

Mục lục

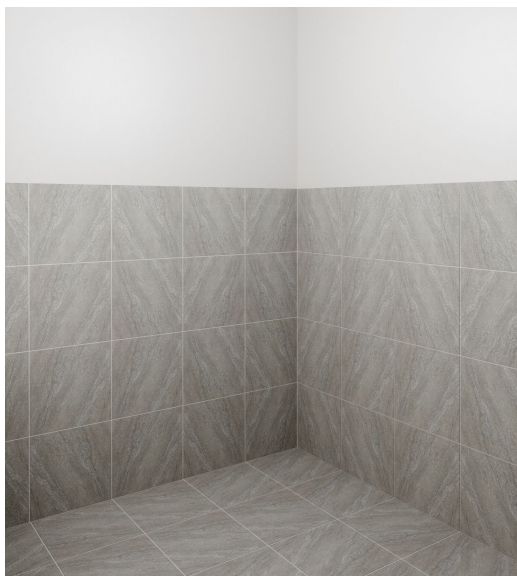
3	Phương pháp tọa độ trong không gian	2
3.1	Hệ tọa độ trong không gian	2
3.1.1	Hệ tọa độ	2
3.1.2	Tọa độ của một điểm	3
3.1.3	Tọa độ của một vectơ	4
3.1.4	Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ	4
3.1.5	Tích vô hướng	6
3.1.6	Bài tập tự luận	8
3.2	Phương trình mặt phẳng	11
3.2.1	Tích có hướng của hai vectơ	11
3.2.2	Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng	11
3.2.3	Cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng	12
3.2.4	Phương trình tổng quát của mặt phẳng	12
3.2.5	Điều kiện để hai mặt phẳng song song	15
3.2.6	Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc	16
3.2.7	Bài tập tự luận	17
3.2.8	Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng	19
3.2.9	Bài tập tự luận	20
3.3	Phương trình đường thẳng trong không gian	22
3.3.1	Phương trình tham số đường thẳng	22
3.3.2	Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng	25
3.3.3	Vị trí tương đối của hai đường thẳng	29
3.3.4	Bài tập tự luận	32
3.4	Phương trình mặt cầu	40
3.4.1	Phương trình mặt cầu	41
3.4.2	Bài tập tự luận	46
3.5	Góc trong không gian	48
3.5.1	Góc giữa hai đường thẳng	49
3.5.2	Góc giữa hai mặt phẳng	49
3.5.3	Góc tạo bởi đường thẳng và mặt phẳng	51
3.5.4	Bài tập tự luận	52

Chương 3

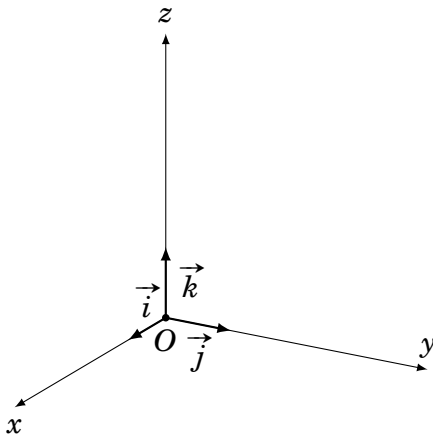
Phương pháp tọa độ trong không gian

3.1 Hệ tọa độ trong không gian

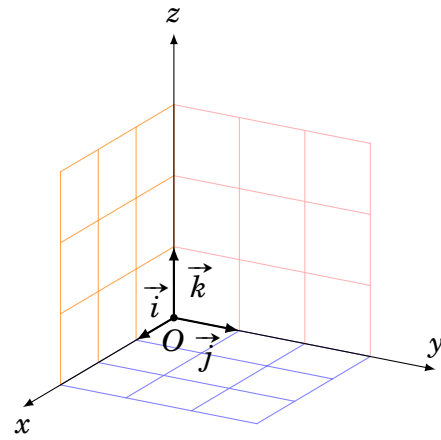
3.1.1 Hệ tọa độ



Hình 3.1: Một góc nhà



Hình 3.2



Hình 3.3

Hệ trục gồm ba trục Ox , Oy , Oz đôi một vuông góc nhau được gọi là *hệ trục toạ độ Descartes trong không gian* gọi tắt là *hệ toạ độ $Oxyz$* .

- Các vectơ đơn vị trên các trục Ox , Oy , Oz lần lượt là $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.
- Điểm O gọi là *gốc toạ độ*, trục Ox gọi là *trục hoành*, trục Oy gọi là *trục tung*, trục Oz gọi là *trục cao*.
- Các mặt phẳng (Oxy) , (Oyz) , (Oxz) gọi là các *mặt phẳng toạ độ*.

Chú ý.

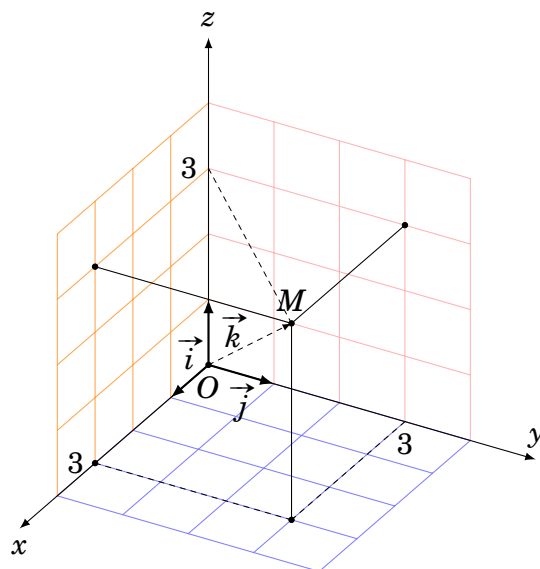
- $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ và $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$.
- Không gian có hệ toạ độ $Oxyz$ gọi là *không gian toạ độ $Oxyz$* (gọi tắt là *không gian $Oxyz$*).

3.1.2 Toạ độ của một điểm

Trong không gian $Oxyz$, cho một điểm M tùy ý. Vì ba vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ không đồng phẳng nên có một bộ ba số $(x; y; z)$ duy nhất sao cho

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Ngược lại, với bộ ba số $(x; y; z)$ ta có một điểm M duy nhất trong không gian thoả mãn hệ thức $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Ta gọi bộ ba số $(x; y; z)$ đó là *toạ độ* của điểm M đối với hệ trục toạ độ $Oxyz$ đã cho và viết $M(x; y; z)$.



Hình 3.4

3.1.3 Tọa độ của một vectơ

Trong không gian $Oxyz$ cho vectơ $\vec{a}$, khi đó luôn tồn tại duy nhất bộ ba số $(a_1; a_2; a_3)$ sao cho $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$.

Ta gọi bộ ba số $(a_1; a_2; a_3)$ đó là tọa độ của vectơ $\vec{a}$ đối với hệ tọa độ $Oxyz$ cho trước và viết $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ hoặc $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$.

Hoạt động 3.1. Xác định tọa độ của các vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, $\vec{0}$.

Ví dụ 3.1. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{k}$. Xác định tọa độ các vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Giải. Ta có $\vec{a} = (2; -3; 1)$ và $\vec{b} = (1; 0; -1)$.

Luyện tập 3.1. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{u} = (1; 3; -4)$ và $\vec{v} = (0; -2; 3)$. Hãy phân tích $\vec{u}$ và $\vec{v}$ theo các vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

3.1.4 Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ

Hoạt động 3.2. Cho các vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$.

- Hãy biểu diễn các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ theo ba vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.
- Hãy biểu diễn các vectơ $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $k\vec{a}$ theo ba vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Cho các vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ và số k . Ta có:

- $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$;
- $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$;
- $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$.

Ví dụ 3.2. Cho các vectơ $\vec{a} = (-2; -3; 5)$, $\vec{b} = (3; 5; -7)$. Tính $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $3\vec{a}$.

Giải. Ta có

$$\vec{a} + \vec{b} = (-2 + 3; -3 + 5; 5 + (-7)) = (1; 2; -2),$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (-2 - 3; -3 - 5; 5 - (-7)) = (-5; -8; 12),$$

$$3\vec{a} = 3(-2; -3; 5) = (-6; -9; 15).$$

Hoạt động 3.3. Xác định

- toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ khi biết toạ độ hai điểm A, B ;
- toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB khi biết toạ độ hai điểm A, B ;
- toạ độ trọng tâm của tam giác ABC khi biết toạ độ ba đỉnh A, B, C .

Hệ quả 3.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$.

$$\text{a) } \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1, \\ a_2 = b_2, \\ a_3 = b_3. \end{cases}$$

b) Nếu $\vec{a} \neq \vec{0}$, vectơ $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{a}$ khi và chỉ khi tồn tại số thực k thoả mãn $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$ hay

$$\begin{cases} b_1 = ka_1, \\ b_2 = ka_2, \\ b_3 = ka_3. \end{cases}$$

c) Cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$, toạ độ $\overrightarrow{AB}$ là

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A).$$

d) Cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$, toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right).$$

e) Cho tam giác ABC có $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ và $C(x_C; y_C; z_C)$. Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC là

$$\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \right).$$

Ví dụ 3.3. Xét sự cùng phương của hai vectơ:

a) $\vec{a} = (1; 3; -2)$ và $\vec{a} = (2; 6; -4)$.

b) $\vec{c} = (1; 0; 0)$ và $\vec{d} = (0; 0; 1)$.

Giải.

a) Ta có $\vec{b} = 2\vec{a}$, $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

b) Giả sử có số k sao cho

$$\vec{d} = k\vec{c} \Leftrightarrow (0; 0; 1) = k(1; 0; 0) \Leftrightarrow (0; 0; 1) = (k; 0; 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = k, \\ 0 = 0, \\ 1 = 0. \end{cases}$$

Hệ phương trình trên vô nghiệm. Do đó, điều giả sử không xảy ra. Vậy hai vectơ $\vec{c}$ và $\vec{d}$ không cùng phương.

Ví dụ 3.4. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1; 2; -3)$, $B(-2; 4; 5)$, $C(7; -3; -5)$.

a) Chứng minh ba điểm A , B , C không thẳng hàng.

b) Tìm điểm $G(x_G; y_G; z_G)$ là trọng tâm của tam giác ABC .

c) Tìm điểm $D(x; y; z)$ sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Giải.

a) Ta có $\vec{AB} = (-3; 2; 8)$, $\vec{AC} = (6; -5; -2)$. Hai vectơ $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$ không cùng phương, nên ba điểm A , B , C không thẳng hàng.

b) G là trọng tâm tam giác ABC , nên

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{1 + (-2) + 7}{3} = 2, \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{2 + 4 + (-3)}{3} = 1, \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{(-3) + 5 + (-5)}{3} = -1. \end{cases}$$

Vậy $G(2; 1; -1)$.

c) Vì ba điểm A , B , C không thẳng hàng, nên tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\vec{AD} = \vec{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 9, \\ y - 2 = -7, \\ z + 3 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10, \\ y = -5, \\ z = -13. \end{cases}$$

Vậy $D(10; -5; -13)$.

3.1.5 Tích vô hướng

Hoạt động 3.4. Hãy phân tích các vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ qua các vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Định lí 3.1. Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ được xác định bởi

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Chứng minh.

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \cdot (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}) \\ &= a_1 b_1 \vec{i}^2 + a_1 b_2 \vec{i} \cdot \vec{j} + a_1 b_3 \vec{i} \cdot \vec{k} + a_2 b_1 \vec{j} \cdot \vec{i} + a_2 b_2 \vec{j}^2 + a_2 b_3 \vec{j} \cdot \vec{k} \\ &\quad + a_3 b_1 \vec{k} \cdot \vec{i} + a_3 b_2 \vec{k} \cdot \vec{j} + a_3 b_3 \vec{k}^2.\end{aligned}$$

Do $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị của các trục tọa độ Ox, Oy, Oz , nên

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1 \quad \text{và} \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0.$$

Do đó

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

□

Hoạt động 3.5. Sử dụng biểu thức tích tọa độ của tích vô hướng, hãy tìm độ dài của một vectơ khi biết tọa độ của nó. Tính độ dài của đoạn thẳng AB khi biết tọa độ của hai điểm A, B . Tính cosin góc giữa hai vectơ của hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$.

Hệ quả 3.2.

a) Cho vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, thì $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

b) Khoảng cách giữa hai điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ và $N(x_N; y_N; z_N)$ là

$$MN = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2 + (z_N - z_M)^2}.$$

c) Nếu φ là góc giữa hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ thì

$$\cos \varphi = \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Ví dụ 3.5. Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a} = (1; 2; 7)$ và $\vec{b} = (3; -5; -8)$.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}|\vec{a}| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 7^2} = 3\sqrt{6}, \\ |\vec{b}| &= \sqrt{3^2 + (-5)^2 + (-8)^2} = 7\sqrt{2}, \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-5) + 7 \cdot (-8) = -63.\end{aligned}$$

Từ những điều trên cho ta

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-63}{3\sqrt{6} \cdot 7\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 150° .

Luyện tập 3.2. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác OAB có

$$O(0;0;0), \quad A(1;-1;4), \quad B(8;7;-7).$$

Tính số đo góc AOB của tam giác OAB .

Ví dụ 3.6. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác OAB có

$$O(0;0;0), \quad A(-10;-4;28), \quad B(-9;18;-18).$$

Tính chu vi OAB .

Giải. Ta có

$$\overrightarrow{OA} = (-10; -4; 28), \quad \overrightarrow{OB} = (-9; 18; -18), \quad \overrightarrow{AB} = (1; 22; -46).$$

Độ dài các cạnh của tam giác OAB là

$$OA = |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{(-10)^2 + (-4)^2 + 28^2} = \sqrt{900} = 30,$$

$$OB = |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{(-9)^2 + 18^2 + (-18)^2} = \sqrt{729} = 27,$$

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 22^2 + (-46)^2} = \sqrt{2601} = 51.$$

Chu vi tam giác OAB là $30 + 27 + 51 = 108$.

Luyện tập 3.3. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-5;-2;5)$, $B(-3;4;9)$, $C(1;2;3)$. Tính diện tích của tam giác ABC .

3.1.6 Bài tập tự luận

Bài tập 3.1. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;2)$, $B(2;3;0)$, $C(-1;0;0)$, $D(0;0;1)$, $E(0;-1;-1)$, $F(0;2;0)$. Trong các điểm đã cho, điểm nào thuộc

- | | | |
|------------------------|------------------------|------------------------|
| a) mặt phẳng (Oxy) ; | b) mặt phẳng (Oyz) ; | c) mặt phẳng (Ozx) ; |
| d) trục Ox ; | e) trục Oy ; | f) trục Oz ? |

Bài tập 3.2. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{k}$ và $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Xác định tọa độ của các vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

Bài tập 3.3. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (1;-4;2)$, $\vec{b} = (3;0;-5)$.

- Biểu diễn các vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ qua các vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.
- Tìm tọa độ của các vectơ $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $2\vec{a} + 3\vec{b}$.

Bài tập 3.4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $P(1;-3;-5)$.

- Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm P lên các mặt phẳng tọa độ (Oxy) , (Oyz) , (Ozx) ;
- Tìm tọa độ điểm đối xứng của điểm P qua các mặt phẳng tọa độ (Oxy) , (Oyz) , (Ozx) ;
- Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm P lên các trục tọa độ Ox , Oy , Oz ;

d) Tìm tọa độ điểm đối xứng của điểm P qua các trục tọa độ Ox , Oy , Oz .

Bài tập 3.5. Trong không gian $Oxyz$, tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác OAB có $O(0;0;0)$, $A(1;3;4)$, $B(2;-6;-1)$.

Bài tập 3.6. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;3)$, $B(4;-5;7)$, $C(8;-10;9)$.

a) Chứng minh ba điểm A , B , C không thẳng hàng;

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Bài tập 3.7. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(9;8;7)$, $B(1;13;4)$, $C(10;17;3)$. Chứng minh tam giác ABC đều.

Bài tập 3.8. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ giác $OABC$ có $O(0;0;0)$, $A(1;4;10)$, $B(9;-3;12)$, $C(8;-7;2)$. Chứng minh $OABC$ là hình vuông.

Bài tập 3.9. Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong các trường hợp sau:

a) $\vec{a} = (2;3;5)$, $\vec{b} = (7;1;8)$;

b) $\vec{a} = (2;-5;-3)$, $\vec{b} = (1;7;8)$;

c) $\vec{a} = (3;5;8)$, $\vec{b} = (1;4;-9)$;

d) $\vec{a} = (1;-9;-4)$, $\vec{b} = (2;3;6)$.

Bài tập 3.10. Tìm số đo góc trong đỉnh A của tam giác ABC trong các trường hợp sau:

a) $A(2,4,9)$, $B(1,8,14)$, $C(3,7,11)$;

Đáp số. 30° .

b) $A(1,5,7)$, $B(-4,2,11)$, $C(-1,6,9)$;

Đáp số. 45° .

c) $A(1,2,5)$, $B(-4,3,9)$, $C(-3,7,4)$;

Đáp số. 60° .

d) $A(2,6,3)$, $B(5,10,8)$, $C(4,7,1)$;

Đáp số. 90° .

e) $A(4,1,3)$, $B(-3,-1,2)$, $C(9,-4,5)$;

Đáp số. 120° .

f) $A(1,3,7)$, $B(-1,4,9)$, $C(5,6,2)$;

Đáp số. 135° .

g) $A(8,9,2)$, $B(3,5,1)$, $C(11,10,4)$.

Đáp số. 150° .

Bài tập 3.11. Tính số đo các góc của tam giác ABC trong các trường hợp sau:

a) $A(2;-2;-6)$, $B(7;-1;-10)$, $C(4;-3;-9)$;

Đáp số. $\hat{A} = 30^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$, $\hat{C} = 120^\circ$.

b) $A(2;-2;-6)$, $B(6;-2;-10)$, $C(2;-4;-8)$;

Đáp số. $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$, $\hat{C} = 90^\circ$.

c) $A(-2;-10;-4)$, $B(3;-7;-8)$, $C(-7;-7;-8)$;

Đáp số. $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$, $\hat{C} = 45^\circ$.

d) $A(4;8;12)$, $B(9;12;9)$, $C(9;5;8)$.

Đáp số. 15° , 30° , 135° .

Bài tập 3.12. Cho hình bình hành $ABCD$. Tính góc tạo bởi hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$ trong các trường hợp sau:

- a) $\overrightarrow{AB} = (1, 2, -3)$, $\overrightarrow{BC} = (9, 8, 7)$; Đáp số. 30° .
- b) $\overrightarrow{AB} = (2, -2, -1)$, $\overrightarrow{BC} = (-2, -4, -5)$; Đáp số. 45° .
- c) $\overrightarrow{AB} = (-4, 1, -3)$, $\overrightarrow{BC} = (2, -7, -5)$; Đáp số. 60° .
- d) $\overrightarrow{AB} = (4, -1, 3)$, $\overrightarrow{BC} = (0, 5, -1)$; Đáp số. 90° .
- e) $\overrightarrow{AB} = (2, -7, -5)$, $\overrightarrow{BC} = (-4, 1, -3)$; Đáp số. 120° .
- f) $\overrightarrow{AB} = (8, 5, 1)$, $\overrightarrow{BC} = (0, 3, 3)$; Đáp số. 135° .
- g) $\overrightarrow{AB} = (5, 4, 1)$, $\overrightarrow{BC} = (1, 2, -1)$. Đáp số. 150° .

Bài tập 3.13. Tính chu vi P và diện tích S của tam giác ABC trong các trường hợp sau:

- a) $A(1, 2, 3)$, $B(7, 10, 27)$, $C(16, 18, 15)$; Đáp số. $P = 68$, $S = 204$.
- b) $A(1, 2, 3)$, $B(10, 14, 39)$, $C(19, 26, 19)$; Đáp số. $P = 98$, $S = 420$.
- c) $A(1, 2, 3)$, $B(13, 21, 51)$, $C(49, 18, 15)$. Đáp số. $P = 156$, $S = 1170$.

Bài tập 3.14. Tìm tọa độ điểm M trên mặt phẳng tọa độ cho dưới đây sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng trong các trường hợp sau:

- a) M thuộc mặt phẳng (Oyz) , $A(1; -3; -2)$, $B(2; -1; 4)$;
Đáp số. $M(0; -5; -8)$.
- b) M thuộc mặt phẳng (Oxz) , $A(-2; 2; 1)$, $B(5; 3; 2)$;
Đáp số. $M(-16; 0; -1)$.
- c) M thuộc mặt phẳng (Oxy) , $A(2; 3; 4)$, $B(1; 2; 3)$.
Đáp số. $M(-2; -1; 0)$.

Bài tập 3.15. Tìm tọa độ điểm M trên mặt phẳng tọa độ cho dưới đây sao cho tích vô hướng $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$ nhỏ nhất trong các trường hợp sau:

- a) M thuộc mặt phẳng (Oyz) , $A(1; 2; -3)$, $B(1; -4; -1)$;
Đáp số. $M(0; -1; -2)$.
- b) M thuộc mặt phẳng (Oxz) , $A(5; 4; 3)$, $B(1; 3; 5)$;
Đáp số. $M(3; 0; 4)$.
- c) M thuộc mặt phẳng (Oxy) , $A(-6; 5; 1)$, $B(-2; -3; 2)$.
Đáp số. $M(-4; 1; 0)$.

3.2 Phương trình mặt phẳng

3.2.1 Tích có hướng của hai vectơ

Định nghĩa 3.1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một vectơ, kí hiệu $[\vec{a}, \vec{b}]$ hay $\vec{a} \wedge \vec{b}$, được xác định bởi

$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1). \quad (3.1)$$

Ví dụ 3.7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (-4; 3; 5)$ và $\vec{b} = (-2; 1; 2)$. Tính độ dài của vectơ $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Giải. Ta có

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (3 \cdot 2 - 1 \cdot 5; 5 \cdot (-2) - 2 \cdot (-4); (-4) \cdot 1 - (-2) \cdot 3)$$

$$[\vec{a}, \vec{b}] = (1; -2; 2), \text{ nên độ dài của vectơ } [\vec{a}, \vec{b}] \text{ là } \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3.$$

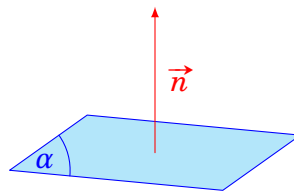
Luyện tập 3.4. Cho hai vectơ $\vec{a} = (1; 2; 7)$ và $\vec{b} = (4; 3; 5)$.

- Tính $[\vec{a}, \vec{b}]$, $[\vec{b}, \vec{a}]$;
- Tính $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{a}$, $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{b}$;
- Tính $|[\vec{a}, \vec{b}]|$ và $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$.

Luyện tập 3.5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Chứng minh tích có hướng $[\vec{a}, \vec{b}]$ vuông góc với cả $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

3.2.2 Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng

Định nghĩa 3.2. Cho mặt phẳng (α) . Vectơ $\vec{n}$ được gọi là *vectơ pháp tuyến* của (α) nếu $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với (α) .



Hình 3.5

Nhận xét. Nếu $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của (α) , thì mọi vectơ $k\vec{n}$ với $k \neq 0$ cũng là vectơ pháp tuyến của (α) .

3.2.3 Cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng

Định nghĩa 3.3. Cho mặt phẳng (α) . Cặp vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ được gọi là *cặp vectơ chỉ phương* của mặt phẳng (α) nếu $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ và giá của chúng song song hoặc nằm trong (α) .

Định lý 3.2. Trong không gian $Oxyz$, nếu $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (α) thì

$$\vec{n} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1) \quad (3.2)$$

là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) .

Hoạt động 3.6. Để chứng minh $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) , ta cần chứng minh điều gì? Hãy chứng minh $\vec{n} \cdot \vec{a} = 0$ và $\vec{n} \cdot \vec{b} = 0$.

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{a} &= (a_2b_3 - a_3b_2)a_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)a_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)a_3 \\ &= a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_2a_1b_3 + a_3a_1b_2 - a_3a_2b_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Tương tự, $\vec{n} \cdot \vec{b} = 0$.

Vectơ $\vec{n}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, nên nó vuông góc với giá của này, thế mà $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương, nên $\vec{n}$ vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau của mặt phẳng (α) . Do đó, giá của $\vec{n}$ vuông góc với mặt phẳng (α) .

Vì các vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương, nên các tọa độ của $\vec{n}$ không đồng thời bằng 0. Do đó, $\vec{n}$ là một vectơ của mặt phẳng (α) . $\square$

3.2.4 Phương trình tổng quát của mặt phẳng

Định lý 3.3. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{n} = (A; B; C)$ làm vectơ pháp tuyến. Điều kiện cần và đủ điểm $M(x; y; z)$ thuộc mặt phẳng (α) là

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (3.3)$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_0M} &= (x - x_0; y - y_0; z - z_0). \\ M \in (\alpha) &\Leftrightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M} \\ &\Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0 \\ &\Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \end{aligned}$$

$\square$

Định lý 3.4. Trong không gian $Oxyz$, tập hợp các điểm $M(x; y; z)$ thỏa mãn phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ (trong đó các hệ số A, B, C không đồng thời bằng 0) là một mặt phẳng nhận vectơ $\vec{n} = (A; B; C)$ làm vectơ pháp tuyến.

Chứng minh. Gọi điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ thỏa mãn phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$, ta có

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

hay

$$D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0).$$

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm M_0 và nhận $\vec{n} = (A; B; C)$ làm vectơ pháp tuyến. Khi đó

$$\begin{aligned} M \in (\alpha) &\Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow Ax + By + Cz + D = 0. \end{aligned}$$

□

Định nghĩa 3.4. Phương trình có dạng $Ax + By + Cz + D = 0$, trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0, được gọi là *phương trình tổng quát của mặt phẳng*.

Ví dụ 3.8. Xác định vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt phẳng (P) có phương trình

$$\text{a) } x + 2y - z + 1 = 0; \quad \text{b) } 2x - 4y + 9 = 0; \quad \text{c) } x = 0.$$

Giải.

- a) Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (1; 2; -1)$;
- b) Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (2; -4; 0)$. Ta thấy $\vec{n} = 2(1; -2; 0)$, nên cũng có thể chọn $\vec{v} = (1; -2; 0)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) ;
- c) Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (1; 0; 0)$.

Hoạt động 3.7. Xác định toạ độ vectơ pháp tuyến của các mặt phẳng toạ độ (Oxy) , (Oyz) , (Ozx) .

Ví dụ 3.9. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(0; 2; -4)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 5; 7)$.

Giải. Phương trình mặt phẳng (P) là

$$1(x - 0) + 5(y - 2) + 7(z + 4) = 0$$

hay

$$x + 5y + 7z + 18 = 0.$$

Luyện tập 3.6. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB , biết $A(-3; 2; 1)$ và $B(1; -4; 2)$.

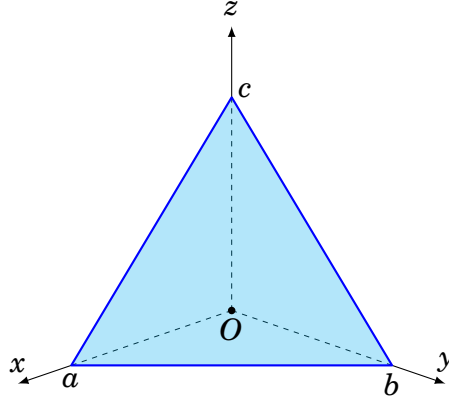
Ví dụ 3.10. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; 3)$, $B(4; -4; 5)$, $C(7; -8; 6)$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C .

Giải. Ta có $\vec{AB} = (3; -6; 2)$, $\vec{AC} = (6; -10; 3)$. Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C là $\vec{n} = [\vec{AB}, \vec{AC}] = (2; 3; 6)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

$$2(x - 1) + 3(y - 2) + 6(z - 3) = 0$$

hay $2x + 3y + 6z - 26 = 0$.

Luyện tập 3.7. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, c là ba số thực khác 0.



Hình 3.6

Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, c là ba số thực khác 0 là

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (3.4)$$

Phương trình mặt phẳng có dạng (3.4) gọi là *phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn*.

Ví dụ 3.11. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $P(2;3;4)$ chứa trục Ox .

Giải. Ta có $\overrightarrow{OP} = (2;3;4)$, vectơ đơn vị của trục Ox là $\vec{i} = (1;0;0)$. Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n} = [\overrightarrow{OP}, \vec{i}] = (0;4;-3)$.

Mặt phẳng (α) chứa trục Ox , do đó qua gốc tọa độ O và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (0;4;-3)$, nên có phương trình là $4x - 3y = 0$.

Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) có phương trình

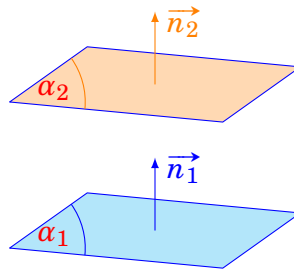
$$(\alpha_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$(\alpha_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Khi đó (α_1) và (α_2) có hai vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$.

Ta xét điều kiện để hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) song song hoặc vuông góc với nhau.

3.2.5 Điều kiện để hai mặt phẳng song song



Hình 3.7

Hoạt động 3.8. Nhận xét gì về vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng song song, hai mặt phẳng trùng nhau?

Cho mặt phẳng (α_1) qua điểm M và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1$; mặt phẳng (α_2) qua điểm N và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2$.

$$(\alpha_1) \parallel (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 \text{ cùng phương } \vec{n}_2, \\ M \notin (\alpha_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 \text{ cùng phương } \vec{n}_2, \\ N \notin (\alpha_1). \end{cases}$$

$$(\alpha_1) \equiv (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 \text{ cùng phương } \vec{n}_2, \\ M \in (\alpha_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 \text{ cùng phương } \vec{n}_2, \\ N \in (\alpha_1). \end{cases}$$

Ví dụ 3.12. Chứng minh hai mặt phẳng

$$(P): x + 2y + 3 = 0, \quad (Q): 2x + 4y - 1 = 0$$

song song nhau.

Giải. (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (1; 2; 0)$ và đi qua điểm $A(-3; 0; 0)$, (Q) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = (2; 4; 0)$. Nhận thấy rằng $\vec{n}_2 = 2\vec{n}_1$, tức $\vec{n}_1$ cùng phương với $\vec{n}_2$. Lại có tọa độ điểm A không thỏa mãn phương trình mặt phẳng (Q) , do đó $(P) \parallel (Q)$.

Ví dụ 3.13. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua điểm $M(-3; -1; 4)$ và song song với mặt phẳng $(Q): x + 2y - 5z + 1 = 0$.

Giải. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là $\vec{n}_{(Q)} = (1; 2; -5)$. Vì $(P) \parallel (Q)$, nên (Q) cũng nhận $\vec{n}_{(Q)} = (1; 2; -5)$ làm vectơ pháp tuyến, phương trình của (Q) là

$$1(x + 3) + 2(y + 1) - 5(z - 4) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 5z + 25 = 0.$$

Luyện tập 3.8. Cho tứ diện $ABCD$ có

$$A(-3; 5; -1), \quad B(1; -4; -2), \quad C(3; 2; -6), \quad D(6; 4; -5).$$

Viết phương trình mặt phẳng đi qua A và song song với mặt phẳng (BCD) .

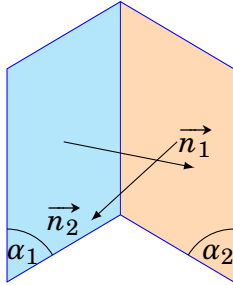
Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) có phương trình

$$(\alpha_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

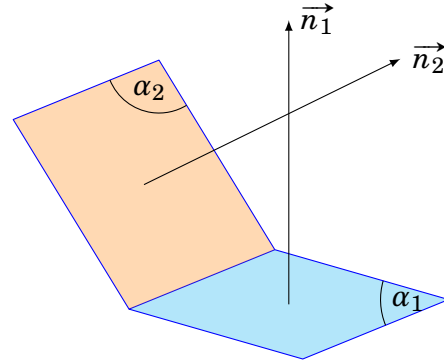
$$(\alpha_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Khi đó (α_1) và (α_2) có hai vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$.

3.2.6 Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc



Hình 3.8

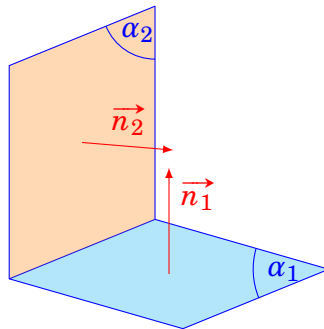


Hình 3.9

(α_1) cắt (α_2) khi và chỉ khi hai vectơ pháp tuyến tương ứng $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ của chúng không cùng phương.

$$(\alpha_1) \text{ cắt } (\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \neq k\vec{n}_2 \Leftrightarrow (A_1; B_1; C_1) \neq k(A_2; B_2; C_2).$$

Hoạt động 3.9. Nhận xét gì về hai vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng vuông góc nhau?



Hình 3.10

Hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) vuông góc nhau khi và chỉ khi $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ vuông góc nhau.

$$(\alpha_1) \perp (\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Ví dụ 3.14. Cho hai mặt phẳng

$$(P): 2x - y - 9 = 0, \quad (Q): x + 2y + 5z + 3 = 0.$$

Chứng minh rằng $(P) \perp (Q)$.

Giải. (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (2; -1; 0)$, (Q) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (1; 2; 5)$. Ta có

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 5 = 0.$$

Vậy $(P) \perp (Q)$.

Luyện tập 3.9. Xác định m để hai mặt phẳng

$$(P): 3x + 5y + z - 1 = 0, \quad (Q): x - 3y + (m^2 - m)z - 1 = 0$$

vuông góc nhau.

Ví dụ 3.15. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(3; -2; -8)$ và vuông góc với hai mặt phẳng

$$(Q): x - 3y - 4z - 5 = 0, \quad (R): 3x + y - 7z - 7 = 0.$$

Giải. (Q) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (1; -3; -4)$, (R) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (3; 1; -7)$. Gọi $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của (P) , ta có $\vec{n} \perp \vec{n}_1$ và $\vec{n} \perp \vec{n}_2$. Do đó,

$$\vec{n} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (25; -5; 10) = 5(5; -1; 2).$$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm A và có vectơ pháp tuyến $\vec{v} = (5; -1; 2)$, nên có phương trình là

$$5(x - 3) - 1(y + 2) + 2(z + 8) = 0 \Leftrightarrow 5x - y + 2z - 1 = 0.$$

Luyện tập 3.10. Cho tam giác ABC có $A(1; -7; -9)$, $B(2; -5; -10)$, $C(7; -1; -3)$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (ABC) .

3.2.7 Bài tập tự luận

Các bài tập sau đều xét trong không gian $Oxyz$.

Bài tập 3.16. Tìm độ dài tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong các trường hợp sau:

a) $\vec{a} = (2; -4; 3)$, $\vec{b} = (4; -7; 5)$;

b) $\vec{a} = (6; 5; 2)$, $\vec{b} = (8; 7; 3)$;

c) $\vec{a} = (3; -5; 4)$, $\vec{b} = (1; 2; -2)$;

d) $\vec{a} = (-2; 2; -3)$, $\vec{b} = (-8; 7; -9)$.

Bài tập 3.17. Xác định tọa độ một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) trong các trường hợp sau:

a) $(P): x + 2y - z + 1 = 0$;

b) $(P): 2x - 4y + 6z + 3 = 0$;

c) $(P): y - 4z + 2 = 0$;

d) $(P): 5x + 1 = 0$.

Bài tập 3.18. Viết phương trình các mặt phẳng tọa độ (Oxy) , (Oyz) , (Ozx) .

Bài tập 3.19. Viết phương trình mặt phẳng (P) trong các trường hợp sau:

a) (P) đi qua điểm $A(1; -2; -3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 3; 5)$;

Đáp số. $x + 3y + 5z + 20 = 0$.

b) (P) đi qua ba điểm $A(1, 3, -2)$, $B(4, 2, -1)$, $C(-3, -4, -5)$;

Đáp số. $2x + y - 5z - 15 = 0$.

c) (P) đi qua ba điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; -2; 0)$, $C(0; 0; -3)$;

Đáp số. $6x - 3y - 2z - 6 = 0$.

d) (P) đi qua điểm $A(1;2;-3)$ và chứa trục Oy ;

Đáp số. $3x + z = 0$.

e) (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB với $A(1;-4;3)$, $B(3;2;-5)$;

Đáp số. $x + 3y - 4z - 3 = 0$.

f) (P) đi qua điểm $H(1;-3;2)$, trong đó, H là hình chiếu vuông góc của điểm $M(-3;2;4)$ lên (P) ;

Đáp số. $-4x + 5y + 2z + 15 = 0$.

g) (P) đi qua điểm $A(-2;-3;-2)$ và vuông góc với trục Oz ;

Đáp số. $z + 2 = 0$.

h) (P) đi qua hai điểm $A(1;-1;2)$, $B(3;1;5)$ và song song với trục Ox .

Đáp số. $3y - 2z + 7 = 0$.

Bài tập 3.20. Xét vị trí tương đối của hai mặt phẳng (P) và (Q) trong mỗi trường hợp sau:

a) $(P): x + 2y - 3z + 1 = 0$, $(Q): 2x + y - 4z + 1 = 0$;

b) $(P): x + 3y + 5z + 1 = 0$, $(Q): 4x + 7y - 5z + 2 = 0$;

c) $(P): x - 2y - 3z + 1 = 0$, $(Q): 2x - 4y - 6z + 1 = 0$;

d) $(P): 2x + 3z + 1 = 0$, $(Q): 6x + 9z + 3 = 0$.

Bài tập 3.21. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (P) trong các trường hợp sau:

a) $(D, 2013)$ $A(-1, 3, -2)$, $(P): x - 2y - 2z + 5 = 0$;

Đáp số. $x - 2y - 2z + 3 = 0$.

b) $A(1, 1, 3)$, $(P): x + 2y - 4z + 1 = 0$;

Đáp số. $x + 2y - 4z + 9 = 0$.

c) $A(2, 2, 2)$, $(P): x + 5y - 2z + 2 = 0$;

Đáp số. $x + 5y - 2z - 8 = 0$.

d) $A(2; -3; 6)$, $(P): (Oxy)$.

Đáp số. $z - 6 = 0$.

Bài tập 3.22. Viết phương trình của mặt phẳng (α) đi qua điểm A và vuông góc với hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) trong các trường hợp sau:

a) $A(1; 1; 1)$ $(P_1): x + 2y + 3z + 4 = 0$, và $(P_2): 3x + 2y - z + 1 = 0$;

Đáp số. $4x - 5y + 2z - 1 = 0$.

b) $A(2; 2; 2)$ $(P_1): x + 3y - 2z + 4 = 0$, $(P_2): 2x - y + 4z + 1 = 0$;

Đáp số. $10x - 8y - 7z + 10 = 0$.

c) $A(3, 2, 1)$, $(P_1): x + 2y + 3z + 4 = 0$, $(P_2): 2x + 3y + z + 3 = 0$.

Đáp số. $-7x + 5y - z + 12 = 0$.

Bài tập 3.23. Viết phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) trong các trường hợp sau:

a) (D, 2013) $A(-1; -1; -2), \quad B(0; 1; 1), \quad (P): x + y + z - 1 = 0;$

Đáp số. $x - 2y + z + 1 = 0.$

b) $A(0; -3; 4) \quad B(2; 1; 3), \quad (P): x + 2y - 3z - 6 = 0;$

Đáp số. $2x - y - 3 = 0.$

c) $A(1; 2; 3) \quad B(4; 5; 6), \quad (P): 7x + 8y + 9z + 10 = 0.$

Đáp số. $x - 2y + z = 0.$

Bài tập 3.24. Cho tứ diện $ABCD$ có

$$A(1; 7; 15), \quad B(3; 2; 16), \quad C(13; 12; 6), \quad (14; 4; 11).$$

Viết phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) .

3.2.8 Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Định lý 3.5. Cho mặt phẳng α có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ và điểm $M(x_M; y_M; z_M)$. Gọi $d(M, \alpha)$ là khoảng cách từ điểm M đến α , ta có

$$d(M, \alpha) = \frac{|Ax_M + By_M + Cz_M + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (3.5)$$

Định nghĩa 3.5. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm tùy ý thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng còn lại.

Ví dụ 3.16. Tính khoảng cách từ điểm $M(1; -3; -2)$ đến mặt phẳng

a) $(P): x + 4y + 8z - 18 = 0;$

b) toạ độ (Oxy) .

Giải.

a) Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) là

$$\frac{|1 + 4 \cdot (-3) + 8 \cdot (-2) + 18|}{\sqrt{1^2 + 4^2 + 8^2}} = \frac{|-9|}{3} = 3.$$

b) Phương trình mặt phẳng (Oxy) là $z = 0$. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (Oxy) là $|-2| = 2$.

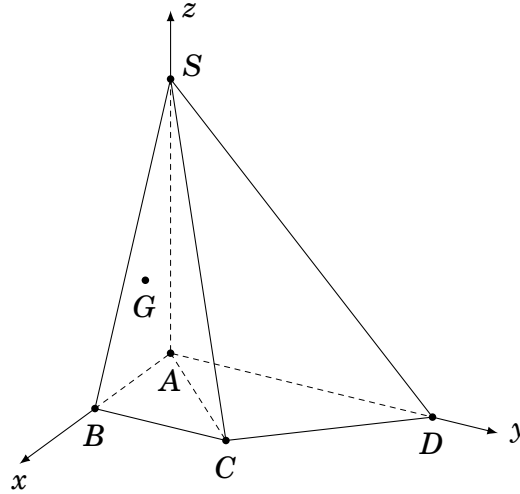
Luyện tập 3.11. Cho tứ diện $OABC$ có $O(0; 0; 0), A(7; 0; 0), B(0; 14; 0), C(0; 0; 21)$. Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) .

Luyện tập 3.12. Tính thể tích của khối lập phương có hai mặt thuộc hai mặt phẳng $(P), (Q)$ biết rằng

$$(P): 2x + 6y + 9z + 2 = 0, \quad (Q): 2x + 6y + 9z + 35 = 0.$$

Ví dụ 3.17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh bên SA vuông góc với $(ABCD)$, $SA = 2a$; đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B ; $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Tính khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác SAB đến mặt phẳng (SCD) .

Giải. Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như Hình 3.11.



Hình 3.11

Khi đó

$$A(0;0;0), \quad B(a;0;0), \quad C(a;a;0), \quad D(0;2a;0), \quad S(0;0;2a), \quad G\left(\frac{a}{3};0;\frac{2a}{3}\right).$$

Ta có

$$\overrightarrow{SC} = (a;a;-2a), \quad \overrightarrow{SD} = (0;2a;-2a).$$

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (SCD) là

$$[\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD}] = (2a^2; 2a^2; 2a^2) = 2a^2 \cdot (1; 1; 1).$$

Mặt phẳng (SCD) qua S và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 1; 1)$, nên có phương trình là

$$1(x-0) + 1(y-0) + 1(z-2a) = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 2a = 0.$$

Khoảng cách từ trọng tâm G đến mặt phẳng (SCD) là

$$d[G, (SCD)] = \frac{\left| \frac{a}{3} + \frac{2a}{3} - 2a \right|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

3.2.9 Bài tập tự luận

Bài tập 3.25. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) trong các trường hợp sau:

a) $M(1;2;3)$, $(P): x + 4y + 8z - 24 = 0$; Đáp số. 1.

b) $M(3;2;1)$, $(P): 2x + 6y - 9z - 31 = 0$; Đáp số. 2.

c) $M(-1;-2;-2)$, $(P): 2x - 5y + 14z - 25 = 0$; Đáp số. 3.

d) $M(-1;2;-1)$, $(P): 8x + 15z - 45 = 0$; Đáp số. 4.

e) $M(2;-5;0)$, (P) là mặt phẳng (Oxz) . Đáp số. 5.

Bài tập 3.26. Tính độ dài đường cao AH của tứ diện $ABCD$ trong các trường hợp sau:

a) $A(-6,-9,-7)$, $B(-1,-5,-3)$, $C(5,4,3)$, $D(6,8,9)$; Đáp số. 2.

b) $A(0;0;0)$, $B(6;0;0)$, $C(0;6;0)$, $D(0;0;12)$. Đáp số. 4.

Bài tập 3.27. Tính thể tích của khối lập phương có hai mặt thuộc hai mặt phẳng (P) , (Q) trong các trường hợp sau:

a) $(P): 6x + 13y + 18z + 2 = 0$, $(Q): 6x + 13y + 18z + 48 = 0$; Đáp số. 8.

b) $(P): 2x + 6y + 9z + 2 = 0$, $(Q): 2x + 6y + 9z + 35 = 0$. Đáp số. 27.

Bài tập 3.28. Viết phương trình các mặt phẳng (Q) song song và cách (P) một khoảng bằng d cho trước trong các trường hợp sau:

a) $(P): 2x - 6y - 9z + 2 = 0$, $d = 2$;
Đáp số. $2x - 6y - 9z + 24 = 0$, $2x - 6y - 9z - 20 = 0$.

b) $(P): 3x + 16y + 24z + 2 = 0$, $d = 3$.
Đáp số. $3x + 16y + 24z + 89 = 0$, $3x + 16y + 24z - 85 = 0$.

Bài tập 3.29. Tìm tập hợp các điểm $M(x;y;z)$ sao cho khoảng cách từ M đến hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng nhau trong các trường hợp sau:

a) $(P): 2x + 3y - 6z + 1 = 0$, $(Q): x - 4y - 8z + 1 = 0$;
Đáp số. $11x + 55y + 2z + 2 = 0$, $25x - y - 110z + 16 = 0$.

b) $(P): x + 4y + 8z + 11 = 0$, $(Q): x + 4y + 8z - 2 = 0$.
Đáp số. $2x + 8y + 16z + 9 = 0$.

Bài tập 3.30. Cho hai điểm A và B . Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A sao cho khoảng cách từ B đến (P) lớn nhất trong các trường hợp sau:

a) $A(-4,-1,-3)$, $B(-2,1,-1)$; Đáp số. $x + y + z + 8 = 0$.

b) $A(2,-4,-2)$, $B(5,2,7)$. Đáp số. $x + 2y + 3z + 12 = 0$.

