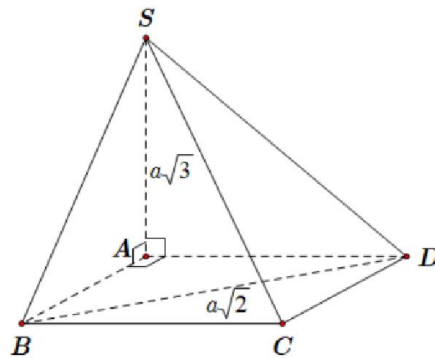
B. 30° .

C. 45° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn B



Đáy $ABCD$ là hình vuông có đường chéo $BD = a\sqrt{2}$ nên cạnh $AB = a$.

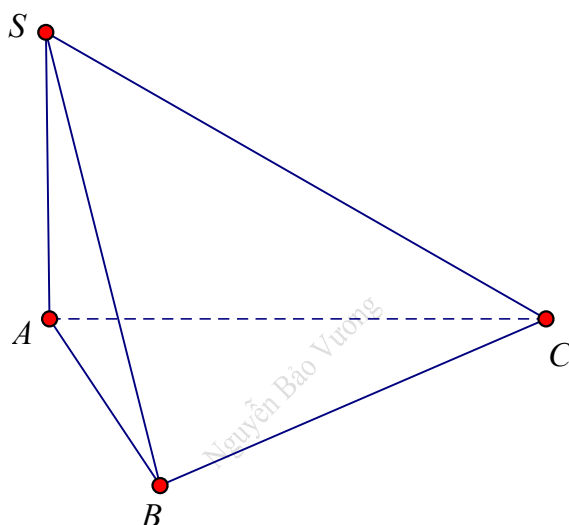
Ta có: $\left. \begin{matrix} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{matrix} \right\} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow SA$ là hình chiếu của SB trên mặt phẳng (SAD)

$$\Rightarrow (\widehat{SB, (SAD)}) = (\widehat{SB, SA}) = \widehat{BSA}.$$

Trong tam giác vuông BSA , ta có: $\tan \widehat{BSA} = \frac{AB}{AS} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{BSA} = 30^\circ$.

Vậy, $(\widehat{SB, (SAD)}) = 30^\circ$.

Câu 3. (**Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020**) Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, tam giác ABC đều cạnh bằng a (minh họa như hình dưới). Góc tạo bởi giữa mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng



A. 90° .

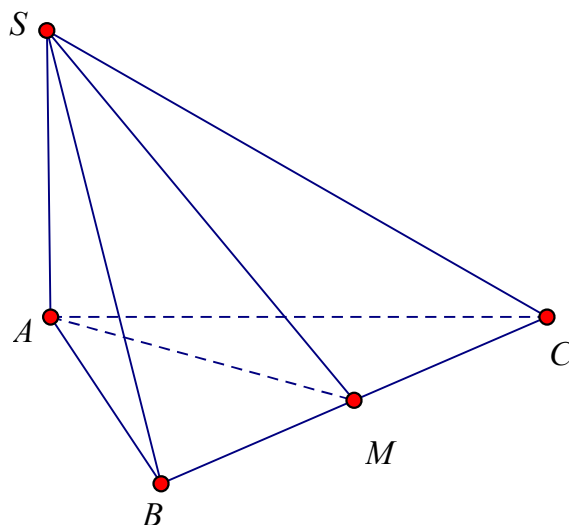
B. 30° .

C. 45° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm BC .

ΔABC đều cạnh a nên $AM \perp BC$ và $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow$ Hình chiếu của SM trên mặt phẳng (ABC) là AM .

Suy ra $SM \perp BC$ (theo định lý ba đường vuông góc).

Có $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ AM \subset (ABC), AM \perp BC. \text{ Do đó góc giữa mặt phẳng } (SBC) \text{ và } (ABC) \text{ là góc giữa } SM \\ SM \subset (SBC), SM \perp BC \end{cases}$

và AM , hay là góc $\widehat{SMA}$ (do $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AM \Rightarrow \Delta SAM$ vuông).

Xét tam giác SAM vuông tại A có $\tan \widehat{SMA} = \frac{SA}{AM} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = 1 \Rightarrow \widehat{SMA} = 45^\circ$.

Vậy góc cần tìm là 45° .

Câu 4. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O , cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC . Góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính $\cos$ của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) .

A. $\frac{\sqrt{41}}{4}$.

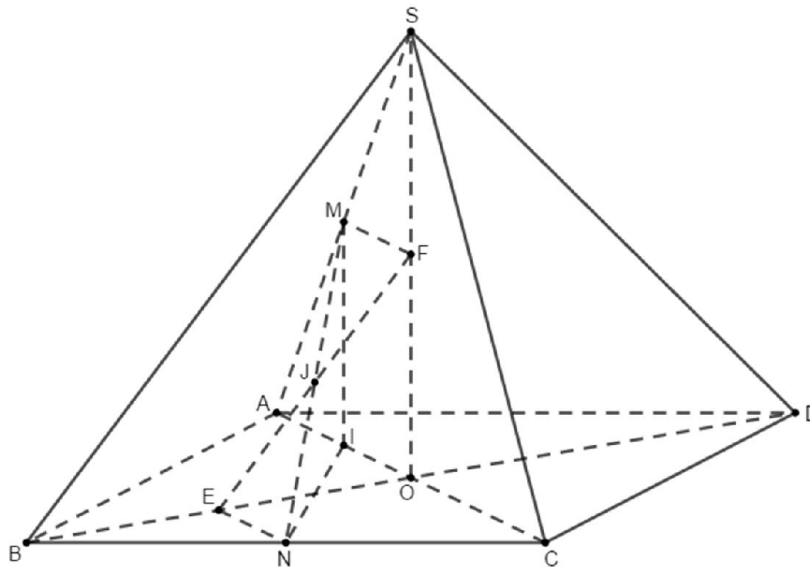
B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

D. $\frac{2\sqrt{41}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Từ giả thiết ta có $SO \perp (ABCD)$.

Gọi I là trung điểm OA thì MI là đường trung bình của $\Delta SOA \Rightarrow MI \parallel SO \Rightarrow MI \perp (ABCD)$

$\Rightarrow I$ là hình chiếu của M trên mặt phẳng $(ABCD) \Rightarrow IN$ là hình chiếu của MN trên mặt

phẳng $(ABCD)$. Suy ra $\left(\widehat{MN, (ABCD)} \right) = \left(\widehat{MN, IN} \right) \Rightarrow \widehat{MNI} = 60^\circ$.

Ta có $NC = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$; $IC = \frac{3}{4}AC = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Áp dụng định lý cosin trong ΔINC ta có $IN^2 = CI^2 + CN^2 - 2CI.CN.\cos \widehat{NCI}$

$$\Rightarrow IN^2 = \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos 45^\circ = \frac{5a^2}{8} \Rightarrow IN = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

$$\text{Do } \triangle MIN \text{ vuông tại } I \text{ nên } \cos \widehat{MNI} = \frac{IN}{MN} \Rightarrow MN = \frac{IN}{\cos 60^\circ} = \frac{a\sqrt{10}}{4} : \frac{1}{2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}.$$

Lại có $AC \perp BD, AC \perp SO \Rightarrow AC \perp (SBD)$.

Gọi E là trung điểm $OB \Rightarrow EN$ là đường trung bình của $\triangle BOC \Rightarrow EN \parallel OC$ hay $EN \parallel AC$

$\Rightarrow NE \perp (SBD)$ hay E là hình chiếu của N trên mặt phẳng (SBD) .

Gọi F là trung điểm của $SO \Rightarrow MF$ là đường trung bình của $\triangle SAO \Rightarrow MF \parallel AO$ hay $MF \parallel AC$

$\Rightarrow MF \perp (SBD)$ hay F là hình chiếu của M trên mặt phẳng (SBD) .

Ta có $MF \parallel NE$ nên bốn điểm E, N, F, M cùng nằm trên một mặt phẳng.

Trong mặt phẳng $(ENFM)$ gọi $J = MN \cap EF \Rightarrow J = MN \cap (SBD)$ (do $EF \subset (SBD)$).

Suy ra $(\widehat{MN, (SBD)}) = (\widehat{MN, EF}) = \widehat{EJN}$ (do $\widehat{EJN} < 90^\circ$).

$$\text{Ta có } EN = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{4}AC = \frac{a\sqrt{2}}{4}; MF = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{4}AC = \frac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow EN = MF, \text{ mà } EN \parallel MF$$

$$\Rightarrow \text{Tứ giác } ENFM \text{ là hình bình hành } \Rightarrow J \text{ là trung điểm } MN \Rightarrow JN = \frac{1}{2}MN = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

$$\text{Vậy } \cos(\widehat{MN, (SBD)}) = \cos \widehat{EJN} = \frac{JE}{JN} = \frac{\sqrt{JN^2 - EN^2}}{JN} = \frac{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{10}}{4}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2}}{\frac{a\sqrt{10}}{4}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 5. (**Chuyên Vĩnh Phúc - 2020**) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = AB = AC = 1$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi I là trung điểm cạnh CC' . Côsin góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{370}}{20}$.

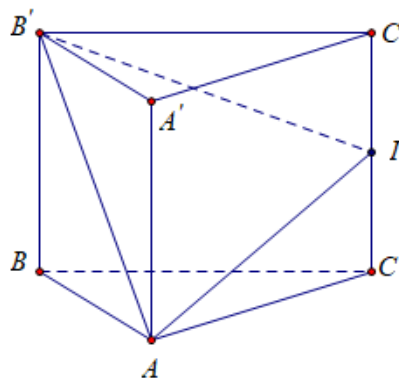
B. $\frac{\sqrt{70}}{10}$.

C. $\frac{\sqrt{30}}{20}$.

D. $\frac{\sqrt{30}}{10}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$.

$$AB' = \sqrt{2}, AI = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 3 \Rightarrow BC = B'C' = \sqrt{3}.$$

$$B'I = \sqrt{B'C'^2 + C'I^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Vì $AB'^2 + AI^2 = B'I^2 \Rightarrow \triangle AB'I$ vuông tại điểm A .

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ và } S_{AB'I} = \frac{1}{2} AI \cdot AB' = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

Hình chiếu vuông góc của $\triangle AB'I$ lên mặt phẳng (ABC) là $\triangle ABC$.

$$\text{Ta có } S_{ABC} = S_{AB'I} \cdot \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{S_{ABC}}{S_{AB'I}} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

Câu 6. (ĐHQG Hà Nội - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông. Cho tam giác SAB vuông tại S và góc SBA bằng 30° . Mặt phẳng (SAB) vuông góc mặt phẳng đáy. Gọi M, N là trung điểm AB, BC . Tìm cosin góc tạo bởi hai đường thẳng (SM, DN) .

A. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

B. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

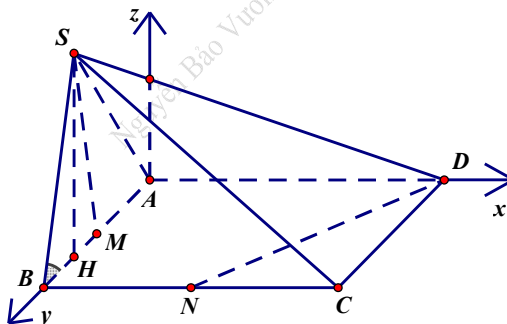
D. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn B

Trong (SAB) , kẻ $SH \perp AB$ tại H . Ta có:
$$\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \Rightarrow SH \perp (ABCD). \\ SH \subset (SAB), SH \perp AB \end{cases}$$

Kẻ tia $Az \parallel SH$ và chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ sau đây.



Trong tam giác SAB vuông tại S , $SB = AB \cdot \cos \widehat{SBA} = a \cdot \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác SBH vuông tại H , $BH = SB \cdot \cos \widehat{SBH} = \frac{3a}{4}$ và $SH = BH \cdot \sin \widehat{SBA} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

$$AH = AB - BH = a - \frac{3a}{4} = \frac{a}{4} \Rightarrow H\left(0; \frac{a}{4}; 0\right) \Rightarrow S\left(0; \frac{a}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{4}\right).$$

$$M\left(0; \frac{a}{2}; 0\right), D(a; 0; 0), N\left(\frac{a}{2}; a; 0\right).$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{SM} = \left(0; \frac{a}{4}; -\frac{a\sqrt{3}}{4}\right), \overrightarrow{DN} = \left(-\frac{a}{2}; a; 0\right) \Rightarrow \cos(SM, DN) = \frac{|\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{DN}|}{|\overrightarrow{SM}| \cdot |\overrightarrow{DN}|} = \frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Câu 7. (Sở Ninh Bình) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , độ dài cạnh $AC = 2a$, các tam giác $\triangle SAB, \triangle SCB$ lần lượt vuông tại A và C . Khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) bằng a . Giá trị cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCB) bằng

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

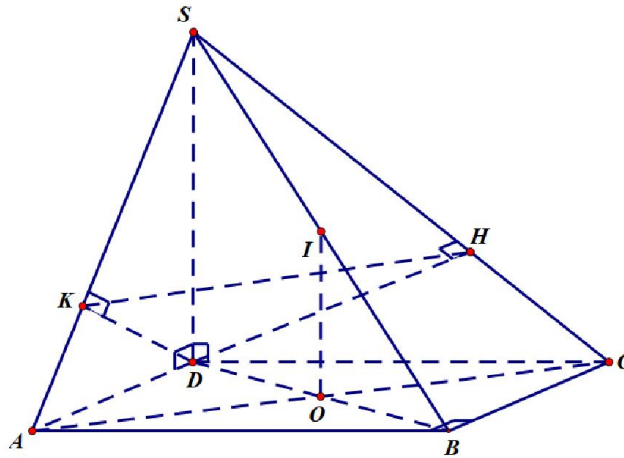
B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



+ Gọi O, I lần lượt là trung điểm của AC, SB chúng ta có O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và vì các tam giác $\triangle SAB, \triangle SCB$ lần lượt vuông tại A và C nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$ do đó $OI \perp (ABC)$.

+ Gọi D là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) ta có $SD \parallel OI$ và $SD = 2OI$ suy ra O là trung điểm của BD . Từ đây ta có $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $\frac{2a}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$ và $SD = a$.

+ Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của D lên SC, SA ta có

$SD \perp (ABCD) \Rightarrow SD \perp BC$ đồng thời $ABCD$ là hình vuông nên $BC \perp DC$ từ hai ý này ta có $BC \perp (SCD) \Rightarrow BC \perp DH$, từ đó suy ra $DH \perp (SCB)$.

Chứng minh tương tự ta có $DK \perp (SAB)$

+ Vì vậy góc giữa hai mặt phẳng (SCB) và (SAB) bằng góc giữa hai đường thẳng DK và DH .

+ Xét 2 tam giác vuông $\triangle SAD, \triangle SCD$ bằng nhau ta có hai đường cao $DK = DH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

+ Trong tam giác SAC ta có $\frac{HK}{AC} = \frac{SH}{SC} = \frac{SD^2}{SC^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow HK = \frac{2a}{3}$, trong tam giác DHK có

$$\cos \widehat{HDK} = \frac{DH^2 + KD^2 - KH^2}{2DH.KD} = \frac{2}{3}$$

Câu 8. (Sở Bắc Ninh - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , $\widehat{ABC} = 120^\circ$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng 60° , khi đó

A. $SA = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

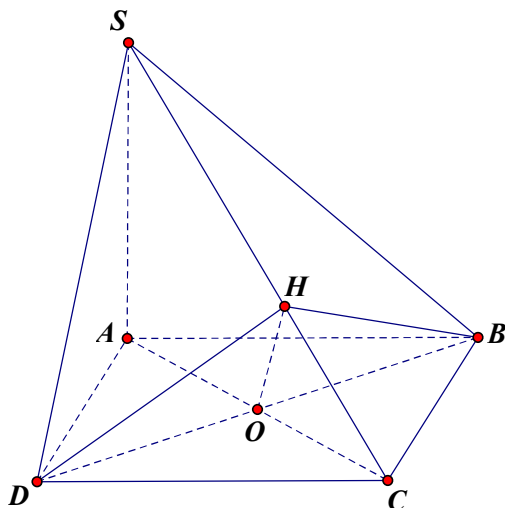
B. $SA = a\sqrt{6}$.

C. $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

D. $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là giao điểm của AC, BD . Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên SC . Khi đó $SC \perp (HBD)$ vì $SC \perp BD, SC \perp OH$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) là góc giữa hai đường thẳng HB, HD .

Vì $\triangle SCD = \triangle SBC \Rightarrow HB = HD$.

Đặt $SA = x (x > 0)$.

$$\text{Ta có } \cos 60^\circ = \frac{|HB^2 + HD^2 - BD^2|}{2HB \cdot HD} \Leftrightarrow HB^2 = |2HB^2 - BD^2| \Leftrightarrow \begin{cases} HB^2 = BD^2 \\ HB^2 = \frac{BD^2}{3} \end{cases}$$

Ta có $\triangle CHO \approx \triangle CSA \Rightarrow OH \cdot CS = CO \cdot SA$ (1)

Trong tam giác ABC ta có $AC = a\sqrt{3}, OB = \frac{a}{2} \Rightarrow BD = a$

TH1 : $HB = BD = a \Rightarrow OH = \sqrt{HB^2 - OB^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Thay vào (1) ta có $x = \sqrt{x^2 + 3a^2}$. (vô nghiệm).

$$\text{TH2 : } HB = \frac{BD\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow OH = \sqrt{HB^2 - OB^2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Thay vào (1) ta có } \frac{a^2}{12}(x^2 + 3a^2) = \frac{3a^2}{4}x^2 \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Câu 9. (Sở Bình Phước - 2020) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân đỉnh A . Biết $BC = a\sqrt{3}$ và $\widehat{ABC} = 30^\circ$, cạnh bên $AA' = a$. Gọi M là điểm thỏa mãn $2\overline{CM} = 3\overline{CC'}$. Gọi α là góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'M)$, khi đó $\sin \alpha$ có giá trị bằng

A. $\frac{\sqrt{66}}{22}$.

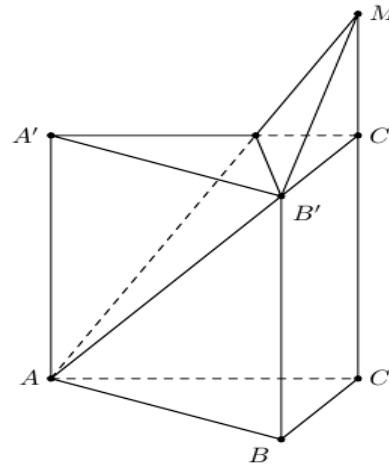
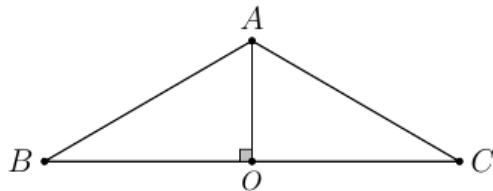
B. $\frac{\sqrt{481}}{22}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{22}$.

D. $\frac{\sqrt{418}}{22}$.

Lời giải

Chọn D



Cách 1: Gọi O là trung điểm BC .

$$\text{Ta có: } BO = AB \cdot \cos 30^\circ \Leftrightarrow AB = \frac{BO}{\cos 30^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = a = AC \text{ và } AO = AB \cdot \sin 30^\circ = \frac{a}{2}.$$

Theo đề bài:

$$2\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{CC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'M} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{C'M} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CC'} \Rightarrow C'M = \frac{a}{2}.$$

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'M)$.

$$\text{Theo công thức diện tích hình chiếu ta có: } S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AB'C} \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AB'C}}.$$

$$\text{Ta có } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \quad AB' = \sqrt{AB^2 + BB'^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2};$$

$$B'M = \sqrt{C'M^2 + B'C'^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (a\sqrt{3})^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2};$$

$$AM = \sqrt{AC^2 + CM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

$$\text{Khi đó } p = \frac{AB' + B'M + AM}{2} = \frac{a\sqrt{2} + \frac{a\sqrt{13}}{2} + \frac{a\sqrt{13}}{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2} + a\sqrt{13}}{2}.$$

Áp dụng công thức Hê-rông vào $\Delta AB'M$ ta có:

$$S_{\Delta AB'M} = \sqrt{p(p - AB')(p - B'M)(p - AM)} = \frac{a^2\sqrt{22}}{4}.$$

$$\text{Vậy } \cos \alpha = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AB'C}} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{a^2\sqrt{22}}{4}} = \sqrt{\frac{3}{22}} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{\frac{19}{22}} = \frac{\sqrt{418}}{22}.$$

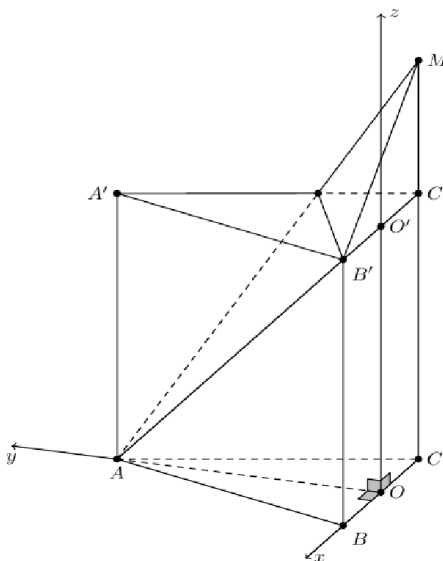
Cách 2:

Gọi O là trung điểm BC .

$$\text{Ta có: } BO = AB \cdot \cos 30^\circ \Leftrightarrow AB = \frac{BO}{\cos 30^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = a = AC \text{ và } AO = AB \cdot \sin 30^\circ = \frac{a}{2}.$$

Theo đề bài:

$$2\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{CC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'M} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{C'M} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CC'} \Rightarrow C'M = \frac{a}{2}.$$



Coi $a = 1$.

Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ với $O(0;0;0)$, $A\left(0; \frac{1}{2}; 0\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right)$, $C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right)$, $B'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 1\right)$, $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; \frac{3}{2}\right)$.

Khi đó $(ABC) \equiv (Oxy): z = 0 \Rightarrow (ABC)$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB'} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 1\right)$, $\overrightarrow{AM} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{n_{(AB'M)}} = 4[\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AM}] = (1; 5\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'M)$.

$$\text{Vậy } \cos \alpha = \frac{|\vec{k} \cdot \overrightarrow{n_{(AB'M)}}|}{|\vec{k}| \cdot |\overrightarrow{n_{(AB'M)}}|} = \frac{|2\sqrt{3}|}{1 \cdot 2\sqrt{22}} = \sqrt{\frac{3}{22}} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{\frac{19}{22}} = \frac{\sqrt{418}}{22}.$$

Câu 10. (Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , tâm O . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC . Biết rằng góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng 60° , cosin của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) bằng:

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

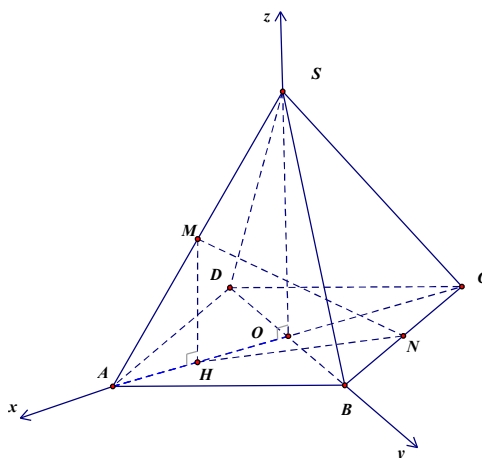
B. $\frac{\sqrt{41}}{41}$.

C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

D. $\frac{2\sqrt{41}}{41}$.

Lời giải

Chọn C



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Đặt $SO = m$, ($m > 0$).

$$A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right); S(0; 0; m); N\left(-\frac{a\sqrt{2}}{4}; \frac{a\sqrt{2}}{4}; 0\right) \Rightarrow M\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}; 0; \frac{m}{2}\right).$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{4}; -\frac{m}{2}\right). \text{ Mặt phẳng } (ABCD) \text{ có véc tơ pháp tuyến } \vec{k} = (0; 0; 1).$$

$$\Rightarrow \sin(MN, (ABCD)) = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \vec{k}|}{|\overrightarrow{MN}| |\vec{k}|} = \frac{\frac{m}{2}}{\sqrt{\frac{5a^2}{8} + \frac{m^2}{4}}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow m^2 = \frac{15a^2}{8} + \frac{3m^2}{4}.$$

$$\Rightarrow 2m^2 = 15a^2 \Rightarrow m = \frac{a\sqrt{30}}{2}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{4}; -\frac{a\sqrt{30}}{4}\right), \text{ mặt phẳng } (SBD) \text{ có véc tơ pháp tuyến là } \vec{i} = (1; 0; 0).$$

$$\Rightarrow \sin(MN, (SBD)) = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \vec{i}|}{|\overrightarrow{MN}| |\vec{i}|} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{8} + \frac{30a^2}{16}}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \cos(MN, (SBD)) = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 11. (Kim Liên - Hà Nội - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm của đoạn AB . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° .

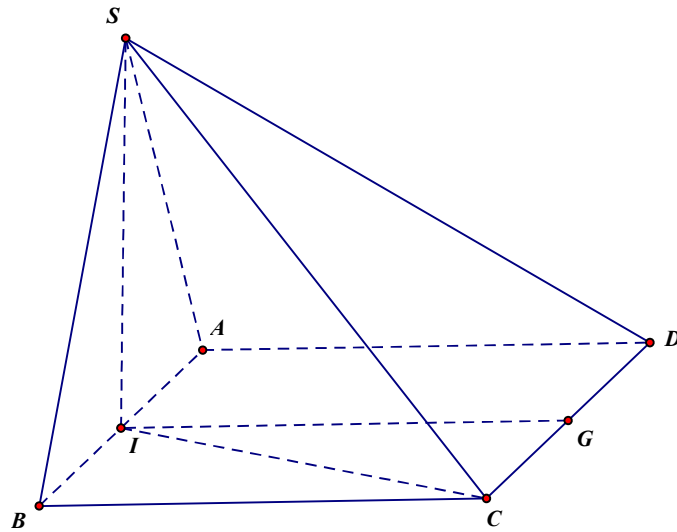
B. $\triangle SBC$ là tam giác vuông.

C. $SI \perp (ABCD)$.

D. Khoảng cách giữa đường thẳng DC và mặt phẳng (SAB) bằng a .

Lời giải

Chọn A



- +) Vì $\triangle SAB$ đều và I là trung điểm của đoạn AB nên $SI \perp AB$
 Mà $(SAB) \perp (ABCD)$, $(SAB) \cap (ABCD) = AB$, suy ra $SI \perp (ABCD)$.
 +) $SI \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp BC$, mà $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.
 Do đó $\triangle SBC$ là tam giác vuông.
 +) $(SC, (ABCD)) = (SC, IC) = \widehat{SCI}$.

$$\triangle SAB \text{ đều, cạnh } a \text{ nên } SI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ và } IC = \frac{a\sqrt{5}}{2} \text{ nên } \tan \widehat{SCI} = \frac{SI}{IC} = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

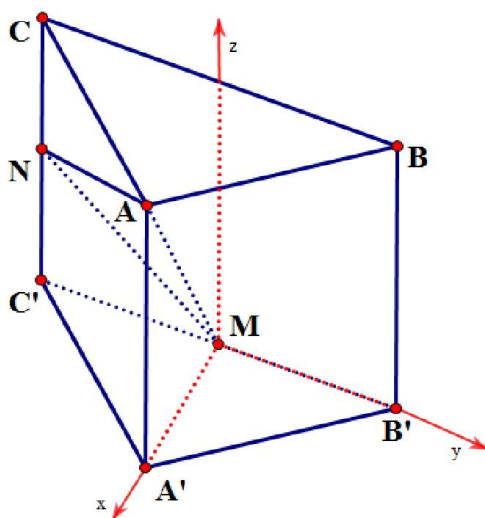
- +) $DC \parallel (SAB)$ nên $d(DC, (SAB)) = d(G, (SAB))$ (với G là trung điểm của DC).
 $GI \perp AB$ và $GI \perp SI$ nên $GI \perp (SAB) \Rightarrow d(G, (SAB)) = GI = a$.

Đối chiếu các đáp án ta thấy đáp án A sai.

- Câu 12.** (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a$, $BAC = 120^\circ$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và CC' . Biết thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. Gọi α là góc giữa mặt phẳng (AMN) và mặt phẳng (ABC) . Khi đó

A. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\cos \alpha = \frac{1}{2}$. C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{13}}{4}$. D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

**Chọn D**

Lấy H là trung điểm của BC .

Ta có: $V_{ABC.A'BC'} = CC' \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}a^3}{4} \Rightarrow CC' = a$ vì $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Ta có $M \equiv O$.

$$M(0;0;0), A'\left(\frac{a}{2};0;0\right), B'\left(0;\frac{\sqrt{3}a}{2};0\right), C'\left(0;-\frac{\sqrt{3}a}{2};0\right); A\left(\frac{a}{2};0;a\right); N\left(0;-\frac{\sqrt{3}a}{2};\frac{a}{2}\right).$$

Ta có: $(ABC) \perp Oz$ nên (ABC) có một vector pháp tuyến là $\vec{k} = (0;0;1)$.

Ta có $\vec{MA} = \left(\frac{a}{2};0;a\right), \vec{MN} = \left(0;-\frac{\sqrt{3}a}{2};\frac{a}{2}\right)$.

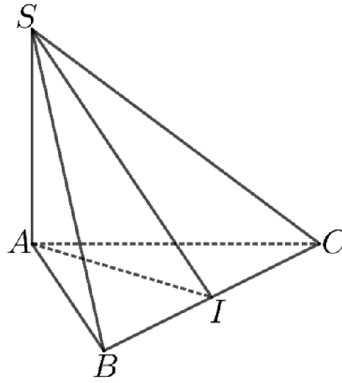
Gọi $\vec{v}_1 = \frac{a}{2}\vec{MA} \Rightarrow \vec{v}_1 = (1;0;2), \vec{v}_2 = \frac{a}{2}\vec{MN} \Rightarrow \vec{v}_2 = (0;-\sqrt{3};1)$.

Khi đó mặt phẳng (AMN) song song hoặc chứa giá của hai vector không cùng phương là $\vec{v}_1$ và $\vec{v}_2$ nên có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = [\vec{v}_1, \vec{v}_2] = (2\sqrt{3}; -1; -\sqrt{3})$.

Vậy $\cos \alpha = \left| \cos(\vec{k}, \vec{n}) \right| = \frac{|\vec{k} \cdot \vec{n}|}{|\vec{k}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 13. (Tiên Du - Bắc Ninh - 2020) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = \frac{a}{2}$. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 45° .B. 90° .**C. 30° .**D. 60° .**Lời giải****Chọn C**



Gọi I là trung điểm BC .

Ta có $AI \perp BC$ (tam giác ABC đều) (1).

Lại có $SA \perp BC$ ($SA \perp (ABC)$).

Suy ra $BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp SI$ (2).

$BC = (SBC) \cap (ABC)$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra $((SBC), (ABC)) = (SI, AI) = \widehat{SIA}$.

Xét tam giác SAI vuông tại A ta có $\tan \widehat{SIA} = \frac{SA}{AI} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Suy ra $\widehat{SIA} = 30^\circ$.

Vậy $((SBC), (ABC)) = 30^\circ$.

Câu 14. (Kim Thành - Hải Dương - 2020) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = 2a$, SA vuông góc với mặt đáy và góc giữa SB và mặt đáy bằng 60° . Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) . Giá trị $\cos \alpha$ bằng

A. $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

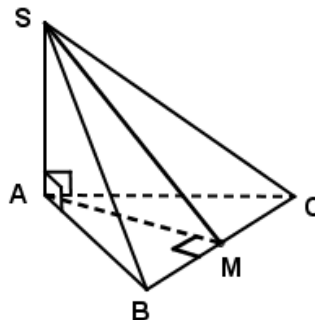
B. $\frac{2}{5}$.

C. $\frac{1}{\sqrt{7}}$.

D. $\frac{2}{\sqrt{7}}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow AM \perp BC$ (1)

Có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AM \end{cases} \Rightarrow BC \perp SM$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $((SBC), (ABC)) = \widehat{SMA} = \alpha$.

Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AB$ và AB là hình chiếu vuông góc của SB lên $(ABC) \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$.

ΔSAB có $SA = AB \cdot \tan \widehat{SBA} = 2a \cdot \tan 60^\circ = 2\sqrt{3}a$.

$$\Delta ABC \text{ có } AM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(2a)^2 + (2a)^2} = a\sqrt{2}.$$

$$\Delta SAM \text{ vuông tại } A \text{ có } \cos \alpha = \frac{AM}{SM} = \frac{AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{(2\sqrt{3}a)^2 + (a\sqrt{2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{7}}.$$

PHẦN 2. KHOẢNG CÁCH

Câu 15. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D ; $AB = AD = 2a$; $DC = a$. Điểm I là trung điểm đoạn AD , hai mặt phẳng (SIB) và (SIC) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60° . Tính khoảng cách từ D đến (SBC) theo a .

A. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$.

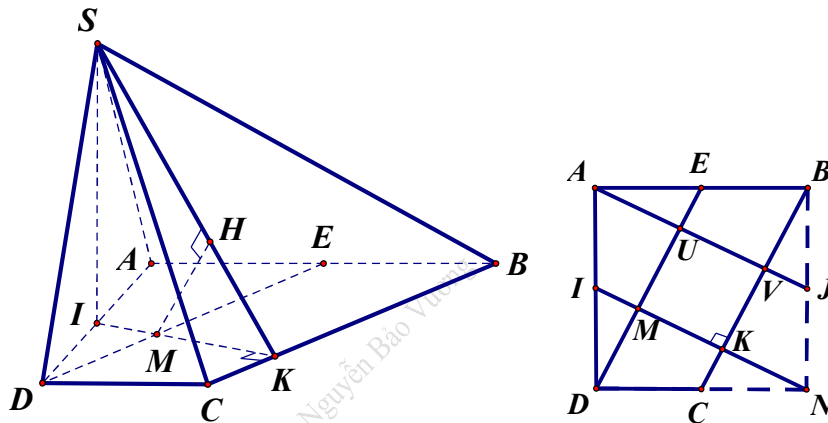
B. $\frac{9a\sqrt{15}}{10}$.

C. $\frac{2a\sqrt{15}}{5}$.

D. $\frac{9a\sqrt{15}}{20}$.

Lời giải

Chọn A



Theo đề ta có $SI \perp (ABCD)$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của I trên BC .

Suy ra: Góc giữa hai mặt phẳng $((SBC), (ABCD)) = \widehat{SKI} = 60^\circ$

Gọi E là trung điểm của AB , $M = IK \cap DE$.

Do $BCDE$ là hình bình hành nên $DE \parallel (SBC)$

$$\Rightarrow d(D, (SBC)) = d(DE, (SBC)) = d(M, (SBC))$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên SK . Suy ra $d(M, (SBC)) = MH$

$$\text{Dễ thấy: } IM = \frac{1}{2}AU = \frac{1}{2}KN = \frac{1}{2}MK$$

$$IN = IM + MK + KN = \frac{1}{2}MK + MK + MK = \frac{5}{2}MK$$

$$\text{Suy ra: } MK = \frac{2}{5}IN = \frac{2}{5}\sqrt{ID^2 + DN^2} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Trong tam giác } MHK, \text{ ta có: } MH = MK \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{15}}{5}$$

Câu 16. (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AC = a$, I là trung điểm SC . Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) là trung điểm H của

BC . Mặt phẳng (SAB) tạo với (ABC) một góc 60° . Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SAB) .

A. $\frac{\sqrt{3}a}{4}$.

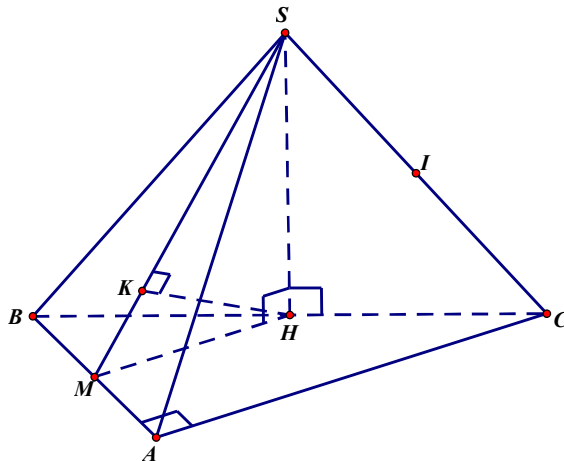
B. $\frac{\sqrt{3}a}{5}$.

C. $\frac{\sqrt{5}a}{4}$.

D. $\frac{\sqrt{2}a}{3}$.

Lời giải.

Chọn A



Gọi M là trung điểm cạnh AB thì MH là đường trung bình của tam giác ABC nên

$$MH = \frac{a}{2}, MH \parallel AC \Rightarrow MH \perp AB.$$

Mặt khác, do $SH \perp (ABC)$ nên $(SMH) \perp BC$. Suy ra góc giữa (SAB) và (ABC) là góc giữa SM và MH ; lại có $SH \perp MH$ nên góc này bằng góc $\widehat{SMH}$. Từ giả thiết suy ra $\widehat{SMH} = 60^\circ$. Gọi K là hình chiếu của H lên SM thì $HK \perp (SAB)$.

$$\text{Xét tam giác vuông } SMH, SH = MH \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}, MH = \frac{a}{2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Gọi khoảng cách từ I, C, H đến mặt phẳng (SAB) lần lượt là

$$d(I, (SAB)), d(C, (SAB)), d(H, (SAB)).$$

Cách 1:

$$\text{Ta có } \begin{cases} d(I, (SAB)) = \frac{1}{2} d(C, (SAB)) \\ d(H, (SAB)) = \frac{1}{2} d(C, (SAB)) \end{cases} \Rightarrow d(I, (SAB)) = d(H, (SAB)) = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Cách 2:

IH là đường trung bình của tam giác SBC nên $IH \parallel SB \Rightarrow IH \parallel (SAB)$

$$\Rightarrow d(I, (SAB)) = d(H, (SAB)) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

Câu 17. (Chuyên Hưng Yên - 2020) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân, $BA = BC = a$ và $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi D là điểm đối xứng với B qua AC . Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$.

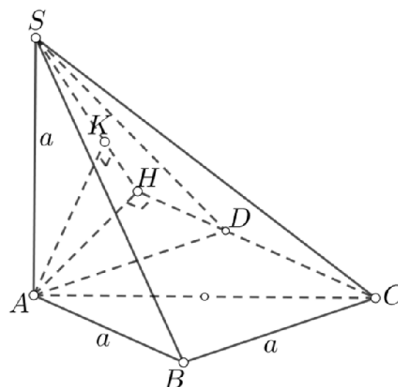
B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{21}}{14}$.

D. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải

Chọn D



Tam giác ABC cân tại B có $\widehat{BAC} = 30^\circ$ và D đối xứng với B qua AC nên tứ giác $ABCD$ là hình thoi có $\widehat{ADC} = \widehat{ABC} = 120^\circ$.

Trong mặt phẳng (ABC) , kẻ AH vuông góc với đường thẳng CD tại H . Khi đó $CD \perp AH$ và $CD \perp SA$ nên $CD \perp (SAH)$. Do đó $(SCD) \perp (SAH)$.

Trong mặt phẳng (SAH) , kẻ $AK \perp SH$ tại K . Khi đó, $AK \perp (SCD)$ và $AK = d[A, (SCD)]$.

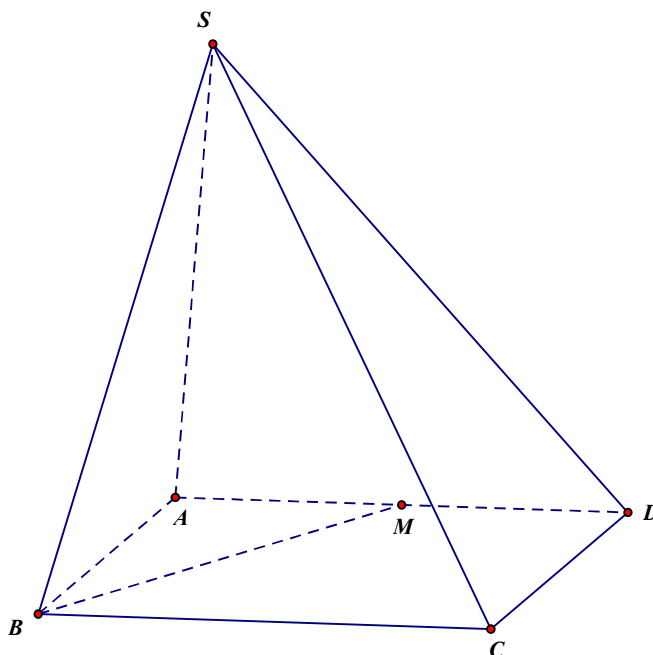
$$\text{Ta có } AH = AD \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SAH , ta có $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{7}{3a^2}$. Từ đó,

$$AK = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

$$\text{Vì } AB \parallel (SCD) \text{ nên } d[B, (SCD)] = d[A, (SCD)] = AK = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Câu 18. (Chuyên KHTN - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $AB = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi M là trung điểm của AD . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và SD .



A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

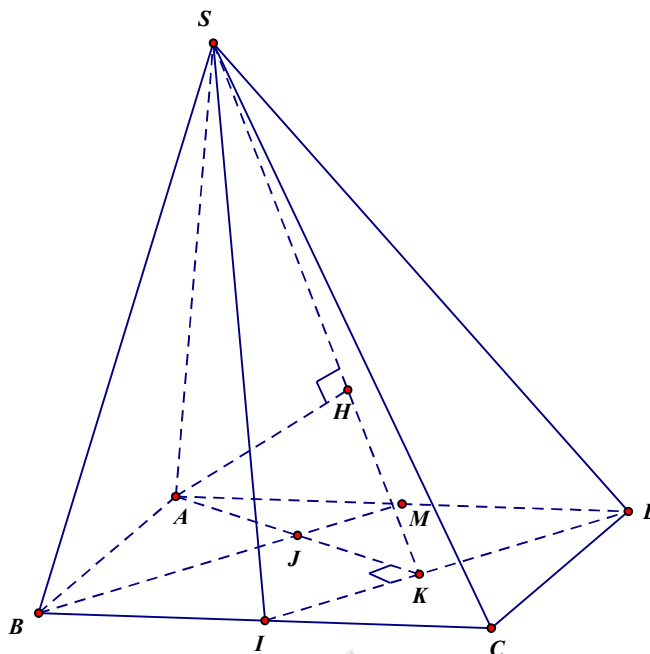
B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

D. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm của BC .

Vì $BM \parallel DI$ nên $BM \parallel (SDI)$.

Do đó $d(BM, SD) = d(BM, (SDI)) = d(M, (SDI))$.

Vì $AD \cap (SDI) = D$ và M là trung điểm của AD nên $d(M, (SDI)) = \frac{1}{2}d(A, (SDI))$.

Trong $(ABCD)$, kẻ $AK \perp DI$ ($K \in DI$), $AK \cap BM = J$.

Trong (SAK) , kẻ $AH \perp SK$ ($H \in SK$).

Vì $\begin{cases} DI \perp AK \\ DI \perp SA \end{cases} \Rightarrow DI \perp (SAK)$ mà $AH \subset (SAK) \Rightarrow DI \perp AH$.

Suy ra $AH \perp (SDI) \Rightarrow d(A, (SDI)) = AH$.

Ta có $BM \parallel DI \Rightarrow JM \parallel DK$ và M là trung điểm của AD nên $AK = 2AJ$.

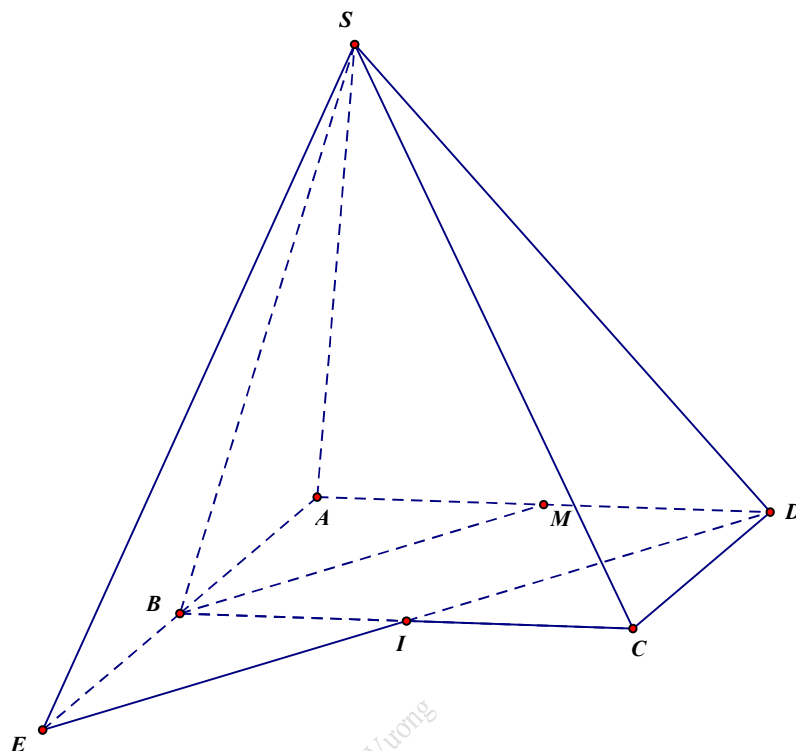
Lại có $\frac{1}{AJ^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{2}{a^2}$.

Suy ra $AJ = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AK = a\sqrt{2}$.

Mặt khác $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AK^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

$$\text{Do đó } d(M, (SDI)) = \frac{1}{2} \cdot AH = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Cách khác:



Gọi $E = DI \cap AB$ thì $AE = 2AB = 2a$

$$d(BM, SD) = d(B, (SDI)) = \frac{1}{2} d(A, (SDE)).$$

Vì $S.ADE$ là tứ diện vuông tại A nên đặt $h = d(A, (SDE))$ thì ta có

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Suy ra } d(BM, SD) = \frac{h}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Câu 19. (Chuyên Lam Sơn - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a . Tam giác ABC là tam giác đều, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm tam giác ABC . Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30° . Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) theo a .

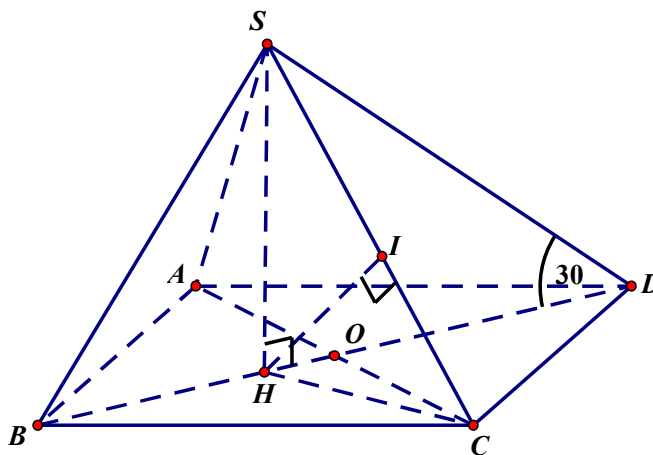
A. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

B. $a\sqrt{3}$

C. a .

D. $\frac{2a\sqrt{21}}{3}$.

Lời giải

**Chọn A**

Gọi H là trọng tâm tam giác $\triangle ABC$, O là tâm của hình thoi $ABCD$.

Do $SH \perp (ABCD): (\widehat{SD, (ABCD)}) = \widehat{SDH} = 30^\circ$.

Xét tam giác $\triangle SDH$ vuông tại H có: $\widehat{SDH} = 30^\circ$; $HD = \frac{2}{3}BD = \frac{4}{3}BO = \frac{4}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

$$\frac{SH}{HD} = \tan \widehat{SDH} \Rightarrow SH = HD \cdot \tan \widehat{SDH} = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot \tan 30^\circ = \frac{2a}{3}.$$

Từ H hạ $HI \perp SC$ tại I .

$$\left. \begin{array}{l} HI \perp SC \\ HI \perp CD \text{ (} CD \perp (SHC) \text{)} \\ SC, CD \subset (SCD) \\ SC \cap CD = \{C\} \end{array} \right\} \Rightarrow HI \perp (SCD)$$

Từ đó, khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng $(SCD): d(H, (SCD)) = HI$.

Xét tam giác $\triangle SHC$ vuông tại H , đường cao HI :

$$HI = \frac{HS \cdot HC}{\sqrt{HS^2 + HC^2}} = \frac{\frac{2a}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\left(\frac{2a}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = \frac{2a\sqrt{21}}{21}.$$

$$\text{Mặt khác: } \frac{d(B, (SCD))}{d(H, (SCD))} = \frac{DB}{DH} = \frac{3}{2}.$$

Vậy khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) :

$$d(B, (SCD)) = \frac{3}{2} d(H, (SCD)) = \frac{3}{2} HI = \frac{3}{2} \cdot \frac{2a\sqrt{21}}{21} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Cách khác:

Thể tích khối chóp $S.BCD$:

$$V_{S.BCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{BCD} = \frac{1}{3} SH \cdot \frac{1}{2} \cdot CB \cdot CD \cdot \sin \widehat{BCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{18} \text{ (đvtt)}.$$

$$\text{Xét tam giác } \triangle SCD \text{ có: } SD = \frac{SH}{\sin 30^\circ} = \frac{4a}{3}; CD = a; SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}.$$

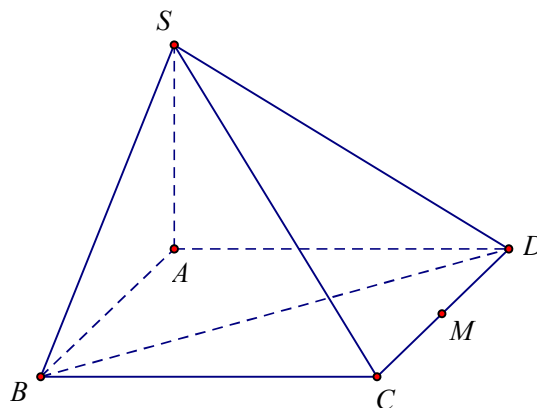
$$\text{Diện tích tam giác } \triangle SCD: S_{\triangle SCD} = \sqrt{p(p-SC)(p-SD)(p-CD)} = \frac{a^2 \sqrt{7}}{6} \text{ (đvdt)}.$$

($p = \frac{SC + SD + CD}{2}$ là nửa chu vi tam giác ΔSCD).

Vậy khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD):

$$d(B, (SCD)) = \frac{3.V_{B.SCD}}{S_{\Delta SCD}} = \frac{3.V_{S.BCD}}{S_{\Delta SCD}} = \frac{3 \cdot \frac{a^3 \sqrt{3}}{18}}{\frac{a^2 \sqrt{7}}{6}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Câu 20. (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$ (minh họa như hình vẽ bên dưới). Gọi M là trung điểm của CD , khoảng cách giữa điểm M và mặt phẳng (SBD) bằng



A. $\frac{2a}{3}$.

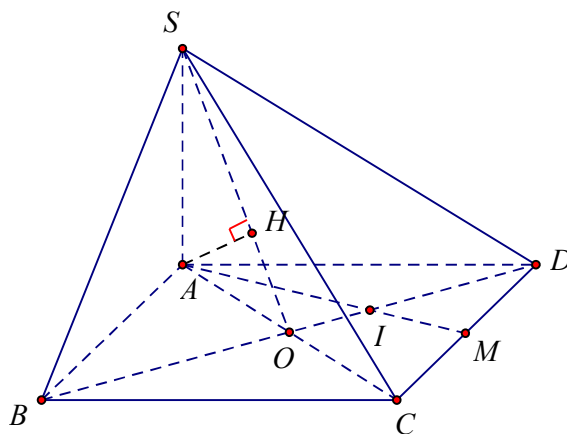
B. $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

C. $\frac{a}{2}$.

D. $\frac{a}{3}$.

Chọn D

Lời giải



Gọi I là giao điểm của AM và BD , O là tâm hình vuông $ABCD$.

Ta có $d(M, (SBD)) = \frac{1}{2} d(A, (SBD))$.

Dựng AH vuông góc với SO tại H . Ta có

$$\left. \begin{array}{l} BD \perp SA \\ BD \perp AO \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp (SAO) \Rightarrow BD \perp AH.$$

$$\left. \begin{array}{l} AH \perp SO \\ AH \perp BD \end{array} \right\} \Rightarrow AH \perp (SBD) \text{ nên } d(A, (SBD)) = AH.$$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{9}{4a^2} \Rightarrow AH = \frac{2a}{3}.$$

Vậy, $d(M, (SBD)) = \frac{a}{3}$.

Câu 21. (Chuyên Lương Văn Ty - Ninh Bình - 2020) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , mặt bên (SBC) là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

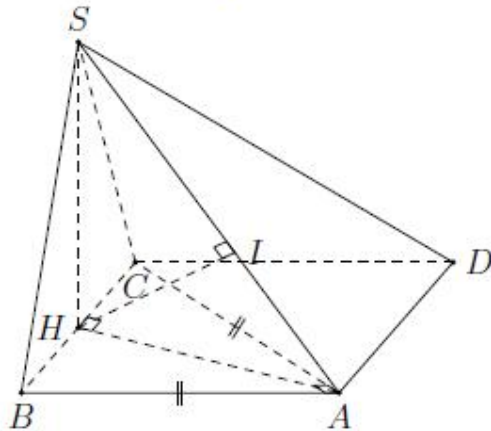
B. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

C. $\frac{a\sqrt{5}}{4}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm của BC . Khi đó $SH \perp (ABCD)$. Do tam giác ABC vuông cân tại A nên $AH \perp BC$ và $AH = \frac{a}{2}$.

Dựng điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Khi đó $d(SA, BC) = s(BC, (SAD)) = d(H, (SAD))$

$$\text{Kẻ } HI \perp SA \Rightarrow d(H, (SAD)) = HI = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 22. (Chuyên Nguyễn Bình Khiêm - Quảng Nam - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh a và có góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Đường thẳng SO vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ và $SO = \frac{3a}{4}$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{3a}{4}$.

