MỤC LỤC

BÀI 1. QUY TẮC CỘNG. QUY TẮC NHÂN. SƠ ĐỒ HÌNH CÂY

1. QUY TẮC CỘNG

Định nghĩa 1. Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động thứ nhất có m cách thực hiện, hành động thứ hai có n cách thực hiện (các cách thực hiện của cả hai hành động là khác nhau đôi một) thì công việc đó có $m+n$ cách hoàn thành.

Ví dụ 1. Một quán bán ba loại đồ uống: trà sữa, nước hoa quả và sinh tố. Có 5 loại trà sữa, 6 loại nước hoa quả và 4 loại sinh tố. Hỏi khách hàng có bao nhiêu cách chọn một loại đồ uống?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2. Bạn Phương có 7 quyển sách Tiếng Anh và 8 quyển sách Văn học, các quyển sách là khác nhau. Hỏi bạn Phương có bao nhiêu cách chọn một quyển sách để đọc?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

! Một công việc được hoàn thành bởi một trong ba hành động. Nếu hành động thứ nhất có m cách thực hiện, hành động thứ hai có n cách thực hiện, hành động thức ba có p cách thực hiện (các cách thực hiện của cả ba hành động là khác nhau đôi một) thì công việc đó có $m+n+p$ cách hoàn thành.

2. QUY TẮC NHÂN

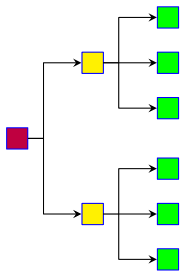
Định nghĩa 2. Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động liên tiếp. Nếu hành động thứ nhất có m cách thực hiện và ứng với mỗi cách thực hiện hành động thứ nhất, có n cách thực hiện hành động thứ hai thì công việc đó có $m \cdot n$ cách hoàn thành.

> **!** Một công việc được hoàn thành bởi một trong ba hành động liên tiếp. Nếu hành động thứ nhất có m cách thực hiện; ứng với mỗi cách thực hiện hành động thứ nhất, có n cách thực hiện hành động thứ hai; ứng với mỗi cách thực hiện hành động thứ nhất và mỗi cách thực hiện hành động thứ hai có p cách thực hiện hành động thứ ba thì công việc đó có $m \cdot n \cdot p$ cách hoàn thành.

Ví dụ 3. Trong kinh doanh nhà hàng, combo là một hình thức gọi món theo thực đơn được kết hợp từ nhiều món ăn hoặc đồ uống. Nếu nhà hàng có 5 món rau, 4 món cá và 3 món thịt thì có bao nhiêu cách tạo ra một combo? Biết mỗi combo có đầy đủ 1 món rau, 1 món cá và 1 món thịt.

3. SƠ ĐỒ HÌNH CÂY

Nhận xét.



① *Sơ đồ hình cây là sơ đồ bắt đầu tại một nút duy nhất với các nhánh tỏa ra các nút bổ sung.*

② *Ta có thể sử dụng sơ đồ hình cây để đếm số cách hoàn thành một công việc khi công việc đó đòi hỏi nhưunxg hành động liên tiếp.*

Ví dụ 4. Bạn Hương có 3 chiếc quần khác màu lần lượt là xám, đen, nâu nhạt và 4 chiếc áo sơ mi cũng khác màu lần lượt là hồng, vàng, xanh, tím. Hãy vẽ sơ đồ hình cây biểu thị số cách chọn:

① 1 chiếc quần; ② 1 chiếc áo sơ mi; ③ 1 bộ quần áo.

4. VẬN DỤNG TRONG BÀI TOÁN ĐẾM

1. Vận dụng trong giải toán

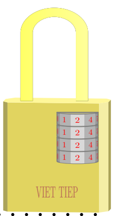
Ví dụ 5. Cho 10 điểm phân biệt. Hỏi lập được bao nhiêu vectơ khác $\overrightarrow{0}$? Biết rằng hai đầu mút của mỗi vectơ là hai trong 10 điểm đã cho.

Ví dụ 6. Phân tích số 10 125 ra thừa số nguyên tố rồi tìm số ước nguyên dương của nó.

2. Vận dụng trong thực tiễn

Ví dụ 7. Từ ba mảng dữ liệu A, B, C, máy tính tạo nên một thông tin đưa ra màn hình cho người dùng bằng cách lần lượt lấy một dữ liệu từ A, một dữ liệu từ B và một dữ liệu từ C. Giả sử A, B, C lần lượt chứa m, n, p dữ liệu. Hỏi máy tính có thể tạo ra được bao nhiêu thông tin?

Ví dụ 8.
Gia đình bạn Quân đặt mật mã của chiếc khóa cổng là một dãy số gồm bốn chữ số.
Hỏi có bao nhiêu cách đặt mật mã nếu:



① Các chữ số có thể giống nhau? ② Các chữ số phải đôi một khác nhau?

Ví dụ 9. Cho kiểu gen $AaBbDdEE$.

① Vẽ sơ đồ hình cây biểu thị sự hình thành giao tử.

② Từ đó, tính số loại giao tử của kiểu gen $AaBbDdEE$.
Biết quá trình giảm phân tạo giao tử bình thường, không xảy ra đột biến.

5. BÀI TẬP

Bài 1. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 ta lập ra số tự nhiên gồm ba chữ số, chia hết cho 5. Có thể lập được bao nhiêu số như thế?

Bài 2. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, lập được bao nhiêu?

① Số chẵn gồm ba chữ số?

② Số chẵn gồm ba chữ số đôi một khác nhau?

....

Bài 3. Trong một trường trung học phổ thông, khối 10 có 245 học sinh nam và 235 học sinh nữ.

1. Nhà trường cần chọn một học sinh ở khối 10 đi dự buổi giao lưu với học sinh các trường trung học phổ thông trong tỉnh. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?
2. Nhà trường cần chọn hai học sinh ở khối 10 trong đó có 1 nam và 1 nữ đi dự trại hè của học sinh trong tỉnh. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 4. Trong giải thi đấu bóng đá World Cup, vòng bảng có 32 đội tham gia, được chia làm 8 bảng, mỗi bảng có 4 đội đấu vòng tròn một lượt. Tính số trận đấu được thi đấu trong vòng bảng theo thể thức trên.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 5. Ở Canada, mã bưu chính có 6 kí tự gồm: 3 chữ cái in hoa (trong số 26 chữ cái tiếng Anh) và 3 chữ số. Mỗi mã bưu chính bắt đầu bằng 1 chữ cái và xen kẽ bằng 1 chữ số.

(Nguồn: https://capath.vn/postal-code-canada)

1. Có thể tạo được bao nhiêu mã bưu chính?
2. Có thể tạo được bao nhiêu mã bắt đầu bằng chữ S ?
3. Có thể tạo được bao nhiêu mã bắt đầu bằng chữ S và kết thúc bằng chữ số 8 ?

....
....
....
....

Bài 6. Một hãng thời trang đưa ra một mẫu áo sơ mi mới có ba màu: trắng, xanh, đen. Mỗi loại có các cỡ S, M, L, XL, XXL.

1. Vẽ sơ đồ hình cây biểu thị các loại áo sơ mi với màu và cỡ áo nói trên.
2. Nếu một cửa hàng muốn mua tất cả các loại áo sơ mi (đủ loại màu và đủ loại cỡ áo) và mỗi loại một chiếc để về giới thiệu thì cần mua tất cả bao nhiêu chiếc áo sơ mi.

Bài 7. Một khách sạn nhỏ chuẩn bị bữa ăn sáng gồm 2 đồ uống là: trà và cà phê; 3 món ăn là: phở, bún và cháo; 2 món tráng miệng là: bánh ngọt và sữa chua.

1. Vẽ sơ đồ hình cây biểu thị các cách chọn khẩu phần ăn gồm đủ ba loại: đồ uống, món ăn và món tráng miệng.
2. Tính cách chọn khẩu phần ăn gồm: 1 đồ uống, 1 món ăn và 1 món tráng miệng.

Bài 8. Cho kiểu gen $AaBbDdEe$. Giả sử quá trình giảm phân tạo ra giao tử bình thường, không xảy ra đột biến.

1. Vẽ sơ đồ hình cây biểu thị sự hình thành giao tử.
2. Từ đó, tính số loại giao tử của kiểu gen $AaBbDdEe$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

BÀI 2. HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP

1. HOÁN VỊ

Định nghĩa 1. Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \in \mathbb{N}^*$).
Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một *hoán vị của n phần tử* đó.

Ví dụ 1. Hãy liệt kê tất cả các số gồm ba chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số 1, 2, 3.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

! Kí hiệu P_n là số hoán vị của n phần tử. Ta có

$$\mathrm{P}_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Ta quy ước $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ được viết là $n!$. Như vậy $\mathrm{P}_n = n!$.

Ví dụ 2. Tính số cách xếp thứ tự đá luân lưu 11 m của 5 cầu thủ.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. CHỈNH HỢP

Định nghĩa 2. Cho tập hợp A gồm n phần tử và một số nguyên k với $1 \leq k \leq n$.
Kết quả của việc lấy k phần tử từ n phần tử của tập hợp A và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một *chỉnh hợp chập k của n phần tử* đã cho.

Ví dụ 3. Hãy liệt kê tất cả các số gồm hai chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5.

....
....
....
....
....
....

....
....
....
....

Kí hiệu A_n^k là số chỉnh hợp chập k của n phần tử, $1 \le k \le n$. Ta có

$$\mathrm{A}_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Ví dụ 4. Ở các căn hộ chung cư, người ta thường dùng các chữ số để tạo mật mã mở cửa. Gia đình bạn Linh đặt mật mã nhà là một dãy số gồm 6 chữ số đôi một khác nhau. Hỏi gia đình bạn Linh có bao nhiêu cách để tạo mật mã?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

3. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ta lập được bao nhiêu số tự nhiên

① Gồm 8 chữ số đôi một khác nhau. ② Gồm 6 chữ số đôi một khác nhau.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 2. Trong chương trình ngoại khóa giáo dục truyền thống, 60 học sinh được trường tổ chức cho đi xem phim. Các ghế ở rạp được sắp thành các hàng. Mỗi hàng có 20 ghế.

1. Có bao nhiêu cách sắp xếp 20 để ngồi vào hàng đầu tiên?
2. Sau khi sắp xếp xong hàng đầu tiên, có bao nhiêu cách sắp xếp 20 bạn ngồi vào hàng thứ hai?
3. Sau khi sắp xếp xong hai hàng đầu, có bao nhiêu cách sắp xếp 20 bạn để ngồi vào hàng thứ ba?

Bài 3. Bạn Việt chọn mật khẩu cho Email của mình gồm 8 kí tự đôi một khác nhau, trong đó có 3 kí tự đầu tiên là 3 chữ cái trong bảng gồm 26 chữ in thường và 5 kí tự tiếp theo là chữ số. Bạn Việt có bao nhiêu cách tạo ra mật khẩu?

Bài 4. Mỗi máy tính tham gia vào mạng phải có một địa chỉ duy nhất, gọi là địa chỉ IP, nhằm định danh máy tính đó trên Internet. Xét tập hợp A gồm các địa chỉ IP có dạng $192.168.abc.deg$, trong đó a, b, c là các chữ số phân biệt được chọn ra từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 còn d, e, g là các chữ số phân biệt được chọn ra từ các chữ số 5, 6, 7, 8, 9. Hỏi tập hợp A có bao nhiêu phần tử?

Bài 5. Một nhóm 22 bạn đi chụp ảnh kỉ yếu. Nhóm muốn trong bức ảnh có 7 bạn ngồi ở hàng đầu và 15 bạn đứng ở hàng sau. Có bao nhiêu cách xếp vị trí chụp ảnh như vậy?

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

BÀI 3. TỔ HỢP

1. ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa 1. Cho tập hợp A gồm n phần tử và một số nguyên k với $1 \leq k \leq n$.
Mỗi tập con gồm k phần tử được lấy ra từ n phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử đó.

Ví dụ 1. Bạn Quân có 4 chiếc áo sơ mi khác màu là áo vàng, áo xanh, áo trắng và áo nâu. Bạn muốn chọn 2 chiếc áo để mặc khi đi du lịch. Viết các tổ hợp chập 2 của 4 chiếc áo.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. SỐ CÁC TỔ HỢP

Nhận xét. *Số chỉnh hợp chập k của n phần tử nhiều gấp $k!$ lần số tổ hợp chập k của n phần tử đó.*

Định nghĩa 2. Kí hiệu C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử với $1 \leq k \leq n$. Ta có $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{\mathrm{A}_n^k}{k!}$.

Ví dụ 2. Chứng minh $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ với $1 \leq k \leq n$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Quy ước: $0! = 1$; $\mathrm{C}_n^n = 1$.
Với những quy ước trên, ta có công thức sau

$$\mathrm{C}_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ với } 0 \leq k \leq n.$$

Ví dụ 3. Lớp $10A$ có 18 bạn nữ và 20 bạn nam.

1. Có bao nhiêu cách chọn 3 bạn nữ trong 18 bạn nữ?
2. Có bao nhiêu cách chọn 5 bạn nam trong 20 bạn nam?

③ Có bao nhiêu cách chọn một tổ xung kích gồm 3 bạn nữ và 5 bạn nam?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

3. TÍNH CHẤT CỦA CÁC SỐ C_N^K

Một cách tổng quát, ta có hai đẳng thức sau

$$\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}\ (0 \leq k \leq n) \text{ và } \mathrm{C}_{n-1}^{k-1} + \mathrm{C}_{n-1}^{k} = \mathrm{C}_n^k\ (1 \leq k < n).$$

4. BÀI TẬP

Bài 1. Cho 8 điểm sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Có bao nhiêu tam giác với 3 đỉnh là 3 điểm trong 8 điểm đã cho?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 2. Có 10 đội tham gia một giải bóng đá. Có bao nhiêu cách xếp trận đấu vòng tính điểm sao cho hai đội chỉ gặp nhau đúng một lần?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 3. Khối 10 có 16 bạn nữ và 18 bạn nam tham gia đợt tình nguyện Mùa hè xanh. Đoàn tường dự định lập một tổ trồng cây gồm 3 học sinh có cả nam và nữ. Có bao nhiêu cách lập một tổ trồng cây như vậy?

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 4. Một quán nhỏ bày bán hoa có 50 bông hồng và 60 bông cúc. Bác Ngọc muốn mua 5 bông hoa gồm cả hai loại hoa trên. Bác Ngọc có bao nhiêu cách chọn hoa?

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 5. Tính tổng $C_{15}^{12} + C_{15}^{13} + C_{16}^{14}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

BÀI 4. NHỊ THỨC NEWTON

1. CÔNG THỨC NHỊ THỨC NEWTON

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= \mathrm{C}_4^0a^4+\mathrm{C}_4^1a^3b+\mathrm{C}_4^2a^2b^2+\mathrm{C}_4^3ab^3+\mathrm{C}_4^4b^4\\ &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.\\ (a+b)^5 &= \mathrm{C}_5^0a^5+\mathrm{C}_5^1a^4b+\mathrm{C}_5^2a^3b^2+\mathrm{C}_5^3a^2b^3+\mathrm{C}_5^4ab^4+\mathrm{C}_5^5b^5\\ &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.\end{aligned}$$

Những công thức khai triển nói trên là công thức nhị thức Newton $(a+b)^n$ ứng với $n=4$; $n=5$.

Ví dụ 1. Khai triển $(x+1)^4$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2. Khai triển $(x-1)^4$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3. Khai triển các biểu thức sau:

a) $(x-2y)^4$; b) $(3x-y)^5$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. BÀI TẬP

Bài 1. Khai triển các biểu thức sau:

a) $(2x+1)^4$; b) $(3y-2)^4$; c) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^4$; d) $\left(x-\frac{1}{3}\right)^4$.

....

Bài 2. Khai triển các biểu thức sau:

a) $(x+1)^5$; b) $(x-3y)^5$.

....

Bài 3. Xác định hệ số của x^4 trong khai triển biểu thức $(3x+2)^5$.

....

Bài 4. Cho $\left(1-\frac{1}{2}x\right)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$.

a) Tính a_3.

b) Tính $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 5. Cho tập hợp A có 5 phần tử. Số tập hợp con của A là bao nhiêu?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

BÀI 5. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

Bài 1. Bạn Dương có 2 chiếc quần gồm: một quần màu xanh và một quần màu đen; 3 chiếc áo gồm: một áo màu nâu, một áo màu xanh và một áo màu vàng; 2 đôi giày gồm: một đôi giày màu đen và một đôi giày màu đỏ. Bạn Dương muốn chọn một bộ quần áo và một đôi giày để đi tham quan. Bằng cách vẽ sơ đồ hình cây, tính số cách chọn một bộ quần áo và một đôi giày cho bạn Dương.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 2. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, lập được bao nhiêu:

a) Số tự nhiên gồm 9 chữ số đôi một khác nhau?

b) Số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau?

c) Số tự nhiên chẵn gồm 5 chữ số đôi một khác nhau?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 3. Trong mặt phẳng, cho hai đường thẳng song song a và b. Cho 3 điểm trên đường thẳng a và 4 điểm trên đường thẳng b. Có bao nhiêu tam giác có cả 3 đỉnh là 3 điểm trong 7 điểm nói trên?

....
....
....
....
....
....
....
....

....
....

Bài 4. Trong mặt phẳng, cho 6 đường thẳng song song và 8 đường thẳng vuông góc với 6 đường thẳng đó. Có bao nhiêu hình chữ nhật được tạo thành?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 5. Khai triển các biểu thức sau:

a) $(4y-1)^4$;

b) $(3x+4y)^5$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 6. Mật khẩu của máy tính là một dãy các kí tự (có kể thứ tự từ trái qua phải) được chọn từ: 10 chữ số, 26 chữ cái thường cùng với 26 chữ cái in hoa và 10 kí tự đặc biệt. Bạn Ngân muốn lập một mật khẩu máy tính có độ dài là 8 kí tự bao gồm: 4 kí tự đầu tiên là 4 chữ số khác nhau, 2 kí tự tiếp theo là chữ cái in thường, 1 kí tự tiếp theo nữa là chữ cái in hoa, kí tự cuối cùng là kí tự đặc biệt. Bạn Ngân có bao nhiêu cách lập mật khẩu?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 7. Một trường trung học phổ thông tổ chức cuộc thi chạy tiếp sức giữa các lớp với nội dung 4×100 m và yêu cầu mỗi đội gồm 2 nam, 2 nữ. Bạn An được giáo viên giao nhiệm vụ chọn ra 4 bạn và sắp xếp thứ tự chạy của các bạn đó để đăng kí dự thi. Bạn An có bao nhiêu cách lập ra một đội thi đủ điều kiện đăng kí? Biết lớp bạn An có 22 nam và 17 nữ.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 8. Bác Thảo muốn mua 2 chiếc máy tính để phục vụ công việc. Người bán hàng giới thiệu cho bác 3 hãng máy tính để tham khảo: hãng thứ nhất có 4 loại máy tính phù hợp, hãng thứ hai có 5 loại máy tính phù hợp, hãng thứ ba có 7 loại máy tính phù hợp. Bác Thảo có bao nhiêu cách chọn 2 máy tính dùng cho công việc?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

BÀI 6. SỐ GẦN ĐÚNG. SAI SỐ

1. SỐ GẦN ĐÚNG

Trong đo đạc và tính toán, ta thường chỉ nhận được các số gần đúng.

2. SAI SỐ CỦA SỐ GẦN ĐÚNG

1. Sai số tuyệt đối

Định nghĩa 1. Nếu a là số gần đúng của số đúng $\overline{a}$ thì $\Delta_a = |\overline{a} - a|$ được gọi là *sai số tuyệt đối* của số gần đúng a.

Ví dụ 1. Một bồn hoa có dạng hình tròn với bán kính là 0,8 m. Hai bạn Ngân và Ánh cùng muốn tính diện tích S của bồn hoa. Bạn Ngân lấy một giá trị gần đúng của π là 3,1 và tính được diện tích S_1. Bạn Ánh lấy một giá trị gần đúng của π là 3,14 và tính được diện tích S_2. So sánh sai số tuyệt đối của số gần đúng S_1 và S_2. Bạn nào có kết quả chính xác hơn?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Sai số tuyệt đối của số gần đúng nhận được trong một phép đo đạc, tính toán càng bé thì kết quả của phép đo đạc, tính toán đó càng chính xác.

2. Độ chính xác của một số gần đúng

Định nghĩa 2. Ta nói số a là số gần đúng của số đúng $\overline{a}$ với *độ chính xác d* nếu $\Delta_a = |\overline{a} - a| \leq d$ và quy ước viết gọn là $\overline{a} = a \pm d$.

Nếu $\Delta_a \leq d$ thì số đúng $\overline{a}$ nằm trong đoạn $[a-d; a+d]$. Bởi vậy, nếu d càng nhỏ thì độ sai lệch của số gần đúng a so với số đúng $\overline{a}$ càng ít. Điều này giải thích vì sao d được gọi là độ chính xác của số gần đúng.

Ví dụ 2. Hãy ước lượng sai số tuyệt đối Δ_{S_1} và Δ_{S_2} ở ví dụ trên.

....
....
....
....
....
....
....
....

....
....

3. Sai số tương đối

Định nghĩa 3. Tỉ số $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|}$ được gọi là *sai số tương đối* của số gần đúng a.

Nhận xét.
— *Nếu $\overline{a} = a \pm d$ thì $\Delta_a \leq d$ nên $\delta_a \leq \dfrac{d}{|a|}$. Vì vậy nếu $\dfrac{d}{|a|}$ càng bé thì chất lượng của phép đo đạc, tính toán càng cao.*

— *Người ta thường viết sai số tương đối dưới dạng phần trăm.*

3. SỐ QUY TRÒN. QUY TRÒN SỐ ĐÚNG VÀ SỐ GẦN ĐÚNG

1. Số quy tròn

Định nghĩa 4. Khi quy tròn một số nguyên hoặc số thập phân đến một hàng nào đó thì số nhận được gọi là *số quy tròn* của số ban đầu.

2. Quy tròn số đến một hàng cho trước

Quy tắc quy tròn số nguyên hoặc số thập phân đến một hàng cho trước:

— Nếu chữ số ngay sau hàng quy tròn nhỏ hơn 5 thì ta chỉ việc thay thế chữ số đó và các chữ số bên phải nó bởi số 0.

— Nếu chữ số ngay sau hàng quy tròn lớn hơn hoặc bằng 5 thì ta cũng làm như trên nhưng cộng thêm một đơn vị vào chữ số của hàng quy tròn.

Ví dụ 3. Quy tròn số 3,141 đến hàng phần trăm rồi tính sai số tuyệt đối của số quy tròn.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Nhận xét. *Khi quy tròn số nguyên hoặc số thập phân đến một hàng cho trước thì sai số tuyệt đối không vượt quá nửa đơn vị của hàng quy tròn. Do đó, ta có thể lấy độ chính xác của số quy tròn bằng nửa đơn vị hàng quy tròn.*

3. Quy tròn số gần đúng căn cứ vào độ chính xác cho trước

Quy ước: Cho a là số gần đúng với độ chính xác d. Giả sử a là số nguyên hoặc số thập phân. Khi được yêu cầu quy tròn a mà không nói rõ quy tròn đến hàng nào thì ta quy tròn số a đến hàng thấp nhất mà d nhỏ hơn một đơn vị của hàng đó.

Ví dụ 4. Viết số quy tròn của mỗi số gần đúng sau

① Số gần đúng $a = 1\,941\,247$ với độ chính xác $d = 300$.

② Số gần đúng $a = 4{,}1463$ với độ chính xác $d = 0{,}0095$.

BÀI TẬP

Bài 1. Quy tròn số $-3{,}2475$ đến hàng phần trăm. Số gần đúng nhận được có độ chính xác là bao nhiêu?

Bài 2. Hãy viết số quy tròn của mỗi số sau với độ chính xác d

① $28{,}4156$ với $d = 0{,}001$;

② $1{,}7320508\ldots$ với $d = 0{,}0001$.

Bài 3. Biết $\sqrt{2} = 1{,}41421356237\ldots$ Viết số gần đúng của $\sqrt{2}$ theo nguyên tắc quy tròn lần lượt với hai, ba, bốn chữ số thập phân và ước lượng sai số tuyệt đối.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 4. Ta đã biết 1 inch (kí hiệu là in) là 2,54 cm. Màn hình của một chiếc ti vi có dạng hình chữ nhật với độ dài đường chéo là 32 in, tỉ số giữa chiều dài và chiều rộng của màn hình là 16 : 9. Tìm một giá trị gần đúng (theo đơn vị in) của chiều dài ti vi và tìm sai số tuyệt đối, độ chính xác của số gần đúng đó.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 5. Hãy tìm hiểu khối lượng của Trái Đất, Mặt Trời và viết kết quả dưới dạng số gần đúng.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

BÀI 7. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CHO MẪU SỐ LIỆU KHÔNG GHÉP NHÓM

1. SỐ TRUNG BÌNH CỘNG (SỐ TRUNG BÌNH)

1. Định nghĩa

Định nghĩa 1. Số trung bình cộng của một mẫu n số liệu thống kê bằng tổng của các số liệu chia cho số các số liệu đó. Số trung bình cộng của mẫu số liệu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bằng

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Ví dụ 1. Kết quả 4 lần kiểm tra môn Toán của bạn Hoa là 7, 9, 8, 9. Tính số trung bình cộng $\overline{x}$ của mẫu số liệu trên.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

!

Công thức tính số trung bình $\overline{x}$ khi có các số liệu thống kê bằng nhau có thể viết dạng

$$\overline{x} = \frac{7 + 8 + 2 \cdot 9}{1 + 1 + 2} = \frac{33}{4} = 8{,}25.$$

Ta có thể tính số trung bình cộng theo các công thức

- Số trung bình cộng của mẫu số liệu thống kê trong bảng phân bố tần số là

Giá trị	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
Tần số	n_1	n_2	$\cdots$	n_k

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_kx_k}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k}.$$

- Số trung bình cộng của mẫu số liệu thống kê trong bảng phân bố tần số tương đối là

Giá trị	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
Tần số tương đối	f_1	f_2	$\cdots$	f_k

$$\overline{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_kx_k,$$

trong đó $f_1 = \dfrac{n_1}{n}$, $f_2 = \dfrac{n_2}{n}, \ldots, f_k = \dfrac{n_k}{n}$ với $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

2. Ý nghĩa

Trong thực tiễn, để tìm hiểu một đối tượng thống kê, ta đưa ra tiêu chí thống kê và tiến hành thu thập nhiều lần số liệu thống kê theo tiêu chí đó, tạo thành mẫu số liệu. Căn cứ vào mẫu số liệu đó, ta rút ra những kết luận có ích về đối tượng thống kê. Để kết luận rút ra phản ánh đúng bản chất của đối tượng, ta cần nhận biết được hình thái và xu thế thay đổi của mẫu số liệu. Với cách nhìn nhận như thế, số trung bình cộng của mẫu số liệu có ý nghĩa sau:
Khi các mẫu số liệu ít sai lệch so với số trung bình cộng, ta có thể giải quyết được vấn đề trên bằng cách lấy số trung bình cộng làm đại diện cho mẫu số liệu.
Định lí 1. Gõ định lý vào đây.

2. TRUNG VỊ

1. Định nghĩa

Định nghĩa 2. Sắp thứ tự mẫu số liệu gồm n số liệu thành một dãy không giảm (hoặc không tăng).

- Nếu n là số lẻ thì số liệu đứng ở vị trí thứ $\dfrac{n+1}{2}$ (số đứng chính giữa) được gọi là *trung vị*.
- Nếu n chẵn thì số trung bình cộng của hai số liệu ở vị trí thứ $\dfrac{n}{2}$ và $\dfrac{2}{2}+1$ được gọi là *trung vị*.

Trung vị kí hiệu là M_e.

Ví dụ 2. Thời gian (tính theo phút) mà 10 người đợi ở bến xe buýt là

$$2{,}8;\ 1{,}2\ \ 3{,}4;\ 14{,}6;\ 1{,}3;\ 2{,}5;\ 4{,}2;\ 1{,}9;\ 3{,}5;\ 0{,}8.$$

Tìm trung vị của mẫu trên.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Nhận xét.

- *Trung vị không nhất thiết là một số trong mẫu số liệu và dễ tính toán.*
- *Khi các số liệu trong mẫu không có sự chênh lệch lớn thì số trung bình cộng và trung vị xấp xỉ nhau.*

2. Ý nghĩa

Nếu những số liệu trong mẫu có sự chênh lệch lớn thì ta nên chọn trung vị làm đại diện cho mẫu số liệu đó nhằm điều chỉnh một số hạn chế khi sử dụng số trung bình cộng. Những kết luận về đối tượng

thống kê rút ra khi đó sẽ tin cậy hơn.
Chẳng hạn số trung bình cộng của mẫu số liệu thống kê trong Ví dụ 2 là

$$\overline{x} = \frac{2{,}8 + 1{,}2 + 3{,}4+, 14{,}6 + 1{,}3 + 2{,}5+, 4{,}2 + 1{,}9 + 3{,}5 + 0{,}8}{10} = 3{,}62 \text{ (phút)}.$$

Vì thế, nếu chọn thêm trung vị $M_e = 2{,}65$ (phút)làm đại diện cho mẫu số liệu đó thì kết luận về thời gian đợi ở bến xe buýt sẽ tin cậy hơn.

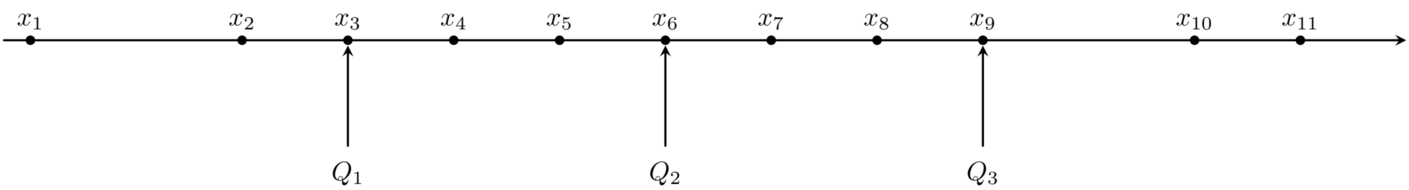
3. TỨ PHÂN VỊ

1. Định nghĩa

Định nghĩa 3. Sắp thứ tự mẫu số liệu gồm N số liệu thành một dãy không giảm.
Tứ phân vị của mẫu số liệu trên là bộ ba giá trị: tứ phân vị thứ nhất, tứ phân vị thứ hai và tứ phân vị thứ ba; ba giá trị này chia mẫu số liệu thành bốn phần có số lượng phần tử bằng nhau.

- Tứ phân vị thứ hai Q_2 bằng trung vị.
- Nếu N là số chẵn thì tứ phân vị thứ nhất Q_1 bằng trung vị của nửa dãy phía dưới và tứ phân vị thứ ba Q_3 bằng trung vị của nửa dãy phía trên.
- Nếu N là số lẻ thì tứ phân vị thứ nhất Q_1 bằng trung vị của nửa dãy phía dưới (không bao gồm Q_2) và tứ phân vị thứ ba Q_3 bằng trung vị của nửa dãy phía trên (không bao gồm Q_2).

Ta minh họa tứ phân vị của mẫu số liệu gồm 11 số như sau



Ví dụ 3. Tìm tứ phân vị của mẫu số liệu

$$21;\ 35;\ 17;\ 43;\ 8;\ 59;\ 72;\ 119.$$

Biểu diễn tứ phân vị đó trên trục số.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. Ý nghĩa

- Trong thực tiễn, có những mẫu số liệu mà nhiều số liệu trong mẫu đó vẫn còn sự chênh lệch lớn so với trung vị. Ta nên chọn thêm những số khác cùng làm đại diện cho mẫu đó. Bằng cách lấy thêm trung vị của từng dãy số liệu tác ra bởi trung vị của mẫu nói trên, ta nhận được tứ phân vị đại diện cho mẫu số liệu đó.
- Bộ ba giá trị Q_1, Q_2, Q_3 trong tứ phân vị phản ánh độ phân tán của mẫu số liệu. Nhưng mỗi giá trị Q_1, Q_2, Q_3 lại đo xu thế trung tâm của phần số liệu tương ứng của mẫu đó.

4. MỐT

1. Định nghĩa

Định nghĩa 4. Mốt của mẫu số liệu là giá trị có tần số lớn nhất trong bảng phân bố tần số và kí hiệu là M_0.

! Một mẫu số liệu có thể có một hoặc nhiều mốt.

Ví dụ 4. Bác Tâm khai trương cửa hàng bán áo sơ mi nam. Số áo cửa hàng đã bán ra trong tháng đầu tiên được thống kê trong bảng tần số sau

Cỡ áo	37	38	39	40	41	42	43
Tần số (số áo bán được)	15	46	62	81	51	20	3

Mốt của mẫu số liệu trong bảng phân bố tần số trên là bao nhiêu?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. Ý nghĩa

Mốt của mẫu số liệu đặc trưng cho số lần lặp đi lặp lại nhiều nhất tại một vị trí của mẫu số liệu đó. Dựa vào mốt, ta có thể đưa ra những kết luận (có ích) về những đối tượng thống kê.
Chẳng hạn, trong Ví dụ 4, mốt trong bảng tần số thống kê số áo bán ra trong tháng đầu tiên của cửa hàng là 40. Do vậy, bác Tâm nên nhập về nhiều hơn cỡ áo 40 để bán trong tháng tiếp theo.

5. TÍNH HỢP LÝ CỦA MẪU SỐ LIỆU

Sau khi thu thập, tổ chức, phân loại và biểu diễn số liệu bằng bảng hoặc biểu đồ, ta cần phân tích và xử lý các số liệu đó để xem tính hợp lí của số liệu thống kê, đặc biệt chỉ ra được những số liệu bất thường (hay còn gọi là dị biệt, trong tiếng Anh là Outliers). Ta có thể sử dụng các số liệu đặc trưng đo xu thế trung tâm cho mẫu số liệu không ghép nhóm để thực hiện điều đó.

