CHƯƠNG 1
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1
TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

1. Tính đơn điệu của hàm số

a. Khái niệm tính đơn điệu của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $K \subset \mathbb{R}$, với K là một khoảng, nửa khoảng hoặc đoạn.

Hàm số $y = f(x)$ gọi là đồng biến (tăng) trên K nếu mọi x_1, x_2 thuộc K mà $x_1 < x_2$ thì $f(x)_1 < f(x_2)$

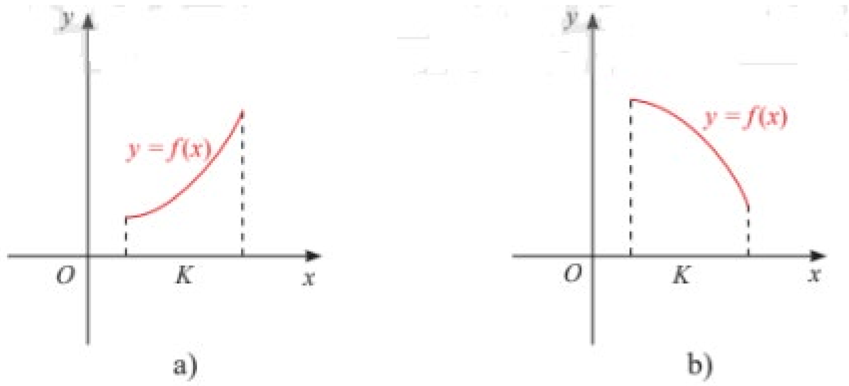
.

Hàm số $y = f(x)$ gọi là nghịch biến (tăng) trên K nếu mọi x_1, x_2 thuộc K mà $x_1 < x_2$ thì $f(x)_1 > f(x_2)$.

Chú ý:

Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K thì đồ thị của nó đi lên từ trái sang phải (Hình a).

Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K thì đồ thị của nó đi xuống từ trái sang phải (Hình b).



Hàm số $y = f(x)$ đồng biến hoặc nghịch biến trên K thì gọi chung là đơn điệu trên K.

Định lí

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên tập $K \subset \mathbb{R}$, với K là một khoảng, nửa khoảng hoặc đoạn.

• Nếu $f'(x) > 0,\ \forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K.

• Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K.

Chú ý: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên tập $K \subset \mathbb{R}$, với K là một khoảng, nửa khoảng hoặc đoạn.

• Nếu $f'(x) \geq 0,\ \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của K thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K.

- Nếu $f'(x) \le 0,\ \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của K thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K.
- Nếu $f'(x) = 0,\ \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ thì hàm số $y = f(x)$ không đổi trên K.

b. Sử dụng bảng biến thiên xét tính đơn điệu của hàm số

Để xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f(x)$, ta có thể thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$.

Bước 2: Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i\ (i = 1, 2, 3, ..., n)$ tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

Bước 3: Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên để xét dấu $y' = f'(x)$.

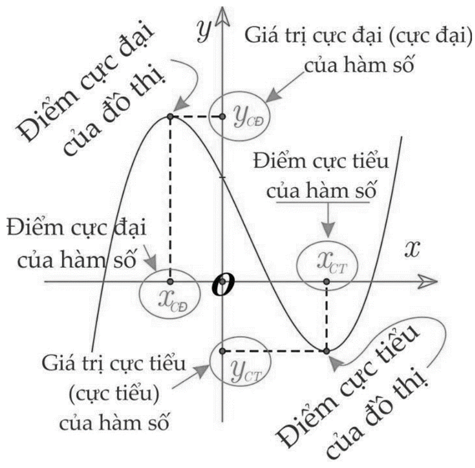
Bước 4: Dựa vào bảng biến thiên, nêu kết luận các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số.

2. Cực trị của hàm số

a. Khái niệm: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập $K \subset \mathbb{R}$, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng và $x_0 \in \mathbb{R}, x_1 \in K$.

- x_0 được gọi là **điểm cực đại** của hàm số $y = f(x)$ nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_o sao cho $(a;b) \subset K$ và $f(x) < f(x_o), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_o\}$. Khi đó, $f(x_o)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số $y = f(x)$, kí hiệu f_{CD}.
- x_1 được gọi là **điểm cực tiểu** của hàm số $y = f(x)$ nếu tồn tại một khoảng $(c;d)$ chứa điểm x_1 sao cho $(c;d) \subset K$ và $f(x) > f(x_1), \forall x \in (c;d) \setminus \{x_1\}$. Khi đó, $f(x_1)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số $y = f(x)$, kí hiệu f_{CT}.
- Điểm cực trị đại và điểm cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị**. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **giá trị cực trị** (hay **cực trị**)

Chú ý: Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì người ta nói rằng hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó, điểm $M(x_o; f(x_o))$ được gọi là điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$.



b. Tìm cực trị của hàm số

Giả sử hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên khoảng $\left(a;b\right)$ chứa điểm x_o và có đạo hàm trên các khoảng $\left(a;x_o\right)$ và $\left(x_o;b\right)$. Khi đó

- Nếu $f'\left(x\right)<0$ với mọi $x\in\left(a;x_o\right)$ và $f'\left(x\right)>0$ với mọi $x\in\left(x_o;b\right)$ thì hàm số $f\left(x\right)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0.

- Nếu $f'\left(x\right)>0$ với mọi $x\in\left(a;x_o\right)$ và $f'\left(x\right)<0$ với mọi $x\in\left(x_o;b\right)$ thì hàm số $f\left(x\right)$ đạt cực đại tại điểm x_0.

Nhận xét: Để tìm điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x\right)$, ta có thể thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số $y=f\left(x\right)$.

Bước 2: Tính đạo hàm $f'\left(x\right)$. Tìm các điểm $x_i\left(i=1,2,3,...,n\right)$ tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

Bước 3: Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên để xét dấu $y'=f'(x)$.

Bước 4: Dựa vào bảng biến thiên, nêu kết luận về các điểm cực trị của hàm số.

CHỦ ĐỀ 1
XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Để xét tính đồng biến, nghịch biến và điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$, ta có thể thực hiện các bước sau:

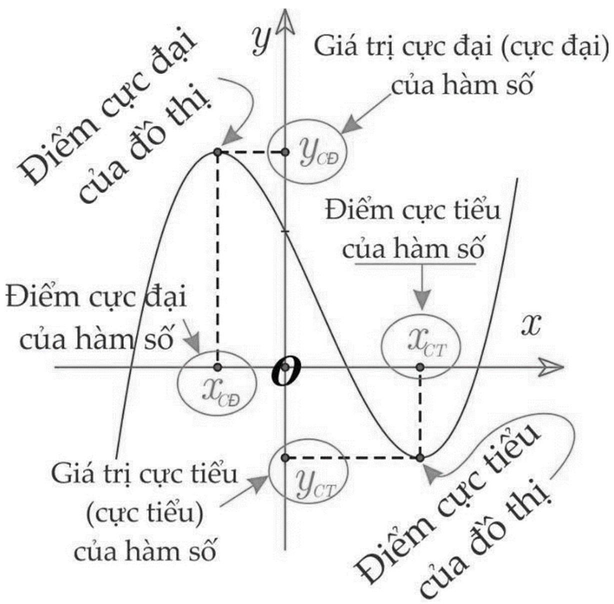
Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số $y=f(x)$.

Bước 2: Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i\,(i=1,2,3,...,n)$ tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

Bước 3: Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên để xét dấu $y'=f'(x)$.

Bước 4: Dựa vào bảng biến thiên, nêu kết luận các khoảng đồng biến, nghịch biến và các điểm cực trị của hàm số.

Chú ý:



DẠNG 1

XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ KHI BIẾT BẢNG BIẾN THIÊN HOẶC ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y=f\left(x\right)$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(1;+\infty\right)$. **B.** $\left(0;1\right)$. **C.** $\left(-1;0\right)$. **D.** $\left(0;+\infty\right)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	4	↘	-1	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-1;+\infty\right)$. **B.** $\left(-1;4\right)$. **C.** $\left(0;1\right)$. **D.** $\left(-1;0\right)$

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-1;0\right)$ **B.** $\left(-\infty;0\right)$ **C.** $\left(1;+\infty\right)$ **D.** $\left(0;1\right)$

Câu 4. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;1)$ **B.** $(1;+\infty)$ **C.** $(-\infty;1)$ **D.** $(-1;0)$

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;2)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(2;+\infty)$.

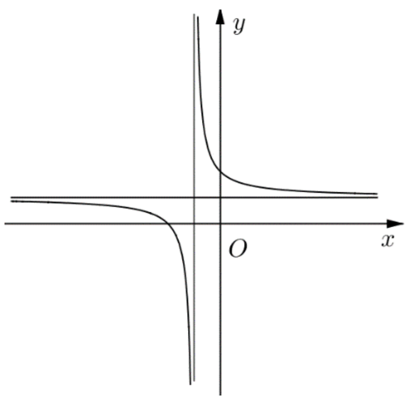
Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

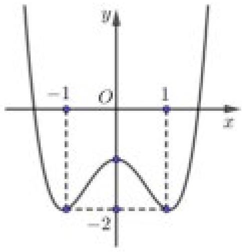
A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(0;1)$.

Câu 7. Biết hàm số $y=\dfrac{x+a}{x+1}$ (a là số thực cho trước, $a\neq 1$) có đồ thị như trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $y'<0, \forall x\in\mathbb{R}$. **B.** $y'>0, \forall x\neq -1$. **C.** $y'<0, \forall x\neq -1$. **D.** $y'>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

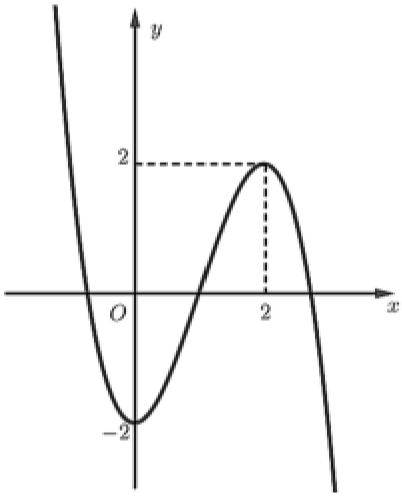
Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Hàm số đã cho nghịch biến trong khoảng nào dưới đây?

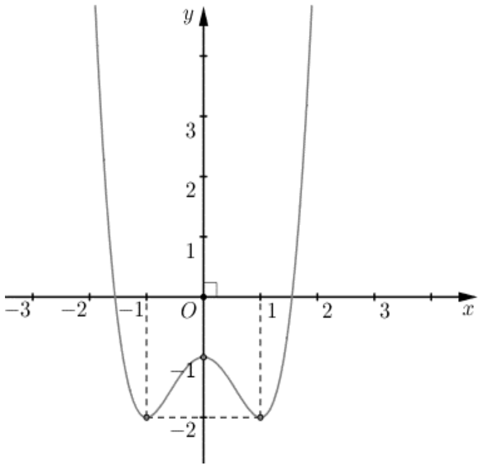
A. $(0;1)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-1;1)$.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



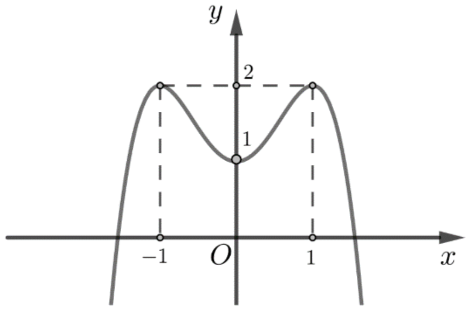
A. $(-\infty;2)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-2;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(-\infty-1\right)$ **B.** $\left(-1;1\right)$ **C.** $\left(-1;0\right)$ **D.** $\left(0;1\right)$

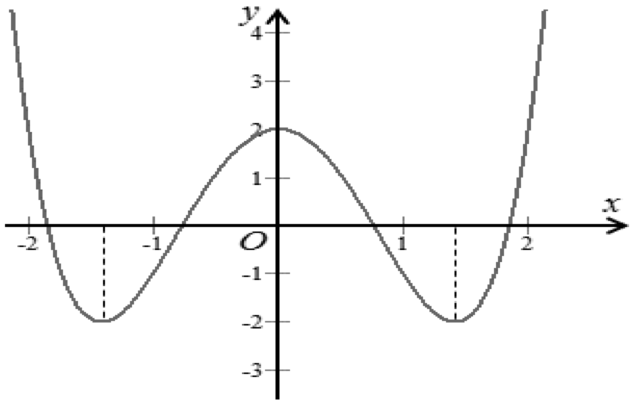
Câu 11. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;1)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty;-1)$ **B.** $(-1;1)$ **C.** $(1;2)$ **D.** $(0;1)$

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-3		-2		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	5	↘	$-\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. -1. **B.** 5. **C.** -3. **D.** 1.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 3. **B.** -1. **C.** -5. **D.** 1.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	-	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 3. **B.** -5. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 3 **B. 2** **C. -2** **D. -3**

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm dưới đây

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

.

Số điểm cực trị của hàm số là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

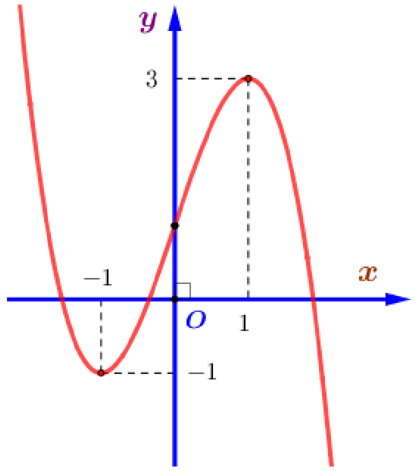
x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
f '(x)		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Kết luận nào sau đây đúng

A. Hàm số có 4 điểm cực trị. **B.** Hàm số có 2 điểm cực đại.

C. Hàm số có 2 điểm cực trị. **D.** Hàm số có 2 điểm cực tiểu.

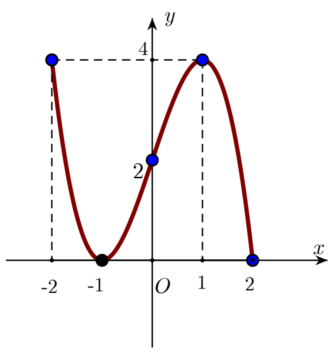
Câu 20. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới.



Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ là

A. $(1;3)$. **B.** $(3;1)$. **C.** $(-1;-1)$. **D.** $(1;-1)$.

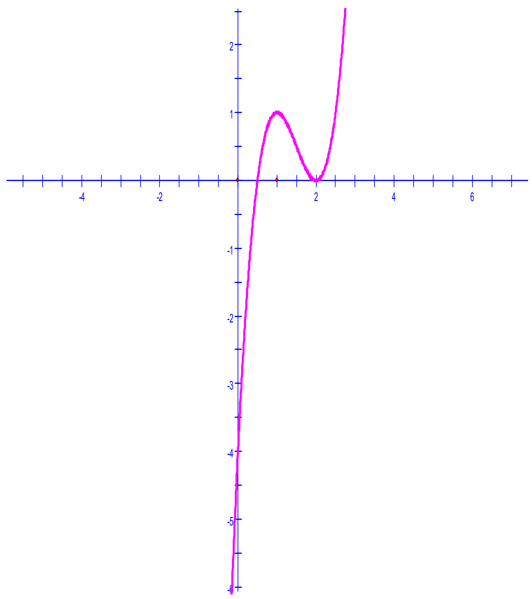
Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x = 1$. **B.** $x = -2$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = -1$.

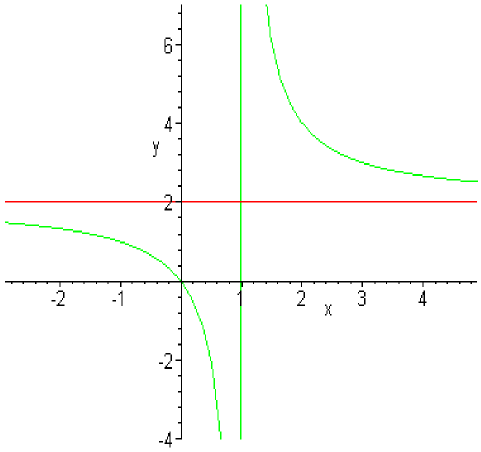
Câu 22. Cho đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ.



Số cực trị của đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ là:

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

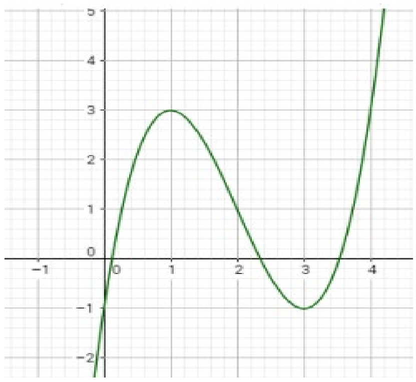
Câu 23. Cho đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ.



Số cực trị của đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ là:

A. 1 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 2

Câu 24. Cho đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ.



Số cực trị của đồ thị hàm số $y = |f(|x|)|$ là:

A. 10 **B.** 12 **C.** 11 **D.** 13

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:

Hàm số $y = |f(x)|$ có mấy cực trị?

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 5.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;3)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
y'		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty \;\|\; -\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

A. Hàm số đã cho có điểm cực đại $x = 3$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho có giá trị cực đại $y = 4$

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

A. Hàm số đạt cực đại tại $x=2$.

B. Hàm số đạt cực đại tại $x=3$.

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=4$.

D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2$.

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên .

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{3}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

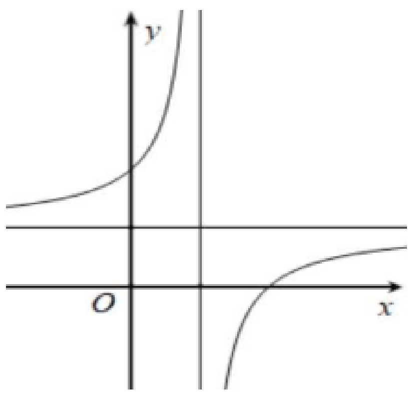
A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$.

C. Hàm số có giá trị cực tiểu là $-\dfrac{1}{3}$.

D. Hàm số không có cực trị.

Câu 31. Biết hàm số $y=\dfrac{x+a}{x-1}$ (a là số thực cho trước, $a\neq -1$) có đồ thị như trong hình vẽ sau



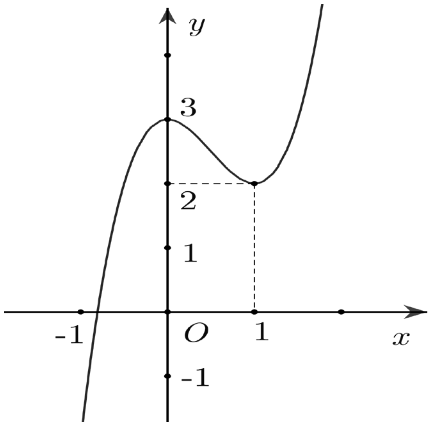
A. $y'>0, \forall x\neq 1$.

B. $y'>0, \forall x\in\mathbb{R}$

C. $y'<0, \forall x\in\mathbb{R}$

D. $y'<0, \forall x\neq 1$.

Câu 32. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



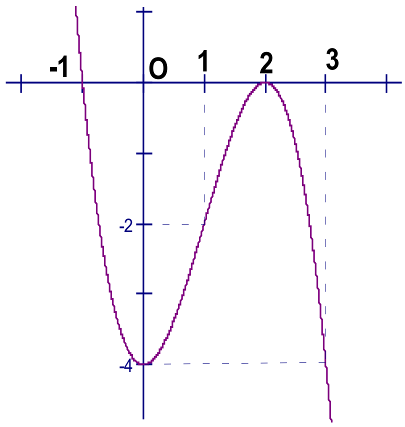
A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(0;1\right)$

B. Hàm số đạt cực trị tại các điểm $x=0$ và $x=1$

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;0\right)$ và $\left(1;+\infty\right)$

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;3\right)$ và $\left(1;+\infty\right)$

Câu 33. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



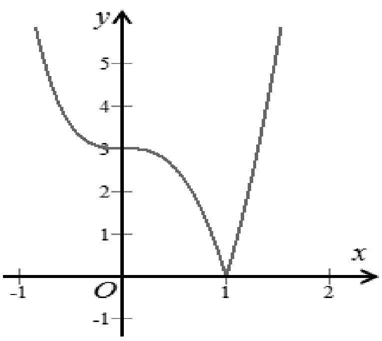
A. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-1;1\right)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-4;2\right)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1;0\right)$ và $\left(2;3\right)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-4;1\right)$.

Câu 34. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(0;2\right)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

Câu 35. Cho hàm số $y=|f(x)|$ có đồ thị như hình vẽ:

A. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ chỉ có điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.

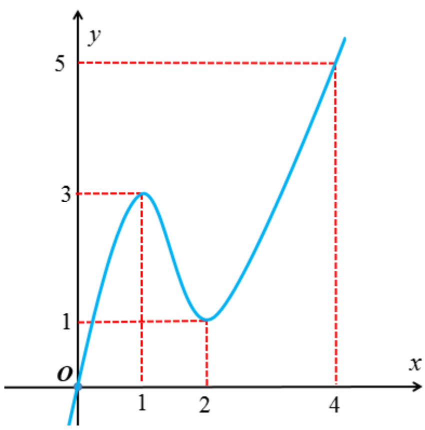
B. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực tiểu và một điểm cực đại.

C. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bốn điểm cực trị.

D. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

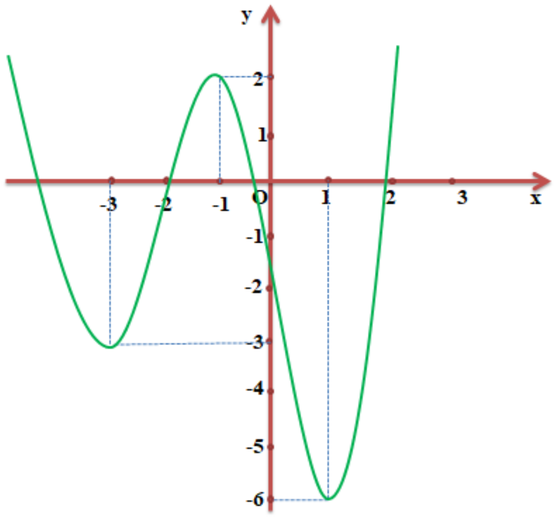
Câu 36. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f(x)$.

b) Tìm điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

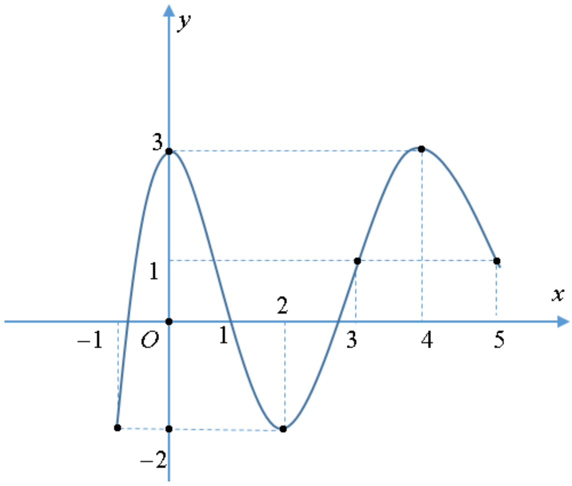
Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = f(x)$.

b) Tìm điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[-1;5]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = f(x)$.

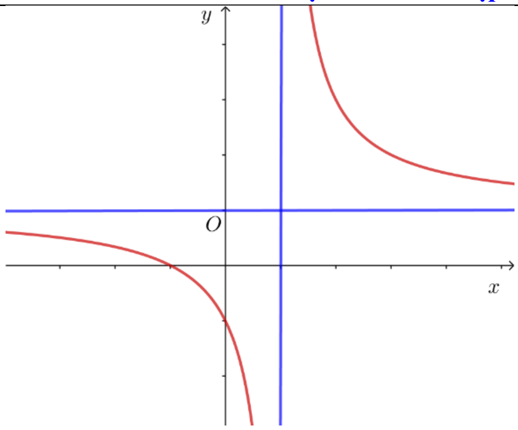
b) Tìm điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

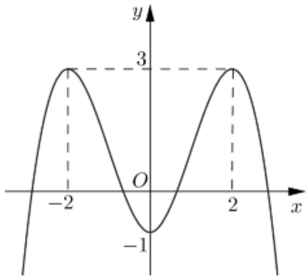
Hàm số nghịch biến trong khoảng nào?

Câu 40. Biết hàm số $y = \dfrac{x+a}{x-1}$ (a là số thực cho trước và $a \neq -1$) có đồ thị như trong hình bên.



Tìm giá trị số thực a

Câu 41. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào?



Câu 42. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm điểm cực tiểu của hàm số đã cho .

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

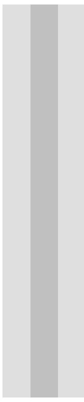
Tìm giá trị cực tiểu của hàm số đã cho

Câu 44. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

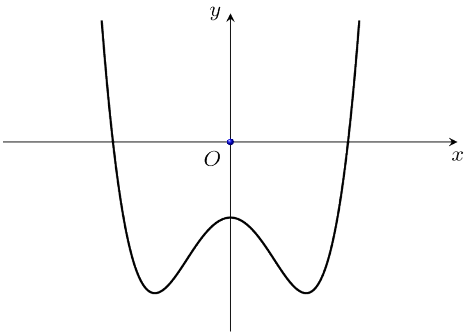
Tìm số điểm cực trị của hàm số đã cho

Câu 45. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có mấy điểm cực trị?

Câu 46. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như đường cong trong hình bên.



Số điểm cực trị của hàm số đã cho là bao nhiêu?

Câu 47. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau ?

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

Câu 48. Cho đồ thị của hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	-15	$\searrow$	$-\infty$

Số cực trị của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$?

Câu 49. Giả sử tồn tại hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

Hàm số $y=f\left(x\right)$ có bao nhiêu cực trị?

Câu 50. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có mấy cực trị?

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

DẠNG 2

XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ $y=f\left(x\right)$ KHI BIẾT HÀM SỐ $y=f\left(x\right)$

Để xét tính đồng biến, nghịch biến và điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x\right)$, ta có thể thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số $y=f\left(x\right)$.

Bước 2: Tính đạo hàm $f'\left(x\right)$. Tìm các điểm $x_i\left(i=1,2,3,...,n\right)$ tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

Bước 3: Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên để xét dấu $y' = f'(x)$.

Bước 4: Dựa vào bảng biến thiên, nêu kết luận các khoảng đồng biến, nghịch biến và các điểm cực trị của hàm số.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 51. Chọn phát biểu đúng khi nói về tính đơn điệu của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, a \neq 0$.

A. Hàm số có thể đơn điệu trên R.

B. Khi a > 0 thì hàm số luôn đồng biến.

C. Hàm số luôn tồn tại đồng thời khoảng đồng biến và nghịch biến.

D. Khi a < 0 hàm số có thể nghịch biến trên R.

Câu 52. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

D. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 53. Hỏi hàm số $y = \frac{3}{5}x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 2$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;0)$. **B**. $(-\infty;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D**. $(2;+\infty)$.

Câu 54. Cho hàm số $y = -2x^3 + 3x^2 + 2$. Khẳng định nào sau đây là đúng về tính đơn điệu của hàm số

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;+\infty)$.

Câu 55. Tìm khoảng nghịch biến của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x$

A. $(-\infty;-3)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-3;1)$. **D.** $(-\infty;-3) \cup (1;+\infty)$.

Câu 56. Hỏi hàm số $y = x^3 - 3x$ nghịch biến trên khoảng nào ?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

Câu 57. Hỏi hàm số nào sau đây luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $h(x) = x^4 - 4x^2 + 4$. **B**. $g(x) = x^3 + 3x^2 + 10x + 1$.

C. $f(x) = -\frac{4}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 - x$. **D**. $k(x) = x^3 + 10x - \cos^2 x$.

Câu 58. Hