

Họ và tên học sinh : Số báo danh :

Mã đề 024

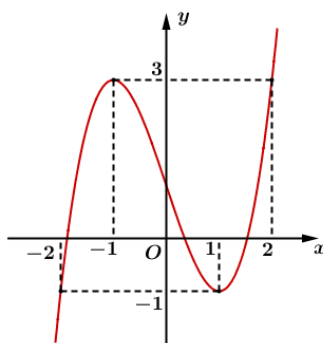
Câu 1. Tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ là

- A. $x=1; y=2$. B. $x=-1; y=1$. C. $x=1; y=1$. D. $x=2; y=1$.

Câu 2. Cho khối nón có thể tích bằng 15π chiều cao $h=5$. Đường kính đáy của khối nón đã cho bằng

- A. 9. B. 4. C. 6. D. 3.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau



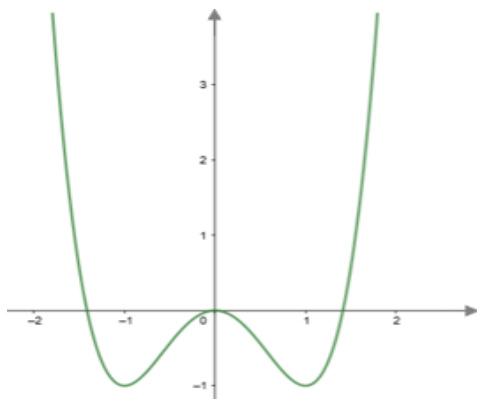
Hàm số nghịch biến trên khoảng

- A. $(-1; 2)$. B. $(-1; 0)$. C. $(0; 2)$. D. $(-2; 0)$.

Câu 4. Cho khối lăng trụ có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao bằng $2a$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

- A. $2a^3$. B. $\frac{2}{3}a^3$. C. $\frac{4}{3}a^3$. D. $4a^3$.

Câu 5. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



- A. $y = x^3 - 3x^2$. B. $y = -x^3 + 3x^2$. C. $y = x^4 - 2x^2$. D. $y = -x^4 + 2x^2$.

Câu 6. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x} - \frac{1}{x^2}$ là

- A. $\frac{e^{2x}}{2} - 2\ln|x| + C$. B. $2e^{2x} + 2\ln x + C$. C. $\frac{e^{2x}}{2} + \frac{1}{x} + C$. D. $\frac{e^{2x}}{2} - \ln x^2 + C$.

Câu 7. Quay một hình vuông có chu vi là $8dm$ quanh một cạnh của nó ta được một khối trụ có thể tích bằng

- A. $2\pi(dm^3)$. B. $8\pi(dm^3)$. C. $8\pi(dm^2)$. D. $2\pi(dm^2)$.

Câu 8. Tập xác định của hàm số $y = (2 - \sqrt{3})^x$ là

- A. $(0; +\infty)$. B. $(-\infty; +\infty)$. C. $[0; +\infty)$. D. $(-\infty; 0)$.

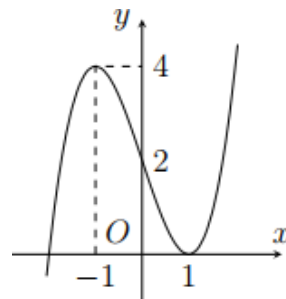
Câu 9. Một bạn có 4 áo xanh, 3 áo trắng và 3 quần màu đen. Hỏi bạn đó có bao nhiêu cách chọn một bộ quần áo để mặc?

- A. 21. B. C_{10}^2 . C. 36. D. 10.

Câu 10. Cho khối chóp có thể tích bằng 10 diện tích đáy $B=5$. Chiều cao của khối chóp đã cho bằng

- A. 3. B. 6. C. 2. D. 4.

Câu 11. Đồ thị hàm số nào sau đây có dạng như đường cong bên dưới?



- A. $y = x^3 - 3x^2 - 3x - 2$. B. $y = x^3 - 3x^2 - 3x + 2$.
C. $y = x^3 - 3x + 2$. D. $y = x^3 - 3x - 2$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	0	-1	$+\infty$	

Hàm số có giá trị cực tiểu bằng

- A. -1. B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	-		+ 0 -	
y	$+\infty$	-1	$-\infty$ 2 $-\infty$	

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.
 B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0); (1; +\infty)$.
 D. Hàm số đồng biến trên $(0; 2)$.

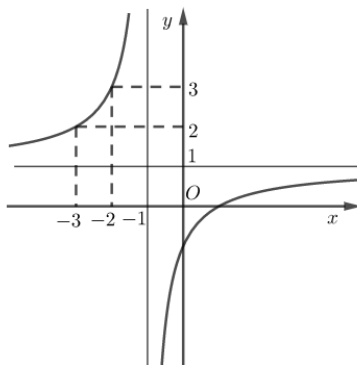
Câu 14. Diện tích của một mặt cầu bằng 16π . Thể tích của khối cầu bằng

- A. $\frac{128\pi}{3}$.
 B. $\frac{256\pi}{3}$.
 C. $\frac{32\pi}{3}$.
 D. $\frac{64\pi}{3}$.

Câu 15. Nghiệm của phương trình $2^{x-2} = 4^{2021}$ là

- A. $x = 2018$.
 B. $x = 4038$.
 C. $x = 4044$.
 D. $x = 2023$.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm phân thức bậc nhất chia bậc nhất và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $f(x) = 2021$ là



- A. 2.
 B. 1.
 C. 0.
 D. 3.

Câu 17. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và công bội $q = 3$. Tìm số hạng thứ 4 của cấp số nhân.

- A. 24.
 B. 54.
 C. 162.
 D. 48.