Ví dụ 5. Mẫu số liệu sau ghi cân nặng của 40 bạn học sinh lớp 10 của một trường trung học phổ thông (đơn vị: ki-lô-gam).

30	32	45	45	45	47	48	44	44	49
49	49	52	51	50	50	53	55	54	54
54	56	57	57	58	58,5	58,5	60	60	60
60	63,5	63	62	69	58,5	88	85	72	71

① Xác định trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu trên.

② Từ kết quả trên, xác định những số liệu bất thường của mẫu số liệu trên.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

! Trong thực tiễn, những số liệu bất thường của mẫu số liệu được xác định bằng những công cụ toán học sâu sắc hơn.

BÀI TẬP

Bài 1. Chiều cao (đơn vị: xăng-ti-mét) của các bạn tổ I lớp 10A lần lượt là

$$165;\ 155;\ 171;\ 167;\ 159;\ 175;\ 165;\ 160;\ 158$$

Đối với mẫu số liệu trên, hãy tìm

① Số trung bình cộng.
② Trung vị.
③ Tứ phân vị.
④ Mốt.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 2. Số đôi giày bán ra trong quý IV năm 2020 của một cửa hàng được thống kê bởi bảng tần số sau

Cỡ giày	37	38	39	40	41	42	43	44
Tần số (số đôi giày bán được)	40	48	52	70	54	47	28	3

① Mốt của mẫu số liệu trên là bao nhiêu?

② Cửa hàng đó nên nhập về nhiều cỡ giày nào để bán tháng tiếp theo?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 3. *Bảng 2* cho biết nhiệt độ trung bình các tháng trong năm ở Hà Nội.

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nhiệt độ	16,4	17,0	20,2	23,7	23,7	28,8	28,9	28,2	27,2	24,6	21,4	18,2

(Nguồn: Tập bản đồ địa lý 6, NXB Giáo dục Việt Nam, 2020)

Bảng 2

① Nhiệt độ trung bình trong năm ở Hà Nội là bao nhiêu?

② Nhiệt độ trung bình của tháng có giá trị thấp nhất là bao nhiêu độ C? Cao nhất là bao nhiêu độ C?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 4. *Bảng 3* cho biết tổng diện tích rừng từ năm 2008 đến năm 2019 ở nước ta.

Năm	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Tổng DT (triệu héc-ta)	13,1	13,2	13,4	13,5	13,9	14,0	13,8	14,1	14,4	14,4	14,5	14,6

(Nguồn: https://baodantoc.vn)

Bảng 3

1. Diện tích rừng trung bình nước ta từ năm 2008 đến năm 2019 là bao nhiêu?
2. Từ năm 2008 đến năm 2019, diện tích rừng của năm có giá trị thấp nhất là bao nhiêu héc-ta? Cao nhất là bao nhiêu héc-ta?
3. So với năm 2008, tỉ lệ diện tích rừng của nước ta năm 2019 tăng lên được bao nhiêu phần trăm? Theo em, tỉ lệ tăng đó là cao hay thấp?
4. Hãy tìm hiểu về số liệu tổng diện tích rừng của tỉnh em đang sống trong một số năm gần đây.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

BÀI 8. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG DO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CHO MẪU SỐ LIỆU KHÔNG GHÉP NHÓM

1. KHOẢNG BIẾN THIÊN, KHOẢNG TỨ PHÂN VỊ

Định nghĩa 1.

- Trong một mẫu số liệu, khoảng biến thiên là hiệu số giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mẫu số liệu đó.
  Ta có thể tính khoảng biến thiên R của mẫu số liệu theo công thức sau: $R = x_{\max} - x_{\min}$, trong đó $x_{\max}$ là giá trị lớn nhất, $x_{\min}$ là giá trị nhỏ nhất của mẫu số liệu đó.
- Giả sử Q_1, Q_2, Q_3 là tứ phân vị của mẫu số liệu. Ta gọi hiệu $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$ là khoảng tứ phân vị, của mẫu số liệu đó.

! Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu còn gọi là khoảng trải giữa (tiếng Anh là InterQuartile Range - IQR) của mẫu số liệu đó.

Ví dụ 1. Mẫu số liệu thống kê chiều cao (đơn vị: mét) của 15 cây bạch đàn là

$$6,3 \quad 6,6 \quad 7,5 \quad 8,2 \quad 8,3 \quad 7,8 \quad 7,9 \quad 9,0 \quad 8,9 \quad 7,2 \quad 7,5 \quad 8,7 \quad 7,7 \quad 8,8 \quad 7,6$$

1. Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu.
2. Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Nhận xét.

1. ***Ý nghĩa của khoảng biến thiên***: *Khoảng biến thiên của mẫu số liệu phản ánh sự "dao động", "sự dàn trải " của các số liệu trong mẫu đó. Khoảng biến thiên được sử dụng trong nhiều tình huống thực tiễn, chẳng hạn: tìm ra sự phân tán điểm kiểm tra của một lớp học hay xác định phạm vi giá cả của một dịch vụ ...*
   Theo cách nhìn như ở trong vật lí, ở đó biên độ dao động phản ánh khoảng cách từ điểm cân bằng đến điểm xa nhất của dao động, nếu coi số trung bình cộng là "điểm cân bằng " của mẫu số liệu thì khoảng biến thiên của mẫu số liệu có thể xem như hai lần biên độ dao động của các số trong mẫu đó quanh điểm cân bằng.
   Trong các đại lượng đo mức độ phân tán của mẫu số liệu, khoảng biến thiên là đại lượng dễ hiểu, dễ tính toán và tương đối tốt đối vối các mẫu số liệu nhỏ. Tuy nhiên, do khoảng biến thiên chỉ sử

dụng hai giá trị $x_{\max}$ và $x_{\min}$ của mẫu số liệu nên đại lượng đó chưa diễn giải đầy đủ sự phân tán của các số liệu trong mẫu. Ngoài ra, giá trị của khoảng biến thiên sẽ bị ảnh hưởng bởi các giá trị bất thường của mẫu số liệu đó. Trong những trường hợp như vậy, khoảng biến thiên của mẫu số liệu không phản ánh chính xác độ dàn trải của mẫu số liệu.

2. ***Ý nghĩa của khoảng tứ phân vị:*** *Khoảng tứ phân vị là một đại lương cho biết mức độ phân tán của nửa giữa mẫu số liệu và có thể giúp xác định các giá trị bất thương của mẫu số liệu đó. Khoảng tứ phân vị thường được sử dụng thay cho khoảng biến thiên vì nó loại trừ hầu hết giá trị bất thường của mẫu số liệu.*

2. PHƯƠNG SAI

Ví dụ 2. Kết quả 5 bài kiểm tra môn Toán của hai bạn Dũng và Huy được thống kê trong bảng sau:

Điểm kiểm tra-Học sinh	Bài 1	Bài 2	Bài 3	Bài 4	Bài 5
Dũng	8	6	7	5	9

Số trung bình cộng của mẫu số liệu là:

$$\bar{x} = \frac{8+6+7+5+9}{5} = 7.$$

1. Tính các độ lệch sau: $(8-7)$; $(6-7)$; $(7-7)$; $(5-7)$; $(9-7)$.

2. Tính bình phương các độ lệch và tính trung bình cộng của chúng.
Trung bình cộng của bình phương các độ lệnh là

$$s^2 = \frac{(8-7)^2+(6-7)^2+(7-7)^2+(5-7)^2+(9-7)^2}{5} = 2.$$

Số s^2 được gọi là phương sai của mẫu số liệu.

Định nghĩa 2. Mỗi hiệu giữa số liệu và số trung bình cộng gọi là độ lệch của số liệu đó đối với số trung bình cộng.

Định nghĩa 3. Cho mẫu số liệu thống kê có n giá trị $x_1, x_2, \ldots, x_n$ và số trung bình cộng là $\bar{x}$. Ta gọi số $s^2 = \dfrac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2}{n}$ là phương sai của mẫu số liệu trên.

Nhận xét.

- *Khi có các số liệu bằng nhau, ta có thể tính phương sai theo công thức sau:*

+ Phương sai của mẫu số liệu thống kê trong bảng phân bố tần số là

Giá trị	x_1	x_2	...	x_k
Tần số	x_1	x_2	...	n_k

$$s^2 = \frac{n_1(x_1-\overline{x})^2+n_2(x_2-\overline{x})^2+\ldots+n_k(x_k-\overline{x})^2}{n}$$

trong đó $n = n_1+n_2+\ldots+n_k$; $\overline{x}$ là số trung bình cộng của các số liệu đã cho.

+ Phương sai của mẫu số liệu thống kê trong bảng phân bố tần số tương đối là:

Giá trị	x_1	x_2	...	x_k
Tần số tương đối	f_1	f_2	...	f_k

$$s^2 = f_1(x_1-\overline{x})^2+f_2(x_2-\overline{x})^2+\ldots+f_k(x_k-\overline{x})^2$$

, trong đó $\overline{x}$ là số trung bình cộng của các số liệu đã cho.

- *Trong thực tế, người ta còn dùng công thức sau để tính phương sai của một mẫu số liệu:*

$$\hat{s}^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n-1},$$

trong đó: x_i là giá trị của quan sát thứ i; $\overline{x}$ là giá trị trung bình và n là số quan sát trong mẫu số liệu đó.

Ví dụ 3. Kết quả 5 bài kiểm tra môn Toán của hai bạn Dũng và Huy được thống kê trong bảng sau:

Điểm kiểm tra-Học sinh	Bài 1	Bài 2	Bài 3	Bài 4	Bài 5
Dũng	8	6	7	5	9
Huy	6	7	7	8	7

Số trung bình cộng của mẫu số liệu điểm trung bình môn toán của Huy và Dũng đều là $\overline{x} = 7$.

1. Tính phương sai của mẫu số liệu điểm trung bình môn toán của Huy.
2. So sánh phương sai của mẫu số liệu điểm kiểm tra môn toán của Huy với phương sai của mẫu số liệu điểm kiểm tra môn toán của Dũng. Từ đó cho biết bạn nào có kết quả kiểm tra môn Toán đồng đều hơn.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4. Mẫu số liệu về thời gian (đơn vị: giây) chạy cự li 500 m của 5 người là

$$55,2 \quad 58,8 \quad 62,4 \quad 54 \quad 59,4 \qquad (5)$$

Mẫu số liệu về thời gian (đơn vị: giây) chạy cự li 1500 m của 5 người đó là

$$271,2 \quad 261 \quad 276 \quad 282 \quad 270 \qquad (6)$$

Tính phương sai của mẫu hai mẫu số liệu trên. Từ đó cho biết cự li chạy nào có kết quả đồng đều hơn.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

3. ĐỘ LỆNH CHUẨN

Định nghĩa 4. Căn bậc hai của phương sai gọi là độ lệch chuẩn của mẫu số liệu thống kê.

Nhận xét. *Vì đơn vị đo của phương sai là bình phương đơn vị đo của số liệu thống kê, trong khi độ lệch chuẩn lại có cùng đơn vị đo với số liệu thống kê, nên khi cần chú ý đến đơn vị đo thì ta sử dụng độ lệch chuẩn.*

Ví dụ 5. Bảng 5 thống kê nhiệt độ (đơn vị: °C) ở Thành phố Hồ Chí Minh ngày 03/6/2021 sau một số lần đo.

Giờ đo	1 h	4h	7 h	10 h	13 h	16 h	19 h	22 h
Nhiệt độ (°C)	27	26	28	32	34	35	30	28

Bảng 5

1. Viết mẫu số liệu thống kê nhiệt độ nhận được từ Bảng 5.
2. Tính số trung bình cộng, phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Nhận xét. *Cũng như phương sai, khi hai mẫu số liệu thống kê có cùng đơn vị đo và có số trung bình cộng bằng nhau (hoặc xấp xỉ nhau), mẫu số liệu nào có độ lệch chuẩn nhỏ hơn thì mức độ phân tán (so với số trung bình cộng) của các số liệu trong mẫu đó sẽ thấp hơn. Độ lệch chuẩn là số đặc trưng đo mức độ phân tán của mẫu số liệu thống kê có cùng đơn vị đo.*

4. TÍNH HỢP LÍ CỦA SỐ LIỆU THỐNG KÊ

Ta có thể sử dụng các số đặc trưng đo mức độ phân tán cho mẫu số liệu không ghép nhóm để chỉ ra được những số liệu bất thường của mẫu số liệu đó. Ta thường sử dụng khoảng tứ phân vị để xác định số liệu bất thường của mẫu số liệu. Cụ thể như sau:
Giả sử Q_1, Q_2, Q_3 là tứ phân vị của mẫu số liệu và hiệu $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$ là khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đó. Một giá trị trong mẫu số liệu được coi là một giá trị bất thường nếu nó nhỏ hơn $Q_1 - \dfrac{3}{2}\Delta_Q$ hoặc lớn hơn $Q_3 + \dfrac{3}{2}\Delta_Q$. Như vậy, khoảng tứ phân vị cho ta cách nhận ra giá trị bất thường của mẫu số liệu.

Ví dụ 6. Nêu các giá trị bất thường của mẫu số liệu thống kê sau:

$$5 \quad 6 \quad 19 \quad 21 \quad 22 \quad 23 \quad 24 \quad 25 \quad 26 \quad 27 \quad 28 \quad 29 \quad 30 \quad 31 \quad 32 \quad 33 \quad 34 \quad 48 \quad 49$$

....
....

....

....

....

....

....

....

....

....

! Ta cũng có thể xác định số liệu bất thường của mẫu số liệu bằng số trung bình cộng và độ lệch chuẩn. Cụ thể như sau:
Giả sử $\overline{x}$, s lần lượt là số trung bình cộng và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu. Một giá trị trong mẫu số liệu cũng được coi là một giá trị bất thường nếu nó nhỏ hơn $\overline{x} - 3s$ hoặc lớn hơn $\overline{x} + 3s$. Như vậy, số trung bình cộng và độ lệch chuẩn cho ta cách nhận ra giá trị bất thường của mẫu số liệu.

5. BÀI TẬP

Bài 1. Trong 5 lần nhảy xa, hai bạn Hùng và Trung có kết quả (đơn vị: mét) lần lượt là

Hùng	$2,4$	$2,6$	$2,4$	$2,5$	$2,6$
Trung	$2,4$	$2,5$	$2,5$	$2,5$	$2,6$

1. Kết quả trung bình của hai bạn có bằng nhau hay không?
2. Tính phương sai của mẫu số liệu thống kê kết quả 5 lần nhảy xa của mỗi bạn. Từ đó cho biết bạn nào có kết quả nhảy xa ổn định hơn.

....

....

....

....

....

....

....

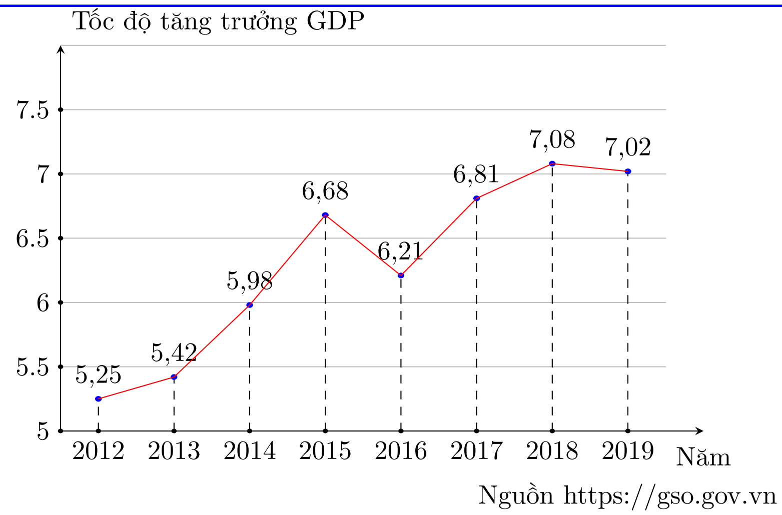
....

....

....

Bài 2. Biểu đồ đoạn thẳng ở Hình 3 biểu diễn tốc độ tăng trưởng GDP của Việt Nam giai đoạn $2012 - 2019$.

1. Viết mẫu số liệu thống kê tốc độ tăng trưởng GDP nhận được từ biểu đồ ở Hình 3.
2. Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu đó.
3. Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đó.
4. Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó.

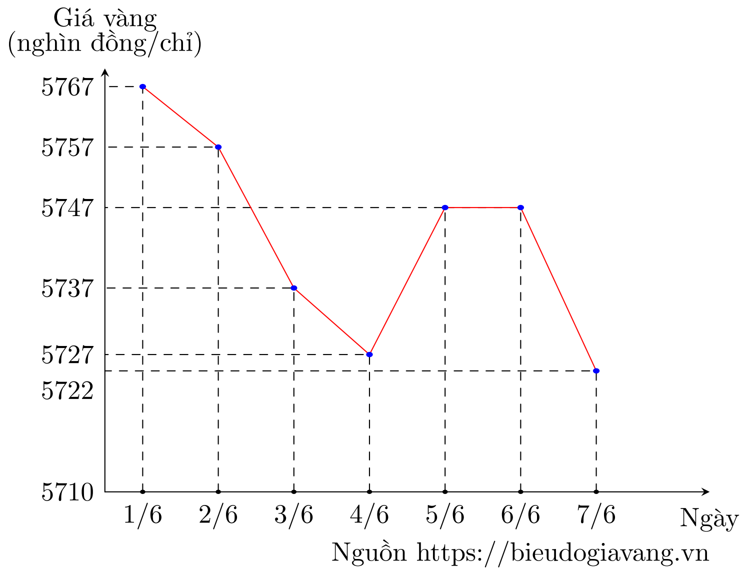


Hình 3

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Bài 3. Biểu đồ đoạn thẳng ở Hình 4 biểu diễn giá vàng bán ra trong bảy ngày đầu tiên của tháng 6 năm 2021.