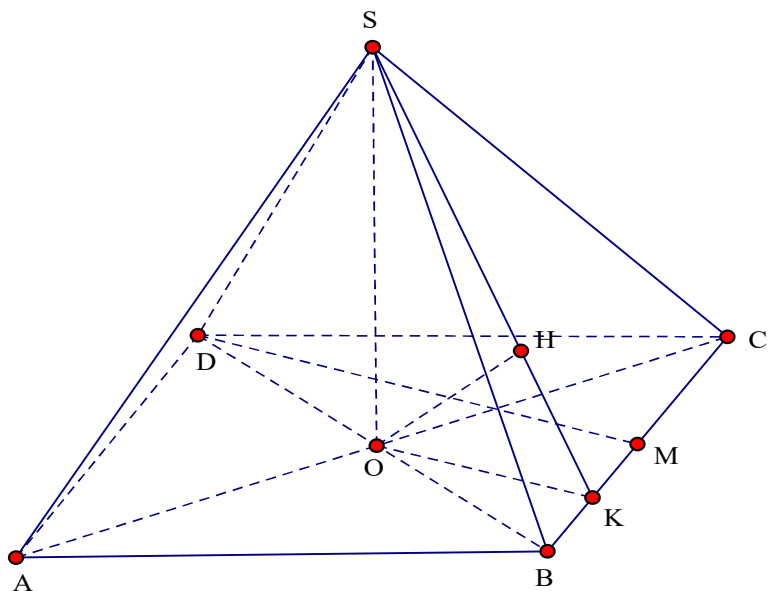
B. $\frac{a}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{3a}{8}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: tứ giác $ABCD$ là hình thoi cạnh a có $\widehat{BAD} = 60^\circ$ suy ra tam giác BCD là tam giác đều cạnh a .

Gọi M là trung điểm cạnh BC . Suy ra $DM \perp BC$ và $DM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Kẻ $OK \parallel DM$, ($K \in BC$) $\Rightarrow OK \perp BC$ và $OK = \frac{1}{2}DM = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vì $SO \perp (ABCD) \Rightarrow BC \perp SO \Rightarrow BC \perp (SOK)$.

Kẻ $OH \perp SK$, ($H \in SK$) $\Rightarrow OH \perp (SBC)$.

$$\text{Từ đó ta có: } d(O, (SBC)) = OH = \frac{OK \cdot SO}{\sqrt{OK^2 + SO^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3a}{4}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2}} = \frac{3a}{8}.$$

Câu 23. (Chuyên Nguyễn Bình Khiêm - Quảng Nam - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , $AB = 3a$, $AD = DC = a$. Gọi I là trung điểm của AD , biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60° . Tính theo a khoảng cách từ trung điểm cạnh SD đến mặt phẳng (SBC) .

A. $\frac{a\sqrt{17}}{5}$.

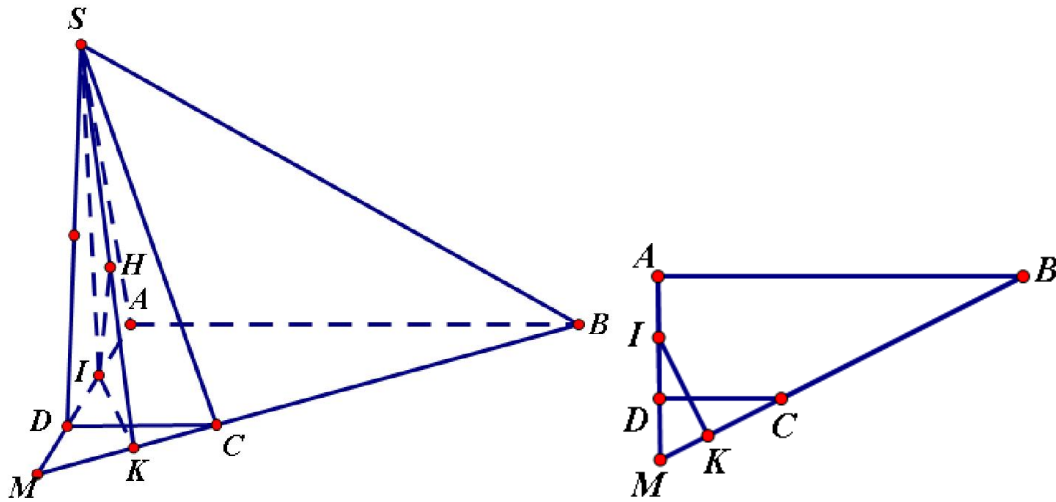
B. $\frac{a\sqrt{6}}{19}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{15}$.

D. $\frac{a\sqrt{15}}{20}$.

Lời giải

Chọn B



Kẻ $IK \perp BC (K \in BC) \Rightarrow ((SBC); (ABCD)) = \widehat{SKI} = 60^\circ$

Gọi $M = AD \cap BC$. Ta có $\frac{MD}{MA} = \frac{1}{3} \Rightarrow MD = \frac{a}{2}$

Ta có $\triangle MIK$ đồng dạng với $\triangle MBA$ nên suy ra $\frac{IK}{BA} = \frac{MI}{MB} = \frac{a}{\sqrt{(3a)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{15}$

$$\Rightarrow IK = \frac{2\sqrt{5}}{15} \cdot 3a = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

Gọi N là trung điểm của SD .

Ta có $d(N, (SBC)) = \frac{1}{2} d(D, (SBC)) = \frac{1}{4} d(I, (SBC))$

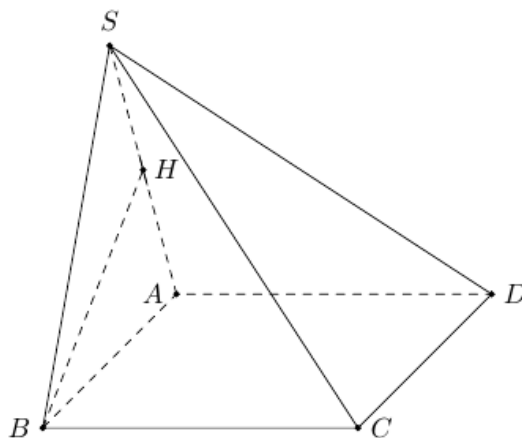
Từ I kẻ $IH \perp SK$ suy ra $IH = d(I, (SBC)) = IK \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{15}}{5} \Rightarrow d(N, (SBC)) = \frac{a\sqrt{15}}{20}$

Câu 24. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 2a, BC = a$, tam giác đều SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Khoảng cách giữa BC và SD là

- A.** $\sqrt{3}a$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. **C.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}a$. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{5}a$.

Lời giải

Chọn A



$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \parallel AD \\ AD \subset (SAD) \Rightarrow BC \parallel (SAD), \text{ do đó } d(BC, SD) = d(BC, (SAD)) = d(B, (SAD)). \\ BC \not\subset (SAD) \end{cases}$$

Tam giác SAB đều, gọi H là trung điểm SA thì $BH \perp SA$ (1).

$$\text{Ta có } \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ AD \perp AB \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow (SAB) \perp (SAD) \text{ (2)}.$$

Từ (1) và (2) suy ra $BH \perp (SAD)$, do đó $d(B, (SAD)) = BH = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Câu 25. (Chuyên Bắc Ninh - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = a$ và SA vuông góc với mặt đáy. M là trung điểm SD . Tính khoảng cách giữa SB và CM .

A. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

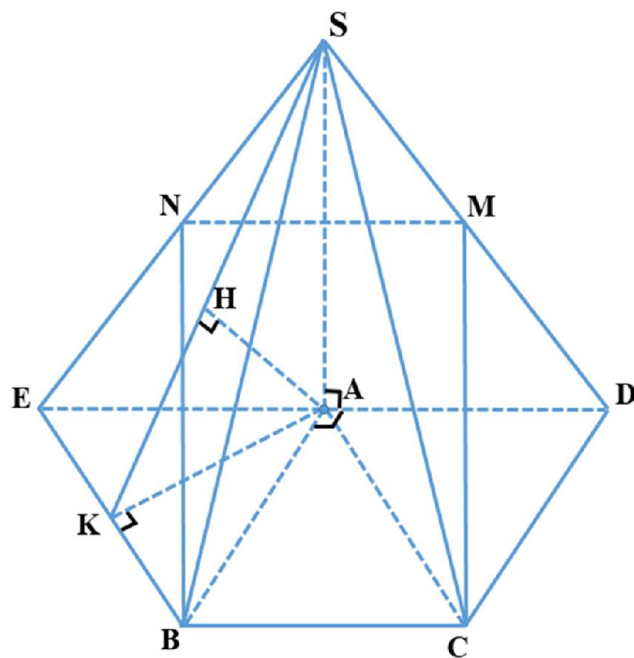
B. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Cách 1

Gọi E là điểm đối xứng với D qua A , N là trung điểm của SE và K là trung điểm của BE . Ta có các tứ giác $NMCB$ và $ACBE$ là các hình bình hành.

Có $CM \parallel (SBE)$ nên $d(CM, SB) = d(CM, (SBE)) = d(C, (SBE)) = d(A, (SBE))$.

$\triangle ABE$ vuông cân tại A có $AB = a$ nên $AK \perp BE$ và $AK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Kẻ $AH \perp SK$, $H \in SK$.

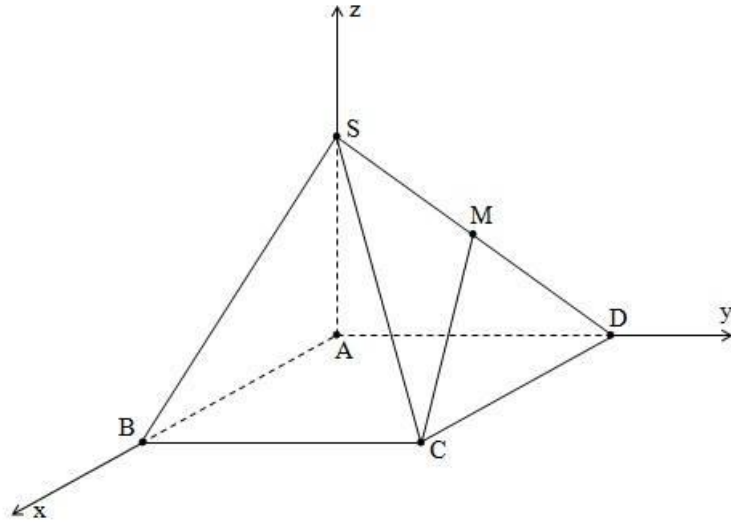
Có $\begin{cases} BE \perp AK \\ BE \perp SA \end{cases} \Rightarrow BE \perp (SAK) \Rightarrow BE \perp AH$.

Có $\begin{cases} AH \perp BE \\ AH \perp SK \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBE) \Rightarrow d(A, (SBE)) = AH$.

Ta có $AK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $SK = \sqrt{SA^2 + AK^2} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; $AH = \frac{SA \cdot AK}{SK} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $d(CM, SB) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Cách 2:



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho:

$A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;a;0), S(0;0;a) \Rightarrow C(a;a;0), M\left(0; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{SC} = (a; a; -a)$, $\overrightarrow{SB} = (a; 0; -a)$, $\overrightarrow{MC} = \left(a; \frac{a}{2}; -\frac{a}{2}\right) \Rightarrow [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{MC}] = \left(\frac{a^2}{2}; -\frac{a^2}{2}; \frac{a^2}{2}\right)$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CM là:

$$d(SB, CM) = \frac{|[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{MC}] \cdot \overrightarrow{SC}|}{|[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{MC}]|} = \frac{\left|\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{2}\right|}{\sqrt{\frac{a^4}{4} + \frac{a^4}{4} + \frac{a^4}{4}}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $d(CM, SB) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 26. (Chuyên Bến Tre - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = 2a$ và vuông góc với $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của SD . Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SB và CM .

A. $d = \frac{a}{3}$.

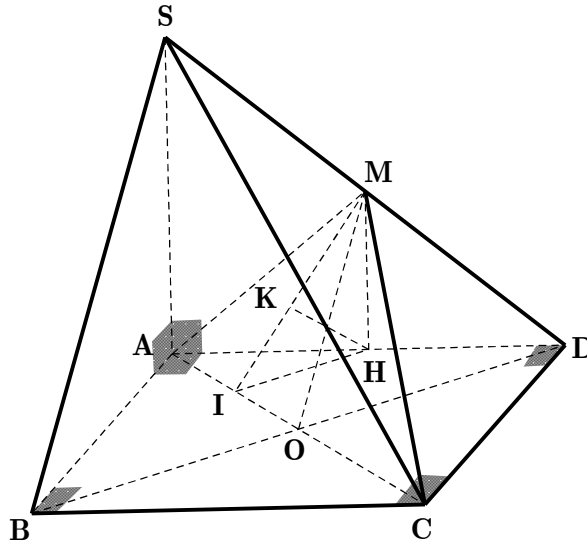
B. $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $d = \frac{2a}{3}$.

D. $d = \frac{a}{6}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $O = AC \cap BD$.

Vì $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên O là trung điểm của BD mà M là trung điểm của SD nên $OM \parallel SB$ suy ra $SB \parallel (ACM)$.

Do đó $d(SB, CM) = d(SB, (ACM)) = d(B, (ACM)) = d(D, (ACM))$.

Gọi H là trung điểm của AD nên $MH \parallel SA \Rightarrow MH \perp (ABCD)$.

$\Rightarrow d(SB, CM) = d(D, (ACM)) = 2d(H, (ACM))$.

Kẻ $HI \perp AC \Rightarrow (MHI) \perp (MAC)$ theo giao tuyến MI , kẻ $HK \perp MI \Rightarrow HK \perp (ACM)$ hay $d(H, (ACM)) = HK$.

Có $HI = \frac{1}{2}OD = \frac{1}{4}BD = \frac{1}{4}\sqrt{AB^2 + AD^2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, $MH = \frac{1}{2}SA = a$.

Suy ra $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HM^2} + \frac{1}{HI^2} \Leftrightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{9}{a^2} \Leftrightarrow HK = \frac{a}{3}$.

Vậy $d(SB, CM) = 2d(H, (ACM)) = 2HK = \frac{2a}{3}$.

Câu 27. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$,

$SA = a\sqrt{6}$, $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AD = 2a$. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

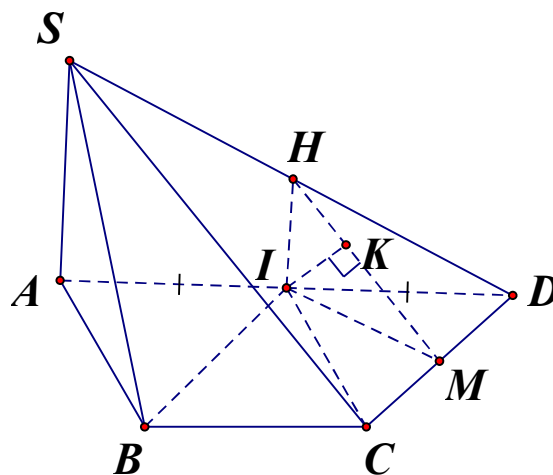
B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là trung điểm AD và H là trung điểm SD suy ra $HI \parallel SA \Rightarrow HI \perp (ABCD)$.

Do $ABCD$ là nửa lục giác đều và I là trung điểm AD nên $BI \parallel CD$.

Suy ra $d(B, (SCD)) = d(I, (SCD))$.

Do $ABCD$ là nửa lục giác đều nên dễ thấy $\triangle ICD$ là tam giác đều.

Gọi M là trung điểm CD suy ra $CD \perp (HIM)$.

Trong (IHM) kẻ $IK \perp HM$.

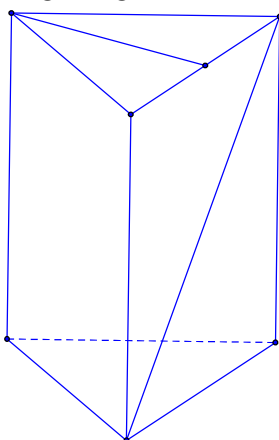
Ta có: $\begin{cases} IK \perp HM \\ IK \perp CD \end{cases} \quad (CD \perp (HIM)) \Rightarrow IK \perp (SCD)$.

$\Rightarrow d(I, (SCD)) = IK$.

Xét $\triangle IHM$ có: $\frac{1}{IK^2} = \frac{1}{IH^2} + \frac{1}{IM^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{a^2}$.

$\Rightarrow IK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Vậy $d(B, (SCD)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 28. (Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020) Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là một tam giác vuông cân tại B , $AB = AA' = 2a$, M là trung điểm BC (minh họa như hình dưới). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$ bằng



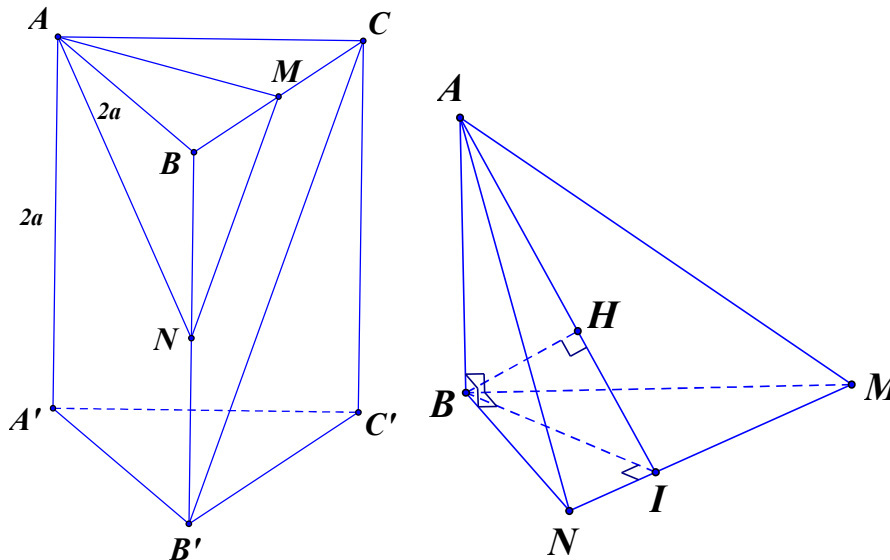
A. $\frac{a}{2}$.

B. $\frac{2a}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{7}}{7}$.

D. $a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi N là trung điểm $BB' \Rightarrow MN \parallel B'C \Rightarrow B'C \parallel (AMN)$.

Khi đó $d(AM, B'C) = d(B'C, (AMN)) = d(C, (AMN))$.

Ta có $BC \cap (AMN) = M$ và $MB = MC$ nên $d(C, (ABM)) = d(B, (ABM))$.

Gọi h là khoảng cách từ B đến mặt phẳng (ABM) . Tứ diện $BAMN$ có BA, BM, BN đôi một

vuông góc nên: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BN^2}$

$$AB = 2a = BC.$$

$$BN = \frac{1}{2}BB' = \frac{1}{2}AA' = \frac{2a}{2} = a.$$

$$BM = \frac{1}{2}BC = a.$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{h^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{9}{4a^2} \Rightarrow h^2 = \frac{4a^2}{9} \Rightarrow h = \frac{2a}{3}.$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$ bằng $\frac{2a}{3}$.