Câu 18. Cho hàm số có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
y'	+	0	-	- 0 +	
y	$-\infty$	-3	0	$+\infty$ 1 3	

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của hàm số là

- A. 3. B. 1. C. 0. D. 2.

Câu 19. Cho khối lập phương có cạnh bằng 4. Thể tích của khối lập phương đã cho bằng

- A. 4. B. 12. C. 16. D. 64.

Câu 20. Tập nghiệm dương của phương trình $\log_2(x^2 - x - 1) = 0$ là

- A. $\{1; -2\}$. B. $\{2\}$. C. $\{-1; 2\}$. D. $\{1\}$.

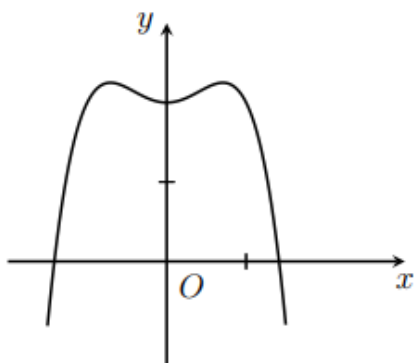
Câu 21. Diện tích xung quanh của hình trụ có độ dài đường sinh l và bán kính đáy r bằng

- A. $2\pi rl$. B. πrl . C. $\frac{1}{3}\pi rl$. D. $4\pi rl$.

Câu 22. Cho $0 < a \neq 1$. Giá trị của biểu thức $M = 3\log_a(a^2\sqrt[3]{a})$ bằng?

- A. 5. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{5}{2}$. D. 7.

Câu 23. Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị hàm số như hình vẽ dưới đây. Mệnh đề nào sau đây đúng?



- A. $a < 0, b > 0, c > 0$. B. $a < 0, b > 0, c < 0$. C. $a < 0, b < 0, c > 0$. D. $a > 0, b < 0, c > 0$.

Câu 24. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 24x - 10$ trên đoạn $[-10; 4]$ là

- A. $-10 + 32\sqrt{2}$. B. $-15 + 29\sqrt{3}$. C. 36. D. 35.

Câu 25. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Phát biểu nào sau đây là sai với mọi $x \in \mathbb{R}$?

- A. $\int f(2x+1)dx = 2F(2x+1) + C$. B. $\int f(2x+1)dx = \frac{1}{2}F(2x+1) + C$.
C. $(F(x))' = f(x)$. D. $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-2)^3(x^2-4)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 27. Thể tích khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a và đường

chéo $A'C = 2a$ bằng

- A. $2a^3$. B. $\sqrt{2}a^3$. C. $\sqrt{3}a^3$. D. a^3 .

Câu 28. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x\sqrt{x^2-4}}{x^2-2x-3}$ là

- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.

Câu 29. Đồ thị hàm số $y = -\frac{x^4}{2} + x^2 + 1$ cắt trục hoành tại mấy điểm?

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 0.

Câu 30. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ trên khoảng $(-\infty; 1)$ là

- A. $2x - \frac{3}{(x-1)^2} + C$. B. $2x + 3\ln(x-1) + C$. C. $2x + \frac{3}{(x-1)^2} + C$. D. $2x + 3\ln(1-x) + C$

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết rằng $AB = a$; $AD = a\sqrt{3}$ và $SC = \sqrt{7}a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

- A. $3a^3$. B. a^3 . C. $2a^3$. D. $4a^3$.

Câu 32. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Đặt $((C'AB); (BCC'B')) = \alpha$ giá trị $\tan \alpha$ bằng

- A. $\sqrt{6}$. B. $\sqrt{2}$. C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 33. Cho $I = \int \frac{x-1}{(x^2-2x+3)^{2021}} dx$, bằng cách đặt $t = x^2 - 2x + 3$ ta đưa nguyên hàm đã cho về dạng

- A. $I = \int \frac{1}{(t+3)^{2021}} dt$. B. $I = \int \frac{1}{t^{2021}} dt$. C. $I = \int \frac{1}{2t^{2021}} dt$. D. $I = \int \frac{1}{2(t+3)^{2021}} dt$.

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA = a\sqrt{3}$, đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAB) là

- A. 30° . B. 90° . C. 60° . D. 45° .

Câu 35. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3^2 x - 2\log_{\sqrt{3}} x + 3 > 0$ là

- A. $(3; 27)$. B. $(-\infty; 3) \cup (27; +\infty)$. C. $(0; 3) \cup (27; +\infty)$. D. $[3; 27]$.

Câu 36. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x + \sin x$ là

- A. $2x^2 - \cos x + C$. B. $x^2 - \cos x + C$. C. $2x^2 + \cos x + C$. D. $x^2 + \cos x + C$.

Câu 37. Xét các số thực a, b thỏa mãn $\log_2(2^a \cdot 8^b) = \log_{\sqrt{2}} 2$. Mệnh đề nào là đúng?

- A. $4ab = 1$. B. $2a + 8b = 2$. C. $2a + 6b = 1$. D. $a + 3b = 2$.

Câu 38. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{m \ln x + 4}{\ln x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(0; e)$ là $(a; b]$. Khi đó $a + b$ bằng

- A. -3 . B. -1 . C. -2 . D. 0 .