Bài tập 3.31. Cho ba điểm A , B và M . Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A , B sao cho khoảng cách từ M đến (P) lớn nhất trong các trường hợp sau:

a) $A(-1;-2;3)$, $B(-2;-1;4)$, $M(2;1;-3)$; Đáp số. $x + 5y - 4z + 23 = 0$.

b) $A(2;-2;3)$, $B(2;-1;1)$, $M(1;2;3)$. Đáp số. $5x - 16y - 8z - 18 = 0$.

Bài tập 3.32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , mặt bên SAB là tam giác đều, nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi H là trung điểm cạnh AB . Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SHC) .

3.3 Phương trình đường thẳng trong không gian

3.3.1 Phương trình tham số đường thẳng

Hoạt động 3.10. Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ làm vectơ chỉ phương. Tìm điều kiện cần và đủ để điểm $M(x; y; z)$ thuộc Δ .

Định lý 3.6. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ làm vectơ chỉ phương. Điều kiện cần và đủ để điểm $M(x; y; z)$ thuộc Δ là có một số thực t sao cho

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1, \\ y = y_0 + ta_2, \\ z = z_0 + ta_3. \end{cases}$$

Chứng minh. Ta có

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0).$$

Điểm M thuộc Δ khi và chỉ khi $\overrightarrow{M_0M}$ cùng phương với $\vec{a}$, nghĩa là $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}$, $t \in \mathbb{R}$. Điều này tương đương với

$$\begin{cases} x - x_0 = ta_1, \\ y - y_0 = ta_2, \\ z - z_0 = ta_3 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x = x_0 + ta_1, \\ y = y_0 + ta_2, \\ z = z_0 + ta_3. \end{cases}$$

□

Định nghĩa 3.6. Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ là phương trình có dạng

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1, \\ y = y_0 + ta_2, \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases} \quad (3.6)$$

trong đó $t \in \mathbb{R}$ là tham số. Kể từ đây, nếu không chú thích gì thêm, tham số t trong phương trình tham số của đường thẳng được hiểu là $t \in \mathbb{R}$.

Ngược lại, mỗi hệ phương trình dạng (3.6) với $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > 0$ đều là phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$.

Ví dụ 3.18. Xác định một điểm và một vectơ chỉ phương của đường thẳng

$$(\Delta): \begin{cases} x = -2 + 3t, \\ y = 2 + t, \\ z = 4 - 2t. \end{cases}$$

Giải. (Δ) đi qua điểm $(-2; 2; 4)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (3; 1; -2)$.

Luyện tập 3.13. Xác định tọa độ một điểm và một vectơ chỉ phương của đường thẳng

$$(\Delta): \begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = -3t, \\ z = 2 - 6t. \end{cases}$$

Ví dụ 3.19. Cho hai điểm $A(-5; 3; -2)$, $B(-1; 11; 14)$ và đường thẳng

$$(d): \begin{cases} x = -7 + t, \\ y = -1 + 2t, \\ z = 4 - 3t. \end{cases}$$

Trong các điểm đã cho, điểm nào thuộc (d) , điểm nào không thuộc (d) ?

Giải. Thay tọa độ điểm A vào phương trình đường thẳng (d) , ta được

$$\begin{cases} -5 = -7 + t, \\ 3 = -1 + 2t, \\ -2 = 4 - 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2, \\ 2t = 4, \\ 3t = 6 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2.$$

Ta thấy, tọa độ điểm A thỏa mãn phương trình của (d) . Vậy $A \in (d)$.

Thay tọa độ điểm B vào phương trình đường thẳng (d) , ta được

$$\begin{cases} -1 = -7 + t, \\ 11 = -1 + 2t, \\ 4 = 4 - 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 6, \\ 2t = 12, \\ 3t = 0. \end{cases}$$

Hệ phương trình trên vô nghiệm, tức là, tọa độ điểm B không thỏa mãn phương trình của (d) . Vậy $B \notin (d)$.

Luyện tập 3.14. Cho bốn điểm:

$$A(-3; -10; 7), \quad B(5; 2; 3), \quad C(13; 14; 1), \quad D(7; -5; 2)$$

và đường thẳng

$$(d): \begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = -1 + 3t, \\ z = 4 - t. \end{cases}$$

Trong các điểm đã cho, điểm nào thuộc (d) , điểm nào không thuộc (d) ?

Hoạt động 3.11. Từ (3.6), với a_1, a_2, a_3 đều khác 0, xem mỗi phương trình với ẩn là t , giải mỗi phương trình đó.

Từ (3.6), với a_1, a_2, a_3 đều khác 0, ta suy ra

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}.$$

Định nghĩa 3.7. Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ với a_1, a_2, a_3 đều khác 0 là phương trình có dạng

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}. \quad (3.7)$$

Ngược lại, mỗi hệ phương trình dạng (3.7) với $a_1 a_2 a_3 \neq 0$ đều là phương trình của đường thẳng Δ đi qua điểm $(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$.

Ví dụ 3.20. Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(2; 4; 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{v} = (-5; -1; 4)$.

Giải.

- Phương trình tham số của Δ là
$$\begin{cases} x = 2 - 5t, \\ y = 4 - t, \\ z = 3 + 4t. \end{cases}$$
- Phương trình chính tắc của Δ là
$$\frac{x - 2}{-5} = \frac{y - 4}{-1} = \frac{z - 3}{4}.$$

Luyện tập 3.15. Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1; -2; 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{v} = (-2; -2; -4)$.

Luyện tập 3.16. Viết phương trình tham số các trục tọa độ Ox, Oy, Oz .

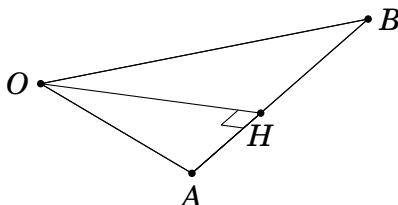
Ví dụ 3.21. Viết phương trình đường thẳng (d) qua điểm $A(1; 3; 5)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x - 2y = 0$.

Giải. (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -2; 0)$. Vì (d) vuông góc với (P) , nên (d) nhận $\vec{n}$ làm vectơ chỉ phương. Phương trình tham số của (d) là Δ là

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 3 - 2t, \\ z = 5. \end{cases}$$

Luyện tập 3.17. Cho tam giác ABC có $A(2; 4; 3); B(1; -6; -14); C(12; 5; 8)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua trọng tâm G của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C .

Luyện tập 3.18. Cho tam giác OAB có $O(0; 0; 0), A(1; 4; -1), B(2; 5; -2)$. Viết phương trình đường cao OH của tam giác OAB .



Hình 3.12

Hoạt động 3.12. Không cần xác định tọa độ điểm H , hãy tìm một vectơ chỉ phương của đường thẳng OH .

Ví dụ 3.22. Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(-2; 1; 4)$ và $B(2; 3; -2)$.

Giải. $\overrightarrow{AB} = (4; 2; -6)$ có giá là đường thẳng AB nên là một vectơ chỉ phương đường thẳng Δ . Nhận thấy rằng $\overrightarrow{AB} = 2(2; 1; -3)$, ta có thể chọn $\vec{v} = (2; 1; -3)$ là vectơ chỉ phương của Δ . Đường thẳng Δ đi qua $A(-2; 1; 4)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{v} = (2; 1; -3)$ nên có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = -2 + 2t, \\ y = 1 + t, \\ z = 4 - 3t. \end{cases}$$

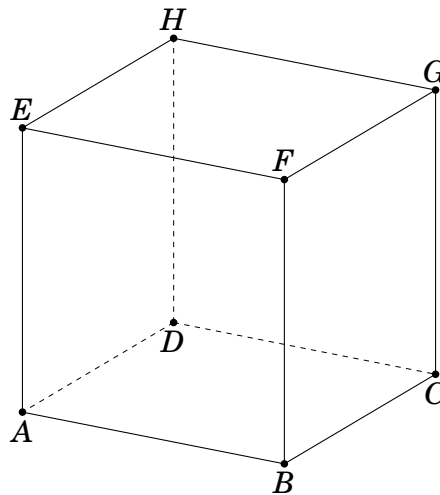
Phương trình chính tắc của Δ là $\frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-4}{-3}$.

Luyện tập 3.19. Cho tam giác ABC có $A(1; -7; -9)$, $B(2; -2; 5)$, $C(4; -4; 3)$. Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc đường trung tuyến AM của tam giác ABC .

Luyện tập 3.20. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có

$$D(0; 0; 0), \quad A(2; 0; 0), \quad B(2; 2; 0), \quad H(0; 0; 2).$$

Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm C và F .



Hình 3.13

3.3.2 Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Hoạt động 3.13. Cho đường thẳng (d) đi qua điểm M và có vectơ chỉ phương $\vec{a}$, (α) là mặt phẳng có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$. Có bao nhiêu vị trí tương đối của (d) và (α) ? Trong mỗi vị trí đó, cho biết quan hệ giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{n}$.

Cho đường thẳng (d) đi qua điểm M và có vectơ chỉ phương $\vec{a}$, (α) là mặt phẳng có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$. Ta có

- $(d) \parallel (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{a} = 0, \\ M \notin (\alpha). \end{cases}$
- $(d) \text{ cắt } (\alpha) \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{a} \neq 0$.
Đặc biệt $(d) \perp (\alpha) \Leftrightarrow [\vec{n}, \vec{a}] = \vec{0}$.
- $(d) \subset (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{a} = 0, \\ M \in (\alpha). \end{cases}$

Ngoài ra, để xét vị trí tương đối của đường thẳng (d) và mặt phẳng (α) , ta xét hệ phương trình gồm phương trình của (d) và phương trình của (α) .

- Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow (d) \text{ cắt } (\alpha)$. Bộ ba số $(x_0; y_0; z_0)$ thỏa hệ là tọa độ giao điểm của (d) và (α) .
- Hệ phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow (d)$ và (α) song song nhau.
- Hệ phương trình có vô số nghiệm $\Leftrightarrow (d) \subset (\alpha)$.

Ví dụ 3.23. Xét vị trí tương đối của đường thẳng (Δ) và mặt phẳng (α) trong các trường hợp sau:

a) $(\Delta): \frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}, \quad (\alpha): 3x+5y-z-2=0;$

b) $(\Delta): \begin{cases} x = -1+2t, \\ y = 3+4t, \\ z = 3t, \end{cases} \quad (\alpha): 3x-3y+2z-5=0.$

Giải.

a) **Cách 1.** Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}, \\ 3x+5y-z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4y=0, \\ x-4z-8=0, \\ 3x+5y-z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=0, \\ z=-2. \end{cases}$$

Vậy (Δ) cắt (α) tại điểm $M(0;0;-2)$.

Cách 2. Đường thẳng (Δ) có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (4;3;1)$, mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3;5;-1)$. Ta có

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = 4 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot (-1) = 26 \neq 0.$$

Vậy (Δ) cắt (α) .

Nhận xét. Trong Cách 2, ta chỉ biết (Δ) cắt (α) , nhưng không biết được tọa độ giao điểm của chúng.

b) **Cách 1.** Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x = -1 + 2t, \\ y = 3 + 4t, \\ z = 3t, \\ 3x - 3y + 2z - 5 = 0. \end{cases}$$

Thay x, y, z trong phương trình của (Δ) vào phương trình của mặt phẳng (α) , ta được

$$3(-1 + 2t) - 3(3 + 4t) + 6t - 5 = 0 \Leftrightarrow 0 \cdot t = 17.$$

Phương trình $0 \cdot t = 17$ vô nghiệm. Vậy (Δ) song song với (α) .

Cách 2. (Δ) đi qua điểm $A(-1; 3; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; 4; 3)$. Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; -3; 2)$.

Ta thấy, tọa độ điểm A không thỏa mãn phương trình mặt phẳng (α) . Hơn nữa,

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = 2 \cdot 3 + 4 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 = 0.$$

Vậy (Δ) song song với (α) .

Ví dụ 3.24. Cho đường thẳng

$$(d): \begin{cases} x = -1 - t, \\ y = 3 + 2t, \\ z = -2 - 8t \end{cases}$$

và mặt phẳng $(P): 2x - y + z + 1 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa (d) và vuông góc với mặt phẳng (P) .

Giải. Gọi $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của (α) , thì $\vec{n}$ vuông góc với vectơ chỉ phương $\vec{a} = (-1; 2; -8)$ của đường thẳng (d) và vuông góc với vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)} = (2; -1; 1)$ của mặt phẳng (P) . Do đó, vectơ pháp tuyến của (α) là

$$\vec{n} = [\vec{a}, \vec{n}_{(P)}] = (-6; -15; -3).$$

Vậy mặt phẳng (α) có phương trình

$$-6(x + 1) - 15(y - 3) - 3(z + 2) = 0 \Leftrightarrow 2x + 5y + z - 11 = 0.$$

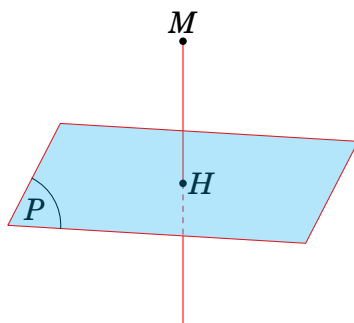
Luyện tập 3.21. Trong không gian với tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3; 1; 2)$ và hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1} \quad \text{và} \quad d_2: \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -1 - 2t, \\ z = 2 + t. \end{cases}$$

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A đồng thời song song với hai đường thẳng d_1 và d_2 .

Ví dụ 3.25. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $M(1; 3; 5)$ lên mặt phẳng

$$(P): 2x - 6y - 3z - 18 = 0.$$



Hình 3.14

Giải. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên (P) . Đường thẳng MH qua M và vuông góc với (P) , nên nhận vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; -6; -3)$ của (P) làm vectơ chỉ phương. Phương trình đường thẳng MH là

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 3 - 6t, \\ z = 5 - 3t. \end{cases}$$

Vì H thuộc đường thẳng MH , nên $H(1 + 2t; 3 - 6t; 5 - 3t)$. Lại có M thuộc (P) , do đó

$$2(1 + 2t) - 6(3 - 6t) - 3(5 - 3t) - 18 = 0.$$

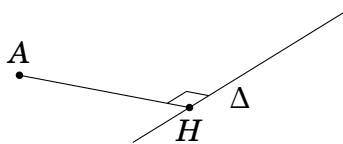
Khai triển phương trình trên, ta được $49 - 49t = 0$ hay $t = 1$. Khi đó, $H(3; -3; 2)$.

Luyện tập 3.22. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $O(0; 0; 0)$ lên mặt phẳng qua ba điểm $A(18; 0; 0)$, $B(0; 9; 0)$, $C(0; 0; 9)$.

Hoạt động 3.14. Gọi (P) là mặt phẳng sao cho hình chiếu vuông góc của $O(0; 0; 0)$ lên (P) là $H(1; 2; 3)$. Tìm các giao điểm của (P) với các trục tọa độ Ox , Oy , Oz .

Ví dụ 3.26. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; 5; 1)$ lên đường thẳng

$$\Delta: \begin{cases} x = 3 - t, \\ y = -1 + 3t, \\ z = 3 + 2t. \end{cases}$$



Hình 3.15

Giải. Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (-1; 3; 2)$. Với H tùy ý thuộc Δ , ta có

$$H(3 - t; -1 + 3t; 3 + 2t).$$

Khi đó

$$\overrightarrow{AH} = (-t; 3t - 6; 2t + 2).$$

H là hình chiếu của A trên Δ khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{a} = (-1)(-t) + 3(3t - 6) + 2(2t + 2) = 0 \Leftrightarrow 14t - 14 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Khi đó $H(2; 2; 5)$.

3.3.3 Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Trong không gian, cho đường thẳng Δ đi qua điểm M và có vectơ chỉ phương là $\vec{a}$, đường thẳng Δ' đi qua điểm M' và có vectơ chỉ phương là $\vec{a}'$.

1) Δ và Δ' cùng nằm trong một mặt phẳng khi và chỉ khi $[\vec{a}, \vec{a}'] \cdot \overrightarrow{MM'} = 0$.

- Δ và Δ' cắt nhau khi và chỉ khi $[\vec{a}, \vec{a}'] \cdot \overrightarrow{MM'} = 0$ và hai vectơ $\vec{a}, \vec{a}'$ không cùng phương.
- Δ và Δ' song song khi và chỉ khi hai vectơ $\vec{a}, \vec{a}'$ cùng phương và điểm thuộc đường thẳng này không thuộc đường thẳng kia.
- Δ và Δ' song song khi và chỉ khi hai vectơ $\vec{a}, \vec{a}'$ cùng phương và mọi điểm thuộc đường thẳng này đều thuộc đường thẳng kia.

2) Δ và Δ' chéo nhau khi và chỉ khi $[\vec{a}, \vec{a}'] \cdot \overrightarrow{MM'} \neq 0$.

Ngoài ra, để xét vị trí tương đối của hai đường thẳng Δ và Δ' , ta xét hệ phương trình (*) gồm phương trình của Δ và phương trình của Δ' .

- Hệ phương trình (*) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi Δ cắt Δ' . Bộ ba số $(x_0; y_0; z_0)$ thỏa hệ (*) là toạ độ giao điểm của Δ và Δ' .
- Hệ phương trình (*) có vô số nghiệm khi và chỉ khi $\Delta \equiv \Delta'$.
- Hệ phương trình (*) vô nghiệm và các vectơ chỉ phương của Δ và Δ' cùng phương khi và chỉ khi Δ và Δ' song song với nhau.
- Hệ phương trình vô nghiệm và các vectơ chỉ phương của Δ và Δ' không cùng phương khi và chỉ khi Δ và Δ' chéo nhau.

Ví dụ 3.27. Cho hai đường thẳng

$$(\ell_1): \begin{cases} x = -2 + 3t, \\ y = -1, \\ z = 4 - t \end{cases} \quad \text{và} \quad (\ell_2): \frac{x-10}{-1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{-2}.$$

Chứng minh rằng (ℓ_1) và (ℓ_2) cắt nhau. Tìm toạ độ giao điểm của (ℓ_1) và (ℓ_2) ;

Giải. Gọi $M(x_0; y_0; z_0)$ là toạ độ giao điểm của (ℓ_1) và (ℓ_2) , ta có

$$\begin{cases} x_0 = -2 + 3t, \\ y_0 = -1, \\ z_0 = 4 - t, \\ \frac{x_0 - 10}{-1} = \frac{y_0 + 1}{-1} = \frac{z_0}{-2}. \end{cases}$$

Suy ra

$$\frac{-2 + 3t - 10}{-1} = \frac{-1 + 1}{-1} = \frac{4 - t}{-2} \Leftrightarrow t = 4.$$

Do đó, $x_0 = 10, y_0 = -1, z_0 = 0$.

Vậy (ℓ_1) và (ℓ_2) cắt nhau tại điểm $M(10; -1; 0)$.

Luyện tập 3.23. Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng

$$(d_1): \begin{cases} x = -3t - 10, \\ y = -4t - 10, \\ z = -2t - 7 \end{cases} \quad (d_2): \begin{cases} x = m - 2, \\ y = 2m + 2, \\ z = 3m + 3. \end{cases}$$

Ví dụ 3.28. Cho hai đường thẳng

$$(\Delta_1): \begin{cases} x = -2 + t, \\ y = -7 + 3t, \\ z = 8 - 4t \end{cases} \quad \text{và} \quad (\Delta_2): \begin{cases} x = -4 - 2m, \\ y = 7 + m, \\ z = -1 + m. \end{cases}$$

Viết phương trình đường thẳng (Δ_3) đi qua điểm $M(6, 1, -2)$ và cắt cả (Δ_1) và (Δ_2) .

Giải. Giả sử A, B lần lượt là giao điểm của $(\Delta_1), (\Delta_2)$ với (Δ_3) . Khi đó,

$$A(-2 + t, -7 + 3t, 8 - 4t), \quad B(-4 - 2m, 7 + m, -1 + m).$$

Ta có

$$\overrightarrow{AM} = (8 - t, 8 - 3t, -10 + 4t), \quad \overrightarrow{BM} = (10 + 2m, -6 - m, -1 - m)$$

Do hai vectơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{BM}$ cùng phương, nên tồn tại số k sao cho $\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{BM}$. Điều này dẫn đến hệ

$$\begin{cases} -2km - 10k - t + 8 = 0, \\ km + 6k - 3t + 8 = 0, \\ km + k + 4t - 10 = 0. \end{cases}$$

Giải hệ trên, ta thu được

$$t = 4 \wedge m = -4 \wedge k = 2.$$

Lúc đó, $A(2, 5, -8)$. Đường thẳng (Δ_3) đi qua hai điểm A và M , nên có phương trình

$$\begin{cases} x = 2 + 4t, \\ y = 5 - 4t, \\ z = -8 + 6t. \end{cases}$$

Ví dụ 3.29. (D, 2009, theo chương trình Nâng cao) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng

$$\Delta: \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$$

và mặt phẳng $(P): x + 2y - 3z + 4 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong (P) sao cho d cắt và vuông góc với Δ .

Giải. Ta thấy (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 2; -3)$ và Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; 1; -1)$.

Gọi $\vec{v}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d , thì $\vec{v}$ vuông góc với $\vec{n}$ và $\vec{u}$. Do đó, $\vec{v} = [\vec{n}, \vec{u}] = (1; -2; -1)$ làm vectơ chỉ phương.

Gọi E là giao điểm của Δ và (P) , tọa độ E là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}, \\ x+2y-3z+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+4=0, \\ x+z+2=0, \\ x+2y-3z+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3, \\ y=1, \\ z=1. \end{cases}$$

Suy ra $E(-3; 1; 1)$.

Do d cắt Δ , nên d đi qua điểm E . Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là

$$\frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-1}.$$

Ví dụ 3.30. Cho hai đường thẳng

$$(d_1): \begin{cases} x = -5 + 3t, \\ y = -2 + 2t, \\ z = 7 - 2t \end{cases} \quad (d_2): \begin{cases} x = 2 + 3m, \\ y = 5 + 6m, \\ z = -7 - 4m. \end{cases}$$

- Chứng minh hai đường thẳng (d_1) và (d_2) chéo nhau.
- Viết phương trình mặt phẳng $(\mathcal{P})$ chứa (d_1) và song song với (d_2) .
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2) .
- Tìm điểm A thuộc (d_1) và điểm B thuộc (d_2) sao cho độ dài đoạn thẳng AB nhỏ nhất.
- Viết phương trình đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2) .

Giải.

- (d_1) qua điểm $M(-5; -2; 7)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{a}_1 = (3; 2; -2)$; (d_2) qua điểm $N(2; 5; -7)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{a}_2 = (3; 6; -4)$.

- Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} -5 + 3t = 2 + 3m, \\ -2 + 2t = 5 + 6m, \\ 7 - 2t = -7 - 4m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t - 3m = 7, \\ 2t - 6m = 7, \\ 2t - 4m = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{7}{4}, \\ m = -\frac{7}{12}, \\ t - 2m = 7. \end{cases}$$

Hệ phương trình cuối vô nghiệm.

- Mặt khác, ta thấy rằng, không tồn tại số thực k sao cho $\vec{a}_1 = k\vec{a}_2$, nên $\vec{a}_1$ và $\vec{a}_2$ không cùng phương.

Từ hai điều trên cho ta hai đường thẳng (d_1) và (d_2) chéo nhau.

- Mặt phẳng $(\mathcal{P})$ chứa (d_1) và song song với (d_2) có vectơ pháp tuyến là

$$\vec{n} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2] = (4; 6; 12) = 2(2; 3; 6).$$

Ta chọn $\vec{v} = (2; 3; 6)$ là vectơ pháp tuyến của $(\mathcal{P})$.

Phương trình mặt phẳng $(\mathcal{P})$ đi qua $M(-5; -2; 7)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{v} = (2; 3; 6)$ là

$$2(x+5) + 3(y+2) + 6(z-7) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y + 6z - 26 = 0.$$

- c) Do $(\mathcal{P})$ chứa (d_1) và song song với (d_2) , nên khoảng cách giữa (d_1) và (d_2) bằng khoảng cách từ điểm N đến $(\mathcal{P})$. Khoảng cách này bằng

$$d[N, (\mathcal{P})] = \frac{|2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + 6 \cdot (-7) - 26|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 7^2}} = \frac{|-49|}{7} = 7.$$

- d) A thuộc (d_1) , nên $A(-5+3t; -2+2t; 7-2t)$ và B thuộc (d_2) , nên $B(2+3m; 5+6m; -7-4m)$. Khi đó

$$\overrightarrow{AB} = (3m - 3t + 7; 6m - 2t + 7; -4m + 2t - 14).$$

Độ dài đoạn AB ngắn nhất khi và chỉ khi AB là đoạn vuông góc chung của (d_1) và (d_2) . Điều này tương đương với

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{a}_1 = 0, \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{a}_2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 29m - 17t + 63 = 0, \\ 61m - 29t + 119 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 29m - 17t + 63 = 0, \\ 61m - 29t + 119 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2, \\ m = -1. \end{cases}$$

Khi đó $A(1; 2; 3)$ và $B(-1; -1; -3)$.

Chú ý, để tìm các số t và m ta có thể làm như sau. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ và vectơ pháp tuyến $\vec{v} = (2; 3; 6)$ của $(\mathcal{P})$ cùng vuông góc với các vectơ $\vec{a}_1$ và $\vec{a}_2$ nên chúng cùng phương với nhau. Do đó, tồn tại số k sao cho $\overrightarrow{AB} = k\vec{v}$. Điều này cho ta

$$\begin{cases} 3m - 3t + 7 = 2k, \\ 6m - 2t + 7 = 3k, \\ -4m + 2t - 14 = 6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1, \\ t = 2, \\ k = -1. \end{cases}$$

- e) Đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2) qua $A(1; 2; 3)$ và nhận $\vec{v} = (2; 3; 6)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình là

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{6}.$$

3.3.4 Bài tập tự luận

Bài tập 3.33. Xác định tọa độ một điểm và tọa độ một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ trong các trường hợp sau:

a) $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 + 4t, \\ z = 3 + t; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = t, \\ y = 5 - t, \\ z = 7; \end{cases}$

c) $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-4}{5};$

d) $\frac{x+3}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{4}.$

Bài tập 3.34. Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc (nếu có) của đường thẳng Δ trong các trường hợp sau:

- a) Δ qua điểm $A(-1; -3; 4)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (3; 5; 7);$

- b) Δ qua gốc tọa độ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (0; 2; 6);$

c) Δ đi qua hai điểm $M(-1;2;-7)$ và $N(1;3,-6)$;

d) Δ đi điểm $A(-2;2;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): x + 2y - 3z + 4 = 0$.

Bài tập 3.35. Viết phương trình đường cao kẻ từ A của tam giác ABC trong các trường hợp sau:

a) $A(2, -5, 8), \quad (4, -3, 10), \quad (5, -1, 11).$ Đáp số.
$$\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = -5 - t, \\ z = 8 + t. \end{cases}$$

b) $A(2, -5, 8), \quad (5, 4, -4), \quad (7, -3, 1).$ Đáp số.
$$\begin{cases} x = 2 + 4t, \\ y = -5 - t, \\ z = 8 - 3t. \end{cases}$$

Bài tập 3.36. Cho tam giác ABC có $A(2, 3, 5); B(1, -7, -12); C(12, 4, 10)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua trọng tâm G của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) .

Đáp số.
$$\begin{cases} x = 5 - t, \\ y = -5t, \\ z = 1 + 3t. \end{cases}$$

Bài tập 3.37. Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng Δ trong các trường hợp sau:

a) $A(1; -2; -1), \quad \Delta: \begin{cases} x = t + 1, \\ y = 2t - 2, \\ z = t + 3; \end{cases}$ Đáp số. $x + 2y + z + 4 = 0$.

b) $(A, 2013) A(1; 7; 3), \quad \Delta: \frac{x-6}{-3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1};$ Đáp số. $3x + 2y - z - 14 = 0$.

c) $(B, 2014) A(1; 0; -1), \quad \Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}.$ Đáp số. $2x + 2y - z - 3 = 0$.

Bài tập 3.38. Cho hai điểm A, B và đường thẳng d . Tìm tọa độ điểm M trên d sao cho tam giác MAB cân tại điểm chỉ ra trong các trường hợp sau:

a) Tam giác MAB cân tại M ,

$$A(1; -2; -2), \quad B(-3; -6; 4), \quad d: \begin{cases} x = t + 1, \\ y = t + 2, \\ z = t + 3; \end{cases}$$

Đáp số. $M(-9; -8; -7)$.

b) Tam giác MAB cân tại A ,

$$A(1; -2; -2), \quad B(2; -6; 4), \quad d: \begin{cases} x = t - 1, \\ y = t - 2, \\ z = t + 3. \end{cases}$$

Đáp số. $M(-5; -6; -1), \quad M(1; 0; 5)$.

Bài tập 3.39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d và hai điểm A, B . Tìm trên d điểm M sao cho tam giác MAB vuông tại M trong các trường hợp sau:

a)

$$A(3; 2; 4), \quad B(-5; -6; -10), \quad d: \begin{cases} x = 3 + 4t, \\ y = -1 + t, \\ z = -11 - 8t. \end{cases}$$

Đáp số. $M(3; -1; -11), M(-5; -3; 5)$.

b)

$$A(5; -5; -5), \quad B(-7; 1; -1), \quad d: \begin{cases} x = -4 + 3t, \\ y = 4 - 6t, \\ z = -5 + 2t. \end{cases}$$

Đáp số. $M(-4; 4; -5), M(2; -8; -1)$.

Bài tập 3.40. Cho điểm A và hai đường thẳng d_1 và d_2 . Tìm tọa các điểm M thuộc d_1 và N thuộc d_2 sao cho ba điểm A, M, N thẳng hàng trong các trường hợp sau:

a)

$$A(1; 2; 3), \quad d_1: \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 1 + 3t, \\ z = 5 + 2t \end{cases} \quad \text{và} \quad d_2: \begin{cases} x = 3 + m, \\ y = 5 + 2m, \\ z = 4 - m; \end{cases}$$

Đáp số. $M(3; 4; 7)$ và $N(2; 3; 5)$.

b)

$$A(-1; -3; -5), \quad d_1: \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 5 + 3t, \\ z = -5 + t \end{cases} \quad \text{và} \quad d_2: \begin{cases} x = -2m + 3, \\ y = -m - 1, \\ z = -4m - 2. \end{cases}$$

Đáp số. $M(3; -1; -7)$ và $N(1; -2; -6)$.

Bài tập 3.41. Xét vị trí tương đối giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) trong các trường hợp sau:

$$\text{a) } \Delta: \begin{cases} x = -1 + t, \\ y = 6 - 2t, \\ z = -7 + 2t; \end{cases} \quad (P): 2x + y + z - 1 = 0.$$

Trả lời. Δ cắt (P) tại điểm $M(1, 2, -3)$.

$$\text{b) } \Delta: \begin{cases} x = -2 + 3t, \\ y = 7 - 2t, \\ z = 7 - t; \end{cases} \quad (P): 3x - 2y - z - 1 = 0.$$

Trả lời. Δ vuông góc với (P) tại điểm $M(4;3;5)$.

$$\text{c) } \Delta: \begin{cases} x = 2 - 3t, \\ y = -5 + 7t, \\ z = -2 + 5t; \end{cases} \quad (P): 3x + 2y - z + 1 = 0.$$

Trả lời. Δ song song với (P) .

$$\text{d) } \Delta: \begin{cases} x = 2 - t, \\ y = -2 + 5t, \\ z = 1 - 3t; \end{cases} \quad (P): x + 2y + 3z - 1 = 0.$$

Trả lời. Δ nằm trong (P) .

Bài tập 3.42. Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc H của điểm A lên mặt phẳng (P) và toạ độ điểm đối xứng R của điểm A qua mặt phẳng (P) trong các trường hợp sau:

$$\text{a) } A(-5; -1; -3), \quad (P): 2x - y - z - 6 = 0;$$

Đáp số. $H(-1; -3; -5), \quad R(3; -5; -7)$.

$$\text{b) } A(9; 12; 15), \quad (P): 4x + 5y + 6z - 32 = 0.$$

Đáp số. $H(1; 2; 3), \quad R(-7; -8; -9)$.

Bài tập 3.43. Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc H của điểm A lên đường thẳng Δ và toạ độ điểm đối xứng R của điểm A qua đường thẳng Δ trong các trường hợp sau:

$$\text{a) } A(-1; -3; 4), \quad \Delta: \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 2 + 5t, \\ z = -t; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } H(2; -3; 1), \quad R(5; -3; -2).$$

$$\text{b) } A(2; 5; 3), \quad \Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}. \quad \text{Đáp số. } H(3; 1; 4), \quad R(4; -3; 5).$$

Bài tập 3.44. Viết phương trình đường cao AH của tam giác ABC trong các trường hợp sau:

$$\text{a) } A(3; 2; 1), \quad B(-5; 5; -4), \quad C(-1; -7; 2);$$

Đáp số. $x = 3 - 6t, y = 2 - 3t, z = 1 - 2t$. (Hình chiếu $H(-3; -1; -1)$).

$$\text{b) } A(1; 2; 3), \quad B(4; 10; -4), \quad C(-8; -2; -2).$$

Đáp số. $x = 1 - 3t, y = 2 + 2t, z = 3 - 6t$. (Hình chiếu $H(-2; 4; -3)$).

Bài tập 3.45. Cho điểm M và đường thẳng (d) . Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M và chứa (d) trong các trường hợp sau:

$$\text{a) } M(1; -2; -2), \quad (d): \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = -1 + 3t, \\ z = 3 + 4t; \end{cases}$$

Đáp số. $11x - y - 2z - 17 = 0$.

$$\text{b) } M(5; 2; -3), \quad (d): \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{-6}.$$

Đáp số. $x + 4y + z - 10 = 0$.

Bài tập 3.46. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d_1 và song song với đường thẳng d_2 trong các trường hợp sau:

$$\text{a) } d_1: \begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = -1 + 2t, \\ z = -3 - 2t, \end{cases} \quad d_2: \begin{cases} x = 2 - m, \\ y = 3 + m, \\ z = 1 + 3m; \end{cases}$$

Đáp số. $8x - 7y + 5z - 8 = 0$.

$$\text{b) } d_1: \begin{cases} x = -1 + 2t, \\ y = 2 + 3t, \\ z = 3 + t, \end{cases} \quad d_2: \begin{cases} x = 3 + m, \\ y = -1 - m, \\ z = 4 + 2m. \end{cases}$$

Đáp số. $7x - 3y - 5z + 28 = 0$.

Bài tập 3.47. Cho điểm A và đường thẳng d . Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A , cắt và vuông góc với đường thẳng d trong trường hợp sau:

$$A(-4; -2; 4), \quad d: \begin{cases} x = -3 + 2t, \\ y = 1 - t, \\ z = -1 + 4t. \end{cases}$$

Đáp số. $\frac{x+4}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-4}{-1}$.

Bài tập 3.48. Cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) . Tìm tọa độ giao điểm M của (d) và (P) . Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa (d) và vuông góc với (P) trong trường hợp sau:

$$d: \frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-7}{3}, \quad (P): 3x - y - 2z + 5 = 0.$$

Đáp số. $M(2; 3; 4), \quad (Q): x - 11y + 7z + 3 = 0$.

Bài tập 3.49. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt đường thẳng d và mặt phẳng (P) lần lượt tại M, N sao cho A là trung điểm đoạn thẳng MN trong các trường hợp sau:

a) $(A, 2012, \text{Chương trình Nâng cao})$

$$A(1; -1; 2), \quad (P): x + y - 2z + 5 = 0, \quad d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1};$$

Đáp số. $\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = 2 - 3t, \\ z = 4 - 2t. \end{cases}$

$$\text{b) } A(-1; -1; -2), \quad (P): x - y + 2z - 1 = 0, \quad d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-2}.$$

$$\text{Đáp số. } \begin{cases} x = -1 + 7t, \\ y = -1 - 4t, \\ z = -2 - 8t. \end{cases}$$

Bài tập 3.50. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M , cắt hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 lần lượt tại A và B sao cho M là trung điểm của đoạn thẳng AB trong các trường hợp sau:

$$\text{a) } M(1, 2, 3), \quad \Delta_1: \begin{cases} x = -5 - 2t, \\ y = -1 - t, \\ z = 3 + t, \end{cases} \quad \Delta_2: \begin{cases} x = -2 + m, \\ y = -2 + 8m, \\ z = 1 + m; \end{cases}$$

$$\text{Đáp số. } \Delta: \begin{cases} x = 1 - 2s, \\ y = 2 + 4s, \\ z = 3 - s. \end{cases}$$

$$\text{b) } M(-2, 1, 1), \quad \Delta_1: \begin{cases} x = -1 + 2t, \\ y = -2 + 5t, \\ z = 4 + t, \end{cases} \quad \Delta_2: \begin{cases} x = 3 - 8m, \\ y = -m, \\ z = -2 - m. \end{cases}$$

$$\text{Đáp số. } \Delta: \begin{cases} x = -2 - 3s, \\ y = 1 - 2s, \\ z = 1 - 4s. \end{cases}$$

Bài tập 3.51. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d_1 và song song với đường thẳng d_2 trong trường hợp sau:

$$d_1: \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 4 + 3t, \\ z = 6 + 5t, \end{cases} \quad d_2: \begin{cases} x = -1 + 2m, \\ y = -3 - m, \\ z = -5 - 3m. \end{cases}$$

$$\text{Đáp số. } 4x - 13y + 7z + 2 = 0.$$

Bài tập 3.52. Cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) . Chứng minh rằng (d) song song (P) . Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa (d) và vuông góc với (P) trong trường hợp sau:

$$d: \begin{cases} x = -5 + 3t, \\ y = -9 + t, \\ z = 3 + 2t, \end{cases} \quad (P): x - y - z + 4 = 0.$$

$$\text{Đáp số. } x + 5y - 4z + 62 = 0.$$

Bài tập 3.53. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và song song với hai đường thẳng d_1 và d_2 trong trường hợp sau:

$$A(1; 2; -3), \quad d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-7}{3}, \quad d_2: \frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-1};$$

$$\text{Đáp số. } 9x + 11y + 5z - 16 = 0.$$

Bài tập 3.54. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M , Δ nằm trong mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ điểm A đến Δ nhỏ nhất trong trường hợp sau:

$$A(-1; -2; -3), \quad M(3; 5; -3), \quad (P): x + 2y + 2z - 7 = 0.$$

$$\text{Đáp số. } \Delta: \begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = 5 - 3t, \\ z = -3 + 4t. \end{cases}$$

Bài tập 3.55. Cho hai điểm A và B . Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A , song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến Δ lớn nhất trong trường hợp sau:

$$A(1; -1; -1), \quad B(2; 3; -4), \quad (P): 3x + 2y - 5z + 2 = 0.$$

$$\text{Đáp số. } \Delta: \begin{cases} x = 1 + 7t, \\ y = -1 + 2t, \\ z = -1 + 5t. \end{cases}$$

Bài tập 3.56. Cho hai điểm A và B . Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua B , song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ A đến Δ nhỏ nhất trong trường hợp sau:

$$A(2; 4; 6), \quad B(-1; -2; 3), \quad (P): 2x + y + 2z - 1 = 0.$$

$$\text{Đáp số. } \Delta: \begin{cases} x = -1 - t, \\ y = -2 + 4t, \\ z = 3 - t. \end{cases}$$

Bài tập 3.57. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng (d_1) và (d_2) trong các trường hợp sau:

$$\text{a) } (d_1): \begin{cases} x = 10 - 3t, \\ y = 10 - 4t, \\ z = 3 - 2t \end{cases}, \quad (d_2): \begin{cases} x = m + 3, \\ y = 2m + 2, \\ z = 3m + 3. \end{cases}$$

Trả lời. (d_1) và (d_2) cắt nhau tại điểm $(1; -2; -3)$.

$$\text{b) } (d_1): \begin{cases} x = t + 1, \\ y = 2t + 3, \\ z = -2t \end{cases}, \quad (d_2): \begin{cases} x = m - 2, \\ y = m + 2, \\ z = -m + 3. \end{cases}$$

Trả lời. (d_1) và (d_2) chéo nhau.

$$\text{c) } (d_1): \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 5 - 4t, \\ z = 3 + t \end{cases}, \quad (d_2): \begin{cases} x = 1 + 2m, \\ y = m, \\ z = 2 + 2m. \end{cases}$$

Trả lời. (d_1) , (d_2) cắt nhau tại $A(3; 1; 4)$ và vuông góc nhau.

$$\text{d) } (d_1): \begin{cases} x = t + 1, \\ y = 2t + 3, \\ z = 3t - 1 \end{cases} \quad (d_2): \begin{cases} x = m - 2, \\ y = m + 2, \\ z = -m + 3. \end{cases}$$

Trả lời. $(d_1), (d_2)$ chéo nhau và vuông góc nhau.

$$\text{e) } (d_1): \begin{cases} x = t + 1, \\ y = 2t + 3, \\ z = 4t - 1 \end{cases} \quad (d_1): \frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{4};$$

Trả lời. $(d_1), (d_2)$ song song nhau.

$$\text{f) } (d_1): \begin{cases} x = t + 1, \\ y = t + 3, \\ z = 2t + 1 \end{cases} \quad (d_1): \begin{cases} x = m + 3, \\ y = m + 5, \\ z = 2m + 5. \end{cases}$$

Trả lời. $(d_1), (d_2)$ trùng nhau.

Bài tập 3.58. Cho điểm A và hai đường thẳng d_1 và d_2 . Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A vuông góc với d_1 và cắt d_2 trong các trường hợp sau:

$$\text{a) } A(1;2;3), \quad d_1: \begin{cases} x = 2t + 2, \\ y = -t - 2, \\ z = t + 3, \end{cases} \quad d_2: \begin{cases} x = -m + 1, \\ y = 2m + 1, \\ z = m - 1; \end{cases}$$

Đáp số. $[x = 1 + t, y = 2 - 3t, z = 3 - 5t]$.

b) (D, 2011) (Chương trình Chuẩn)

$$A(1;2;3), \quad d_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-2}, \quad d_2 \text{ là trục } Ox.$$

$$\text{Đáp số. } \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}.$$

Bài tập 3.59. Cho hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$ và mặt phẳng (P) . Viết phương trình của đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) và cắt cả hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$ trong trường hợp sau:

$$(d_1): \begin{cases} x = -t, \\ y = 2 + t, \\ z = 4 + 3t, \end{cases} \quad (d_2): \begin{cases} x = -1 + t', \\ y = 6 - t', \\ z = 10 - 3t', \end{cases} \quad 2x - y + 4z - 5 = 0.$$

$$\text{Đáp số. } \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 1. \end{cases}$$

Bài tập 3.60. Trong không gian với toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng d , mặt phẳng (P) . Tìm toạ độ giao điểm A của đường thẳng d và mặt phẳng (P) . Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) , biết Δ đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng d trong các trường hợp sau:

a) (A, 2005)

$$d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{1}, \quad (P): 2x + y - 2z + 9 = 0.$$

Đáp số. $x = t, y = -1, z = 4 + t$.

b) (Cao đẳng 2012)

$$d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{1}, \quad (P): 2x + y - 2z = 0.$$

Đáp số. $x = 1 - t, y = -2, z = -t$.

Bài tập 3.61. Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 và mặt phẳng (P) . Viết phương trình đường thẳng Δ cắt d_1 và d_2 và vuông góc với (P) trong các trường hợp sau:

a)

$$d_1: \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -2 + t, \\ z = 3 - 2t, \end{cases} \quad d_2: \begin{cases} x = 1 - m, \\ y = 4 + 2m, \\ z = 2 + m, \end{cases} \quad (P): x - 3y - z + 1 = 0.$$

Đáp số. $x = -1 + t, y = 8 - 3t, z = 4 - t$.

b)

$$d_1: \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 3 + t, \\ z = 1 - 2t, \end{cases} \quad d_2: \begin{cases} x = 1 + 2m, \\ y = 1 - m, \\ z = 3 - m, \end{cases} \quad (P): 2x - y + 3z + 2 = 0.$$

Đáp số. $x = -1 + 2t, y = 2 - t, z = 3 + 3t$.Đáp số. $x = 5 + s, y = 6 - 4s, z = -3 + s$.

c) (A, 2007)

$$d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1} \quad \text{và} \quad d_2: \begin{cases} x = -1 + 2t, \\ y = 1 + t, \\ z = 3, \end{cases} \quad (P): 7x + y - 4z = 0.$$

Đáp số. $\frac{x-2}{7} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-4}$.

3.4 Phương trình mặt cầu

Trong đời sống hàng ngày, chúng ta hay gặp các hình có dạng hình cầu.



Hình 3.16

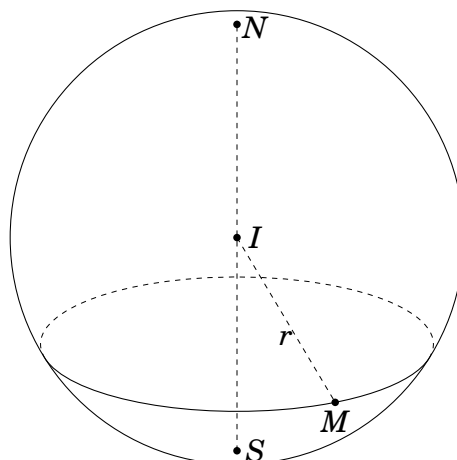
3.4.1 Phương trình mặt cầu

Hoạt động 3.15. Cho điểm $I(1; -1; -3)$, hãy tính khoảng cách từ I đến các điểm:

$$A(-5; -4; -1), \quad B(-2; -7; -5), \quad C(-2; 5; -5), \quad D(7; 1; -6), \quad E(4; 1; 3).$$

Định lý 3.7. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu ($\mathcal{S}$) tâm $I(a; b; c)$ bán kính r là

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2. \quad (3.8)$$



Hình 3.17

Chứng minh. Với $M(x; y; z)$ tùy ý, ta có

$$\begin{aligned} M \in (\mathcal{S}) &\Leftrightarrow IM = r \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r \\ &\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2 \end{aligned}$$

□

Hoạt động 3.16. Hãy viết (3.8) dưới dạng

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0.$$

Nhận xét. Từ (3.8), ta có

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = 0. \quad (3.9)$$

Đặt $d = a^2 + b^2 + c^2 - r^2$, (3.9) thành

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0. \quad (3.10)$$

Người ta chứng minh được rằng phương trình dạng (3.10), với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ là phương trình của mặt cầu tâm $I(a; b; c)$, bán kính $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Ví dụ 3.31. Xác định tọa độ tâm I và bán kính r của các mặt cầu $(\mathcal{S})$ có phương trình sau:

a) $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 9;$

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 6z - 6 = 0.$

Giải.

a) $(\mathcal{S})$ có tâm $I(1; 3; -2)$ và bán kính $r = 3;$

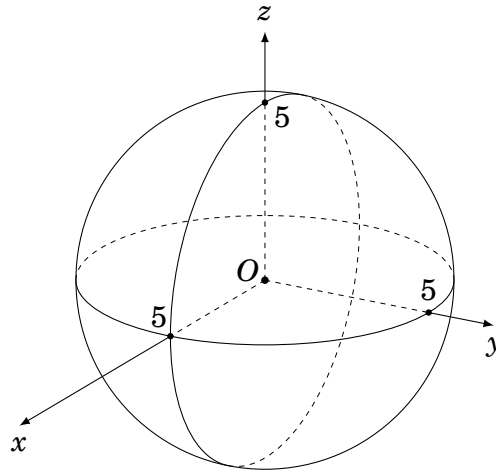
b) $(\mathcal{S})$ có tâm $I(0; 1; -3)$ và bán kính $r = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-3)^2 - (-6)} = \sqrt{16} = 4.$

Luyện tập 3.24. Xác định tọa độ tâm I và bán kính r của mặt cầu $(\mathcal{S})$ có phương trình sau:

a) $(x+1)^2 + (y+3)^2 + (z+5)^2 = 25;$

b) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 12x - 24y - 36z + 21 = 0.$

Ví dụ 3.32. Viết phương mặt cầu có tâm là $O(0; 0; 0)$ và có bán kính bằng 5.



Hình 3.18

Giải. Phương trình mặt cầu là

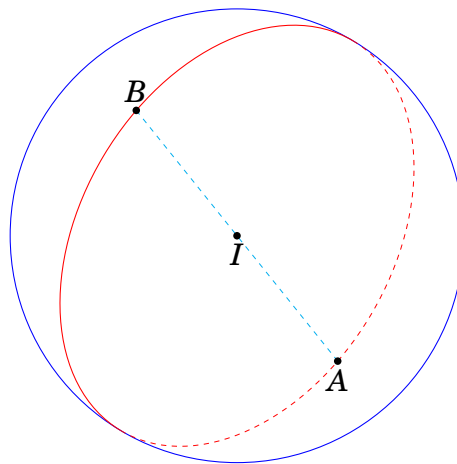
$$(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 5^2$$

hay

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25.$$

Luyện tập 3.25. Viết phương trình mặt cầu có tâm $I(1;3;5)$ và đi qua điểm $P(4;-3;7)$.

Ví dụ 3.33. Viết phương trình mặt cầu có đường kính là AB , biết $A(-1;3;1)$ và $B(3;1;5)$.



Hình 3.19

Giải. Tâm I của mặt cầu là trung điểm của đoạn thẳng AB , nên $I(1;2;3)$. Bán kính của mặt cầu là

$$IA = \sqrt{(1+1)^2 + (2-3)^2 + (3-1)^2} = 3.$$

Phương trình mặt cầu là

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9.$$

Luyện tập 3.26. Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc trục Oz và đi qua hai điểm $A(1;1;4)$ và $B(-1;2;1)$.

Ví dụ 3.34. Viết phương trình mặt cầu có tâm $I(3;2;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (P) có phương trình $2x - y - 2z + 16 = 0$.

Giải. Bán kính mặt cầu bằng khoảng cách từ I đến (P) . Khoảng cách này bằng

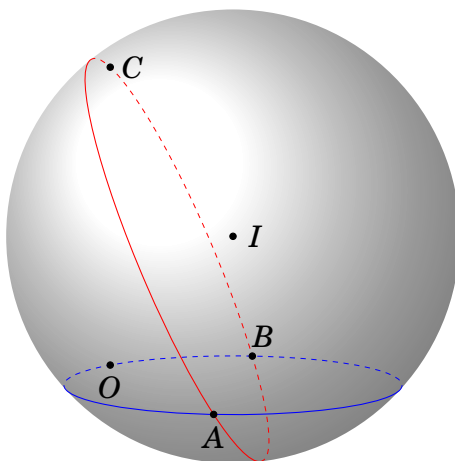
$$\frac{|2 \cdot 3 - 2 - 2 \cdot 1 + 16|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{18}{3} = 6.$$

Phương trình mặt cầu là

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 36.$$

Luyện tập 3.27. Viết phương trình mặt cầu có tâm $I(-3; -2; 5)$ và tiếp xúc với mặt phẳng tọa độ (Oyz) .

Ví dụ 3.35. Viết phương trình mặt cầu $(\mathcal{S})$ qua bốn điểm $O(0;0;0)$, $A(4;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;4)$. Xác định tọa độ tâm và bán kính của $(\mathcal{S})$.



Hình 3.20

Giải. Gọi phương trình của $(\mathcal{S})$ có dạng

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0. \quad (3.11)$$

Lần lượt thay tọa độ bốn điểm O , A , B , C vào phương trình (3.11), ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} d = 0, \\ 16 - 8a = 0, \\ 16 - 8b = 0, \\ 4 - 4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0, \\ a = 2, \\ b = 2, \\ c = 1. \end{cases}$$

Vậy phương trình của $(\mathcal{S})$ là

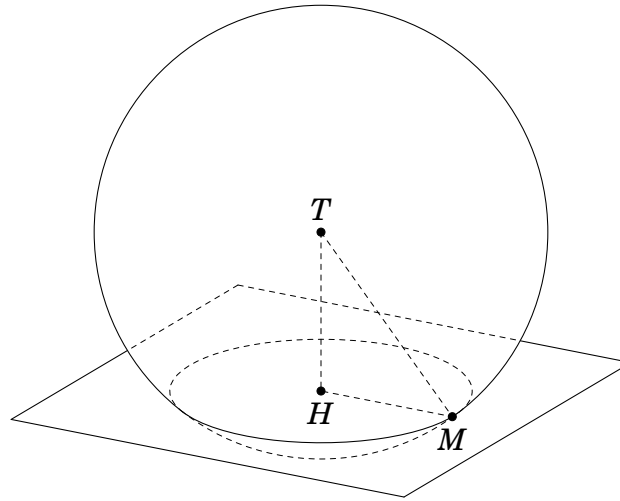
$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 2z = 0.$$

$(\mathcal{S})$ có tâm $I(2;2;1)$ và bán kính $r = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$.

Luyện tập 3.28. Viết phương trình mặt cầu $(\mathcal{S})$ đi qua bốn điểm

$$A(-11, -3, -9), \quad B(-10, -8, -1), \quad C(-7, 4, -4), \quad D(1, -5, 3).$$

Ví dụ 3.36. Cho mặt cầu $(\mathcal{S})$ có tâm $T(1;3;5)$. Mặt phẳng $(\mathcal{P}): 2x + 2y + z + 23 = 0$ cắt $(\mathcal{S})$ theo một đường tròn $(\mathcal{C})$ có bán kính bằng 5. Viết phương trình của $(\mathcal{S})$.



Hình 3.21

Giải. Gọi H là tâm của $(\mathcal{C})$ thì TH là khoảng cách từ T đến (P) . Ta có

$$TH = \frac{|2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 5 + 23|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{36}{3} = 12.$$

Với $M \in (\mathcal{C})$ và R là bán kính của $(\mathcal{S})$, ta có

$$R = TM = \sqrt{TH^2 + HM^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13.$$

Phương trình của $(\mathcal{C})$ là

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 169.$$

Ví dụ 3.37. (A, 2009) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng

$$(\mathcal{P}): 2x - 2y - z - 4 = 0$$

và mặt cầu

$$(\mathcal{S}): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0.$$

Chứng minh rằng mặt phẳng $(\mathcal{P})$ cắt mặt cầu $(\mathcal{S})$ theo một đường tròn. Xác định tọa độ tâm và tính bán kính của đường tròn đó.

Giải. Mặt cầu $(\mathcal{S})$ có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R = 5$; mặt phẳng $(\mathcal{P})$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2; -2; -1)$.

Gọi d là đường thẳng đi qua I và vuông góc với $(\mathcal{P})$, d nhận vectơ $\vec{n}$ làm vectơ chỉ phương. Vậy d có phương trình

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{-1}.$$

Gọi J là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P) , tọa độ J là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{-1}, \\ 2x - 2y - z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 3 = 0, \\ y - z + 1 = 0, \\ 2x - 2y - z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 0, \\ z = 2. \end{cases}$$

Vậy $J(3;0;2)$.

Ta có

$$d(I, (\mathcal{P})) = IJ = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} < R,$$

nên mặt phẳng $(\mathcal{P})$ cắt mặt cầu $(\mathcal{S})$ theo một đường tròn có tâm là $J(3;0;2)$ và bán kính $r = \sqrt{R^2 - IJ^2} = 4$.

Luyện tập 3.29. Cho mặt cầu $(\mathcal{S})$ có phương trình $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 25$ và mặt phẳng $(\mathcal{P})$ có phương trình $x-2y-2z-8=0$. Tìm bán kính của đường tròn giao tuyến tạo bởi $(\mathcal{S})$ và $(\mathcal{P})$.

Ví dụ 3.38. Cho điểm $A(2;-1;3)$ và mặt cầu $(\mathcal{S})$ có phương trình

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 9.$$

- Chứng minh rằng điểm A ở trong mặt cầu $(\mathcal{S})$.
- Viết phương trình mặt phẳng đi qua A và cắt $(\mathcal{S})$ theo một đường tròn có chu vi nhỏ nhất.

Giải.

- Mặt cầu $(\mathcal{S})$ có tâm $I(3;-1;1)$, bán kính $R = 3$. Ta có

$$IA = \sqrt{(2-3)^2 + (-1+1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5} < 3.$$

Vậy điểm A ở trong mặt cầu $(\mathcal{S})$.

- Gọi $(\mathcal{C})$ là đường tròn giao tuyến tạo bởi mặt phẳng (P) đi qua qua A với $(\mathcal{S})$ và r là bán kính của $(\mathcal{C})$.

Chu vi p của đường tròn $(\mathcal{C})$ là $2\pi r$, trong đó $r = \sqrt{R^2 - IH^2}$ và H là hình chiếu vuông góc của I lên (P) . Ta thấy p nhỏ nhất khi và chỉ khi IH lớn nhất. Vì $A \in (P)$, nên $IH \leq IA$. Do đó, IH lớn nhất khi và chỉ khi $H \equiv A$. Khi đó, (P) đi qua qua A và vuông góc với IA . Một vectơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{IA} = (-1;0;2)$.

Suy ra phương trình của (P) là $-x+2z-4=0$.

3.4.2 Bài tập tự luận

Bài tập 3.62. Xác định tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu $(\mathcal{S})$ trong mỗi trường hợp sau:

- $(\mathcal{S}): x^2 + y^2 + z^2 = 3;$
- $(\mathcal{S}): (x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-5)^2 = 25;$
- $(\mathcal{S}): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 35 = 0;$
- $(\mathcal{S}): 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 12y - 20z - 92 = 0.$

Bài tập 3.63. Viết phương trình mặt cầu $(\mathcal{S})$ trong mỗi trường hợp sau:

- $(\mathcal{S})$ có tâm $I(3;2;1)$ và đi qua điểm $A(-3;4;-2);$

$$\text{Đáp số. } (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 - 49 = 0.$$

- $(\mathcal{S})$ có đường kính AB với $A(7;7;8)$ và $B(-5;-5;-6);$

$$\text{Đáp số. } (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - 121 = 0.$$

c) $(\mathcal{S})$ có tâm $I(2;4;6)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x + 4y + 8z - 21 = 0$;

$$\text{Đáp số. } (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 25.$$

d) $(\mathcal{S})$ có tâm $O(0;0;0)$ và tiếp xúc với mặt phẳng đi qua ba điểm $A(3;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;6)$;

e) $(\mathcal{S})$ qua bốn điểm $O(0;0;0)$, $A(2;0;0)$, $B(0;8;0)$, $C(0;0;16)$;

$$\text{Đáp số. } (x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-8)^2 - 81 = 0.$$

f) $(\mathcal{S})$ qua bốn điểm $A(3, 7, 17)$, $B(6, 16, 1)$, $C(11, 13, 5)$, $D(15, 4, 8)$;

$$\text{Đáp số. } (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 - 225 = 0.$$

g) $(\mathcal{S})$ đi qua ba điểm $A(2, 7, 13)$, $B(4, 9, 11)$, $C(5, 10, 1)$ và có tâm I thuộc mặt phẳng $(P): x + 2y - z - 2 = 0$.

$$\text{Đáp số. } (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 - 81 = 0.$$

Bài tập 3.64. Viết phương mặt cầu $(\mathcal{S})$ có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo một đường tròn có bán kính r cho trước trong các trường hợp sau:

a) $(D, 2012)$ $I(2;1;3)$, $(P): 2x + y - 2z + 10 = 0$, $r = 4$;

$$\text{Đáp số. } (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 25.$$

b) $I(1;-4;-3)$, $(P): 2x - y + 2z - 12 = 0$, $r = 3$;

$$\text{Đáp số. } (x-1)^2 + (y+4)^2 + (z+3)^2 = 25.$$

c) $I(3;-4;-3)$, $(P): 8x + 15y + 2 = 0$, $r = \sqrt{5}$.

$$\text{Đáp số. } (x-3)^2 + (y+4)^2 + (z+3)^2 = 9.$$

Bài tập 3.65. Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu $(\mathcal{S})$ tại điểm M trong các trường hợp sau:

a) $(\mathcal{S}): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$, $M(1;1;1)$;

$$\text{Đáp số. } 2x - y - 2z + 1 = 0.$$

b) $(\mathcal{S}): x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y - 2z - 211 = 0$, $M(-7, -8, 6)$.

$$\text{Đáp số. } 2x + 2y - z + 36 = 0.$$

Bài tập 3.66. Viết phương trình tiếp diện (α) của mặt cầu $(\mathcal{S})$, biết (α) song song với mặt phẳng (P) trong các trường hợp sau:

a) $(\mathcal{S}): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$, $(P): 2x + y - 2z + 1 = 0$;

$$\text{Đáp số. } 2x + y - 2z + 15 = 0 \text{ và } 2x + y - 2z - 3 = 0.$$

b) $(\mathcal{S}): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z - 3 = 0$, $(P): 2x + 10y + 11z + 11 = 0$.

$$\text{Đáp số. } 2x + 10y + 11z - 79 = 0.$$

Bài tập 3.67. Viết phương trình tiếp diện (α) của mặt cầu $(\mathcal{S})$, biết (α) vuông góc với hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) trong các trường hợp sau:

a)

$$(\mathcal{S}): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 33 = 0,$$

$$(P_1): x + y + 4z + 1 = 0, \quad (P_2): 3x - 4y - 2z - 1 = 0;$$

$$\text{Đáp số. } 2x + 2y - z - 21 = 0, 2x + 2y - z + 15 = 0.$$

b)

$$(\mathcal{S}): x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 6z - 54 = 0,$$

$$(P_1): 5x - 4y + 2z = 0, \quad (P_2): 9x - 8y + 5z - 1 = 0.$$

$$\text{Đáp số. } 4x + 7y + 4z - 126 = 0, 4x + 7y + 4z + 36 = 0.$$

Bài tập 3.68. Chứng minh rằng mặt phẳng $(\mathcal{P})$ tiếp xúc với mặt cầu $(\mathcal{S})$ và tìm tọa độ tiếp điểm của $(\mathcal{P})$ và $(\mathcal{S})$ trong mỗi trường hợp sau:

$$\text{a) } (P): 4x + 7y + 4z - 51 = 0, (\mathcal{S}): (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 - 81 = 0;$$

$$\text{Đáp số. } (3; 5; 1).$$

$$\text{b) } (A, 2013) (P): 2x + 3y + z - 11 = 0, (\mathcal{S}): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 8 = 0.$$

$$\text{Đáp số. } (3; 1; 2).$$

Bài tập 3.69. Cho mặt cầu $(\mathcal{S})$, mặt phẳng $(\mathcal{P})$. Gọi $(\mathcal{C})$ là đường tròn giao tuyến của $(\mathcal{S})$ và $(\mathcal{P})$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính r của $(\mathcal{C})$ trong các trường hợp sau:

$$\text{a) } (\mathcal{S}): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 - 169 = 0, \quad (\mathcal{P}): x + 2y + 2z + 25 = 0;$$

$$\text{Đáp số. Tâm } I(-3; -6; -5); \text{ bán kính } r = 5.$$

$$\text{b) } (\mathcal{S}): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 16y + 6z - 148 = 0, \quad (\mathcal{P}): x - 2y + 2z - 3 = 0.$$

$$\text{Đáp số. Tâm } I(1; 2; 3); \text{ bán kính } r = 12.$$

Bài tập 3.70. Hai quả bóng hình cầu có kích thước khác nhau được đặt ở hai góc của một căn nhà hình hộp chữ nhật. Mỗi quả bóng tiếp xúc với hai bức tường và tiếp xúc với nền của căn nhà đó. Trên bề mặt mỗi quả bóng, tồn tại một điểm có khoảng cách đến hai bức tường quả bóng tiếp xúc và đến nền nhà lần lượt là 9, 10, 13. Tính tổng độ dài mỗi đường kính của hai quả bóng đó

$$\text{Đáp số. } 64.$$

Bài tập 3.71 (Câu 49, Mã đề 103, thi THPTQG 2017). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; -2; 6)$, $B(0; 1; 0)$ và mặt cầu

$$(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25.$$

Mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 2 = 0$ đi qua A, B và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T = a + b + c$.

$$\text{Đáp số. } T = 3.$$

3.5 Góc trong không gian

Hoạt động 3.17. Nhắc lại các xác định góc giữa hai đường thẳng trong không gian.

3.5.1 Góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a}_1$ và $\vec{a}_2$. Gọi φ là góc giữa $\vec{a}_1$ và $\vec{a}_2$. Góc giữa Δ_1 và Δ_2 bằng φ nếu $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ và bằng $180^\circ - \varphi$ nếu $90^\circ < \varphi \leq 180^\circ$. Như vậy

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|}. \quad (3.12)$$

Ví dụ 3.39. Tính góc tạo bởi hai đường thẳng

$$\Delta_1: \frac{x-3}{7} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+4}{10} \quad \text{và} \quad \Delta_2: \begin{cases} x = 2t, \\ y = 1 + 11t, \\ z = -3 + 5t. \end{cases}$$

Giải. Δ_1 có vectơ chỉ phương là $\vec{a}_1 = (7; 1; 10)$, Δ_2 có vectơ chỉ phương là $\vec{a}_2 = (2; 11; 5)$. Ta có

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \frac{|7 \cdot 2 + 1 \cdot 11 + 10 \cdot 5|}{\sqrt{7^2 + 1^2 + 10^2} \cdot \sqrt{2^2 + 11^2 + 5^2}} = \frac{75}{\sqrt{150} \cdot \sqrt{150}} = \frac{1}{2}.$$

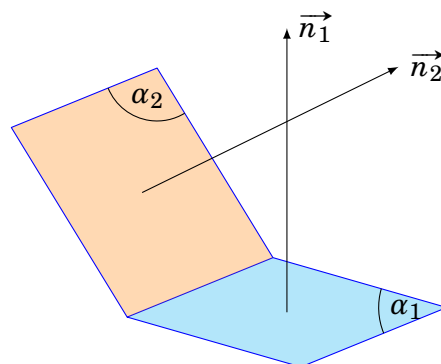
Vậy $(\Delta_1, \Delta_2) = 60^\circ$.

Luyện tập 3.30. Tính góc tạo bởi hai đường thẳng

$$\Delta_1: \begin{cases} x = 1 + 4t, \\ y = 2 + t, \\ z = -3 + 3t \end{cases} \quad \text{và} \quad \Delta_2: \begin{cases} x = 2 + 2t, \\ y = 3 + 7t, \\ z = 5 + 8t. \end{cases}$$

3.5.2 Góc giữa hai mặt phẳng

Hoạt động 3.18. Nhắc lại định nghĩa góc giữa hai mặt phẳng; công thức tính góc giữa hai vectơ trong không gian.



Hình 3.22

Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) có phương trình

$$(\alpha_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$(\alpha_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

(α_1) và (α_2) có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$.

Ta biết rằng góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó. Hai vectơ pháp tuyến của (α_1) và (α_2) có giá vuông góc với hai mặt phẳng này. Do đó, gọi φ là góc giữa (α_1) và (α_2) (chú ý rằng $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$), ta có

$$\cos \varphi = \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (3.13)$$

Ví dụ 3.40. Tính góc tạo bởi hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) biết

$$(P_1): 3x + 4y + 5z + 1 = 0, \quad (P_2): x - 7y - 10z + 2 = 0.$$

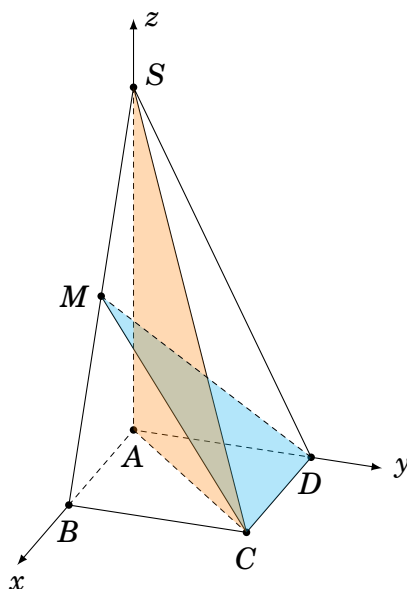
Giải. Gọi φ là góc giữa (P_1) và (P_2) , ta có

$$\cos \varphi = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot (-7) + 5 \cdot (-10)|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-7)^2 + (-10)^2}} = \frac{|-75|}{5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra $\varphi = 30^\circ$. Vậy góc tạo bởi hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) bằng 30° .

Hoạt động 3.19. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(1;2;3)$ và $B(4;5;6)$ sao cho góc tạo bởi (P) và mặt phẳng $(Q): x + 2y - z + 2 = 0$ lớn nhất.

Ví dụ 3.41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng 1. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = 2$. Gọi M là trung điểm của cạnh SB . Tính góc giữa hai mặt phẳng (CMD) và (SAC) .



Hình 3.23

Giải.

- Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như Hình 3.23. Ta có

$$A(0;0;0), \quad B(1;0;0), \quad C(1;1;0), \quad D(0;1;0), \quad M\left(\frac{1}{2};0;1\right), \quad S(0;0;2).$$

- Ta có $\overrightarrow{AC} = (1;1;0)$, $\overrightarrow{AS} = (0;0;2)$. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (SAC) là

$$\vec{n}_1 = [\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AC}] = (-2; 2; 0).$$

- Lại có $\overrightarrow{CM} = \left(-\frac{1}{2}; -1; 1\right)$, $\overrightarrow{CD} = (-1; 0; 0)$. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (CMD) là

$$\vec{n}_2 = [\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CD}] = (0; -1; -1).$$

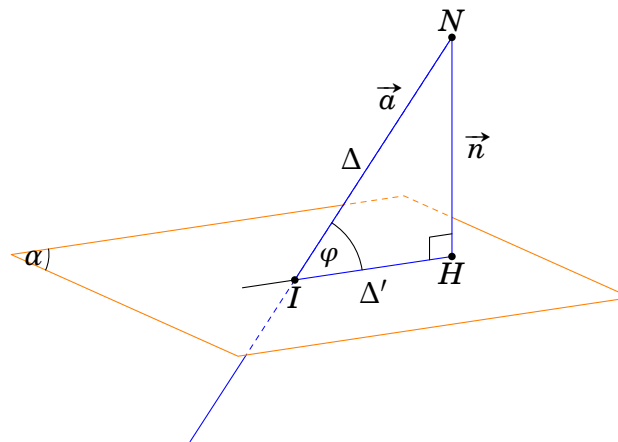
- Gọi φ là góc giữa (SAC) và (CDM), ta có

$$\cos \varphi = \frac{|(-2) \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1)|}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 0^2} \cdot \sqrt{0^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra $\varphi = 60^\circ$. Vậy góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và (CDM) bằng 60° .

3.5.3 Góc tạo bởi đường thẳng và mặt phẳng

Hoạt động 3.20. Nhắc lại định nghĩa góc tạo bởi đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) . Gọi $\vec{a}$ là vectơ chỉ phương của Δ và $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của (α) , φ là góc tạo bởi Δ và (α) . Tìm một hệ thức liên hệ giữa φ , $\vec{a}$ và $\vec{n}$.



Hình 3.24

- Nếu Δ nằm trong (α) , thì hình chiếu vuông góc của Δ lên (α) là Δ . Góc tạo bởi Δ và (α) là góc tạo bởi Δ và Δ . Do đó, $\varphi = 0^\circ$.
- Nếu Δ song song với (α) , thì hình chiếu vuông góc của Δ lên (α) là đường thẳng Δ' song song với Δ . Góc tạo bởi Δ và (α) là góc tạo bởi Δ và Δ' . Do đó, $\varphi = 0^\circ$.

- Nếu Δ vuông góc với (α) , thì $\varphi = 90^\circ$.
- Nếu Δ cắt (α) tại I , trên Δ lấy điểm N khác I . Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (α) . Hình chiếu vuông góc của Δ lên (α) là đường thẳng Δ' đi qua hai điểm I và H . Trong trường hợp này, góc tạo bởi Δ và (α) là góc tạo bởi Δ và Δ' . Do đó, $\varphi = \widehat{NIH}$. Tam giác NIH vuông tại H , nên

$$\sin \varphi = \sin \widehat{NIH} = \cos \widehat{IHN} = |\cos(\vec{a}, \vec{n})| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|}.$$

Cho đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{a}$ và mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}$. Gọi φ là góc tạo bởi Δ và (α) . Ta có

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|}. \quad (3.14)$$

Hoạt động 3.21. Công thức (3.14) được xây dựng khi đường thẳng Δ cắt và không vuông góc với mặt phẳng (α) . Nó có đúng cho mọi vị trí tương đối của đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) không?

Ví dụ 3.42. Tính góc tạo bởi đường thẳng

$$\ell: \frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+3}{-1}$$

và mặt phẳng $(\alpha): 2x + y + z - 1 = 0$.

Giải. Đường thẳng ℓ có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1; 2; -1)$. Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 1; 1)$.

Gọi φ là góc tạo bởi ℓ và (α) . Ta có

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra $\varphi = 30^\circ$.

3.5.4 Bài tập tự luận

Bài tập 3.72. Tính góc tạo bởi hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) trong các trường hợp sau:

- | | |
|---|---------------------------|
| a) $(P_1): 2x + y + z + 1 = 0$ và $(P_2): 3x + 4y + 5z + 6 = 0$; | Đáp số. $\frac{\pi}{6}$. |
| b) $(P_1): x - 4y + z + 1 = 0$ và $(P_2): 4x + 8y + z - 2 = 0$; | Đáp số. $\frac{\pi}{4}$. |
| c) $(P_1): 2x + y + z + 1 = 0$ và $(P_2): x - y + 2z - 2 = 0$; | Đáp số. $\frac{\pi}{3}$. |
| d) $(P_1): 5x + 2y + z + 1 = 0$ và $(P_2): x - 7y + 9z - 2 = 0$. | Đáp số. $\frac{\pi}{2}$. |

Bài tập 3.73. Tính góc tạo bởi hai đường thẳng d_1 và d_2 trong các trường hợp sau:

$$\text{a) } d_1: \begin{cases} x = 4 + t, \\ y = 3 + 2t, \\ z = -1 + 3t; \end{cases} \quad d_2: \begin{cases} x = 2 + 4m, \\ y = -1 + m, \\ z = -1 + 5m. \end{cases}$$

Đáp số. 30° .

$$\text{b) } d_1: \begin{cases} x = -4 + t, \\ y = 4 + 3t, \\ z = 2 - 4t; \end{cases} \quad d_2: \begin{cases} x = 1 + 7m, \\ y = 2 + 8t, \\ z = 3 - 2m. \end{cases}$$

Đáp số. 45° .

$$\text{c) } d_1: \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = -2 - 3t; \end{cases} \quad d_2: \begin{cases} x = 1 + 2m, \\ y = -2 + 3m, \\ z = 3 - m. \end{cases}$$

Đáp số. 60° .

$$\text{d) } d_1: \begin{cases} x = 1 - 2 \cdot t, \\ y = 2 + 3 \cdot t, \\ z = -4 \cdot t; \end{cases} \quad d_2: \begin{cases} x = 2 + m, \\ y = -1 + 2 \cdot m, \\ z = 3 + m. \end{cases}$$

Đáp số. 90° .

Bài tập 3.74. Cho hai đường thẳng (ℓ_1) và (ℓ_2) . Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua gốc tọa độ $O(0;0;0)$, cắt đường thẳng (ℓ_1) và hợp với đường thẳng (ℓ_2) một góc φ trong trường hợp sau:

$$(\ell_1): \begin{cases} x = -2 + 3t, \\ y = 4 + 4t, \\ z = 6 + t \end{cases} \quad \text{và} \quad (\ell_2): \begin{cases} x = -1 + 3m, \\ y = -4 + 5m, \\ z = 2 + 2m, \end{cases} \quad \varphi = 30^\circ.$$

$$\text{Đáp số. } \begin{cases} x = -8t, \\ y = -7t, \\ z = t \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x = t, \\ y = 8t, \\ z = 7t. \end{cases}$$

Bài tập 3.75. Tính góc tạo bởi đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) trong các trường hợp sau:

$$\text{a) } \Delta: \begin{cases} x = -2 + t, \\ y = t, \\ z = 1 + t, \end{cases} \quad (P): 2x - y - z + 3 = 0;$$

Đáp số. 0° .

$$\text{b) } \Delta: \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = 3 - 3t, \end{cases} \quad (P): x - 5y - 10z + 2 = 0;$$

Đáp số. 30° .

$$\text{c) } \Delta: \begin{cases} x = 1 + 6t, \\ y = -1 + 2t, \\ z = 1 - 3t, \end{cases} \quad (P): 8x + 5y + 3z + 2 = 0;$$

Đáp số. 45° .

$$\text{d) } \Delta: \begin{cases} x = 2 + 4t, \\ y = -4 - t, \\ z = 1 - 3t, \end{cases} \quad (P): 5x + 2y - 7z + 1 = 0;$$

Đáp số. 60° .

$$\text{e) } \Delta: \begin{cases} x = 2 - t, \\ y = -t, \\ z = 1 + t, \end{cases} \quad (P): x + y - z + 3 = 0.$$

Đáp số. 90° .

Bài tập 3.76. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng 1. Gọi E là trung điểm cạnh SC . Tính sin của góc tạo bởi đường thẳng BE và mặt phẳng (SAD) .

Đồng Nai, năm học 2023 – 2024,
Sắp chữ bằng $\text{\LaTeX}$ bởi Trần Văn Toàn,
Giáo viên trường THPT chuyên Lương Thế Vinh,
Biên Hòa, Đồng Nai.