Câu 29. (Chuyên Lào Cai - 2020) Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$ và $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$. Biết góc giữa đường thẳng SA và mặt đáy bằng 45° . Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) .

A. $\frac{\sqrt{15}}{5}a$.

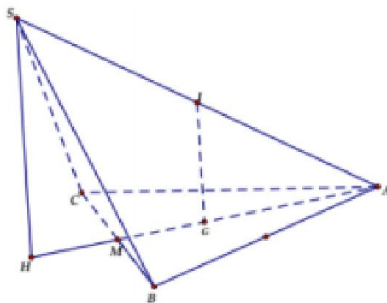
B. $\frac{2\sqrt{15}}{5}a$.

C. $\frac{2\sqrt{15}}{3}a$.

D. $\frac{2\sqrt{51}}{5}a$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm của SA.

Tam giác SAB và SAC là các tam giác vuông tại B, C $\Rightarrow IS = IA = IB = IC$.

Gọi G là trọng tâm tam giác đều ABC $\Rightarrow IG \perp (ABC)$

Trong (SAG) kẻ $SH \parallel IG (H \in CG) \Rightarrow SH \perp (ABC)$

Để thấy khi đó IG là đường trung bình của tam giác SAH $\Rightarrow SH = 2IG$

Tam giác ABC đều cạnh $= 2a \Rightarrow AG = \frac{2}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

Ta có: $(\widehat{SA, (ABC)}) = (\widehat{SA, AH}) = \widehat{SAH} = 45^\circ \Rightarrow \triangle AIG$ vuông cân tại G

$$\Leftrightarrow IG = AG = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SH = 2IG = \frac{4a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{(2a)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{4a^3}{3}$$

Ta có: $GA = GB = GC, GA = GH$ (IG là đường trung bình của tam giác SAH)

$\Rightarrow GA = GB = GC = GH \Rightarrow G$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABHC.

$\Rightarrow AH$ là đường kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABHC $\Leftrightarrow \widehat{ACH} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$$\text{Ta có: } AH = 2AG = \frac{4a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow CH = \sqrt{AH^2 - AC^2} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = \sqrt{\left(\frac{4a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2\sqrt{15}a}{3}$$

$$S_{SAC} = \frac{1}{2} SC \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{15}a}{3} \cdot 2a = \frac{2\sqrt{15}a^2}{3}$$

$$\text{Vậy } d(B, (SAC)) = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{SAC}} = \frac{3 \cdot \frac{4a^3}{3}}{\frac{2\sqrt{15}a^2}{3}} = \frac{2a\sqrt{15}}{5}$$

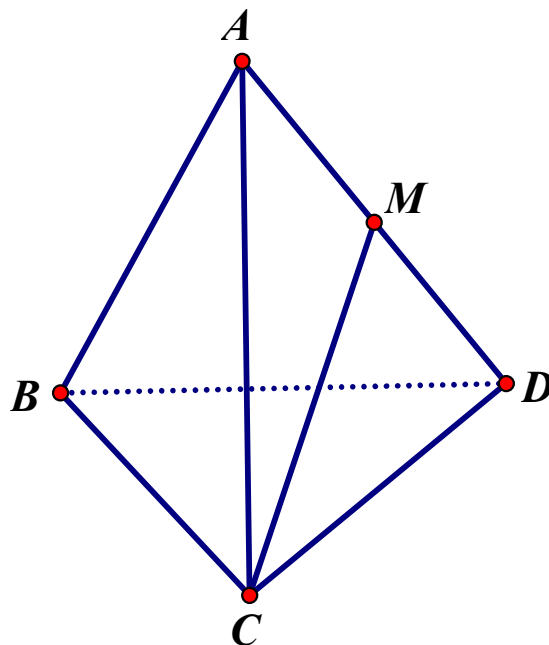
Câu 30. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020) Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của cạnh AD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CM.

A. $\frac{a\sqrt{33}}{11}$.

B. $\frac{a}{\sqrt{33}}$.

C. $\frac{a}{\sqrt{22}}$.

D. $\frac{a\sqrt{22}}{11}$.



Lời giải

Chọn C

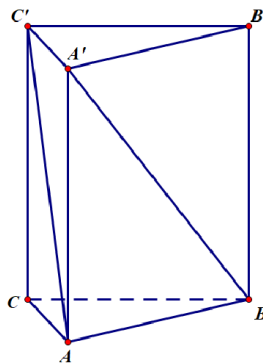
$$\text{Ta có: } V_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}; \frac{V_{ABCD}}{V_{ABCM}} = \frac{1}{2} \rightarrow V_{ABCM} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$$

$$V_{ABCM} = \frac{1}{6} AB \cdot CM \cdot d(AB, CM) \cdot \sin(AB, CM)$$

$$\cos(AB, CM) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM}|}{AB \cdot CM} = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC})|}{AB \cdot CM} = \frac{\left| \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} \right|}{a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\rightarrow \sin(AB, CM) = \sqrt{1 - \frac{1}{12}} = \sqrt{\frac{11}{12}}. \text{ Vậy } d(AB, CM) = \frac{6V_{ABCM}}{AB \cdot CM \cdot \sin(AB, CM)} = \frac{a\sqrt{22}}{11}.$$

Câu 31. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020) Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh có độ dài bằng 2 (tham khảo hình vẽ). Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC' và $A'B$.

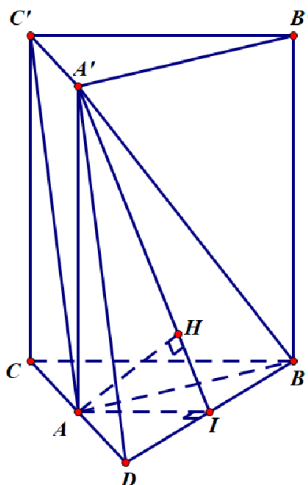


A. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.

Chọn A**Lời giải**

Gọi D là điểm đối xứng của C qua A ta có tứ giác $ADA'C'$ là hình bình hành do đó $A'D \parallel AC'$, suy ra khoảng cách $d(AC', BA') = d(AC', (A'BD)) = d(A, (A'BD))$.

Theo giả thiết $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đều nên $AA' \perp (ABC)$ hay $AA' \perp (ABCD)$ suy ra $A'A \perp BD$ (1).

Ta có $\triangle ABD$ có $AB = AD$ nên là tam giác cân tại A , gọi I là trung điểm BD ta có $AI \perp BD$ (2).

Xét tam giác $\triangle ABCD$ có A, I lần lượt là trung điểm của DC, DB nên $AI = \frac{1}{2}BC = 1$.

Trong mặt phẳng $(A'AI)$ dựng $AH \perp A'I; H \in A'I$ (3).

Từ (1) và (2) suy ra $BD \perp (A'AI) \Rightarrow BD \perp AH$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $AH \perp (A'BD)$ do đó khoảng cách $d(A, (SBD)) = AH$.

Trong tam giác $A'AI$ vuông tại A ta có $AH = \frac{AI \cdot AA'}{\sqrt{AI^2 + (AA')^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Từ đây chọn đáp án **A**.

Câu 32. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2020) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) ; góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng ABC bằng 60° .

Gọi M là trung điểm cạnh AB . Khoảng cách từ B đến (SMC) bằng

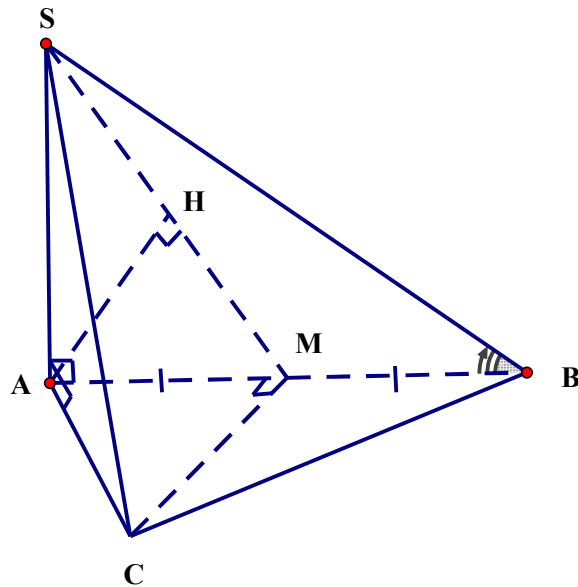
A. $\frac{a\sqrt{39}}{13}$.

B. $a\sqrt{3}$.

C. a .

D. $\frac{a}{2}$.

Lời giải**Chọn A**



Ta có $(SB, (ABC)) = \widehat{SBA} = 60^\circ \Rightarrow SA = \tan 60^\circ \cdot a = a\sqrt{3}$.

Vì M là trung điểm của AB $\Rightarrow d(B, (SMC)) = d(A, (SMC))$.

Dựng AH vuông góc với SM tại H $\Rightarrow d(A, (SMC)) = AH$ mà $AM = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$.

Xét tam giác vuông $\triangle SAM$ ta có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{13}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{39}}{13}$.

Câu 33. (Đại Học Hà Tĩnh - 2020) Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông và $AB = BC = a$, $AA' = a\sqrt{2}$, M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách d của hai đường thẳng AM và $B'C'$.

A. $d = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

B. $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

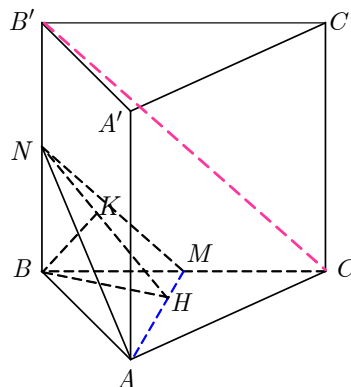
C. $d = \frac{a\sqrt{7}}{7}$.

D. $d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:



Do $\triangle ABC$ vuông và có $AB = BC$ nên $\triangle ABC$ vuông cân tại B.

Gọi N là trung điểm của BB' , ta có: $B'C' \parallel (AMN)$.

Khi đó: $d(AM, B'C') = d(B'C', (AMN)) = d(C, (AMN)) = d(B, (AMN))$.

Kẻ $BH \perp AM$ tại H và kẻ $BK \perp NH$ tại K.

Ta có: $BH \perp AM, BN \perp AM \Rightarrow AM \perp (NBH) \Rightarrow BK \perp AM$.

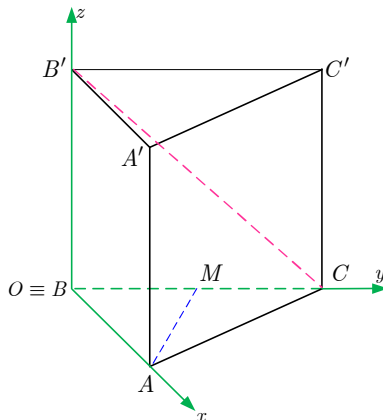
Do $BK \perp NH, BK \perp AM$ nên $BK \perp (AMN)$.

Suy ra: $d(B, (AMN)) = BK$.

Mặt khác: $BH = \frac{BM \cdot BA}{\sqrt{BM^2 + BA^2}} = \frac{\sqrt{5}a}{5}$; $BK = \frac{BH \cdot BN}{\sqrt{BH^2 + BN^2}} = \frac{a\sqrt{7}}{7}$.

Vậy $d(AM, B'C) = d(B, (AMN)) = BK = \frac{a\sqrt{7}}{7}$.

Cách 2:



Do $\triangle ABC$ vuông và có $AB = BC$ nên $\triangle ABC$ vuông cân tại B .

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a = 1$.

Ta có: $A(1; 0; 0)$, $M\left(0; \frac{1}{2}; 0\right)$, $B'(0; 0; \sqrt{2})$, $C(0; 1; 0)$.

$$\overrightarrow{AM} = \left(-1; \frac{1}{2}; 0\right), \overrightarrow{B'C} = (0; 1; -\sqrt{2}), \overrightarrow{AC} = (-1; 1; 0); [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C}] = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\sqrt{2}; -1\right).$$

$$\text{Khi đó: } d(AM, B'C) = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C}]|}{|[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C}]|} = \frac{\left|\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} + 0\right|}{\sqrt{\frac{1}{2} + 2 + 1}} = \frac{\sqrt{7}}{7}.$$

Trong trường hợp tổng quát, ta có: $d(AM, B'C) = \frac{a\sqrt{7}}{7}$.

Câu 34. (ĐHQG Hà Nội - 2020) Cho lăng trụ đứng $ABCA'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của AA' . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và $B'C$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}a$.

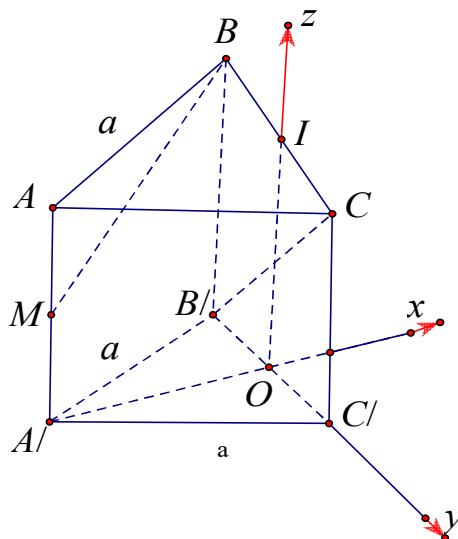
B. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}a$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}a$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O và I lần lượt là trung điểm của $B'C'$, BC . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho:

$$O(0;0;0); A' \in Ox \Rightarrow A'(-\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 0); C' \in Oy \Rightarrow C'(0; \frac{1}{2}; 0); I \in Oz \Rightarrow I(0; 0; 1)$$

$$\Rightarrow B'(0; -\frac{1}{2}; 0); C(0; \frac{1}{2}; 1); B(0; -\frac{1}{2}; 1); A(-\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 1); M(-\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; \frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{B'C} = (0; 1; 1); \overrightarrow{BM} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}) \Rightarrow [\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{B'C}] = (1; \frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BC} = (0; 1; 0)$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và $B'C$ là:

$$d(BM; B'C) = \frac{|\overrightarrow{BC} \cdot [\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{B'C}]|}{\|[\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{B'C}]\|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{1 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} \text{ nên chọn đáp án B}$$

Câu 35. (Sở Phú Thọ - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O , cạnh $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của đoạn OA . Góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30° . Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. $\frac{9\sqrt{22}a}{44}$.

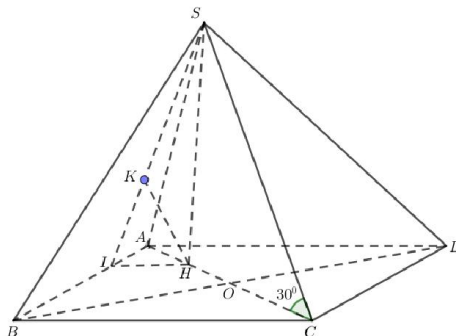
B. $\frac{3\sqrt{22}a}{11}$.

C. $\frac{\sqrt{22}a}{11}$.

D. $\frac{3\sqrt{22}a}{44}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm AO , ta có $SH \perp (ABCD)$.

Góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng $\widehat{SCH}$ bằng 30° .

Ta có $CA = 4HA$, suy ra $d(C, (SAB)) = 4d(H, (SAB))$.

Kẻ $HI \perp AB$, $HK \perp SI$, ta suy ra $HK \perp (SAB)$.

$$d(H, (SAB)) = HK.$$

$$HI = \frac{1}{4}AD = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

$$CH = \frac{3}{4}AC = \frac{3\sqrt{3}a}{4}$$

$$\text{Suy ra } SH = CH \cdot \tan 30^\circ = \frac{3a}{4}.$$

Xét tam giác SHI vuông tại H có HK là đường cao.

$$\text{Suy ra } \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HI^2} = \frac{16}{9a^2} + \frac{16}{2a^2}$$

$$HK = \frac{3a}{2\sqrt{22}}.$$

$$d(C, (SAB)) = 4d(H, (SAB)) = 4 \cdot \frac{3a}{2\sqrt{22}} = \frac{3\sqrt{22}a}{11}.$$

Câu 36. (Sở Phú Thọ - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của cạnh AB , góc giữa mặt phẳng (SAC) và đáy bằng 45° . Gọi M là trung điểm của cạnh SD . Khoảng cách giữa hai đường AM và SC bằng

A. a .

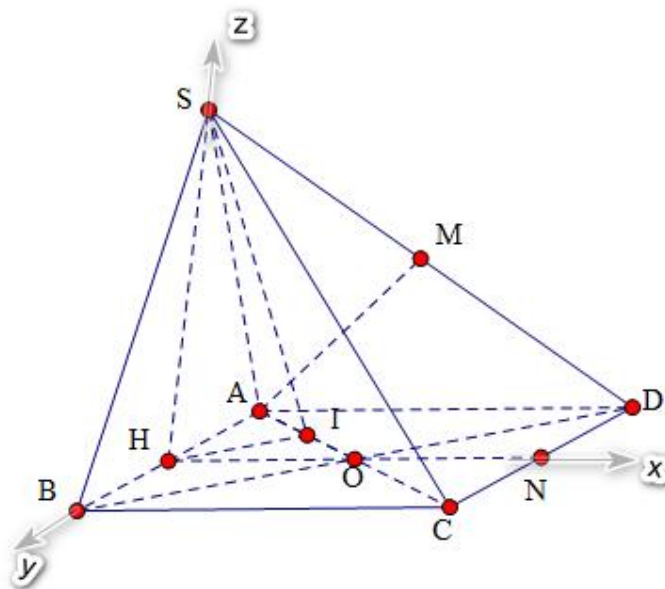
B. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

C. $\frac{a\sqrt{5}}{10}$.

D. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm cạnh AB , I là trung điểm cạnh AO . Suy ra $SH \perp (ABCD)$,

$$(\widehat{SAC}), (\widehat{ABCD}) = \widehat{SIH} = 45^\circ. \text{ Do đó } SH = IH = \frac{1}{2}BO = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Gọi N là trung điểm cạnh CD , khi đó $HN \perp AB$.