Câu 39. Biết rằng phương trình $\sqrt{4x^3 - 3x^2} \cdot 2^{\frac{x^3 - 6x - 4}{x^2}} - 24x = 32$ có nghiệm là

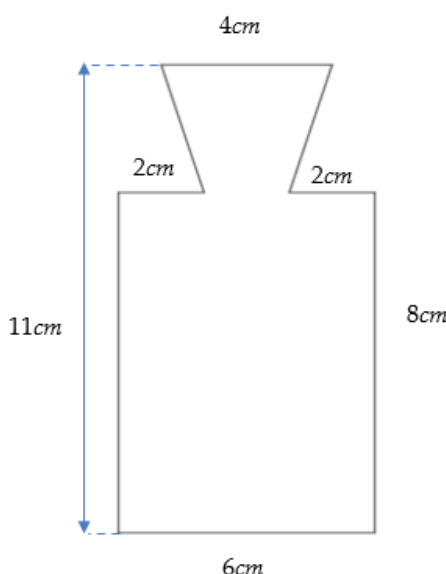
$x = a - \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c}$, $(a, b, c \in \mathbb{Q})$. Khi đó giá trị của $2abc$ gần với giá trị nào nhất trong các giá trị sau

- A. 28 . B. 24 . C. 55 . D. 50 .

Câu 40. Một người lần đầu gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng với kì hạn 3 tháng, lãi suất 2% một quý theo hình thức lãi kép. Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 100 triệu đồng với kỳ hạn và lãi suất như trước đó. Tổng số tiền người đó nhận được 1 năm sau khi gửi tiền gần nhất với kết quả nào sau đây biết rằng trong suốt thời gian gửi tiền lãi suất ngân hàng không thay đổi và người đó không rút tiền ra.

- A. 210 triệu đồng. B. 212 triệu đồng.
C. 220 triệu đồng. D. 216 triệu đồng.

Câu 41. Một thiết bị kỹ thuật là một khối tròn xoay. Mặt cắt của khối tròn xoay đó qua trục của nó được mô tả trong hình bên. Thể tích của thiết bị đó bằng



- A. $80\pi \text{ cm}^3$. B. $312\pi \text{ cm}^3$. C. $316\pi \text{ cm}^3$. D. $79\pi \text{ cm}^3$.

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I cạnh $AB = 3a$, $BC = 4a$. Hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm ID . Biết rằng SB tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 45° . Tính diện tích khối cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{25\pi}{2}a^2$.

B. $\frac{125\pi}{4}a^2$.

C. $\frac{125\pi}{2}a^2$.

D. $4\pi a^2$.

Câu 43. Trong cuộc gặp mặt dẫn dò trước khi lên đường tham gia kì thi HSG có 10 bạn trong đội tuyển gồm 2 bạn đến từ lớp 12A1, 3 bạn từ 12A2, 5 bạn còn lại đến từ các lớp khác nhau. Thầy giáo xếp ngẫu nhiên các bạn kể trên ngồi vào một bàn dài mà mỗi bên có 5 ghế xếp đối diện nhau. Tính xác suất sao cho không có học sinh nào cùng lớp ngồi đối diện nhau.

A. $\frac{73}{126}$.

B. $\frac{53}{126}$.

C. $\frac{5}{9}$.

D. $\frac{38}{63}$.

Câu 44. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao là $9\sqrt{\frac{3}{35}}a$. Biết rằng tam giác $A'BC$ là tam giác nhọn và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Hai mặt phẳng $(ABB'A')$; $(ACC'A')$ cùng tạo với đáy một góc bằng nhau. Góc $BAC = 60^\circ$, $AC = 3AB = 3a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và $A'C$ bằng

A. $\frac{2a}{3}$.

B. $\frac{a}{3}$.

C. a .

D. $\frac{3a}{2}$.

Câu 45. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-2	-1	-2	$+\infty$

Có bao giá trị của tham số m để phương trình $3f(\sin x) + m = 0$ có nghiệm trên đoạn $[-\pi; 2\pi]$

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Câu 46. Cho các số thực $a > b > 0$ thỏa mãn $3\log_{50} a = \log_2 b = \log_5 (7a - 6b)$. Giá trị $\frac{a}{b}$ bằng

A. 22.

B. $12 + 6\sqrt{3}$.

C. $24 + 6\sqrt{15}$.

D. 36.

Câu 47. Cho hình chóp $SABC$ có thể tích là V , gọi M, H, I theo thứ tự là trung điểm BC, AM, SH một mặt phẳng qua I cắt các cạnh SA, SB, SC tại các điểm A', B', C' . Thể tích của khối chóp $SA'B'C'$ có giá trị lớn nhất là

A. $\frac{V}{5}$.

B. $\frac{V}{3}$.

C. $\frac{V}{2}$.

D. $\frac{27V}{256}$.

Câu 48. Cho hàm số $F(x) = (x-1)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{e^x}$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $\frac{f'(x)}{e^{2x}}$ là

- A. $\left(x + \frac{x^2}{2}\right)e^x + C$ B. $x + \frac{x^2}{2} + C$ C. $x + x^2 + C$ D. $(x + x^2)e^x + C$

Câu 49. Cho các số thực dương x, y, z khi biểu thức

$$P = \log^2(10x^2 + 7y^2 + 15z^2) - 2\log\left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + 2(x + y + z)\right) - 2\log(xyz)$$

đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị xyz gần với giá trị nào nhất trong các giá trị sau

- A. 4. B. 7. C. 5. D. 6.

Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-2	3	-2	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = e^{\frac{-1}{x^2}} \left(f(x+1)\right)^3$ là

- A. 7. B. 6. C. 5. D. 4.

BẢNG ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
C	C	B	A	C	C	B	B	A	B	C	A	C	C	C	B	B	D	D	B	A	D	A	A	A
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
C	B	D	A	D	B	A	C	A	C	A	D	A	C	B	D	B	D	A	C	C	B	C	D	D

LỜI GIẢI CÁC CÂU VẬN DỤNG-VẬN DỤNG CAO

Câu 38. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{m \ln x + 4}{\ln x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(0; e)$ là $(a; b]$. Khi đó $a + b$ bằng

- A. -3. B. -1. C. -2. D. 0.

Lời giải

Chọn A.

Điều kiện $\ln x + m \neq 0 \Leftrightarrow 0 < x \neq e^{-m}$

$$\text{Ta có } y' = \frac{m^2 - 4}{(\ln x + m)^2} \cdot \frac{1}{x}.$$

Hàm số biến trên khoảng $(0; e) \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in (0, e)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ e^{-m} \notin (0; e) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ e^{-m} \geq e \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq -1.$$

Câu 39. Biết rằng phương trình $\sqrt{4x^3 - 3x^2} \cdot 2^{\frac{x^3 - 6x - 4}{x^2}} - 24x = 32$ có nghiệm là

$x = a - \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c}, (a, b, c \in \mathbb{Q})$. Khi đó giá trị của $2abc$ gần với giá trị nào nhất trong các giá trị sau

- A. 28. B. 24. C. 55. D. 50.

Lời giải

Chọn C.

Điều kiện $x \geq \frac{3}{4}$.

$$\begin{aligned} \text{Phương trình } &\Leftrightarrow \sqrt{4x - 3} \cdot 2^{\frac{x^3 - 6x - 4}{x^2}} = 8 \left(\frac{3x - 4}{x} \right) \Leftrightarrow \sqrt{4x - 3} \cdot (\sqrt[4]{2})^{4x - \frac{24x + 16}{x^2}} = (\sqrt[4]{2})^{12} \left(\frac{3x - 4}{x} \right) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{4x - 3} \cdot (\sqrt[4]{2})^{4x - 3} = \left(\frac{3x - 4}{x} \right) (\sqrt[4]{2})^{\frac{9x^2 + 24x + 16}{x^2}} \Leftrightarrow \sqrt{4x - 3} \cdot (\sqrt[4]{2})^{4x - 3} = \left(\frac{3x - 4}{x} \right) (\sqrt[4]{2})^{\left(\frac{3x - 4}{x} \right)^2} \end{aligned}$$

Dễ thấy $f(t) = t \cdot (\sqrt[4]{2})^{t^2}$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên phương trình trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{4x - 3} &= \frac{3x + 4}{x} \Leftrightarrow 4x^3 - 12x^2 - 24x - 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x^3 - 6x^2 - 12x - 8 = 0 \Leftrightarrow 3x^3 = (x + 2)^3 \Leftrightarrow x\sqrt[3]{3} = x + 2 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt[3]{3} - 1} = 1 + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9} = 1 - \sqrt[3]{-3} - \sqrt[3]{-9} \Rightarrow 2abc = 54. \end{aligned}$$

Câu 40. Một người lần đầu gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng với kì hạn 3 tháng, lãi suất 2% một quý theo hình thức lãi kép. Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 100 triệu đồng với kỳ hạn và lãi

suất như trước đó. Tổng số tiền người đó nhận được 1 năm sau khi gửi tiền gần nhất với kết quả nào sau đây biết rằng trong suốt thời gian gửi tiền lãi suất ngân hàng không thay đổi và người đó không rút tiền ra.

- A. 210 triệu đồng.
C. 220 triệu đồng.

- B. 212 triệu đồng.
D. 216 triệu đồng.

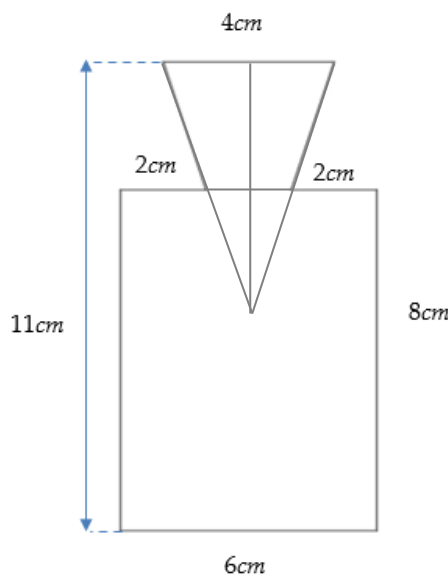
Lời giải

Chọn B.

Sử dụng công thức tính lãi kép ta có số tiền sau 6 tháng là $A = 100.000.000(1+2\%)^2$

Số tiền sau 1 năm tháng là $B = (A + 100.000.000)(1+2\%)^2 \approx 212$ triệu.

Câu 41. Một thiết bị kỹ thuật là một khối tròn xoay. Mặt cắt của khối tròn xoay đó qua trục của nó được mô tả trong hình bên. Thể tích của thiết bị đó bằng



A. $80\pi cm^3$.

B. $312\pi cm^3$.

C. $316\pi cm^3$.

D. $79\pi cm^3$.

Lời giải

Chọn D.

Ta thấy khối tròn xoay là hợp thành của khối trụ có bán kính bằng $3cm$, chiều cao bằng $8cm$ với khối nón bán kính bằng $2cm$ chiều cao bằng $3cm$. Phần chung của khối nón và khối trụ cũng là một khối nón bán kính bằng $1cm$ chiều cao bằng $3cm$.

Thay vào công thức tính thể tích ta được $V = 8.3^2\pi + \frac{1}{3}3.2^2\pi - \frac{1}{3}.3.1^2\pi = 79\pi (cm^3)$

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I cạnh $AB = 3a$, $BC = 4a$. Hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm ID . Biết rằng SB tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 45° . Tính diện tích khối cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{25\pi}{2}a^2$.