1. Viết mẫu số liệu thống kê giá vàng bán ra nhận được từ biểu đồ ở Hình 4.
2. Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu đó.
3. Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đó.
4. Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó.



Hình 4

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

....
....

Bài 4. Để biết cây đậu phát triển như thế nào sau khi gieo hạt, bạn Châu gieo 5 hạt đậu vào 5 chậu riêng biệt và cung cấp cho chúng lượng nước, ánh sáng như nhau. Sau hai tuần, 5 hạt đậu đã nảy mầm và phát triển thành 5 cây con. Bạn Châu đo chiều cao từ rễ đến ngọn của mỗi cây (đơn vị: mi-li-mét) và ghi kết quả là mẫu số liệu sau:

$$112 \quad 102 \quad 106 \quad 94 \quad 101$$

1. Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên.
2. Theo em, các cây có phát triển đồng đều hay không?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

BÀI 9. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ TRONG MỘT SỐ TRÒ CHƠI ĐƠN GIẢN

1. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ TRONG TRÒ CHƠI TUNG ĐỒNG XU

Nhận xét. *Tung một đồng xu hai lần liên tiếp.*

— *Tập hợp Ω các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của đồng xu sau hai lần tung là $\Omega = \{SS;SN;NS;NN\}$ trong đó, chẳng hạn SN là kết quả "Lần thứ nhất đồng xu xuất hiện mặt sấp, lần thứ hai đồng xu xuất hiện mặt ngửa".*

— *Tập hợp Ω gọi là không gian mẫu trong trò chơi tung một đồng xu hai lần liên tiếp.*

Định nghĩa 1. Xác suất của biến cố A, kí hiệu $\mathrm{P}(A)$, là tỉ số giữa số các kết quả thuận lợi cho biến cố A và số phần tử của không gian mẫu Ω:

$$\mathrm{A} = \frac{n(A)}{n\left(\Omega\right)},$$

ở đó $n(A)$, $n\left(\Omega\right)$ lần lượt là số phần tử của hai tập hợp A và Ω.

Ví dụ 1. Tung một đồng xu hai lần liên tiếp.

1. Viết tập hợp Ω là không gian mẫu trong trò chơi trên.
2. Xét biến cố B: "Có ít nhất một lần xuất hiện mặt ngửa". Tính xác suất của biến cố B.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2. Tung một đồng xu hai lần liên tiếp. Xét biến cố "Có ít nhất một lần xuất hiện mặt sấp". Tính xác suất của biến cố nói trên.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ TRONG TRÒ CHƠI GIEO XÚC XẮC

Nhận xét. *Gieo một con xúc sắc hai lần liên tiếp.*

— *Khi gieo một con xúc sắc hai lần liên tiếp, có 36 kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của xúc sắc sau hai lần gieo, đó là*

$$\begin{array}{cccccc} (1;1) & (1;2) & (1;3) & (1;4) & (1;5) & (1;6) \\ (2;1) & (2;2) & (2;3) & (2;4) & (2;5) & (2;6) \\ (3;1) & (3;2) & (3;3) & (3;4) & (3;5) & (3;6) \\ (4;1) & (4;2) & (4;3) & (4;4) & (4;5) & (4;6) \\ (5;1) & (5;2) & (5;3) & (5;4) & (5;5) & (5;6) \\ (6;1) & (6;2) & (6;3) & (6;4) & (6;5) & (6;6) \end{array}$$

Tập hợp Ω là tất cả các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của xúc sắc sau hai lần gieo là $\Omega = \{(i;j) | i,j = 1,2,3,4,5,6\}$, trong đó $(i;j)$ là kết quả "lần thứ nhất xuất hiện mặt i chấm, lần thứ hai xuất hiện mặt j chấm".

— *Tập hợp Ω gọi là không gian mẫu trong trò chơi gieo một con xúc sắc hai lần liên tiếp.*

Định nghĩa 2. Xác suất của biến cố C, kí hiệu là

$$\mathrm{P}(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)}.$$

trong đó $n(C)$, $n(\Omega)$ lần lượt là số phần tử của hai tập hợp C và Ω.

Ví dụ 3. Gieo một con xúc xắc hai lần liên tiếp.

1. Viết tập hợp Ω là không gian mẫu trong trò chơi trên.
2. Xét biến cố D: "Số chấm trong hai lần gieo đều là số lẻ". Tính xác xuất của biến cố D.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4. Gieo một con xúc xắc hai lần liên tiếp. Xét biến cố "Số chấm trong hai lần gieo đều là số nguyên tố". Tính xác suất của biến cố đó.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

3. BÀI TẬP

Bài 1. Tung một đồng xu hai lần liên tiếp. Tính xác suất của biến cố “Kết quả của hai lần là khác nhau”.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 2. Tung một đồng xu ba lần liên tiếp.

1. Viết tập hợp Ω là không gian mẫu trong trò chơi trên.
2. Xác định mỗi biến cố :

$$\begin{aligned} A &: \text{“Lần đầu xuất hiện mặt ngửa”;} \\ B &: \text{“Mặt ngửa xảy ra đúng một lần”.} \end{aligned}$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 3. Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp.

1. Tìm số phần tử của tập hợp Ω là không gian mẫu trong trò chơi trên.
2. Phát biểu mỗi biến cố sau dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện:

$$\begin{aligned} A &= \{(6;1);(6;2);(6;3);(6;4);(6;5);(6;6)\}; \\ B &= \{(1;6);(2;5);(3;4);(4;3);(5;2);(6;1)\}; \\ C &= \{(1;1);(2;2);(3;3);(4;4);(5;5);(6;6)\}. \end{aligned}$$

....
....
....
....

....
....
....
....
....
....

Bài 4. Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

1. "Tổng số chấm xuất hiện trong hai lần gieo không bé hơn 10";
2. "Mặt 6 chấm xuất hiện ít nhất một lần".

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

BÀI 10. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM VỀ XÁC SUẤT

1. Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

Định nghĩa 1. Có những phép thử mà ta không thể đoán trước được kết quả của nó, mặc dù đã biết tập hợp tất cả các kết quả của phép thử đó. Những phép thử như thế gọi là *phép thử ngẫu nhiên* (gọi tắt là phép thử).

Định nghĩa 2. Tập hợp Ω các kết quả có thể xảy ra của một phép thử gọi là *không gian mẫu* của phép thử đó.

Ví dụ 1. Một hộp có 3 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số $1, 2, 3$; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một chiếc thẻ từ trong hộp, ghi lại số của thẻ được rút ra và bỏ lại thẻ đó vào hộp. Xét phép thử "Rút ngẫu nhiên liên tiếp hai chiếc thẻ trong hộp". Hãy cho biết không gian mẫu của phép thử đó.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2. Một hộp có 1 quả bóng xanh, 1 quả bóng đỏ, 1 quả bóng vàng; các quả bóng có kích thước và khối lượng giống nhau. Lấy ngẫu nhiên một quả bóng từ trong hộp, ghi lại màu của quả bóng được lấy ra và bỏ lại quả bóng đó vào hộp. Xét phép thử "Lấy ngẫu nhiên liên tiếp hai quả bóng trong hộp". Hãy cho biết không gian mẫu của phép thử đó.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. Biến cố

2.1 Định nghĩa

Định nghĩa 3. Biến cố ngẫu nhiên (gọi tắt là biến cố) là tập con của không gian mẫu.

Nhận xét.

— *Mỗi sự kiện liên quan đến phép thử T tương ứng với một (và chỉ một) tập con A của không gian mẫu Ω.*

— *Ngược lại, mỗi tập con A của không gian mẫu Ω có thể phát biểu dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện liên quan đến phép thử T.*

! Vì sự kiện chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của một biến cố nên ta cũng gọi sự kiện là biến cố. Chẳng hạn: Sự kiện "Kết quả của hai lần tung là giống nhau" trong phép thử "Tung một đồng xu hai lần liên tiếp" là một biến cố.

Ví dụ 3. Xét phép thử "Gieo một con xúc xắc hai lần liên tiếp".

a) Sự kiện "Tổng số chấm trong hai lần gieo chia hết cho 5" tương ứng với biến cố nào trong phép thử trên?

b) Phát biểu biến cố $D = \{(1;5);(5;1);(2;4);(4;2);(3;3);(6;6)\}$ của không gian mẫu (của phép thử trên) dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2.2 Biến cố không. Biến cố chắc chắn

Xét phép thử T với không gian mẫu Ω. Mỗi biến cố là một tập con của tập hợp Ω. Vì thế, tập rỗng $\varnothing$ cũng là một biến cố, gọi là biến cố không thể (gọi tắt là biến cố không). Còn tập hợp Ω gọi là biến cố chắc chắn.
Chẳng hạn, khi gieo một xúc xắc, biến cố "Mặt xuất hiện có 7 chấm" là biến cố không, còn biến cố "Mặt xuất hiện có số chấm không vượt quá 6" là biến cố chắc chắn.

2.3 Biến cố đối

Định nghĩa 4. Tập con $\Omega \setminus A$ **xác định một biến cố**, gọi là biến cố đối của biến cố A, kí hiệu là $\overline{A}$.

! Nếu biến cố A được mô tả dưới dạng mệnh đề toán học Q thì biến cố $\overline{A}$ được mô tả bằng mệnh đề phủ định của mệnh đề Q (tức là mệnh đề $\overline{Q}$).

3. Xác suất của biến cố

Định nghĩa 5. Xác suất của biến cố A, kí hiệu là $\mathrm{P}(A)$, bằng tỉ số $\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$, ở đó $n(A), n(\Omega)$ lần lượt là số phần tử của hai tập hợp A và Ω. Như vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$.

Ví dụ 4. Một hộp có 5 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số $1, 2, 3, 4, 5$; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên đồng thời 2 chiếc thẻ từ trong hộp.

a) Gọi Ω là không gian mẫu trong trò chơi trên. Tính số phần tử của tập hợp Ω.

b) Tính xác suất của biến cố E: "Tổng các số trên hai thẻ là số lẻ".

Ví dụ 5. Từ một hộp chứa 5 quả cầu trắng và 5 quả cầu đỏ; các quả cầu có kích thước và khối lượng giống nhau. Lấy ngẫu nhiên đồng thời hai quả cầu. Tính xác suất lấy được hai quả cầu khác màu.

Ví dụ 6. Có 5 bông hoa màu trắng, 5 bông hoa màu vàng và 6 bông hoa màu đỏ. Người ta chọn ra 4 bông hoa từ các bông hoa trên. Tính xác suất của biến cố "Bốn bông hoa chọn ra có cả ba màu".

Ví dụ 7. Một đội văn nghệ có 4 học sinh nam và 5 học sinh nữ. Giáo viên phụ trách đội muốn chọn ra một đội tốp ca gồm ba bạn sao cho có cả bạn nam và bạn nữ cùng tham gia.

a) Giáo viên phụ trách đội có bao nhiêu cách chọn một đội tốp ca như vậy?

b) Tính xác suất của biến cố H: "Ba bạn chọn ra có cả nam và nữ".

2. TÍNH CHẤT CỦA XÁC SUẤT

Xét phép thử T với không gian mẫu là Ω. Khi đó, ta có các tính chất sau

Tính chất 1.

— $\mathrm{P}(\varnothing) = 0; \mathrm{P}(\Omega) = 1$;

— $0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1$ với mỗi biến cố A;

— $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$ với mỗi biến cố A.

Ví dụ 8. Một hộp có 10 quả bóng trắng và 10 quả bóng đỏ; các quả bóng có kích thước và khối lượng giống nhau. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 9 quả bóng trong hộp. Tính xác suất để trong 9 quả bóng được lấy ra có ít nhất một quả bóng màu đỏ.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

3. NGUYÊN LÍ XÁC SUẤT BÉ

Qua thực nghiệm và quan sát thực tế, người ta thấy rằng các biến cố có xác suất bé sẽ gần như không xảy ra trong phép thử. Chẳng hạn, mỗi chuyến bay đều có một xác suất rất bé bị xảy ra tai nạn. Nhưng trên thực tế, tai nạn của một chuyến bay sẽ không xảy ra. Từ đó, ta thừa nhận nguyên lí sau đây, gọi là nguyên lí xác suất bé: Nếu một biến cố ngẫu nhiên có xác suất rất bé thì thực tế có thể cho rằng trong một phép thử biến cố đó sẽ không xảy ra.

Tuy nhiên, một xác suất như thế nào được xem là bé phải tuỳ thuộc vào từng bài toán cụ thể. Ví dụ như xác suất để dù không mở là 0,01 (dùng cho nhảy dù) thì cũng không thể coi là bé và không thể dùng loại dù đó. Nhưng nếu xác suất để tàu về ga chậm là 0,01 thì lại có thể xem là tàu về ga đúng giờ.

4. BÀI TẬP

Bài 1. Một hộp có 5 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số $1, 2, 3, 4, 5$; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên đồng thời 2 chiếc thẻ từ trong hộp.

a) Gọi Ω là không gian mẫu trong trò chơi trên. Tính số phần tử của tập hợp Ω.

b) Tính xác suất của biến cố "Tích các số trên hai thẻ là số lẻ".

....
....
....
....
....
....

....
....
....
....

Bài 2. Một hộp có 4 tấm bìa cùng loại, mỗi tấm bìa được ghi một trong các số $1, 2, 3, 4$; hai tấm bìa khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên đồng thời 3 tấm bìa từ trong hộp.

a) Tính số phần tử của không gian mẫu.

b) Xác định các biến cố sau:
A: "Tổng các số trên ba tấm bìa bằng 9";
B: "Các số trên ba tấm bìa là ba số tự nhiên liên tiếp".

c) Tính $\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(B)$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 3. Hai bạn nam Dũng, Huy và hai bạn nữ Hoa, Thảo được xếp ngồi ngẫu nhiên vào bốn ghế xếp thành hai dãy đối diện nhau. Tính xác suất xếp được

① Nam, nữ ngồi đối diện nhau; ② Nữ ngồi đối diện nhau.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 4. Có 10 bông hoa màu trắng, 10 bông hoa màu vàng và 10 bông hoa màu đỏ. Người ta chọn ra 4 bông hoa từ các bông hoa trên. Tính xác suất của biến cố "Bốn bông hoa chọn ra có cả ba màu".

....
....
....
....

. . . .

BÀI 11. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG

Bài 1. Bốn bạn Ánh, Bình, Cường, Hoa cùng thi vào trường trung học phổ thông chất lượng cao Bình Minh. Kết quả thi cho bởi bảng thống kê sau:

Học sinh	Điểm Toán	Điểm Ngữ văn	Điểm Tiếng Anh
Ánh	10	8	10
Bình	6	7	5
Cường	9	8	9
Hoa	8	6	9

Quy định:

— Điểm trung bình viết tắt là ĐTB và tính theo công thức:

$$\text{ĐTB} = (\text{Điểm Toán} + \text{Điểm Ngữ văn} + \text{Điểm Tiếng Anh}) : 3.$$

— Điểm trung bình Toán viết tắt là ĐTB T và tính theo công thức:

$$\text{ĐTB T} = (2 \times \text{Điểm Toán} + \text{Điểm Ngữ văn} + \text{Điểm Tiếng Anh}) : 4.$$

— Điểm trung bình Ngữ văn viết tắt là ĐTB V và tính theo công thức:

$$\text{ĐTB V} = (\text{Điểm Toán} + 2 \times \text{Điểm Ngữ văn} + \text{Điểm Tiếng Anh}) : 4.$$

— Điểm trung bình Tiếng Anh viết tắt là ĐTB A và tính theo công thức:

$$\text{ĐTB A} = (\text{Điểm Toán} + \text{Điểm Ngữ văn} + 2 \times \text{Điểm Tiếng Anh}) : 4.$$

Cách xét tuyển như sau:

— Trúng tuyển: ĐTB $> 7,5$;

— Trúng tuyển lớp Toán: ĐTB T > 9;

— Trúng tuyển lớp Văn: ĐTB V > 8 ;

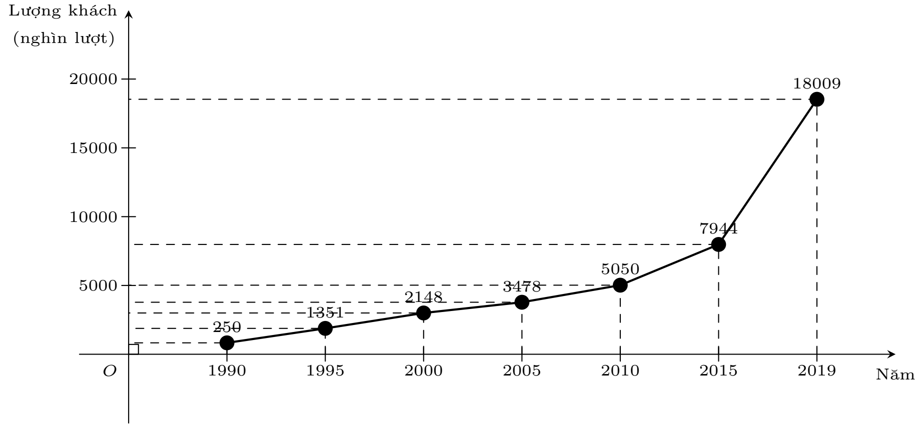
— Trúng tuyển lớp Tiếng Anh: ĐTB A $> 8,5$.

Hãy lập bảng kết quả theo mẫu dưới đây và xem mỗi bạn có những cơ hội nào (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Học sinh	ĐTB	ĐTB T	ĐTB V	ĐTB A	Kết quả
Ánh	?	?	?	?	?
Bình	?	?	?	?	?
Cường	?	?	?	?	?
Hoa	?	?	?	?	?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 2. Biểu đồ đoạn thẳng ở *Hình 6* cho biết lượng khách du lịch quốc tế đến Việt Nam trong một số năm (từ 1990 đến 2019).



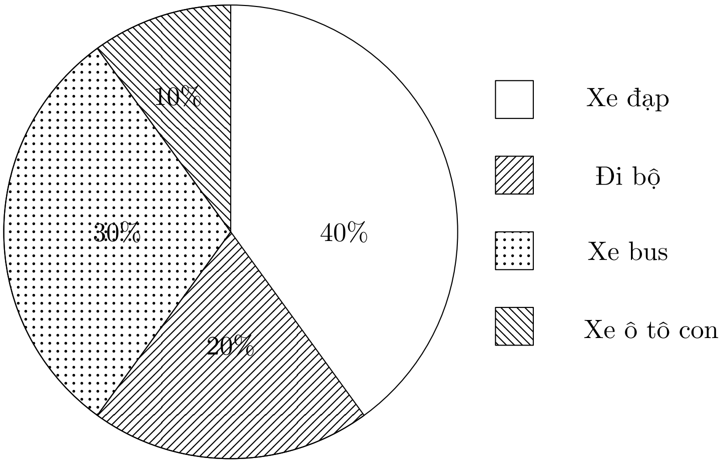
(Nguồn: https://vietnamtourism.gov.vn)

Hình 6

1. Viết mẫu số liệu thống kê số lượt khách du lịch quốc tế đến Việt Nam nhận được từ biểu đồ bên.
2. Viết mẫu số liệu theo thứ tự tăng dần. Tìm số trung bình cộng, trung vị và tứ phân vị của mẫu số liệu đó.
3. Tìm khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đó.
4. Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 3. Lớp 10A có 40 học sinh. Tỉ số phần trăm về phương tiện mà các bạn đến trường được mô tả như biểu đồ ở *Hình 7*.



Hình 7

1. Có bao nhiêu bạn đi xe đạp đến trường?
2. Chọn ngẫu nhiên một bạn để phân công vào đội xung kích của trường. Tính xác suất của biến cố "Bạn được chọn là bạn đến trường bằng xe đạp".

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

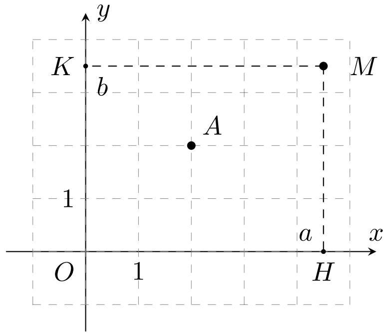
BÀI 12. TỌA ĐỘ CỦA VÉC-TƠ

1. TỌA ĐỘ CỦA MỘT ĐIỂM

Để xác định tọa độ của một điểm M tùy ý trong mặt phẳng tọa độ Oxy, ta làm như sau

— Từ M kẻ đường thẳng vuông góc với trục hoành và cắt trục hoành tại điểm H ứng với số a. Số a là hoành độ của điểm M.

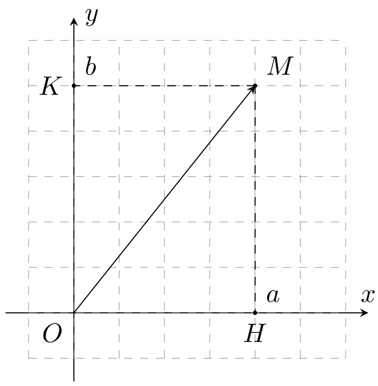
— Từ M kẻ đường thẳng vuông góc với trục tung và cắt trục tung tại điểm K ứng với số b. Số b là tung độ của điểm M.



Cặp số $(a;b)$ là toạ độ của điểm M trong mặt phẳng toạ độ Oxy.
Ta kí hiệu là $M(a;b)$.

2. TỌA ĐỘ CỦA MỘT VÉC-TƠ

Định nghĩa 1. Toạ độ của điểm M được gọi là toạ độ của véc-tơ $\overrightarrow{OM}$.
Nếu $\overrightarrow{OM}$ có tọa độ $(a;b)$ thì viết $\overrightarrow{OM}=(a;b)$ hay $\overrightarrow{OM}(a;b)$, trong đó a gọi là hoành độ của véc-tơ $\overrightarrow{OM}$ và b gọi là tung độ của véc-tơ $\overrightarrow{OM}$.

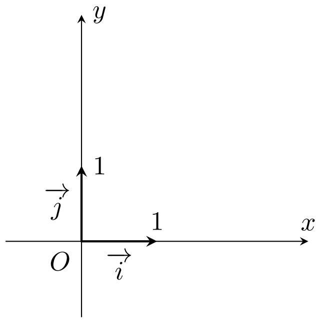


Chú ý. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, ta có

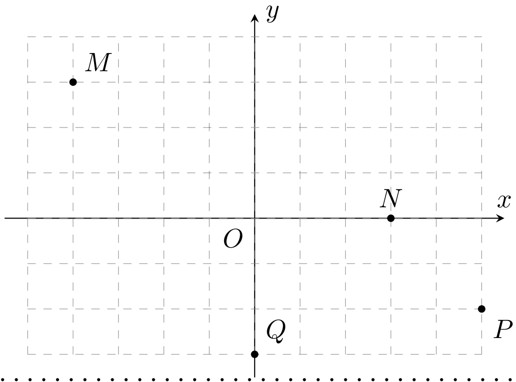
— $\overrightarrow{OM}=(a;b)\Leftrightarrow M(a;b)$.

— Véc-tơ $\overrightarrow{i}$ có điểm gốc O và có tọa độ $(1;0)$ gọi là *véc-tơ đơn vị* trên trục Ox.

— Véc-tơ $\overrightarrow{j}$ có điểm gốc O và có tọa độ $(0;1)$ gọi là *véc-tơ đơn vị* trên trục Oy.



Ví dụ 1.
Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các điểm M, N, P, Q như hình bên. Tìm toạ độ của các véc-tơ $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$.



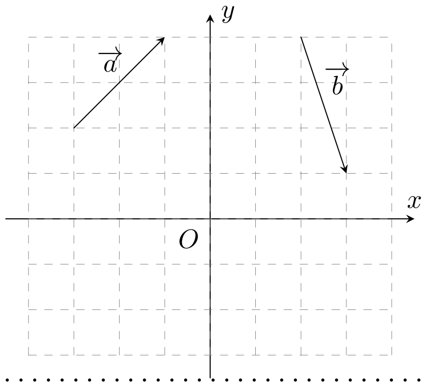
....
....

....
....
....
....
....
....
....
....

Định nghĩa 2. Với mỗi véc-tơ $\overrightarrow{u}$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy, toạ độ của vectơ $\overrightarrow{u}$ là toạ độ của điểm A, trong đó A là điểm sao cho $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$.

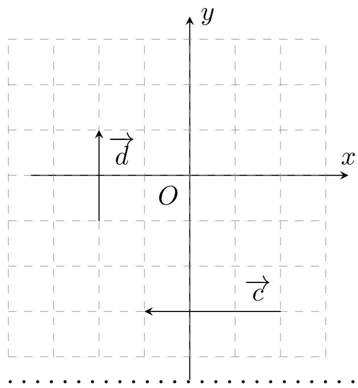
Nếu $\overrightarrow{u}$ có tọa độ $(a;b)$ thì ta viết $\overrightarrow{u} = (a;b)$ hay $\overrightarrow{u}(a;b)$, trong đó a gọi là hoành độ của véc-tơ $\overrightarrow{u}$ và b gọi là tung độ của véc-tơ $\overrightarrow{u}$.

Ví dụ 2.
Tìm toạ độ của các véc-tơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ ở hình bên.



....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3.
Tìm toạ độ của các véc-tơ $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{d}$ ở hình bên.



....
....
....
....
....
....
....

....
....
....

Định lí 1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, nếu $\overrightarrow{u}=(a;b)$ thì $\overrightarrow{u}=a\overrightarrow{i}+b\overrightarrow{j}$.
Ngược lại, nếu $\overrightarrow{u}=a\overrightarrow{i}+b\overrightarrow{j}$ thì $\overrightarrow{u}=(a;b)$.

! Với $\overrightarrow{a}=(x_1;y_1)$ và $\overrightarrow{b}=(x_2;y_2)$, ta có $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\y_1=y_2.\end{cases}$

Như vậy, mỗi véc-tơ hoàn toàn được xác định khi biết toạ độ của nó.

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $A(1;2)$ và véc-tơ $\overrightarrow{u}=(3;-4)$.

1. Biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{u}$ qua hai véc-tơ $\overrightarrow{i}$ và $\overrightarrow{j}$.
2. Biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{OA}$ qua hai véc-tơ $\overrightarrow{i}$ và $\overrightarrow{j}$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 5. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $B(-1;0)$ và véc-tơ $\overrightarrow{v}=(0;-7)$.

1. Biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{v}$ qua hai véc-tơ $\overrightarrow{i}$ và $\overrightarrow{j}$.
2. Biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{OB}$ qua hai véc-tơ $\overrightarrow{i}$ và $\overrightarrow{j}$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

3. LIÊN HỆ GIỮA TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM VÀ TỌA ĐỘ CỦA VÉC-TƠ

Định nghĩa 3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy. cho hai điểm $A\left(x_A;y_A\right)$ và $B\left(x_B;y_B\right)$. Ta có

$$\overrightarrow{AB}=\left(x_B-x_A;y_B-y_A\right).$$

Ví dụ 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm không thẳng hàng $A(1;1)$, $B(4;3)$, $C(-1:-2)$.

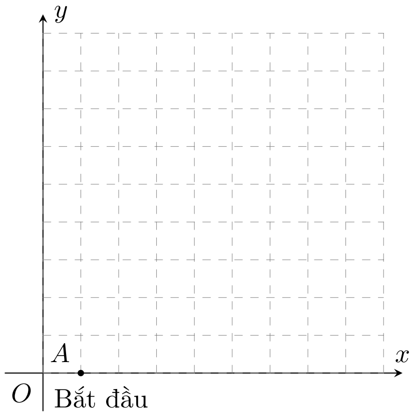
1. Tìm toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

② Tìm tọa độ của điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Ví dụ 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm $A(1;3)$, $B(5;-1)$, $C(2;-2)$, $D(-2;2)$. Chứng minh $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

Ví dụ 8.

Trong một bài luyện tập của các cầu thủ bóng nước, huấn luyện viên cho các cầu thủ di chuyển theo ba đoạn liên tiếp. Đoạn thứ nhất di chuyển về hướng Đông Bắc với quãng đường là 20m; đoạn thứ hai di chuyển về hướng Tây Bắc với quãng đường là 10m và đoạn thứ ba di chuyển theo hướng Đông Bắc với quãng đường là 5m.

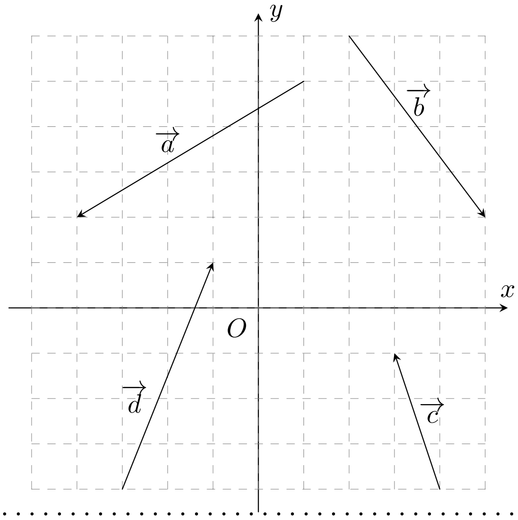


① Vẽ các véc-tơ biểu diễn sự di chuyển của các cầu thủ trong hệ trục toạ độ Oxy với vị trí bắt đầu như hình bên, trong đó ta quy ước độ dài đường chéo của mỗi ô vuông là 5m.

② Tìm toạ độ của các véc-tơ được vẽ ở câu trên.

4. BÀI TẬP

Bài 1.
Tìm toạ độ của các vectơ trong hình bên và biểu diễn mỗi véc-tơ đó qua hai véc-tơ $\overrightarrow{i}$ và $\overrightarrow{j}$.



....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 2. Tìm tọa độ của các véc-tơ sau

① $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{i}$.

② $\overrightarrow{b} = -\overrightarrow{j}$.

③ $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j}$.

④ $\overrightarrow{d} = 0{,}5\overrightarrow{i} + \sqrt{6}\overrightarrow{j}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 3. Tìm các số thực a và b sao cho mỗi cặp véc-tơ sau bằng nhau

① $\overrightarrow{u} = (2a - 1; -3)$ và $\overrightarrow{v} = (3; 4b + 1)$.

② $\overrightarrow{x} = (a + b; -2a + 3b)$ và $\overrightarrow{y} = (2a - 3; 4b)$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 4. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho ba điểm $A(2;3)$, $B(-1;1)$, $C(3;-1)$.

1. Tìm toạ độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$.
2. Tìm toạ độ trung điểm N của đoạn thẳng AC. Chứng minh $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NM}$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 5. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $M(-1;3)$.

1. Tìm toạ độ điểm A đối xứng với điểm M qua gốc O.
2. Tìm toạ độ điểm B đối xứng với điểm M qua trục Ox.
3. Tìm toạ độ điểm C đối xứng với điểm M qua trục Oy.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 6. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho ba điểm không thẳng hàng $A(-3;1)$, $B(-1;3)$, $I(4;2)$. Tìm toạ độ của hai điểm C, D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nhận I làm tâm đối xứng.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 7. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC. Các điểm $M(1;-2)$, $N(4:-1)$ và $P(6;2)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Tìm toạ độ của các điểm A, B, C.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

BÀI 13. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VÉC-TƠ

1. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA PHÉP CỘNG HAI VÉC-TƠ, PHÉP TRỪ HAI VÉC-TƠ, PHÉP NHÂN MỘT SỐ VỚI MỘT VÉC-TƠ

Tính chất 1. Nếu $\overrightarrow{u} = (x_1; y_1)$ và $\overrightarrow{v} = (x_2; y_2)$ thì

— $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$.

— $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$.

— $k\overrightarrow{u} = (kx_1; kx_2)$ với $k \in \mathbb{R}$.

Nhận xét. *Hai véc-tơ* $\overrightarrow{u} = (x_1; y_1)$, $\overrightarrow{v} = (x_2; y_2)$ $(\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0})$ *cùng phương khi và chỉ khi có một số thực* k *sao cho* $x_1 = kx_2$ *và* $y_1 = ky_2$.

Ví dụ 1. Cho $\overrightarrow{u} = (2; -1)$, $\overrightarrow{v} = (1; 5)$. Tìm toạ độ của mỗi véc-tơ sau

① $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. ② $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2. ① Cho $\overrightarrow{u} = (-2; 0)$, $\overrightarrow{v} = (0; 6)$, $\overrightarrow{w} = (-2; 3)$. Tìm toạ độ của véc-tơ $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$.

② Cho $\overrightarrow{u} = \left(\sqrt{3}; 0\right)$, $\overrightarrow{v} = \left(0; -\sqrt{7}\right)$. Tìm toạ độ của véc-tơ $\overrightarrow{w}$ sao cho $\overrightarrow{w} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3. Cho $\overrightarrow{a} = (-2; 3)$, $\overrightarrow{b} = (2; 1)$, $\overrightarrow{c} = (1; 2)$. Tìm tọa độ của mỗi véc-tơ sau

① $3\overrightarrow{a}$. ② $2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$. ③ $\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} - \dfrac{3}{2}\overrightarrow{c}$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4. Cho ba điểm $A(-1;-3)$, $B(2;3)$ và $C(3;5)$. Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. TỌA ĐỘ TRUNG ĐIỂM ĐOẠN THẲNG VÀ TỌA ĐỘ TRỌNG TÂM TAM GIÁC

Tính chất 2. Cho hai điểm $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$. Nếu $M(x_M;y_M)$ là trung điểm đoạn thẳng AB thì

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2};y_M=\frac{y_A+y_B}{2}.$$

Ví dụ 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(2;4)$ và $M(5;7)$. Tìm tọa độ điểm B sao cho M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Tính chất 3. Cho tam giác ABC có $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$, $C(x_C;y_C)$. Nếu $G(x_G;y_G)$ là trọng tâm tam giác ABC thì

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3};y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}.$$

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC có $A(-2;1)$, $B(2;5)$, $C(5;2)$. Tìm toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB và trọng tâm G của tam giác ABC.

....

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Ví dụ 7. Cho ba điểm $A(-1;1)$, $B(1;5)$, $G(1;2)$.

1. Chứng minh ba điểm A, B, G không thẳng hàng.
2. Tìm tọa độ điểm C sao cho G là trọng tâm tam giác ABC.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

3. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

Tính chất 4. Nếu $\overrightarrow{u}=(x_1;y_1)$ và $\overrightarrow{v}=(x_2;y_2)$ thì $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=x_1x_2+y_1y_2$.

Nhận xét. ① *Nếu* $\overrightarrow{a}=(x;y)$ *thì* $|\overrightarrow{a}|=\sqrt{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}}=\sqrt{x^2+y^2}$.

② *Nếu* $A(x_1;y_1)$ *và* $B(x_2;y_2)$ *thì* $AB=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

③ *Với hai véc-tơ* $\overrightarrow{u}=(x_1;y_1)$ *và* $\overrightarrow{v}=(x_2;y_2)$ *đều khác* $\overrightarrow{0}$, *ta có*

— $\overrightarrow{u}$ *và* $\overrightarrow{v}$ *vuông góc với nhau khi và chỉ khi* $x_1x_2+y_1y_2=0$.

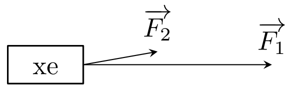
— $\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=\dfrac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}|\cdot|\overrightarrow{v}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$.

Ví dụ 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;2)$, $B(1;-1)$, $C(8;0)$.

① Tính $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ và $\cos\widehat{ABC}$. ② Chứng minh $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$. ③ Giải tam giác ABC.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Ví dụ 9. Một chiếc xe ô tô con bị mắc kẹt trong bùn lầy. Để kéo xe ra, người ta dùng xe tải kéo bằng cách gắn một đầu dây cáp kéo xe vào đầu xe ô tô con và móc đầu còn lại vào phía sau của xe tải kéo. Khi kéo, xe tải tạo ra một lực $\overrightarrow{F_1}$ có độ lớn (cường độ) là 2000 N theo phương ngang lên xe ô tô con. Ngoài ra, có thêm một người đẩy phía sau xe ô tô con, tạo ra lực $\overrightarrow{F_2}$ có độ lớn là 300 N lên xe.
Các lực này được biểu diễn bằng véc-tơ như hình bên , sao cho $\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}\right) = 5^\circ$.
Độ lớn lực tổng hợp tác động lên xe ô tô con là bao nhiêu Newton (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



4. BÀI TẬP

Bài 1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho $\overrightarrow{a} = (-1; 2)$, $\overrightarrow{b} = (3; 1)$, $\overrightarrow{c} = (2; -3)$.

1. Tìm toạ độ véc-tơ $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{c}$.
2. Tìm toạ độ véc-tơ $\overrightarrow{x}$ sao cho $\overrightarrow{x} + 2\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}$.

Bài 2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho $A(-2; 3)$, $B(4; 5)$, $C(2; -3)$.

1. Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.
2. Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.
3. Giải tam giác ABC (làm tròn các kết quả đến hàng đơn vị).

....
....
....
....

Bài 3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có trung điểm các cạnh BC, CA, AB tương ứng là $M(2;0)$, $N(4;2)$, $P(1;3)$.

① Tìm toạ độ các điểm A, B, C.

② Trọng tâm hai tam giác ABC và MNP có trùng nhau không? Vì sao?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 4. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;4)$, $B(-1;1)$, $C(-8;2)$.

① Tính số đo góc $\widehat{ABC}$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).

② Tính chu vi của tam giác ABC.

③ Tìm toạ độ điểm M trên đường thẳng BC sao cho diện tích của tam giác ABC bằng hai lần diện tích của tam giác ABM.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 5. Cho ba điểm $A(1;1)$, $B(4;3)$ và $C(6;-2)$.

① Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

② Tìm toạ độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thang có $AB \parallel CD$ và $CD = 2AB$.

....
....
....

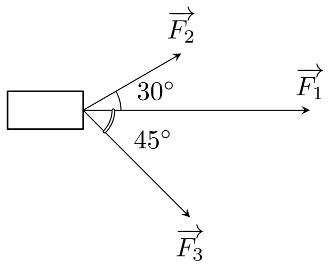
....
....
....
....
....
....
....

Bài 6. Chứng minh khẳng định sau: Hai véc-tơ $\overrightarrow{u} = (x_1; y_1)$, $\overrightarrow{v} = (x_2; y_2)$ $\left(\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}\right)$ cùng phương khi và chỉ khi có một số thực k sao cho $x_1 = kx_2$ và $y_1 = ky_2$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 7.

Một vật đồng thời bị ba lực tác động: lực tác động thứ nhất F_1 có độ lớn là 1500 N, lực tác động thứ hai $\overrightarrow{F_2}$ có độ lớn là 600 N, lực tác động thứ ba $\overrightarrow{F_3}$ có độ lớn là 800 N. Các lực này được biểu diễn bằng những véc-tơ như hình bên, với $\left(\overrightarrow{F}_1, \overrightarrow{F_2}\right) = 30°$, $\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_3}\right) = 45°$ và $\left(\overrightarrow{F}_2, \overrightarrow{F}_3\right) = 75°$. Tính độ lớn lực tổng hợp tác động lên vật (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



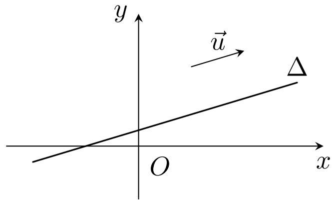
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

BÀI 14. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

1. PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ĐƯỜNG THẲNG

1. Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng

Định nghĩa 1. Véc-tơ $\vec{u}$ được gọi là *véc-tơ chỉ phương* của đường thẳng Δ nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ.



Nhận xét.

- *Nếu $\vec{u}$ là một véc-tơ chỉ phương của Δ thì $k\vec{u}$ $(k \neq 0)$ cũng là một véc-tơ chỉ phương của Δ.*
- *Một đường thẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng đó.*

2. Phương trình tham số của đường thẳng

Định nghĩa 2. Hệ $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$, trong đó t là tham số, được gọi là *phương trình tham số* của đường thẳng Δ đi qua $M_0\left(x_0; y_0\right)$ và nhận $\vec{u} = (a; b)$ $\left(\vec{u} \neq \vec{0}\right)$ làm véc-tơ chỉ phương.

Nhận xét. *Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số là*

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \left(a^2 + b^2 > 0\right), \ t \text{ là tham số.}$$

- *Với mỗi giá trị cụ thể của t, ta xác định được một điểm trên đường thẳng Δ. Ngược lại, với mỗi điểm trên đường thẳng Δ, ta xác định được một giá trị cụ thể của t.*
- *Véc-tơ $\vec{u} = (a; b)$ là một véc-tơ chỉ phương của Δ.*

Ví dụ 1.

1. Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(-1; 3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = \left(2; \dfrac{1}{2}\right)$.
2. Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số là $\begin{cases} x = -5 + 3t \\ y = 8 - 2t \end{cases}$. Chỉ ra tọa độ một véc-tơ chỉ phương của Δ và một điểm thuộc đường thẳng Δ.

....
....
....
....
....
....
....

....

....

....

Ví dụ 2. Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 + t. \end{cases}$

1. Chỉ ra tọa độ của hai điểm thuộc đường thẳng Δ.
2. Điểm nào trong các điểm $C(-1;-1)$, $D(1;3)$ thuộc đường thẳng Δ?

....

....

....

....

....

....

....

....

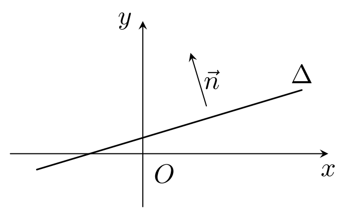
....

....

2. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐƯỜNG THẲNG

1. Véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng

Định nghĩa 3. Véc-tơ $\vec{n}$ được gọi là *véc-tơ pháp tuyến* của đường thẳng Δ nếu $\vec{n} \neq \vec{0}$ và giá của $\vec{n}$ vuông góc với Δ.



Nhận xét.

- *Nếu $\vec{n}$ là một véc-tơ pháp tuyến của Δ thì $k\vec{n}$ $(k \neq 0)$ cũng là một véc-tơ pháp tuyến của Δ.*
- *Một đường thẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng đó.*
- *Nếu đường thẳng Δ có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (a;b)$ thì véc-tơ $\vec{n} = (-b;a)$ là một véc-tơ pháp tuyến của Δ.*

2. Phương trình tổng quát của đường thẳng

Định nghĩa 4. Phương trình $ax + by + c = 0$ (a và b không đồng thời bằng 0) được gọi là *phương trình tổng quát* của đường thẳng.

Nhận xét.

- *Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0;y_0)$ và nhận $\vec{n} = (a;b)$ làm véc-tơ pháp tuyến có phương trình là*

$$a(x - x_0) + b(b - b_0) = 0 \Leftrightarrow ax + by + (-ax_0 - by_0) = 0.$$

- *Mỗi phương trình $ax + by + c = 0$ (a và b không đồng thời bằng 0) đều xác định một đường thẳng Δ trên mặt phẳng tọa độ nhận một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a; b)$.*

Ví dụ 3. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(-2; 4)$ và có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3; 2)$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4. Cho đường thẳng Δ có phương trình tổng quát là $x - y + 1 = 0$.

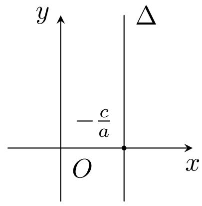
1. Chỉ ra tọa độ của một véc-tơ pháp tuyến và một véc-tơ chỉ phương của Δ.
2. Chỉ ra tọa độ của hai điểm thuộc Δ.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

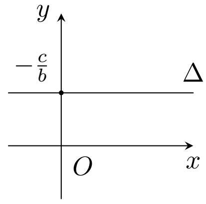
3. NHỮNG DẠNG ĐẶC BIỆT CỦA PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT

Nhận xét.

- *Nếu $b = 0$ và $a \neq 0$ thì phương trình đường thẳng Δ trở thành $ax + c = 0$. Khi đó đường thẳng Δ song song hoặc trùng với trục Oy và cắt trục Ox tại điểm $\left(-\dfrac{c}{a}; 0\right)$.*



- *Nếu $a = 0$ và $b \neq 0$ thì phương trình đường thẳng Δ trở thành $by + c = 0$. Khi đó đường thẳng Δ song song hoặc trùng với trục Ox và cắt trục Oy tại điểm $\left(0; -\dfrac{c}{b}\right)$.*



- *Đường thẳng Δ có phương trình tổng quát $ax + by + c = 0$ (a hoặc b khác 0) là đồ thị hàm số bậc nhất khi và chỉ khi $a \neq 0$ và $b \neq 0$.*

- *Phương trình trục hoành là $y = 0$, phương trình trục tung là $x = 0$.*

4. LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

1. Lập phương trình đường thẳng đi qua một điểm và biết véc-tơ pháp tuyến

Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0\left(x_0; y_0\right)$ và nhận $\vec{n}=(a; b)$ $\left(\vec{n} \neq \vec{0}\right)$ làm véc-tơ pháp tuyến là

$$a\left(x-x_0\right)+b\left(y-y_0\right)=0.$$

2. Lập phương trình đường thẳng đi qua một điểm và biết véc-tơ chỉ phương

Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0\left(x_0; y_0\right)$ và nhận $\vec{u}=(a; b)$ $\left(\vec{u} \neq \vec{0}\right)$ làm véc-tơ chỉ phương là

$$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases} (t \text{ là tham số}).$$

Nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$ thì ta còn có thể viết phương trình của đường thẳng Δ ở dạng

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}.$$

3. Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm

Đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A\left(x_0; y_0\right)$, $B\left(x_1; y_1\right)$ nên nhận véc-tơ $\overrightarrow{AB}=\left(x_1-x_0; y_1-y_0\right)$ làm véc-tơ chỉ phương. Do đó, phương trình tham số của đường thẳng Δ là

$$\begin{cases} x=x_0+\left(x_1-x_0\right)t \\ y=y_0+\left(y_1-y_0\right)t \end{cases} (t \text{ là tham số}).$$

Nếu $x_1-x_0 \neq 0$ và $y_1=y_0 \neq 0$ thì ta còn có thể viết phương trình của đường thẳng Δ ở dạng

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}.$$

Ví dụ 5. Lập phương trình đường thẳng Δ thoả mãn mỗi điều kiện sau

1. Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-2; -3)$ và có $\vec{n}=(2; 5)$ là vectơ pháp tuyến;
2. Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(3; -5)$ và có $\vec{u}=(2; -4)$ là vectơ chỉ phương;
3. Đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(-3; 4)$ và $B(1; -1)$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 6. Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(a;0)$ và $B(0;b)$ với $a^2+b^2>0$.

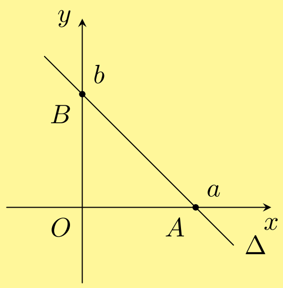
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

!

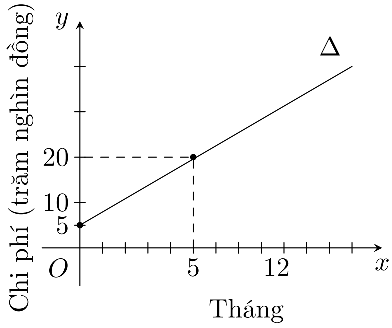
Trong trường hợp $ab \neq 0$, chia hai vế của phương trình (1) cho ab ta được

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \quad (2)$$

Phương trình dạng (2) được gọi là *phương trình đường thẳng theo đoạn chắn*, đường thẳng này cắt Ox và Oy lần lượt tại $A(a;0)$ và $B(0;b)$.



Ví dụ 7.
Đường thẳng Δ ở hình bên biểu thị tổng chi phí lắp đặt và tiền cước sử dụng dịch vụ Internet (đơn vị: trăm nghìn đồng) theo thời gian của một gia đình (đơn vị: tháng).



1. Viết phương trình của đường thẳng Δ.
2. Cho biết giao điểm của đường thẳng Δ với trục tung trong tình huống này có ý nghĩa gì.
3. Tính tổng chi phí lắp đặt và sử dụng Internet trong 12 tháng đầu tiên.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

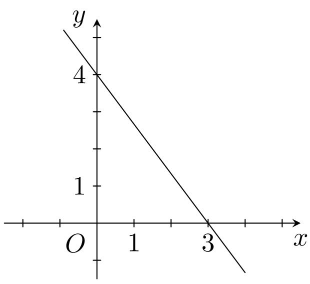
5. BÀI TẬP

Bài 1. Lập phương trình tổng quát của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(-1;2)$ và

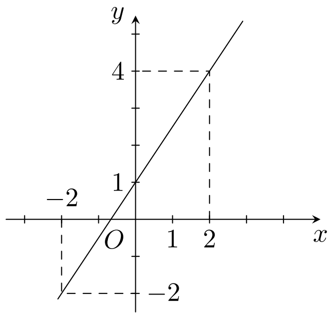
1. Có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;2)$.
2. Có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(-2;3)$.

....

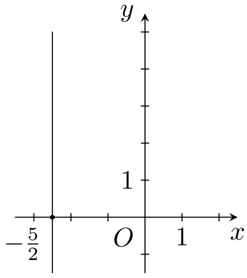
Bài 2. Lập phương trình mỗi đường thẳng trong các hình dưới đây



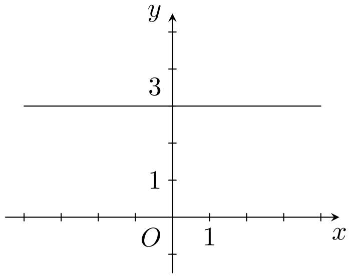
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

Bài 3. Cho đường thẳng d có phương trình tham số là $\begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 2 + 2t. \end{cases}$

1. Lập phương trình tổng quát của đường thẳng d.
2. Tìm toạ độ giao điểm của đường thẳng d lần lượt với các trục Ox, Oy.
3. Đường thẳng d có đi qua điểm $M(-7; 5)$ hay không?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 4. Cho đường thẳng d có phương trình tổng quát là $x-2y-5=0$.

1. Lập phương trình tham số của đường thẳng d.
2. Tìm toạ độ điểm M thuộc d sao cho $OM=5$ với O là gốc toạ độ.
3. Tìm toạ độ điểm N thuộc d sao cho khoảng cách từ N đến trục hoành Ox là 3 .