Chọn hệ trục tọa độ trong không gian như hình vẽ, ta có tọa độ các điểm

$$H(0;0;0), A\left(0;-\frac{a}{2};0\right); S\left(0;0;\frac{a\sqrt{2}}{4}\right); D\left(a;-\frac{a}{2};0\right); M\left(\frac{a}{2};-\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{2}}{8}\right); C\left(a;\frac{a}{2};0\right).$$

$$\text{Nên } \overrightarrow{AM} = \left(\frac{a}{2}; \frac{a}{4}; \frac{a\sqrt{2}}{8}\right); \overrightarrow{SC} = \left(a; \frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{2}}{4}\right); \overrightarrow{AC} = (a; a; 0).$$

Khoảng cách giữa hai đường AM và SC là

$$d(AM, SC) = \frac{|\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{SC}|} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 37. (Sở Hà Tĩnh - 2020) Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau và $AD = 2, AB = AC = 1$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BC , khoảng cách giữa hai đường thẳng AI và BD bằng

A. $\frac{3}{2}$.

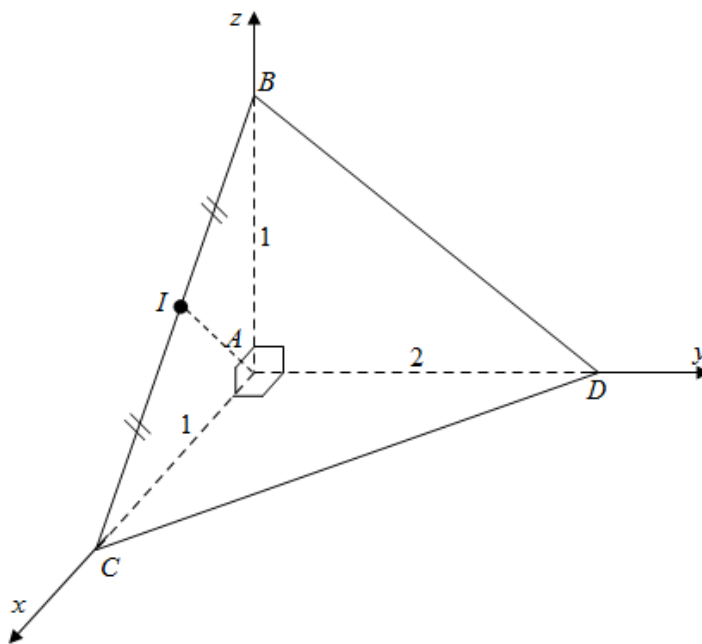
B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Vì tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau, nên ta chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ (với A là gốc tọa độ, đường thẳng AC nằm trên trục Ax , AD nằm trên trục Ay và AB nằm trên trục Az).

Từ đó suy ra: $A(0;0;0)$, $B(0;0;1)$ vì $B \in Az$, $C(1;0;0)$ vì $C \in Ax$, $D(0;2;0)$ vì $D \in Ay$.

Vì I là trung điểm của BC nên $I\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$.

Từ đó, ta quay về bài toán tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau trong hệ tọa độ không gian $Axyz$.

Ta có $\overrightarrow{AI} = \left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{BD} = (0; 2; -1) \Rightarrow [\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{BD}] = \left(-1; \frac{1}{2}; 1\right)$ và $\overrightarrow{AB} = (0; 0; 1)$.

$$\text{Ta có } d(AI, BD) = \frac{|\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{BD}|} = \frac{|(-1) \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}} = \frac{2}{3}.$$

Câu 38. (Sở Ninh Bình) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a$, tam giác ABC đều, tam giác SAB vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng

A. $\frac{a\sqrt{42}}{7}$.

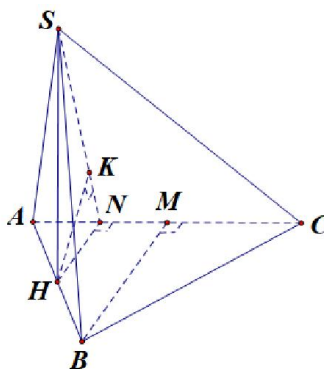
B. $\frac{a\sqrt{42}}{14}$.

C. $\frac{a\sqrt{42}}{12}$.

D. $\frac{a\sqrt{42}}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H, M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, AM .

Do tam giác SAB vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy $\Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Kẻ $HK \perp SN$ (1).

Ta có: $\begin{cases} AC \perp HN \\ AC \perp SH \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SHN) \Rightarrow AC \perp HK$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow HK \perp (SAC) \Rightarrow d(H; (SAC)) = HK$.

Ta có $d(B; (SAC)) = 2d(H; (SAC))$.

Do tam giác SAB vuông cân tại S và $SA = a \Rightarrow \begin{cases} AB = a\sqrt{2} \\ SH = \frac{a\sqrt{2}}{2} \end{cases}$.

Do tam giác ABC đều $\Rightarrow \begin{cases} BM = \frac{a\sqrt{6}}{2} \\ HN = \frac{a\sqrt{6}}{4} \end{cases}$.

Xét tam giác vuông SHN , ta có $HK = \frac{SH \cdot HN}{\sqrt{SH^2 + HN^2}} = \frac{\sqrt{42}}{14} a$.

Vậy $d(B; (SAC)) = 2d(H; (SAC)) = 2HK = \frac{\sqrt{42}}{7} a$.

Câu 39. (Sở Yên Bái - 2020) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại B , biết $AB = BC = a$, $AA' = a\sqrt{2}$, M là trung điểm của BC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C'$.

A. $\frac{a\sqrt{7}}{7}$.

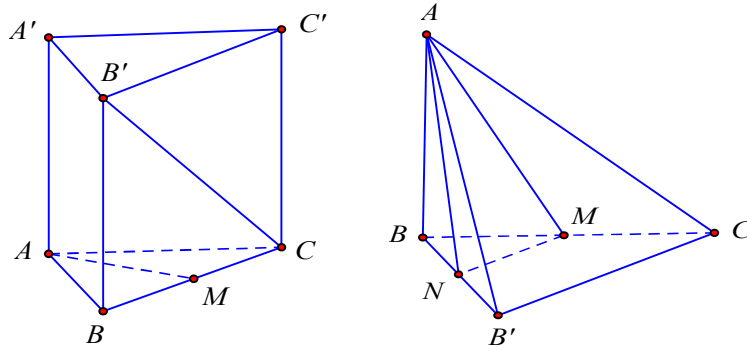
B. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

C. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải

Chọn A



Kẻ $MN \parallel B'C \Rightarrow B'C \parallel (AMN)$

$$\Rightarrow d = d(B'C, MN) = d(B'C, (AMN)) = d(C, (AMN)) = d(B, (AMN)).$$

Ta có tứ diện $BAMN$ là tứ diện vuông

$$\Rightarrow \frac{1}{d^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BN^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{7}{a^2} \Rightarrow d = \frac{a\sqrt{7}}{7}.$$

Câu 40. (**Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020**) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Gọi M là trung điểm của SD , hãy tính theo a khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAC) .

A. $d = \frac{2a\sqrt{1513}}{89}$.

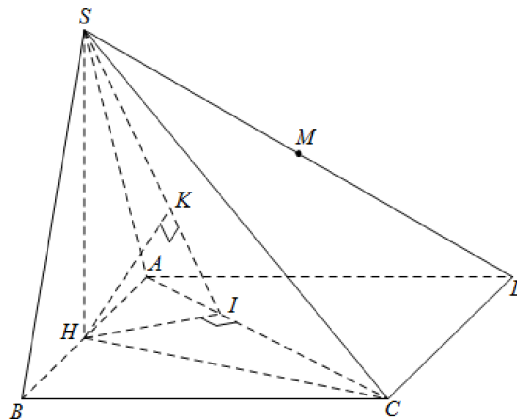
B. $d = \frac{a\sqrt{1315}}{89}$.

C. $d = \frac{2a\sqrt{1315}}{89}$.

D. $d = \frac{a\sqrt{1513}}{89}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp AB$ (ΔSAB cân tại S).

$$\text{Ta có } \begin{cases} (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ (SAB) \perp (ABCD) \\ SH \perp AB (\text{cmt}) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$$

Vì $SH \perp (ABCD)$, nên hình chiếu vuông góc của đường thẳng SC lên mặt phẳng $(ABCD)$ là HC , suy ra $(SC, (ABCD)) = (SC, HC) = \widehat{SCH} = 45^\circ$.

$$\Delta HBC \text{ vuông tại } B, \text{ có } HC = \sqrt{HB^2 + BC^2} = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + BC^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (2a)^2} = \frac{a\sqrt{17}}{2}.$$

$$\Delta SHC \text{ vuông cân tại } H, \text{ suy ra } SH = HC = \frac{a\sqrt{17}}{2}.$$

$$\text{Ta có } \frac{d(M, (SAC))}{d(D, (SAC))} = \frac{MS}{DS} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(M, (SAC)) = \frac{1}{2} d(D, (SAC)) = \frac{1}{2} d(B, (SAC)).$$

$$\text{Mặt khác } \frac{d(B, (SAC))}{d(H, (SAC))} = \frac{BA}{HA} = 2 \Rightarrow d(B, (SAC)) = 2d(H, (SAC)).$$

$$\text{Từ đó } d(M, (SAC)) = d(H, (SAC)).$$

Trong mặt phẳng (SAC) , kẻ $HI \perp AC$ và kẻ $HK \perp SI$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} AC \perp HI (gt) \\ AC \perp SH (SH \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SHI) \Rightarrow AC \perp HK.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} HK \perp SI (gt) \\ HK \perp AC (cmt) \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SAC) \Rightarrow d(H, (SAC)) = HK.$$

$$\Delta ABC \text{ vuông tại } B, \text{ có } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5}.$$

$$\Delta AIH \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AI}{AB} = \frac{IH}{BC} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow IH = \frac{BC \cdot AH}{AC} = \frac{BC \cdot AB}{2AC} = \frac{2a \cdot a}{2 \cdot a\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

$$\Delta SHI \text{ vuông tại } H, \text{ có } HK = \frac{SH \cdot HI}{\sqrt{SH^2 + HI^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{17}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{5}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{17}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{5}}{5}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{1513}}{89}.$$

Câu 41. (Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh SA tạo với mặt phẳng đáy một góc 30° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD bằng

A. $\frac{2\sqrt{15}a}{5}$.

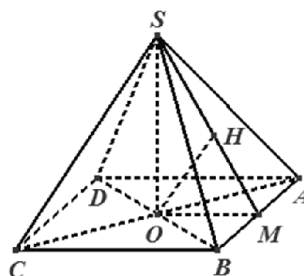
B. $\frac{3\sqrt{14}a}{5}$.

C. $\frac{2\sqrt{10}a}{5}$.

D. $\frac{4\sqrt{5}a}{5}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O là tâm của mặt đáy, M là trung điểm của AB , H là hình chiếu của O trên SM .

$$\text{Ta có } (SA, (ABCD)) = (SA, OA) = \widehat{SAO} \Rightarrow \widehat{SAO} = 30^\circ \Rightarrow SO = AO \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Ta có } AB \perp OM, AB \perp SO \Rightarrow AB \perp (SOM) \Rightarrow AB \perp OH, \text{ mà } SM \perp OH \Rightarrow OH \perp (SAB).$$

Tam giác SOM vuông tại O và có đường cao OH nên

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OM^2} = \frac{3}{2a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{2a^2} \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{10}a}{5}.$$

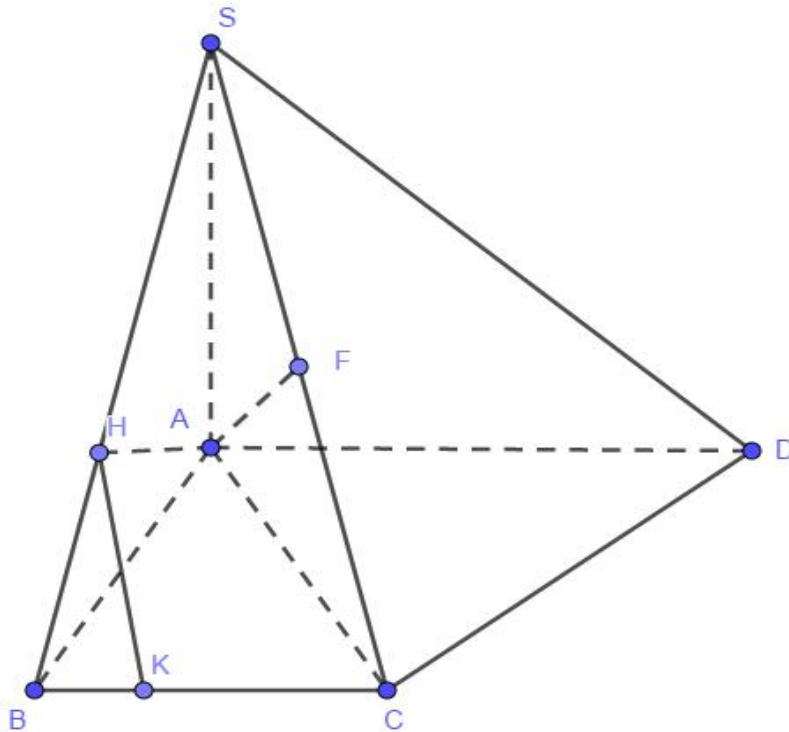
$$\text{Vì } CD \parallel AB \Rightarrow d(CD, SA) = d(CD, (SAB)) = d(C, (SAB)) = 2d(O, (SAB)) = 2OH = \frac{2\sqrt{10}a}{5}.$$

Câu 42. (Hệ Lọc 2 - Thanh Hóa - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AD = 2AB = 2BC = 2a$, SA vuông góc với đáy, góc giữa SB và mặt phẳng đáy bằng 60° . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SB . Khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD) bằng

- A. $a\sqrt{3}$. B. $\frac{3a\sqrt{30}}{20}$. C. $\frac{3a\sqrt{30}}{10}$. **D. $\frac{3a\sqrt{30}}{40}$.**

Lời giải

Chọn D



Kẻ $HK \parallel SC \Rightarrow HK \parallel (SCD)$. Khi đó $d(H, (SCD)) = d(K, (SCD))$.

Ta có $SA = AB \cdot \tan \widehat{SBA} = a \cdot \tan \widehat{(SB; (ABCD))} = a \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

$$\Rightarrow SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = 2a.$$

$$\text{Mà } AB^2 = BH \cdot SB \Rightarrow \frac{BH}{SB} = \frac{AB^2}{SB^2} = \frac{1}{4}. \text{ Vì } HK \parallel SC \text{ nên } \frac{BK}{BC} = \frac{1}{4} \Rightarrow BK = \frac{a}{4} \Rightarrow KC = \frac{3a}{4}.$$

$$\text{Vì } KC \parallel AD \text{ nên } \frac{d(K; (SCD))}{d(A; (SCD))} = \frac{KC}{AD} = \frac{3}{8} \Rightarrow d(K; (SCD)) = \frac{3}{8} d(A; (SCD)).$$

Gọi F là hình chiếu vuông góc của A lên SC .

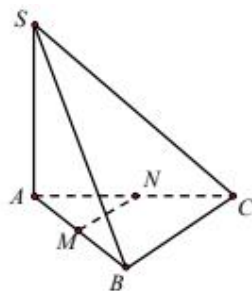
$$\text{Do } \begin{cases} AC \perp DC \\ SA \perp DC \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SAC) \Rightarrow DC \perp AF.$$

$$\text{Vì } \begin{cases} AF \perp SC \\ AF \perp DC \end{cases} \Rightarrow AF \perp (SCD) \text{ nên}$$

$$d(A; (SCD)) = AF = \frac{SA \cdot AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{a\sqrt{30}}{5}, \text{ với } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } d(H; (SCD)) = d(K; (SCD)) = \frac{3}{8} d(A; (SCD)) = \frac{3a\sqrt{30}}{40}.$$

Câu 43. (Kim Liên - Hà Nội - 2020) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy là 60° (minh họa như hình dưới đây). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC .



Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và MN bằng

A. $\frac{3a}{8}$.

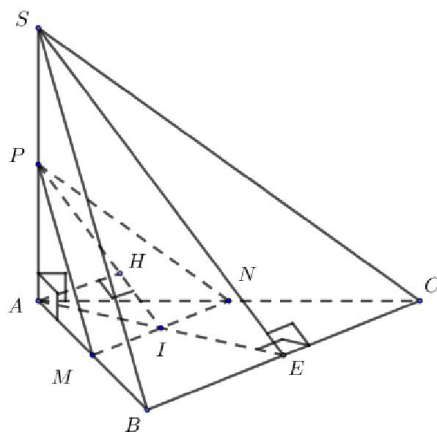
B. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

C. $\frac{3a}{4}$.

D. $a\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi E là trung điểm của BC , vì tam giác ABC đều $\Rightarrow AE \perp BC$, lại có $SA \perp BC \Rightarrow BC \perp SE$

Mặt khác $(SBC) \cap (ABC) = BC \Rightarrow ((SBC), (ABC)) = \widehat{SEA} = 60^\circ$.

Gọi P là trung điểm của $SA \Rightarrow SB \parallel MP, MP \subset (MNP) \Rightarrow SB \parallel (MNP)$
 $\Rightarrow d(SB, MN) = d(SB, (MNP)) = d(B, (MNP)) = d(A, (MNP))$

Gọi $AE \cap MN = I \Rightarrow \widehat{PIA} = \widehat{SEA} = 60^\circ$ và $AI \perp MN$

Ta có $MN \perp AI, MN \perp PI \Rightarrow MN \perp (API) \Rightarrow (PMN) \perp (API)$

Mà $(PMN) \cap (API) = PI$, kẻ $AH \perp PI \Rightarrow AH \perp (PMN) \Rightarrow d(A, (PMN)) = AH$.

Xét $\triangle API$ có $\widehat{AIP} = 60^\circ, AI = \frac{1}{2} AE = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow AH = AI \cdot \sin \widehat{AIP} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{8}$.

Vậy $d(SB, MN) = \frac{3a}{8}$.

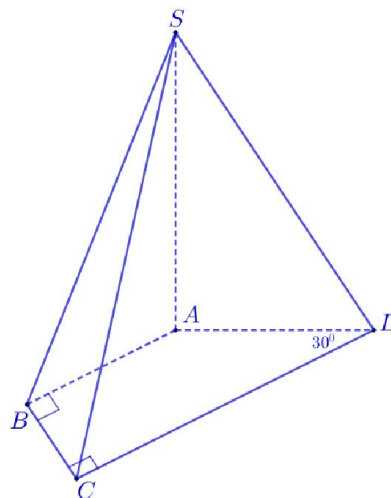
Câu 44. (Lê Lai - Thanh Hóa - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại B và C , $CD = 2AB$, $AD = a$, $\widehat{ADC} = 30^\circ$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$ (minh họa như hình bên dưới). Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{2\sqrt{57}a}{19}$.