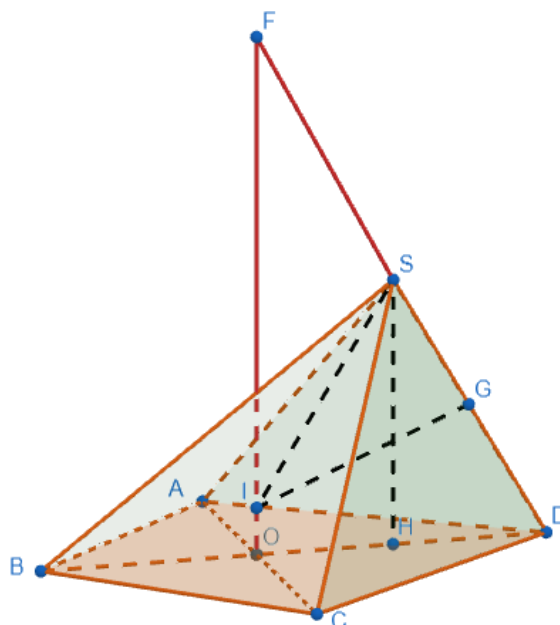
B. $\frac{125\pi}{4}a^2$.

C. $\frac{125\pi}{2}a^2$.

D. $4\pi a^2$.

Lời giải

Chọn B.



Gọi O là giao điểm của 2 đường chéo AC và BD suy ra O chính là tâm đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$. Kéo đường thẳng d qua O vuông góc với $(ABCD)$ do $d \parallel SH$ nên d cắt SD tại F và S là trung điểm DF . Mặt phẳng trung trực của SD cắt d tại I khi đó I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp chóp $SABCD$. Gọi G là trung điểm SD ta có IG vuông góc SD .

Giả thiết suy ra $SBH = 45^\circ \Rightarrow \triangle SBH$ vuông cân tại B suy ra $SH = BH = \frac{15a}{4} \Rightarrow FO = \frac{15a}{2}$.

Dùng định lý Pitago tính được $FD = \frac{5\sqrt{10}a}{2}; FG = \frac{3}{4}FD = \frac{15\sqrt{10}a}{8}$

Ta có $\tan OFD = \frac{OD}{OF} = \frac{IG}{FG} \Rightarrow IG = \frac{OD \cdot FG}{OF} = \frac{5\sqrt{10}a}{8}$

Bán kính của mặt cầu là $R = SI = \sqrt{IG^2 + GS^2} = \frac{5\sqrt{5}a}{4}$ do đó diện tích mặt cầu bằng $\frac{125\pi}{4}a^2$.

Câu 43. Trong cuộc gặp mặt dẫn dò trước khi lên đường tham gia kì thi HSG có 10 bạn trong đội tuyển gồm 2 bạn đến từ lớp 12A1, 3 bạn từ 12A2, 5 bạn còn lại đến từ các lớp khác nhau. Thầy giáo xếp ngẫu nhiên các bạn kể trên ngồi vào một bàn dài mà mỗi bên có 5 ghế xếp đối diện nhau. Tính xác suất sao cho không có học sinh nào cùng lớp ngồi đối diện nhau.

A. $\frac{73}{126}$.

B. $\frac{53}{126}$.

C. $\frac{5}{9}$.

D. $\frac{38}{63}$.

Lời giải:

Chọn D

Ta có không gian mẫu là $n(\Omega) = 10!$

Gọi A là biến cố “ không có học sinh nào cùng lớp ngồi đối diện nhau”

$\bar{A}$ là biến cố “ có học sinh cùng lớp ngồi đối diện nhau”

A_1 là biến cố “ học sinh A_1 ngồi đối diện nhau”; A_2 là biến cố “ học sinh A_1 ngồi đối diện nhau”.

Khi đó $n(\bar{A}) = n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2)$.

Xét biến cố A_1 : Trước hết chọn 1 trong 5 cặp ghế để xếp 2 hs A_1 ngồi, đối chỗ 2 bạn này có 2! cách, 8 người còn lại có 8!. Theo quy tắc nhân có $n(A_1) = C_5^1 \cdot 2! \cdot 8!$

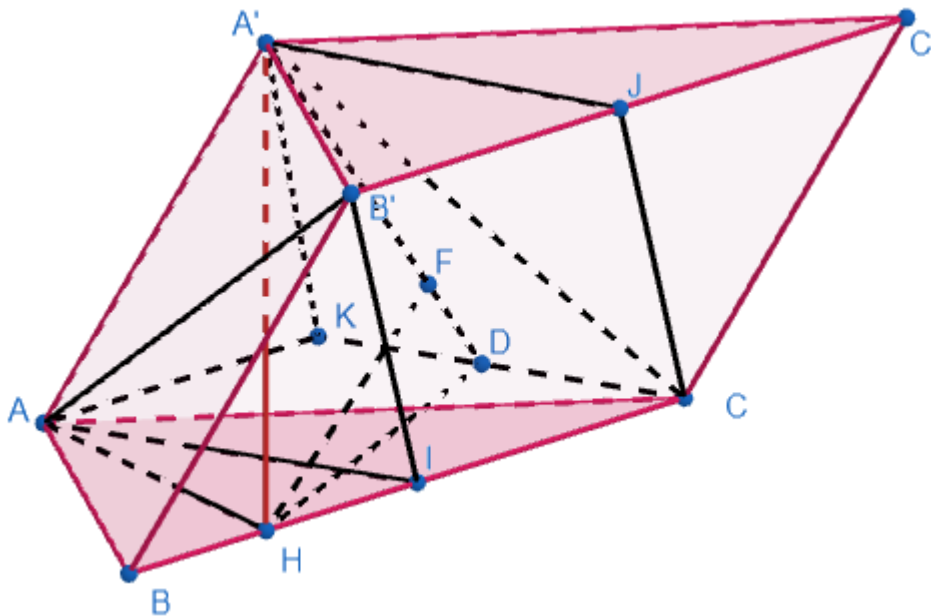
Tương tự $n(A_2) = C_5^1 \cdot A_3^2 \cdot 8!$; $n(A_1 \cap A_2) = A_5^2 \cdot 2! \cdot A_3^2 \cdot 6!$ thay vào ta được $P(\overline{A}) = \frac{25}{63} \Rightarrow P(A) = \frac{38}{63}$.

Câu 44. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao là $9\sqrt{\frac{3}{35}}a$. Biết rằng tam giác $A'BC$ là tam giác nhọn và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Hai mặt phẳng $(ABB'A')$, $(ACC'A')$ cùng tạo với đáy một góc bằng nhau. Góc $BAC = 60^\circ$, $AC = 3AB = 3a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và $A'C$ bằng

- A. $\frac{2a}{3}$. B. $\frac{a}{3}$. C. a . D. $\frac{3a}{2}$.

Lời giải:

Chọn A



Do tam giác $A'BC$ nhọn và $(A'BC) \perp (ABC)$ nên kẻ $AH \perp BC \Rightarrow AH \perp (ABC)$ và H nằm trong đoạn BC . Do hai mặt phẳng $(ABB'A')$; $(ACC'A')$ cùng tạo với đáy một góc bằng nhau nên H cách đều AB và AC do đó H là chân đường phân giác trong của góc BAC . Theo tính chất đường phân giác ta có $\frac{BH}{CH} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow CH = 3BH$.

Gọi I, J là các trung điểm của $BC, B'C'$ suy ra $(AB'I) \parallel (CA'J)$ do đó $d(AB', A'C) = d((AB'I), (CA'J)) = d(I, (CA'J))$.

Kẻ $KC \parallel AI \Rightarrow KC \parallel A'J$ khi đó $d(I, (CA'J)) = d(I, (CKA'J))$.

Ta có $\frac{d(I, (CKA'J))}{d(H, (CKA'J))} = \frac{IC}{HC} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow d(I, (CKA'J)) = \frac{2}{3}d(H, (CKA'J))$.

Kẻ $HD \perp KC, HF \perp A'D \Rightarrow d(H, (CKA'J)) = HF$ và $\frac{1}{HF^2} = \frac{1}{HA'^2} + \frac{1}{HD^2}$.

Ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A = 7a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{7}, AI^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{13a^2}{4} \Rightarrow AI = a \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Xét tam giác AIC có: $\cos AIC = \frac{AI^2 + IC^2 - AC^2}{2AI \cdot IC} = -\frac{8}{\sqrt{91}}$. Do $AICK$ là hình bình hành nên

$$\Rightarrow \cos ICK = \frac{8}{\sqrt{91}} \Rightarrow \sin ICK = 3\sqrt{\frac{3}{91}} \Rightarrow HD = HC \cdot \sin HCD = \frac{9}{4}\sqrt{\frac{3}{13}}a \text{ thay vào được}$$

$$\frac{1}{HF^2} = \frac{1}{HA'^2} + \frac{1}{HD^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow HF = a \Rightarrow d(I, (CKA'J)) = \frac{2}{3}a.$$

Câu 45. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-2	-1	-2	$+\infty$	

Có bao giá trị của tham số m để phương trình $3f(\sin x) + m = 0$ có nghiệm trên đoạn $[-\pi; 2\pi]$.

A. 4.

B. 2.

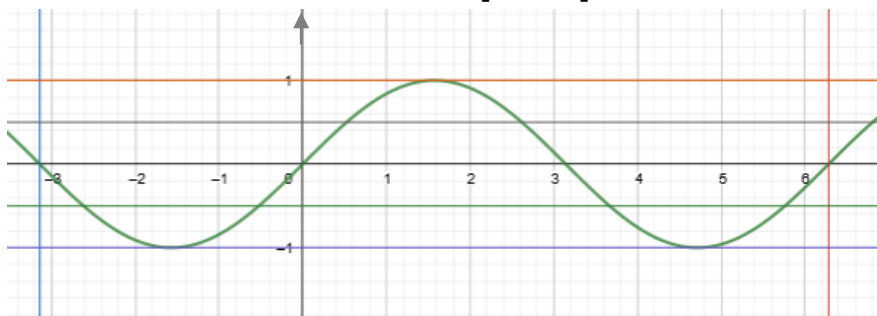
C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn C.

Đặt $t = \sin x, -1 \leq t \leq 1$. Xét đồ thị $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi; 2\pi]$ (có thể dùng bảng biến thiên)



Phương trình trở thành $f(t) = \frac{-m}{3}$ (*) dựa vào bảng biến thiên của hàm $f(x)$ ta thấy chỉ có

$\frac{-m}{3} = -2$ phương trình (*) có nghiệm $t = \pm 1$ suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm. Các trường hợp còn lại phương trình có chẵn nghiệm hoặc vô nghiệm. Vậy $m = 6$ là giá trị thỏa mãn.