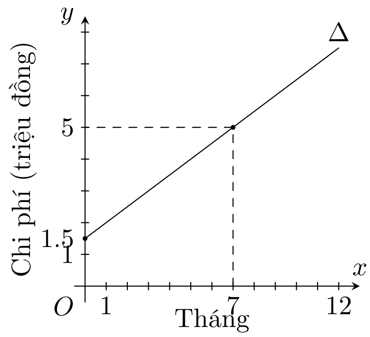
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 5. Cho tam giác ABC, biết $A(1;3), B(-1;-1), C(5;-3)$. Lập phương trình tổng quát của

1. Ba đường thẳng AB, BC, AC;
2. Đường trung trực cạnh AB;
3. Đường cao AH và đường trung tuyến AM.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 6.
Để tham gia một phòng tập thể dục, người tập phải trả một khoản phí tham gia ban đầu và phí sử dụng phòng tập. Đường thẳng Δ ở hình bên biểu thị tổng chi phí (đơn vị: triệu đồng) tham gia một phòng tập thể dục theo thời gian tập của một người (đơn vị: tháng).



1. Viết phương trình của đường thẳng Δ.
2. Cho biết giao điểm của đường thẳng Δ với trục tung trong tình huống này có ý nghĩa gì.
3. Tính tổng chi phí mà người đó phải trả khi tham gia phòng tập thể dục với thời gian 12 tháng.

BÀI 15. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI VÀ GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Trong mặt phẳng tọa độ, cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 lần lượt có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u}_1$, $\overrightarrow{u}_2$. Khi đó

1. Δ_1 cắt Δ_2 khi và chỉ khi $\overrightarrow{u}_1$, $\vec{u}_2$ không cùng phương.
2. Δ_1 song song với Δ_2 khi và chỉ khi $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ cùng phương và có một điểm thuộc một đường thẳng mà không thuộc đường thẳng còn lại.
3. Δ_1 trùng với Δ_2 khi và chỉ khi $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ cùng phương và có một điểm thuộc cả hai đường thẳng đó.

!

- Δ_1 vuông góc với Δ_2 khi và chỉ khi $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ vuông góc với nhau.
- Khi xét hai vị trí tương đối của hai đường thẳng, có thể dựa vào cặp véc-tơ pháp tuyến của hai đường thẳng đó.

Ví dụ 1. Xét vị trí tương đối của mỗi cặp đường thẳng sau

1. $\Delta_1\colon 2x - y + 1 = 0$ và $\Delta_2\colon -x + 2y + 2 = 0$.
2. $\Delta_3\colon x - y - 1 = 0$ và $\Delta_4\colon \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + 2t. \end{cases}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

$$\Delta_1\colon \begin{cases} x = 1 + t_1 \\ y = -2 + t_1 \end{cases} \text{ và } \Delta_2\colon \begin{cases} x = 2t_2 \\ y = -3 + 2t_2. \end{cases}$$

....
....
....
....
....
....

....
....
....
....

Ta có thể xét vị trí tương đối của hai đường thẳng dựa vào số giao điểm của chúng.

Nhận xét. *Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có phương trình lần lượt là*

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ và } a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases} \quad (I)$$

Khi đó

1. Δ_1 *cắt* Δ_2 *khi và chỉ khi hệ* (I) *có nghiệm duy nhất.*

2. Δ_1 *song song với* Δ_2 *khi và chỉ khi hệ* (I) *vô nghiệm.*

3. Δ_1 *trùng với* Δ_2 *khi và chỉ khi hệ* (I) *có vô số nghiệm.*

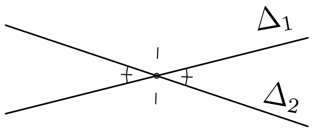
Ví dụ 3. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng $\Delta_1\colon x - 2y + 1 = 0$ và $\Delta_2\colon 2x - 4y + 2 = 0$.

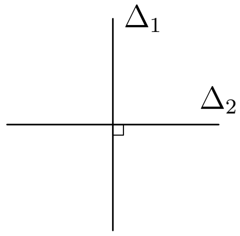
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4. Xét vị trí tương đối củađường thẳng $d\colon x + 2y - 2 = 0$ với mỗi đường thẳng sau
$\Delta_1\colon 3x - 2y + 6 = 0$;
$\Delta_2\colon x + 2y + 2 = 0$;
$\Delta_3\colon 2x + 4y - 4 = 0$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG





Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tạo thành bốn góc.

— Nếu hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 không vuông góc với nhau thì góc nhọn trong bốn góc tạo thành được gọi là góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.

— Nếu hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 vuông góc với nhau thì ta nói góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 bằng 90°.

Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 được kí hiệu là $\left(\widehat{\Delta_1, \Delta_2}\right)$ hoặc (Δ_1, Δ_2).

Quy ước: Khi Δ_1 song song hoặc trùng với Δ_2, ta nói góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 bằng 0°.

Nhận xét. *Góc giữa hai đường thẳng luôn bé hơn hoặc bằng* 90°, *tức là* $(\Delta_1, \Delta_2) \leq 90^\circ$.

Trong mặt phẳng tọa độ, cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có véc-tơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1 = (a_1; b_1)$, $\vec{u}_2 = (a_2; b_2)$. Ta có

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = |\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)| = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|},$$

hay

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Nhận xét.

- $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.
- *Cho hai đường thẳng* Δ_1 *và* Δ_2 *có véc-tơ pháp tuyến lần lượt là* $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$. *Ta có*

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

Ví dụ 5. Tính số đo góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 trong mỗi trường hợp sau

1. $\Delta_1\colon \begin{cases} x = -1 + \sqrt{3}t_1 \\ y = 1 + t_1 \end{cases}$ và $\Delta_2\colon \begin{cases} x = -1 + \sqrt{3}t_2 \\ y = 4 - t_2; \end{cases}$

2. $\Delta_1\colon 3x + y - 10 = 0$ và $\Delta_2\colon -2x + y - 7 = 0$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 6. Tính số đo góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 trong mỗi trường hợp sau

1. $\Delta_1\colon \begin{cases} x = -3 + 3\sqrt{3}t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$ và $\Delta_2\colon y - 4 = 0$;

2. $\Delta_1\colon 2x - y = 0$ và $\Delta_2\colon -x + 3y - 5 = 0$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

3. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $ax + by + c = 0$ $(a^2 + b^2 > 0)$ và điểm $M(x_0; y_0)$. Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ, kí hiệu là $\mathrm{d}(M, \Delta)$, được tính bởi công thức sau

$$\mathrm{d}(M, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

! Nếu $M \in \Delta$ thì $\mathrm{d}(M, \Delta) = 0$.

Ví dụ 7. Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau

1. $M(-2; 1)$ và $\Delta\colon 2x - 3y + 5 = 0$.

2. $M(1; -3)$ và $\Delta\colon \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 2 - 4t. \end{cases}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 8. 1. Tính khoảng cách từ điểm $O(0; 0)$ đến đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x}{-4} + \dfrac{y}{2} = 1$.

2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng song song $\Delta_1\colon x - y + 1 = 0$ và $\Delta_2\colon x - y - 1 = 0$.

....
....
....
....

....
....
....
....
....
....

4. BÀI TẬP

Bài 1. Xét vị trí tương đối của mỗi cặp đường thẳng sau

1. $d_1\colon 3x+2y-5=0$ và $d_2\colon x-4y+1=0$.
2. $d_3\colon x-2y+3=0$ và $d_4\colon -2x+4y+10=0$.
3. $d_5\colon 4x+2y-3=0$ và $d_6\colon \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2}+t \\ y=\dfrac{5}{2}-2t. \end{cases}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 2. Tính số đo góc giữa hai đường thẳng $d_1\colon 2x-y+5=0$ và $d_2\colon x-3y+3=0$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 3. Tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng trong mỗi trường hợp sau

1. $A(1;-2)$ và $\Delta_1\colon 3x-y+4=0$.
2. $B(-3;2)$ và $\Delta_2\colon \begin{cases} x=-2+t \\ y=1-2t. \end{cases}$

....
....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 4. Với giá trị nào của tham số m thì hai đường thẳng sau đây vuông góc?

$$\Delta_1 \colon mx - y + 1 = 0 \text{ và } \Delta_2 \colon 2x - y + 3 = 0.$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 5. Cho ba điểm $A(2;-1)$, $B(1;2)$ và $C(4;-2)$. Tính số đo góc BAC và góc giữa hai đường thẳng AB, AC.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 6. Cho ba điểm $A(2;4)$, $B(-1;2)$ và $C(3;-1)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua B đồng thời cách đều A và C.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 7. Có hai con tàu A và B cùng xuất phát từ hai bến, chuyển động đều theo đường thẳng ngoài biển. Trên màn hình ra-đa của trạm điều khiển (được coi như mặt phẳng toạ độ Oxy với đơn vị trên các trục tính theo ki-lô-mét), tại thời điểm t (giờ), vị trí của tàu A có toạ độ được xác định bởi công thức $\begin{cases} x = 3 - 33t \\ y = -4 + 25t \end{cases}$, vị trí của tàu B có toạ độ là $(4 - 30t; 3 - 40t)$.

1. Tính côsin góc giữa hai đường đi của hai tàu A và B.
2. Sau bao lâu kể từ thời điểm xuất phát hai tàu gần nhau nhất?
3. Nếu tàu A đứng yên ở vị trí ban đầu, tàu B chạy thì khoảng cách ngắn nhất giữa hai tàu bằng bao nhiêu?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

BÀI 16. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

1. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

1. Phương trình đường tròn

Định nghĩa 1. Phương trình đường tròn tâm $I(a;b)$ bán kính R là

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Phương trình đường tròn ở dạng trên thường được gọi là *phương trình chính tắc của đường tròn.*
Ví dụ 1. Lập phương trình đường tròn trong mỗi trường hợp sau

1. Đường tròn tâm O, bán kính R.
2. Đường tròn tâm $I(-1;3)$, bán kính 7.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2. Tìm tâm và bán kính của đường tròn có phương trình $(x+2)^2+(y-5)^2=9$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Nhận xét. *Ta có thể viết phương trình $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ của đường tròn tâm $I(a;b)$ bán kính R về phương trình có dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$. Dạng đó thường được gọi là phương trình tổng quát của đường tròn.*

Ví dụ 3.

1. Phương trình $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ có phải là phương trình đường tròn không? Nếu phải, xác định tọa độ tâm và bán kính của đường tròn đó.
2. Xác định điều kiện của a, b, c để phương trình $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ là phương trình đường tròn. Khi đó xác định tọa độ tâm và bán kính theo a, b, c.

2. Phương trình đường tròn đi qua ba điểm không thẳng hàng

Do có duy nhất một đường tròn đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước nên ta có thể lập được phương trình đường tròn đó khi biết tọa độ của ba điểm nói trên.

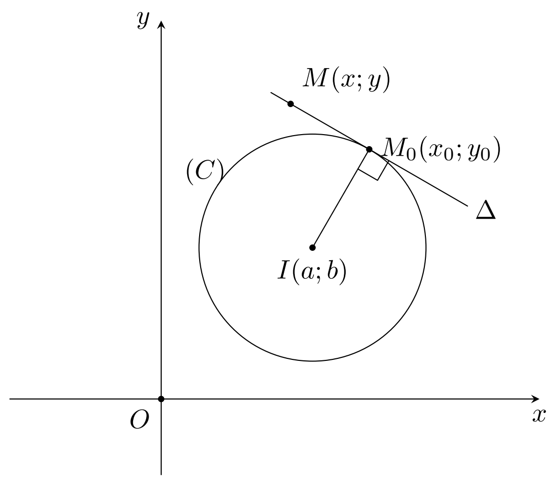
Ví dụ 4. Lập phương trình đường tròn đi qua ba điểm $A(-1;1)$, $B(0;-2)$, $C(0;2)$.

2. PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Định nghĩa 2.
Cho đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$ và điểm $M_0(x_0;y_0)$ nằm trên đường tròn đó. Gọi Δ là tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $M_0(x_0;y_0)$. Khi đó, ta có

- Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0;y_0)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{IM_0} = (x_0 - a; y_0 - b)$.
- Phương trình tiếp tuyến Δ là

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0.$$



Ví dụ 5. Lập phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(2;1)$ thuộc đường tròn $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Ví dụ 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, một vật chuyển động tròn đều ngược chiều kim đồng hồ trên đường tròn tâm $I(3;2)$, bán kính 5 dưới tác dụng của lực căng dây. Khi vật chuyển động đến điểm $M(6;6)$ thì dây căng bị đứt.

1. Viết phương trình quỹ đạo chuyển động của vật sau khi dây bị đứt, biết rằng vật chỉ chịu tác động của duy nhất lực căng dây trong bài toán này.
2. Một vật khác chuyển động thẳng đều trên đường thẳng có phương trình $\Delta\colon 3x + 4y + 23 = 0$. Chứng minh hai vật này không gặp nhau tại bất kì điểm nào.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

3. BÀI TẬP

Bài 1. Phương trình nào sau đây là phương trình đường tròn

1. $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$.
2. $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 20 = 0$.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Bài 2. Tìm tâm và bán kính của đường tròn trong mỗi trường hợp sau

1. Đường tròn có phương trình $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 9$.
2. Đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$.

. . . .
. . . .

. . . .

Bài 3. Lập phương trình đường tròn trong mỗi trường hợp sau

1. Đường tròn có tâm $I(-3;4)$ bán kính $R=9$.
2. Đường tròn có tâm $I(5;-2)$ và đi qua điểm $M(4;-1)$.
3. Đường tròn có tâm $I(1;-1)$ và có một tiếp tuyến là $\Delta\colon 5x-12y-1=0$.
4. Đường tròn có đường kính AB với $A(3;-4)$, $B(-1;6)$.
5. Đường tròn đi qua ba điểm $A(1;1)$, $B(3;1)$, $C(0;4)$.

. . . .

Bài 4. Lập phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng 3 thuộc đường tròn $(x+2)^2+(y+7)^2=169$.

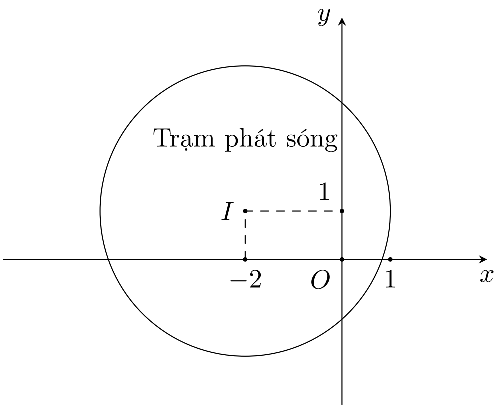
. . . .

Bài 5. Tìm m sao cho đường thẳng $3x+4y+m=0$ tiếp xúc với đường tròn $(x+1)^2+(y-2)^2=4$.

. . . .

....
....
....
....
....
....

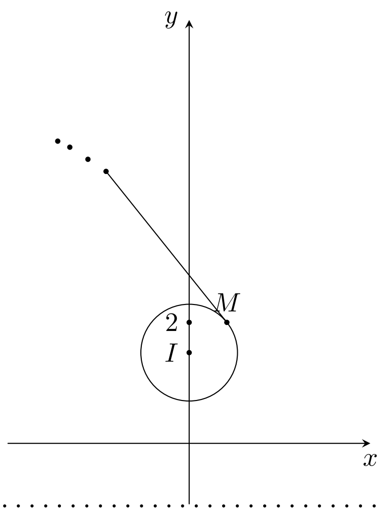
Bài 6.
Hình bên mô phỏng một trạm thu phát sóng điện thoại di động đặt ở vị trí I có tọa độ $I(-2;1)$ trong mặt phẳng tọa độ (đơn vị trên hai trục là ki-lô-mét).



1. Lập phương trình đường tròn mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng, biết rằng trạm thu phát sóng đó đươc thiết kế với bán kính phủ sóng 3 km.
2. Nếu người sử dụng điện thoại ở vị trí có tọa độ $(-1;3)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm này không?
3. Tính theo đường chim bay, xác định khoảng cách ngắn nhất để một người ở vị trí có tọa độ $(-3;4)$ di chuyển được tới vùng phủ sóng theo đơn vị ki-lô-mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 7.
Ném đĩa là một môn thể thao thi đấu trong Thế vận hội Olympic mùa hè. Khi thực hiện cú ném, vận động viên thường quay lưng lại với hướng ném, sau đó xoay ngược chiều kim đồng hồ một vòng rưỡi của đường tròn để lấy đà rồi thả tay ra khỏi đĩa. Giả sử đĩa chuyển động trên một đường tròn tâm $I\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$ bán kính 0,8 trong mặt phẳng tọa độ Oxy (đơn vị trên hai trục là mét). Đến điểm $M\left(\dfrac{\sqrt{39}}{10};2\right)$, đĩa được ném đi (hình bên). Trong những giây đầu tiên ngay sau khi được ném đi, quỹ đạo chuyển động của chiếc đĩa có phương trình như thế nào?



....
....