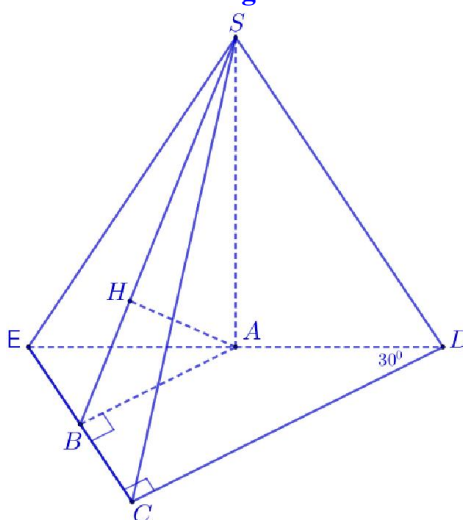
B. $\frac{\sqrt{57}a}{19}$.

C. $\frac{4\sqrt{57}a}{19}$.

D. $\sqrt{3}a$.



Lời giải



Chọn C

+) Gọi E là giao điểm của AD và $BC \Rightarrow DA$ cắt mặt phẳng (SBC) tại E .

$$\Rightarrow \frac{d(D, (SBC))}{d(A, (SBC))} = \frac{DE}{AE} \quad (1).$$

+) Theo giả thiết $\begin{cases} AB \parallel CD \\ AB = \frac{1}{2}CD \end{cases} \Rightarrow AB$ là đường trung bình của tam giác ECD (2).

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{d(D, (SBC))}{d(A, (SBC))} = \frac{DE}{AE} = 2 \Rightarrow d(D, (SBC)) = 2d(A, (SBC)).$$

+) Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$, do đó nếu gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SB thì $AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$.

+) Tam giác ECD vuông tại C , có:

• CA là đường trung tuyến $\Rightarrow CA = AE = AD = a \Rightarrow$ tam giác AEC là tam giác cân tại A .

• $\widehat{EDC} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{CEA} = 60^\circ$;

$$\Rightarrow \text{tam giác } EAC \text{ là tam giác đều cạnh } a \Rightarrow \text{đường cao } AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

+) Tam giác SAB vuông tại A có AH là đường cao

$$\Rightarrow AH = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{2a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{4a^2 + \frac{3a^2}{4}}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{\frac{a\sqrt{19}}{2}} = \frac{2a\sqrt{57}}{19}.$$

$$\text{Vậy } d(D, (SBC)) = 2d(A, (SBC)) = 2AH = \frac{4\sqrt{57}a}{19}.$$

Câu 45. (Liên trường Nghệ An - 2020) Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = \widehat{ACD} = 90^\circ$, $BC = 2a$, $CD = a$, góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BD .

A. $\frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{31}}.$

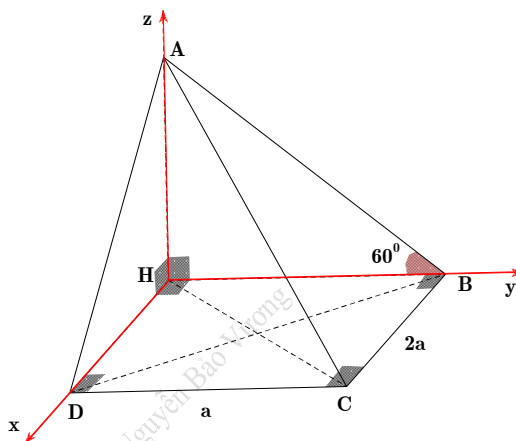
B. $\frac{2a\sqrt{6}}{\sqrt{31}}.$

C. $\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{31}}.$

D. $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{31}}.$

Lời giải

Chọn C



Gọi H là chân đường cao của tứ diện $ABCD$.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp HB \quad (1).$

Lại có: $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp AH \end{cases} \Rightarrow CD \perp HD \quad (2).$

Mà $\widehat{BCD} = 90^\circ$.

Từ đây ta suy ra $HBCD$ là hình chữ nhật.

Mặt khác: $(\widehat{AB, (BCD)}) = \widehat{ABH} = 60^\circ$. Suy ra: $AH = HB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Chọn hệ trục $Oxyz \equiv H.DBA$ như hình vẽ.

Ta có: $H(0;0;0)$, $A(0;0;a\sqrt{3})$, $B(0;a;0)$, $C(2a;a;0)$, $D(2a;0;0)$.

$$\overrightarrow{AC} = (2a; a; -a\sqrt{3}), \overrightarrow{BD} = (2a; -a; 0), \overrightarrow{AB} = (0; a; -a\sqrt{3}).$$

$$\text{Vậy } d(AC, BD) = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}|} = \frac{2a^3\sqrt{3}}{\sqrt{(-a^2\sqrt{3})^2 + (-2a^2\sqrt{3})^2 + (-4a^2)^2}} = \frac{2a\sqrt{93}}{31}.$$

Câu 46. (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020) Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = a$, $OC = 2a$. Gọi M là trung điểm của AB . Khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AC bằng

A. $\frac{\sqrt{2}a}{3}$.

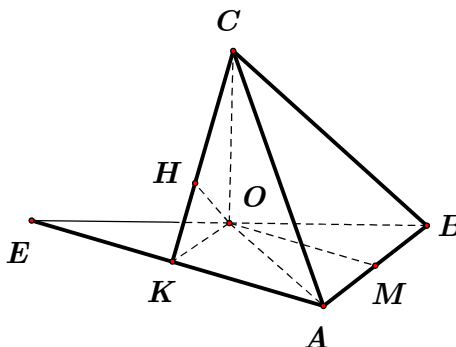
B. $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$.

C. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$.

D. $\frac{2a}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Dựng $AE \parallel OM$, khi đó $OM \parallel (CAE)$. Do đó $d(OM, AC) = d(OM, (CAE)) = d(O, (CAE))$

Dựng $OK \perp AE$, ta có:

$$\begin{cases} AE \perp OK \\ AE \perp OC \text{ (Vì } CO \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow AE \perp (COK)$$

Mà $AE \subset (CAE)$ nên $(CAE) \perp (COK)$.

Ta có $(CAE) \cap (COK) = CK$. Kê $OH \perp CK$, khi đó $OH \perp (COK)$. Suy ra

$$d(O, (CAE)) = OH$$

Xét tam giác OAB ta có: $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = a\sqrt{2}$.

$$\text{Dễ thấy } OKAM \text{ là hình chữ nhật nên } OK = AM = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Xét tam giác COK ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OK^2} + \frac{1}{OC^2} \Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{1}{(2a)^2} \Rightarrow OH = \frac{2}{3}a.$$

Câu 47. (Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = a, AC = 2a, SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SG và BC bằng

A. $\frac{2a}{7}$.

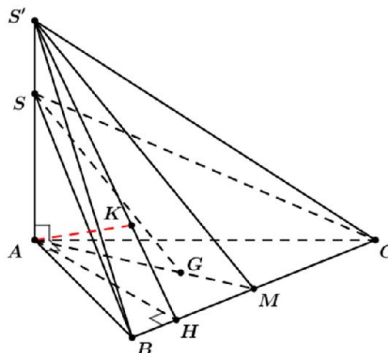
B. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

C. $\frac{2a\sqrt{6}}{9}$.

D. $\frac{4a}{7}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của BC . Trong mp (SAM) dựng $S'M // SG$. Suy ra $S'A = \frac{3}{2}SA = 3a$

Do đó $d(SG, BC) = d(SG, (S'BC)) = d(G, (S'BC))$.

Vì $AM = 3GM$ nên $d(G, (S'BC)) = \frac{1}{3}d(A, (S'BC))$.

Kẻ $AH \perp BC$ ta có $BC \perp (S'AH)$.

Kẻ $AK \perp S'H \Rightarrow AK = d(A, (S'BC))$.

Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AH = \frac{2a}{\sqrt{5}}$. Suy ra $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{S'A^2} + \frac{1}{AH^2} \Rightarrow AK = \frac{6a}{7}$.

Do đó $d(G, (S'BC)) = \frac{1}{3}AK = \frac{2a}{7}$.

Câu 48. (Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và $SA = SB = SC = 11$, góc $\angle SAB = 30^\circ$, góc $\angle SBC = 60^\circ$, góc $\angle SCA = 45^\circ$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SD .

A. $2\sqrt{22}$.

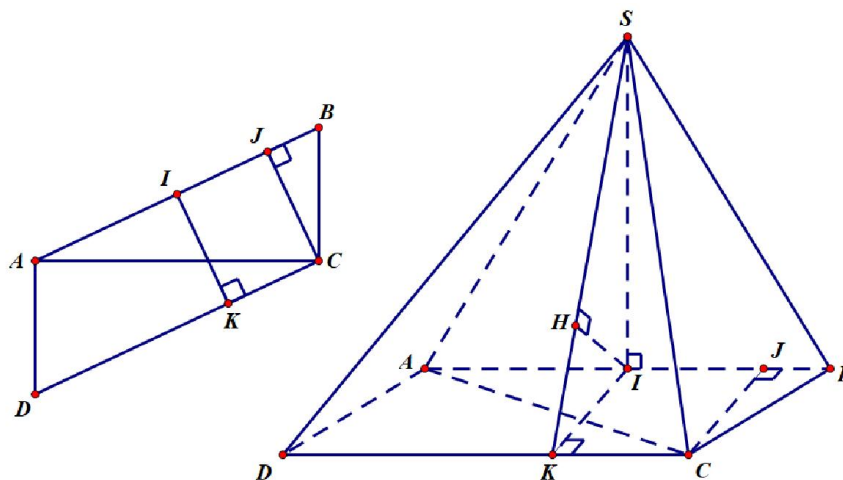
B. $\sqrt{22}$.

C. $\frac{\sqrt{22}}{2}$.

D. $4\sqrt{11}$.

Lời giải

Chọn B



Trong tam giác $\triangle SAB$ ta có $SB^2 = SA^2 + AB^2 - 2SA \cdot AB \cdot \cos 30^\circ \Leftrightarrow AB = 11\sqrt{3}$.

Trong tam giác $\triangle SBC$ ta có $SB = SC = 11, \angle SBC = 60^\circ$ nên $\triangle SBC$ đều suy ra $BC = 11$.

Trong tam giác $\triangle SCA$ ta có $SC = SA = 11, \angle SCA = 45^\circ$ nên $\triangle SCA$ vuông cân tại S suy ra $AC = 11\sqrt{2}$.

Xét tam giác ABC có $BC^2 + AC^2 = AB^2$ do vậy $\triangle ABC$ vuông tại C .

Gọi I là hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ vì $SA = SB = SC$ nên I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , vì $\triangle ABC$ vuông tại C nên I là trung điểm của AB và $SI \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp CD$ (1). Vẽ $IK \perp CD$ (2), $IH \perp SK$ (3).

Từ (1) và (2) suy ra $CD \perp (SIK) \Rightarrow CD \perp IH$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $IH \perp (SCD)$ do đó khoảng cách $d(I, (SCD)) = IH$.

Ta lại có $AB \parallel CD$ suy ra khoảng cách $d(AB, SD) = d(AB, (SCD)) = d(I, (SCD)) = IH$.

Trong mặt phẳng đáy vẽ $CJ \perp AB$ ta suy ra $IK = CJ = \frac{CA \cdot CB}{AB} = \frac{11\sqrt{6}}{3}$.

Trong tam giác SAB cân tại S có $SI = \sqrt{SA^2 - \frac{AB^2}{4}} = \frac{11}{2}$.

Trong tam giác SIK vuông tại I ta có $IH = \frac{IK \cdot SI}{\sqrt{IK^2 + SI^2}} = \sqrt{22}$.

Câu 49. (THPT Nguyễn Việt Xuân - 2020) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tâm O . Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với O . Biết tam giác $AA'C$ vuông cân tại A' . Tính khoảng cách h từ điểm D đến mặt phẳng $(ABB'A')$.

A. $h = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

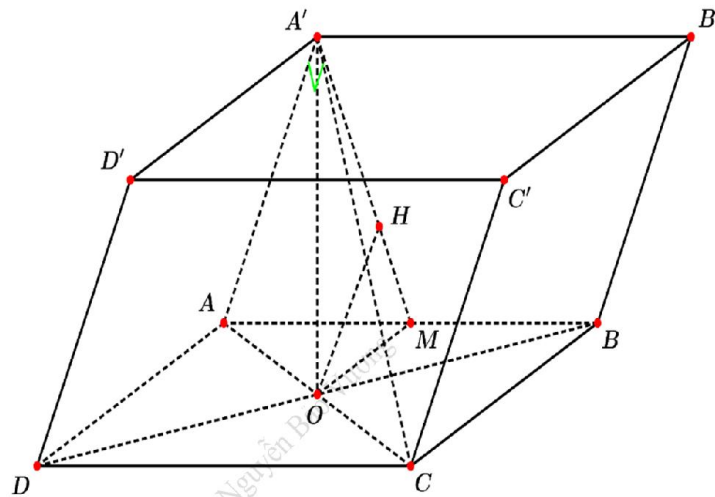
B. $h = \frac{a\sqrt{2}}{6}$.

C. $h = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

D. $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Vì tam giác $AA'C$ vuông cân tại A' nên ta có: $A'O = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Gọi M là trung điểm của AB . Suy ra $OM \perp AB$.

Trong mặt phẳng $(A'OM)$: kẻ $OH \perp A'M$.

Ta có: $AB \perp (A'OM)$ (vì $AB \perp OM$ và $AB \perp A'O$). Suy ra $AB \perp OH$.

Vì $\begin{cases} OH \perp A'M \\ OH \perp AB \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ABB'A')$. Do đó: $d(O; (ABB'A')) = OH$.

Do D, O, B thẳng hàng và $DB = 2OB$ nên $d(D; (ABB'A')) = 2d(O; (ABB'A')) = 2OH$.

Ta có: $OH = \frac{A'O \cdot OM}{\sqrt{A'O^2 + OM^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{2}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Vậy $d(D; (ABB'A')) = h = 2OH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 50. (Tiên Du - Bắc Ninh - 2020) Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$, đáy ABC là tam giác vuông tại B , $BC = a\sqrt{3}$, $AB = a$. Biết hình chiếu vuông góc của đỉnh A'

lên mặt đáy là điểm M thỏa mãn $3\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng

A. $\frac{a\sqrt{210}}{15}$.

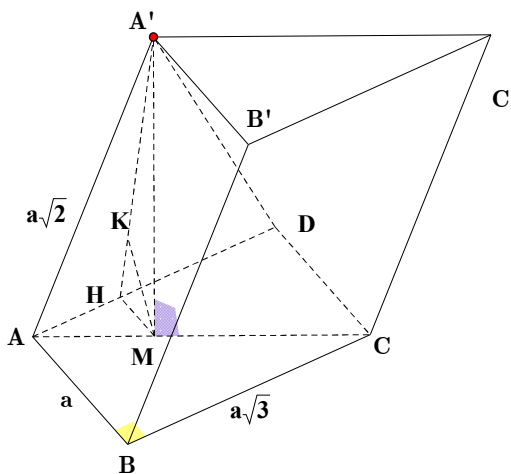
B. $\frac{a\sqrt{210}}{45}$.

C. $\frac{a\sqrt{714}}{17}$.

D. $\frac{a\sqrt{714}}{51}$.

Lời giải

Chọn A



Dựng hình bình hành $ABCD$, vì tam giác ABC là tam giác vuông tại B nên $ABCD$ là hình chữ nhật.

Suy ra $BC \parallel AD \Rightarrow BC \parallel (A'AD)$.

Do đó $d(BC, AA') = d(BC, (A'AD)) = d(C, (A'AD))$.

Mà $3\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC}$ nên $d(C, (A'AD)) = 3d(M, (A'AD))$.

Kẻ $MH \perp AD \Rightarrow (A'MH) \perp (A'AD) = A'H$.

Kẻ $MK \perp A'H \Rightarrow MK \perp (A'AD) \Rightarrow MK = d(M, (A'AD))$.

Mặt khác ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a \Rightarrow AM = \frac{1}{3}AC = \frac{2a}{3} \Rightarrow A'M = \sqrt{A'A^2 - AM^2} = \frac{a\sqrt{14}}{3}$.

Và $MH \parallel CD \Rightarrow \frac{MH}{CD} = \frac{AM}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow MH = \frac{1}{3}CD = \frac{1}{3}AB = \frac{a}{3}$.

Suy ra $\frac{1}{MK^2} = \frac{1}{A'M^2} + \frac{1}{MH^2} \Leftrightarrow \frac{1}{MK^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{14}}{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{3}\right)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{MK^2} = \frac{135}{14a^2} \Leftrightarrow MK = \frac{a\sqrt{210}}{45}$.

Vậy $d(BC, AA') = d(C, (A'AD)) = 3d(M, (A'AD)) = 3MK = 3 \cdot \frac{a\sqrt{210}}{45} = \frac{a\sqrt{210}}{15}$.

Câu 51. (Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AD = 2AB = 2a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SD . Tính khoảng cách d từ điểm S đến mặt phẳng (AMN) .

A. $d = 2a$.

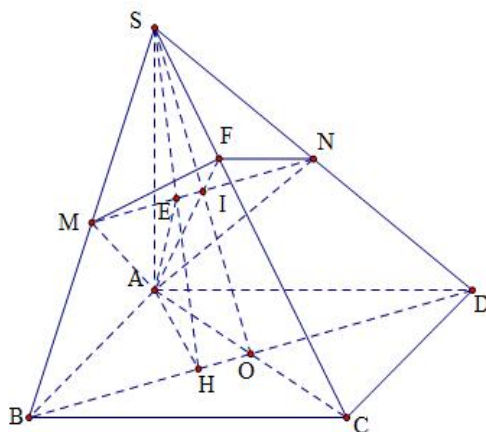
B. $d = \frac{3a}{2}$.

C. $d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

D. $d = a\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C



Từ A kẻ đường thẳng vuông góc với BD tại H , ta có:

$$\begin{cases} BD \perp (SAH) \\ MN \parallel BD \end{cases} \Rightarrow MN \perp (SAH) \Rightarrow (AMN) \perp (SAH)$$

Mặt khác $(AMN) \cap (SAH) = SE$, suy ra: $d(S; (AMN)) = d(S; AE)$.

Xét tam giác vuông SAH có: $AH = \frac{AB \cdot AD}{BD} = \frac{a \cdot 2a}{\sqrt{a^2 + 4a^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

$$SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \sqrt{4a^2 + \frac{20a^2}{25}} = \frac{2a\sqrt{30}}{5}.$$

Vì MN là đường trung bình của tam giác SBD nên E là trung điểm của SH , suy ra:

$$AE = \frac{1}{2}SH = \frac{a\sqrt{30}}{5}.$$

$$d(S; AE) = \frac{2S_{\triangle SAE}}{AE} = \frac{S_{\triangle SAH}}{AE} = \frac{AS \cdot AH}{2 \cdot AE} = \frac{2a \cdot 2a\sqrt{5}}{2 \cdot 5 \cdot \frac{a\sqrt{30}}{5}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 52. (Hải Hậu - Nam Định - 2020) Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$. Biết rằng bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp bằng $\frac{9a\sqrt{2}}{8}$, độ dài cạnh bên lớn hơn độ dài cạnh đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD bằng

A. $\frac{2a\sqrt{17}}{17}$.

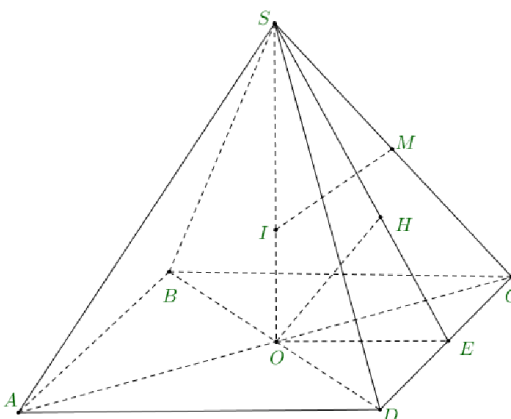
B. $\frac{4a\sqrt{17}}{17}$.

C. $\frac{4a\sqrt{34}}{17}$.

D. $\frac{2a\sqrt{34}}{17}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $O = AC \cap BD$, M là trung điểm SC .

Trong tam giác SAC , dựng đường trung trực của đoạn thẳng SC cắt SO tại I , I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$, bán kính $R = SI = \frac{9a\sqrt{2}}{8}$.

Vì độ dài cạnh bên lớn hơn độ dài cạnh đáy nên tâm I của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp thuộc đoạn SO .

Gọi x là độ dài cạnh bên của hình chóp.

Ta có $\triangle SOC$ đồng dạng với $\triangle SMI$.

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \frac{SI}{SC} &= \frac{SM}{SO} \Leftrightarrow \frac{\frac{9a\sqrt{2}}{8}}{x} = \frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{x^2 - a^2}} \\ \Leftrightarrow \frac{9a\sqrt{2}}{8} \sqrt{x^2 - a^2} &= \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow 9a\sqrt{x^2 - a^2} = 2\sqrt{2}x^2 \Leftrightarrow 81a^2(x^2 - a^2) = 8x^4 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 8x^4 - 81a^2x^2 + 81a^4 = 0 \Leftrightarrow 8\left(\frac{x^2}{a^2}\right)^2 - 81\left(\frac{x}{a}\right) + 81 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 9 \\ \left(\frac{x}{a}\right)^2 = \frac{9}{8} \end{cases}$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 = \frac{9}{8} \text{ không thỏa vì } x < a\sqrt{2}.$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3a.$$

$$\text{Suy ra } SO^2 = (3a)^2 - a^2 = 8a^2$$

$$d(AB; SD) = d(AB, (SDC)) = d(A; (SCD)) = 2d(O; (SCD)).$$

Gọi E là trung điểm CD , kẻ $OH \perp SE$, khi đó $d(O, (SCD)) = OH$.

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OE^2} = \frac{1}{8a^2} + \frac{2}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{2\sqrt{2}a}{17}$$

$$d(AB; SD) = 2OH = \frac{4\sqrt{34}a}{17}.$$

Câu 53. (Kim Thành - Hải Dương - 2020) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , biết $SA \perp (ABC)$ và $AB = 2a$, $AC = 3a$, $SA = 4a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $d = \frac{2a}{\sqrt{11}}$.

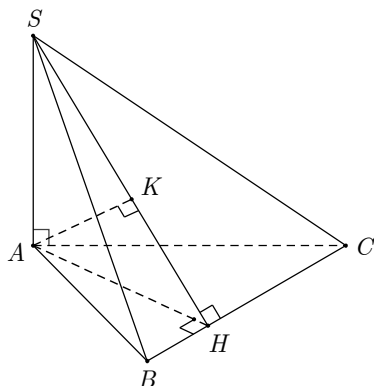
B. $d = \frac{6a\sqrt{29}}{29}$.

C. $d = \frac{12a\sqrt{61}}{61}$.

D. $\frac{a\sqrt{43}}{12}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có

$$\left. \begin{array}{l} SA \perp (ABC) \\ BC \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow SA \perp BC.$$

Trong (ABC) , kẻ $AH \perp BC$, mà $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SH$.

Trong (SAH) , kẻ $AK \perp SH$, mà $SH \perp BC \Rightarrow AK \perp (SBC)$ hay $d(A; (SBC)) = AK$.

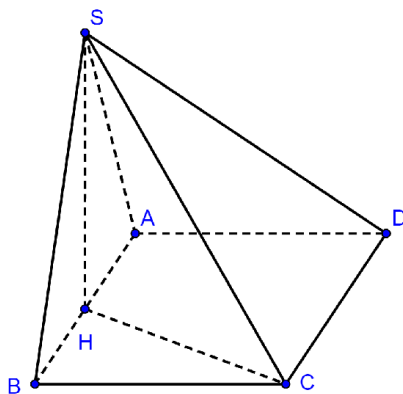
Vì $\triangle ABC$ vuông tại A nên $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{13}a$.

Mặt khác có AH là đường cao nên $AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{6a\sqrt{13}}{13}$.

Vì $\triangle SAH$ vuông tại A nên $SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \frac{2a\sqrt{793}}{13}$.

Vậy có AK là đường cao $AK = \frac{SA \cdot AH}{SH} = \frac{12a\sqrt{61}}{61}$.

Câu 54. (Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a$, $AD = 3a$ (tham khảo hình vẽ). Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy; góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt đáy là 45° . Gọi H là trung điểm cạnh AB . Tính theo a khoảng cách giữa hai đoạn thẳng SD và CH .



A. $\frac{3\sqrt{11}a}{11}$.

B. $\frac{3\sqrt{14}a}{7}$.

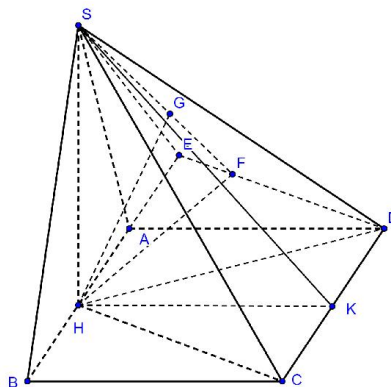
C. $\frac{3\sqrt{10}a}{\sqrt{109}}$.

D. $\frac{3\sqrt{85}a}{17}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:



$$\text{Ta có: } \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = SH \\ SH \perp AB; SH \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$$

Kẻ $HK \perp CD$ (K là trung điểm của CD)

$$\Rightarrow CD \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp SK.$$

$$\Rightarrow (\widehat{SCD}; \widehat{ABCD}) = (\widehat{SK}; \widehat{HK}) = \widehat{SKH} = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle SHK \text{ vuông cân tại } H \Rightarrow SH = HK = 3a.$$

Kẻ d qua D song song với HC cắt AB tại $E \Rightarrow ED = HC = a\sqrt{10}.$

$$\Rightarrow d(CH; SD) = d(CH; (SED)) = d(H; (SED)).$$

Kẻ $HF \perp ED \Rightarrow ED \perp (SHF).$

Kẻ $HG \perp SF \Rightarrow HG \perp (SED) \Rightarrow d(H; (SED)) = HG.$

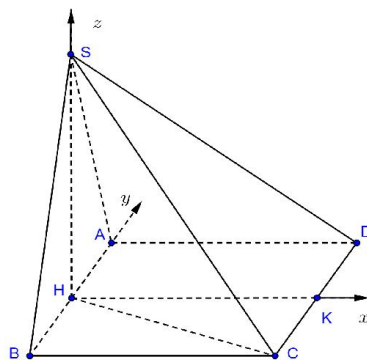
$$\text{Ta có: } S_{\triangle HED} = \frac{1}{2} AD \cdot EH = \frac{1}{2} HF \cdot ED \Rightarrow HF = \frac{AD \cdot EH}{ED} = \frac{3a \cdot 2a}{a\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}a}{5}.$$

Xét tam giác SHF vuông tại H ta có:

$$\frac{1}{HG^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HF^2} \Rightarrow HG = \frac{SH \cdot HF}{\sqrt{SH^2 + HF^2}} = \frac{3a \cdot \frac{3\sqrt{10}a}{5}}{\sqrt{9a^2 + \frac{18a^2}{5}}} = \frac{3\sqrt{14}a}{7}.$$

$$\Rightarrow d(CH; SD) = \frac{3\sqrt{14}a}{7}.$$

Cách 2:



$$\text{Ta có: } \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = SH \\ SH \perp AB; SH \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$$

Kẻ $HK \perp CD$ (K là trung điểm của CD)

$$\Rightarrow CD \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp SK.$$

$$\Rightarrow (\widehat{SCD}; \widehat{ABCD}) = (\widehat{SK}; \widehat{HK}) = \widehat{SKH} = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \Delta SHK \text{ vuông cân tại } H \Rightarrow SH = HK = 3a.$$

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ $H \equiv O$, tia Ox chứa HK , tia Oy chứa HA , tia Oz chứa HS

Khi đó: $H(0;0;0)$; $C(3a;-a;0)$; $D(3a;a;0)$; $S(0;0;3a)$.

Ta có: $\overrightarrow{HC} = (3a;-a;0)$, $\overrightarrow{SD} = (3a;a;-3a)$, $\overrightarrow{SH} = (0;0;-3a)$.

$$\Rightarrow [\overrightarrow{HC}; \overrightarrow{SD}] = (3a^2; 9a^2; 6a^2)$$

$$\Rightarrow d(CH; SD) = \frac{|\overrightarrow{SH} \cdot [\overrightarrow{HC}; \overrightarrow{SD}]|}{\|[\overrightarrow{HC}; \overrightarrow{SD}]\|} = \frac{|6a^2 \cdot (-3a)|}{\sqrt{(3a^2)^2 + (9a^2)^2 + (6a^2)^2}} = \frac{3\sqrt{14}a}{7}.$$

Câu 55. (Trường VINSCHOOL - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, cạnh $AB = 2AD = a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

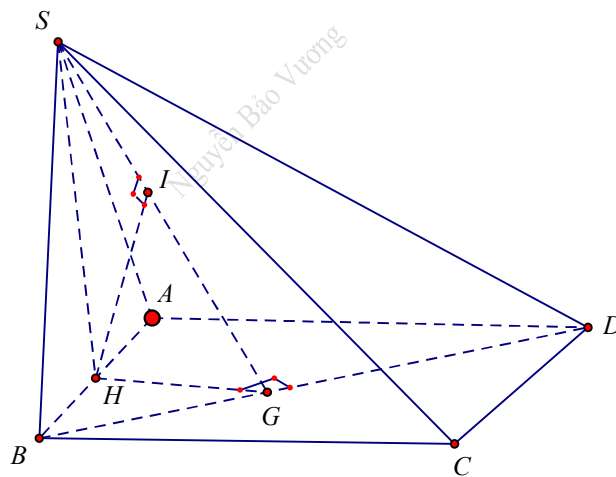
B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{a}{2}$.

D. $2a$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm của AB . Từ giả thiết suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Từ H kẻ $HG \perp BD$ tại G , kẻ $HI \perp SG$ tại I .

Suy ra $HI \perp (SBD) \Rightarrow d(H, (SBD)) = HI$.

$$\text{Ta có } BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}, \quad SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

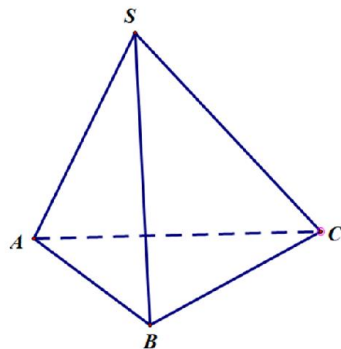
$$\text{Lại có } \Delta BGH \text{ đồng dạng với } \Delta BAD \text{ nên } \frac{HG}{AD} = \frac{BH}{BD} \Rightarrow HG = \frac{AD \cdot BH}{BD} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{a\sqrt{5}}{10}.$$

$$\text{Khi đó } \frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HG^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{5}}{10}\right)^2}$$

Suy ra $HI = \frac{a\sqrt{3}}{8}$.

Lại có $d(A, (SBD)) = 2d(H, (SBD)) = 2.HI = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{8} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 56. (Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020) Cho hình chóp $SABC$, có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = 4a$, $AC = 3a$. Biết $SA = 2a\sqrt{3}$, $\widehat{SAB} = 30^\circ$ và $(SAB) \perp (ABC)$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng



A. $\frac{3\sqrt{7}a}{14}$.

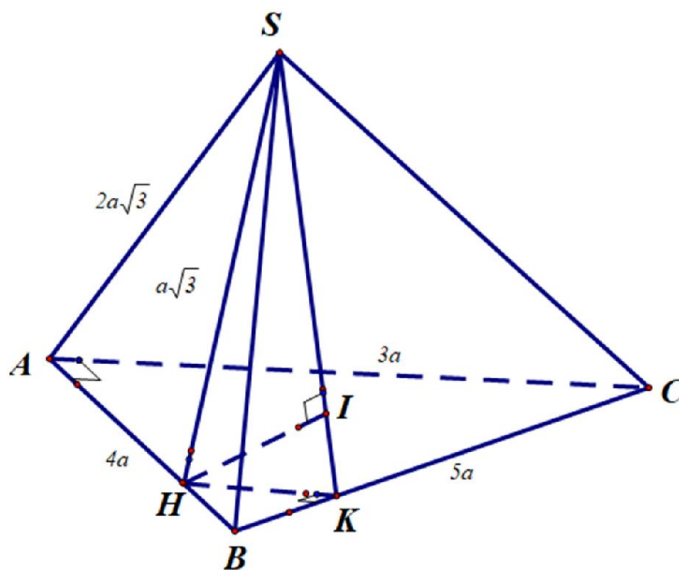
B. $\frac{8\sqrt{7}a}{3}$.

C. $\frac{6\sqrt{7}a}{7}$.

D. $\frac{3\sqrt{7}a}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi SH là đường cao của khối chóp $\Rightarrow SH$ là đường cao của tam giác SAB .

ΔSAH có $\widehat{SAH} = 30^\circ, \widehat{SHA} = 90^\circ \Rightarrow AH = SA \cdot \cos 30^\circ = 3a \Rightarrow SH = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow d(A; (SBC)) = 4d(H; (SBC))$.

Tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SBC) :

Từ H kẻ $HK \perp BC$ tại K , kẻ $HI \perp SK$ tại I

$\Rightarrow d(H; (SBC)) = HI$

Mà $\Delta HBK \sim \Delta CBA \Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{HK}{CA} \Rightarrow HK = \frac{BH \cdot CA}{BC} = \frac{3}{5}a$

$$\Rightarrow \frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{28}{9a^2} \Rightarrow HI = \frac{3a\sqrt{7}}{14}$$

$$\Rightarrow d(A; (SBC)) = \frac{6\sqrt{7}a}{7}.$$

Câu 57. (Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, $AC = 2a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi M là trung điểm cạnh CC' thì $\widehat{BMA'} = 90^\circ$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BMA') .

A. $\frac{a\sqrt{7}}{7}$.

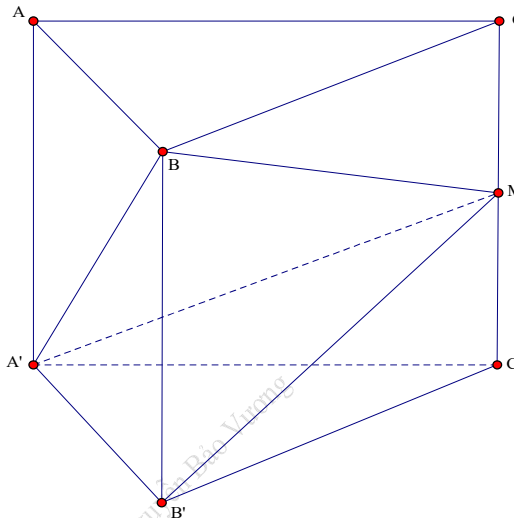
B. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{5}}{7}$.

D. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = a^2 + (2a)^2 - 2 \cdot a \cdot 2a \cdot \cos 120^\circ = 7a^2$.

Đặt $CC' = 2x \Rightarrow CM = MC' = x$.

Vì $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ đứng nên ta có tam giác BCM vuông tại C và tam giác $A'C'M$ vuông tại C' .

Ta có: $BM^2 = BC^2 + CM^2 = 7a^2 + x^2$; $A'M^2 = A'C'^2 + C'M^2 = (2a)^2 + x^2 = 4a^2 + x^2$;

$A'B^2 = A'A^2 + AB^2 = 4x^2 + a^2$.

Vì $\widehat{BMA'} = 90^\circ$ nên tam giác BMA' vuông tại M , do đó:

$A'B^2 = BM^2 + A'M^2 \Leftrightarrow 4x^2 + a^2 = 7a^2 + x^2 + 4a^2 + x^2 \Leftrightarrow x^2 = 5a^2 \Leftrightarrow x = a\sqrt{5}$.

Ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot d(C, AB) \Rightarrow d(C, AB) = a\sqrt{3}$.

Lại có: $d(M, (ABA')) = d(C, (ABA')) = d(C, AB)$ (vì $CC' \parallel (ABA')$ và $(ABC) \perp (ABA')$).

Suy ra.

Ta có: $S_{ABA'} = \frac{1}{2} AB \cdot AA' = a^2 \sqrt{5}$; $S_{MBA'} = \frac{1}{2} MB \cdot MA' = 3\sqrt{3}a^2$.

$V_{AA'BM} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABA'} \cdot d(M, (ABA')) = \frac{1}{3} \cdot S_{MBA'} \cdot d(A, (BMA')) \Rightarrow d(A, (BMA')) = \frac{a\sqrt{5}}{3}$.

----- HẾT -----