Câu 46. Cho các số thực $a > b > 0$ thỏa mãn $3\log_{50} a = \log_2 b = \log_5 (7a - 6b)$. Giá trị $\frac{a}{b}$ bằng

A. 22.

B. $12 + 6\sqrt{3}$.

C. $24 + 6\sqrt{15}$.

D. 36.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Đặt } 3\log_{50} x = \log_2 y = \log_5 (7x - 6y) = 3t \text{ suy ra } \begin{cases} x = 50^t, y = 8^t \\ 7x - 6y = 125^t \end{cases}$$

$$\Rightarrow 7.50^t - 6.8^t = 125^t \Leftrightarrow 7.\left(\frac{25}{4}\right)^t - 6 = \left(\frac{125}{8}\right)^t. \text{ Đặt } u = \left(\frac{5}{2}\right)^t \text{ ta được}$$

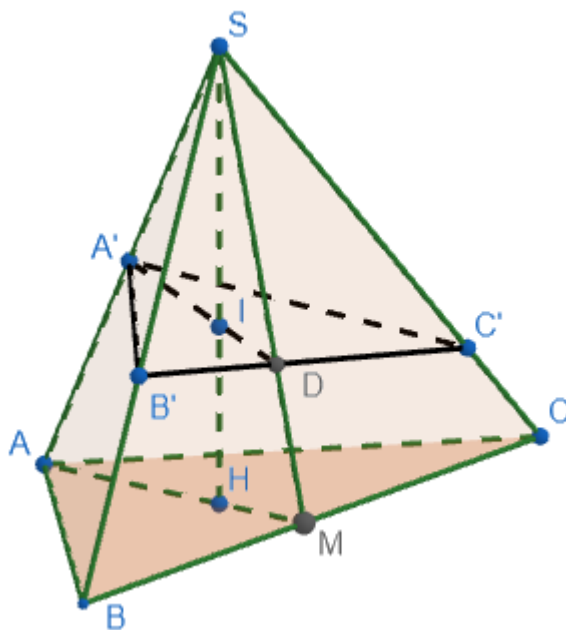
$$u^3 - 7u^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1(l) \\ u = 3 - \sqrt{15}(l) \\ u = 3 + \sqrt{15}(tm) \end{cases}. \text{ Do } \frac{x}{y} = \left(\frac{50}{8}\right)^t = \left(\frac{25}{4}\right)^t = u^2 = 24 + 6\sqrt{15}.$$

Câu 47. Cho hình chóp $SABC$ có thể tích là V , gọi M, H, I theo thứ tự là trung điểm BC, AM, SH một mặt phẳng qua I cắt các cạnh SA, SB, SC tại các điểm A', B', C' . Thể tích của khối chóp $SA'B'C'$ có giá trị lớn nhất là

- A. $\frac{V}{5}$. B. $\frac{V}{3}$. C. $\frac{V}{2}$. D. $\frac{27V}{256}$.

Lời giải

Chọn B.



$$\text{Ta có } \overline{SI} = \frac{1}{2}\overline{SH} = \frac{1}{4}(\overline{SA} + \overline{SM}) = \frac{1}{4}\left(\overline{SA} + \frac{1}{2}(\overline{SB} + \overline{SC})\right) \Rightarrow \overline{SI} = \frac{1}{4}\overline{SA} + \frac{1}{8}\overline{SB} + \frac{1}{8}\overline{SC}$$

$$\text{Đặt } \frac{SA}{SA'} = x, \frac{SB}{SB'} = y, \frac{SC}{SC'} = z \text{ suy ra } \overline{SI} = \frac{x}{4}\overline{SA'} + \frac{y}{8}\overline{SB'} + \frac{z}{8}\overline{SC'} \text{ do bốn điểm } I, A', B', C' \text{ đồng phẳng nên}$$

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{8} + \frac{z}{8} = 1 \Leftrightarrow 2x + y + z = 8.$$

$$\text{Ta có } \frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}} = \frac{SA'}{SA} \frac{SB'}{SB} \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{xyz} \Rightarrow V_{SA'B'C'} = \frac{V}{xyz}.$$

$$\text{Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của } P = xyz \text{ với giả thiết } \begin{cases} 2x + y + z = 8 \\ x, y, z \geq 1 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } 2x + y + z = 8 \Rightarrow 8 \geq 2x + 2 \Rightarrow 1 \leq x \leq 3.$$

$$\text{Lại có } (y-1)(z-1) \geq 0 \Rightarrow yz \geq y + z - 1 = 7 - 2x > 0 \text{ thay vào ta được}$$

$$P = xyz \geq x(7 - 2x) = -2x^2 + 7x = f(x) \text{ lập bảng biến thiên của } f(x) \text{ trên } [1; 3] \text{ ta được}$$

$$f(x) \geq 3 \text{ do đó giá trị lớn nhất của } V_{SA'B'C'} \text{ là } \frac{V}{3}.$$

Câu 48. Cho hàm số $F(x) = (x-1)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{e^x}$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $\frac{f'(x)}{e^{2x}}$ là

- A. $\left(x + \frac{x^2}{2}\right)e^x + C$ B. $x + \frac{x^2}{2} + C$ C. $x + x^2 + C$ D. $(x + x^2)e^x + C$

Lời giải

Chọn C.

Xét $\int \frac{f'(x)}{e^{2x}} dx$ đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{e^{2x}} \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2e^{-2x} dx \\ v = f(x) \end{cases}$. Suy ra $\int \frac{f'(x)}{e^{2x}} dx = e^{-2x} f(x) + 2 \int e^{-2x} f(x) dx$

Do hàm số $F(x) = (x-1)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{e^x}$ nên

$$\left((x-1)e^x\right)' = \frac{f(x)}{e^x} \Rightarrow xe^x = \frac{f(x)}{e^x} \Rightarrow f(x) = xe^{2x} \text{ thay lại ta được } \int \frac{f'(x)}{e^{2x}} dx = x + 2 \int x dx = x + x^2 + C.$$

Câu 49. Cho các số thực dương x, y, z khi biểu thức

$$P = \log^2(10x^2 + 7y^2 + 15z^2) - 2 \log\left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + 2(x+y+z)\right) - 2 \log(xyz) \text{ đạt giá trị nhỏ nhất thì giá}$$

trị xyz gần với giá trị nào nhất trong các giá trị sau

- A. 4. B. 7. C. 5. D. 6.