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

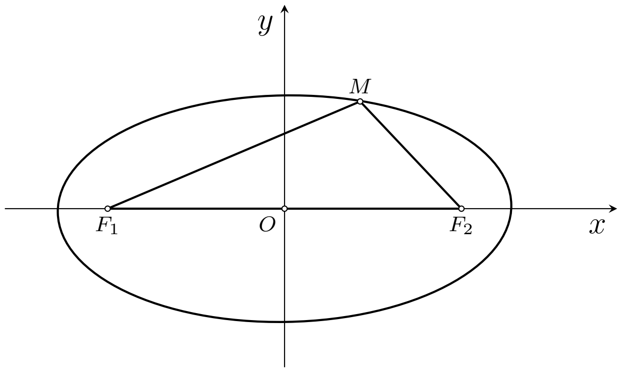
BÀI 17. BA ĐƯỜNG CONIC

1. ĐƯỜNG ELIP

Định nghĩa 1. Cho hai điểm F_1, F_2 cố định có khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ ($c > 0$).
Đường elip (còn gọi là elip) là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$ trong đó a là số cho trước lớn hơn c.
Hai điểm F_1 và F_2 được gọi là hai tiêu điểm của elip.

Định lí 1. Trong mặt phẳng, xét đường elip (E) là tập hợp các điểm M sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$, ở đó $F_1F_2 = 2c$ với $a > c > 0$. Ta chọn hệ tọa độ Oxy có gốc là trung điểm của F_1F_2, trục Oy là đường trung trực của F_1F_2 và F_2 nằm trên tia Ox. Khi đó, phương trình đường elip có thể viết dưới dạng

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ trong đó } a > b > 0.$$



Đây gọi là *phương trình chính tắc của elip*.

! Đối với elip (E) có phương trình chính tắc như đã nêu ở trên, ta có

— $c^2 = a^2 - b^2$, ở đó $2c = F_1F_2$.

— Nếu điểm $M(x; y)$ thuộc elip (E) thì $-a \leq x \leq a$.

Ví dụ 1. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình chính tắc của elip?

① $\dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1$. ② $\dfrac{x^2}{4^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = -1$. ③ $\dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$. ④ $\dfrac{x^2}{4^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2. Lập phương trình chính tắc của elip (E) có một tiêu điểm là $F_2(5; 0)$ và đi qua điểm $M(0; 3)$.

....
....
....
....
....
....
....

....
....
....

Ví dụ 3. Lập phương trình chính tắc của elip (E) đi qua hai điểm $M(0;3)$ và $N\left(3;-\dfrac{12}{5}\right)$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. ĐƯỜNG HYPEBOL

Định nghĩa 2. Cho hai điểm F_1, F_2 cố định có khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ $(c > 0)$.
Đường hypebol (còn gọi là hypebol) là tập hợp các điểm M sao cho $|MF_1 - MF_2| = 2a$, trong đó a là số dương cho trước nhỏ hơn c.
Hai điểm F_1 và F_2 được gọi là hai tiêu điểm của hypebol.

Định lí 2. Phương trình hypebol có thể viết dưới dạng

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

trong đó $a > 0$, $b > 0$.
Đây gọi là *phương trình chính tắc của hypebol.*

! Đối với hypebol (H) có phương trình chính tắc như đã nêu ở trên, ta có:

— $c^2 = a^2 + b^2$, ở đó $2c = F_1F_2$ và điều kiện $a > b$ là không bắt buộc.

— Nếu điểm $M(x;y)$ thuộc hypebol (H) thì $x \le -a$ hoặc $x \ge a$.

Ví dụ 4. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình chính tắc của đường hypebol?

① $\dfrac{x^2}{5^2} - \dfrac{y^2}{4^2} = -1$. ② $\dfrac{x^2}{4^2} - \dfrac{y^2}{5^2} = 1$. ③ $\dfrac{x^2}{5^2} - \dfrac{y^2}{5^2} = 1$. ④ $\dfrac{x^2}{5^2} - \dfrac{y^2}{4^2} = 1$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 5. Viết phương trình chính tắc của đường hypebol (H) có một tiêu điểm là $F_2(6;0)$ và đi qua điểm $A_2(4;0)$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 6. Viết phương trình hypebol sau đây dưới dạng chính tắc $4x^2 - 9y^2 = 1$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3. ĐƯỜNG PARABOL

1. Định nghĩa đường parabol

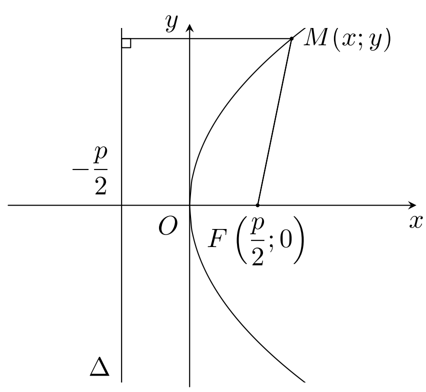
Định nghĩa 3. Cho một điểm F cố định và một đường thẳng Δ cố định không đi qua F.
Đường parabol (còn gọi là parabol) là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng cách đều F và Δ.
Điểm F được gọi là tiêu điểm của parabol. Đường thẳng Δ được gọi là đường chuẩn của parabol.

2. Phương trình chính tắc của parabol

Định lí 3.
Khi chọn hệ trục tọa độ như hình bên, phương trình đường parabol có thể viết dưới dạng

$$y^2 = 2px \ (p > 0).$$

Đây gọi là *phương trình chính tắc của parabol.*



> Đối với parabol (P) có phương trình chính tắc $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ ta có
>
> — Tiêu điểm là $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ và phương trình đường chuẩn là $x + \frac{p}{2} = 0$.
>
> — Nếu điểm $M(x; y)$ thuộc parabol (P) thì $x \geq 0$.

Ví dụ 7. Trong các phương trình sau. phương trình nào là phương trình chính tắc của đường parabol?

① $y^2 = -6x$; ② $y^2 = 6x$; ③ $x^2 = -6y$; ④ $x^2 = 6y$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 8. Viết phương trình chính tắc của parabol (P) biết

① (P) có tiêu điểm là $F(5; 0)$. ② (P) đi qua điểm $M(2; 1)$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 9. Viết phương trình các parabol sau đây dưới dạng chính tắc

① $x = \frac{y^2}{4}$. ② $x - y^2 = 0$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

4. MỘT SỐ ỨNG DỤNG THỰC TIỄN CỦA BA ĐƯỜNG CONIC

Ba đường conic có nhiều ứng dụng trong thực tiễn. Ta nêu ra một vài ứng dụng của ba đường conic.

1. Năm 1911, nhà vật lí học người anh là Ernest Rutherford (1871-1937) đã đề xuất mô hình hành tinh nguyên tử, trong đó hạt nhân nhỏ bé nằm tại trung tâm của nguyên tử, các eclectron bay quanh hạt nhân trên các quỹ đạo hình elip như các hành tinh bay quanh Mặt Trời.

2. Trong vật lí, hiện tượng hai sóng gặp nhau tạo nên các gợn sóng ổn định gọi là hiện tượng giao thoa của hai sóng. Các gợn sóng có hình là các đường hypebol gọi là các vân giao thoa.

3. Với gương parabol, tia sáng phát ra từ tiêu điểm (tia tới) chiếu đến một điểm của parabol sẽ bị hắt lại (tia phản xạ) theo một tia song song (hoặc trùng) với trục của parabol.
   Tính chất trên có nhiều ứng dụng, chẳng hạn:
   - Đèn pha: Bề mặt của đèn pha là một mặt tròn xoay sinh bởi một cung parabol quay quanh trục của nó, bóng đèn được đặt ở vị trí tiêu điểm của parabol đó. Các tia sáng phát ra từ bóng đèn khi chiếu đến bề mặt của đèn pha sẽ bị hắt lại theo các tia sáng song song, cho phép chúng ta quan sát được các vật ở xa.
   - Chảo vệ tinh cũng có dạng như đèn pha. Điểm thu và phát tín hiệu của máy được đặt ở vị trí tiêu điểm của parabol.

5. BÀI TẬP

Bài 1. Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc tắc của elip?

① $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{64}=1$. ② $\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{64}=1$. ③ $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{25}=1$. ④ $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{64}=1$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 2. Cho elip (E) có phương trình chính tắc $\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{25}=1$. Tìm tọa độ các giao điểm của (E) đối với trục Ox, Oy và tọa độ các tiêu điểm của (E).

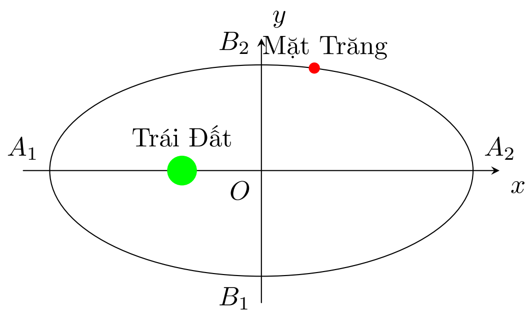
....
....
....
....
....
....
....
....

....
....

Bài 3. Viết phương trình chính tắc của elip (E), biết tọa độ hai giao điểm của (E) với Ox và Oy lần lượt là $A_1(-5;0)$ và $B_2\left(0;\sqrt{10}\right)$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 4.
Ta biết rằng Mặt Trăng chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là một elip mà Trái Đất là một tiêu điểm.
Elip đó có $A_1A_2 = 768800$ km và $B_1B_2 = 767619$ km (*Nguồn: Ron Larson (2014), Precalculus Real Mathematics, Real People, Cengage*) (Hình minh họa). Viết phương trình chính tắc của elip đó.



....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 5. Những phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của hypebol?

① $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{9}=1$; ② $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{9}=1$; ③ $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{64}=1$; ④ $\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{9}=1$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 6. Tìm tọa độ các đỉnh và tiêu điểm của đường hypebol trong mỗi trường hợp sau:

① $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$; ② $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{25} = 1$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 7. Viết phương trình chính tắc của hypebol (H), biết $N\left(\sqrt{10}; 2\right)$ nằm trên (H) và hoành độ một giao điểm của (H) với trục Ox bằng 3.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 8. Những phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của parabol?

① $y^2 = -2x$. ② $y^2 = 2x$. ③ $x^2 = -2y$. ④ $y^2 = \sqrt{5}x$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 9. Tìm tọa độ tiêu điểm và viết phương trình đường chuẩn của đường parabol trong mỗi trường hợp sau

① $y^2 = \dfrac{5x}{2}$. ② $y^2 = 2\sqrt{2}x$.

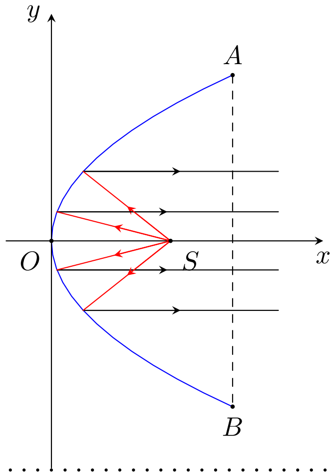
....

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Bài 10. Viết phương trình chính tắc của đường parabol, biết tiêu điểm là $F(6;0)$.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Bài 11.
Một chiếc đèn có mặt cắt ngang là hình parabol như hình bên. Hình parabol có chiều rộng giữa hai mép vành là $AB = 40$cm và chiều sâu $h = 30$cm (h bằng khoảng cách từ O đến AB). Bóng đèn nằm ở tiêu điểm S. Viết phương trình chính tắc của parabol đó.



. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

BÀI 18. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG

Bài 1. Cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ (t là tham số) với a, b không đồng thời bằng 0.

1. Chỉ ra một véc-tơ chỉ phương của d.
2. Chỉ ra một véc-tơ pháp tuyến của d.
3. Chỉ ra một điểm có tọa độ khác $(x_0; y_0)$ và thuộc đường thẳng d.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 2. Cho đường thẳng $d\colon ax + by + c = 0$ với a, b không đồng thời bằng 0.

1. Chỉ ra một véc-tơ pháp tuyến của d.
2. Chỉ ra một véc-tơ chỉ phương của d.
3. Cho a, b đều khác 0. Chỉ ra một điểm thuộc đường thẳng d mà không nằm trên hai cả hai trục tọa độ.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác MNP có $M(2; 1)$, $N(-1; 3)$, $P(4; 2)$.

1. Tìm tọa độ của các véc-tơ $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$.
2. Tích tích vô hướng $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$.
3. Tính độ dài các đoạn thẳng MN, MP.
4. Tính $\cos \widehat{NMP}$.

5. Tìm tọa độ trung điểm I của NP và trọng tâm G của tam giác MNP.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 4. Lập phương trình tổng quát và phương trình tham số của đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau

1. d đi qua điểm $A(-3;2)$ và có một véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n} = (2;-3)$.
2. d đi qua điểm $B(-2;-5)$ và có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u} = (-7;6)$.
3. d đi qua hai điểm $C(4;3)$ và $D(5;2)$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 5. Lập phương trình đường tròn (C) trong mỗi trường hợp sau

1. (C) có tâm $I(-4;2)$ và bán kính $R = 3$.
2. (C) có tâm $P(3;-2)$ và đi qua điểm $E(1;4)$.
3. (C) có tâm $Q(5;-1)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta\colon 3x + 4y - 1 = 0$.
4. (C) đi qua ba điểm $A(-3;2)$, $B(-2;-5)$ và $D(5;2)$.

....

....

....

....

....

....

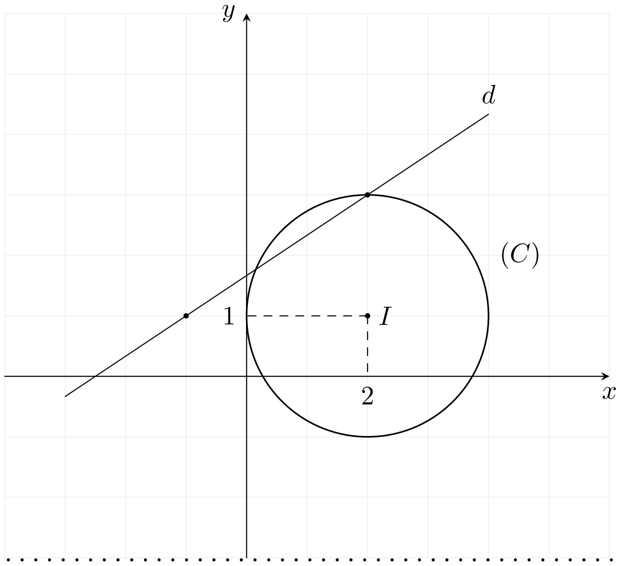
....

....

....

....

Bài 6.
Quan sát hình bên và thực hiện các hoạt động sau



1. Lập phương trình đường thẳng d;
2. Lập phương trình đường tròn (C);
3. Lập phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $M\left(2+\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right)$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 7. Cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon \sqrt{3}x+y-4=0$ và $\Delta_2\colon x+\sqrt{3}y-2\sqrt{3}=0$.

1. Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng đã cho;
2. Tính góc α giữa hai đường thẳng đã cho.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 8. Cho biết mỗi đường conic có phương trình dưới đây là đường conic dạng nào (elip, hypebol, parabol) và tìm tọa độ tiêu điểm của đường conic đó.

① $y^2=18x$. ② $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{25}=1$. ③ $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

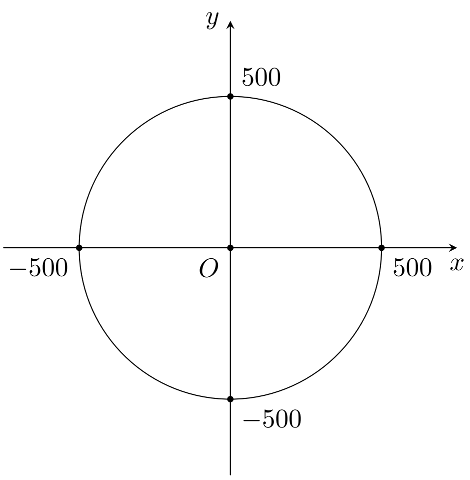
Bài 9. Cho tam giác AF_1F_2, trong đó $A(0;4)$, $F_1(-3;0)$, $F_2(3;0)$.

1. Lập phương trình tổng quát của các đường thẳng AF_1 và AF_2.
2. Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp của tam giác AF_1F_2.
3. Lập phương trình chính tắc của elip (E) có hai tiêu điểm là F_1, F_2 sao cho (E) đi qua A.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 10.
Trên màn hình ra-đa của đài kiểm soát không lưu sân bay A có hệ trục tọa độ Oxy, trong đó đơn vị trên mỗi trục tính theo ki-lô-mét và đài kiểm soát được coi là gốc tọa độ $O(0;0)$. Nếu máy bay trong phạm vi cách đài kiểm soát 500 km thì sẽ hiển thị trên màn hình ra-đa. Một máy bay khởi hành từ sân bay B lúc 14 giờ. Sau thời gian t (giờ), vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M có tọa độ như sau

$$\begin{cases} x = \dfrac{1600}{3} - \dfrac{1400}{3}t \\ y = \dfrac{1900}{3} - \dfrac{1400}{3}t. \end{cases}$$



1. Tìm vị trí của máy bay lúc 14 giờ 30 phút. Thời điểm này máy bay đã xuất hiện trên màn hình ra-đa chưa?
2. Lúc mấy giờ máy bay gần đài kiểm soát không lưu nhất? Tính khoảng cách giữa máy bay và đài kiểm soát không lưu lúc đó.
3. Máy bay ra khỏi màn hình ra-đa vào thời gian nào?