Lời giải

Chọn D.

$$\begin{aligned} \text{Viết lại } P &= \log^2(10x^2 + 7y^2 + 15z^2) - 2 \log(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2xyz(x+y+z)) \\ &= \log^2(10x^2 + 7y^2 + 15z^2) - 2 \log(xy + yz + zx)^2 = \log^2(10x^2 + 7y^2 + 15z^2) - 4 \log(xy + yz + zx) \end{aligned}$$

Ta cần chỉ ra $10x^2 + 7y^2 + 15z^2 \geq m(xy + yz + zx)$ để đưa P về về một biến ta biến đổi như sau:

$$20x^2 + 14y^2 + 30z^2 \geq 2m(xy + yz + zx)$$

$$\Leftrightarrow (20+m)x^2 + (14+m)y^2 + (30+m)z^2 \geq m(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + yz + zx)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{20+m}} + \frac{y^2}{\frac{1}{14+m}} + \frac{z^2}{\frac{1}{30+m}} \geq \frac{(x+y+z)^2}{\frac{1}{m}}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức SCHWARZ

$$\text{Ta có } \frac{x^2}{\frac{1}{20+m}} + \frac{y^2}{\frac{1}{14+m}} + \frac{z^2}{\frac{1}{30+m}} \geq \frac{(x+y+z)^2}{\frac{1}{20+m} + \frac{1}{14+m} + \frac{1}{30+m}}$$

Đến đây ta chỉ việc chọn m thỏa mãn $\frac{1}{20+m} + \frac{1}{14+m} + \frac{1}{30+m} = \frac{1}{m}$ giải ra ta chọn được $m=10$.

Vậy ta được $10x^2 + 7y^2 + 15z^2 \geq 10(xy + yz + zx)$ dấu bằng xảy ra khi $\frac{x}{\frac{1}{30}} = \frac{y}{\frac{1}{24}} = \frac{z}{\frac{1}{40}} \Leftrightarrow 15x = 12y = 20z$

Ngoài ra ta cũng có thể dùng phương pháp cân bằng hệ số trong bất đẳng thức CAUCHY để chứng minh

$$\left. \begin{array}{l} \frac{25}{4}x^2 + 4y^2 \geq 10xy \\ \frac{15}{4}x^2 + \frac{20}{3}z^2 \geq 10xz \\ 3y^2 + \frac{25}{3}z^2 \geq 10yz \end{array} \right\} \text{ cộng các vế ta được } 10x^2 + 7y^2 + 15z^2 \geq 10(xy + yz + zx).$$

Từ đó ta có $P \geq \log^2(10(xy + yz + zx)) - 4\log(xy + yz + zx) = (\log(xy + yz + zx) - 1)^2 \geq 0$

Dấu bằng xảy ra $\begin{cases} y = \frac{5}{4}x; z = \frac{3}{4}x \\ xy + yz + zx = 10 \end{cases} \Leftrightarrow xyz = \frac{15}{16}x^3 = \frac{600}{47}\sqrt{\frac{10}{47}}.$

Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		-2	3	-2		$+\infty$		

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = e^{\frac{-1}{x^2}} (f(x+1))^3$ là

- A. 7. B. 6. C. 5. D. 4.

Lời giải

Chọn D.

$$g'(x) = e^{\frac{-1}{x^2}} (f(x+1))^2 \left(\frac{2}{x^3} f(x+1) + 3f'(x+1) \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (f(x+1))^2 = 0 & (1) \\ \frac{2}{x^3} f(x+1) + 3f'(x+1) = 0 & (2) \end{cases}$$

Ta thấy (1) các nghiệm của 1 là nghiệm bồi chắn nên qua đó $g'(x)$ không đổi dấu.

Xét phương trình (2): $\frac{2}{x^3} f(x+1) + 3f'(x+1) = 0$ đặt $t = x+1$ ta được $\frac{2}{(t-1)^3} f(t) + 3f'(t) = 0$

Do $f(t), f'(t)$ không đồng thời bằng không nên $\frac{2}{(t-1)^3} + 3\frac{f'(t)}{f(t)} = 0$ (*)

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f(t) = a(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)(t-t_4)$

Tính đạo hàm rồi thay vào ta được phương trình trở thành (*) $\frac{2}{(t-1)^3} + \frac{3}{t-t_1} + \frac{3}{t-t_2} + \frac{3}{t-t_3} + \frac{3}{t-t_4} = 0$

Xét hàm số
$$h(t) = \frac{2}{(t-1)^3} + \frac{3}{t-t_1} + \frac{3}{t-t_2} + \frac{3}{t-t_3} + \frac{3}{t-t_4}$$
$$\Rightarrow h(t) = \frac{-6}{(t-1)^4} + \frac{-3}{(t-t_1)^2} + \frac{-3}{(t-t_2)^2} + \frac{-3}{(t-t_3)^2} + \frac{-3}{(t-t_4)^2}.$$

Ta có bảng biến thiên của $h(t)$

t	$-\infty$	t_1	t_2	t_3	1	t_4	$+\infty$
$h'(t)$	—	—	—	—	—	—	—
$h(t)$	0 ↘ —∞	+∞ ↘ —∞	+∞ ↘ —∞	+∞ ↘ —∞	+∞ ↘ —∞	+∞ ↘ —∞	0

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình $h(t) = 0$ luôn có 4 nghiệm đơn phân biệt do đó hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực trị.

====THE END=====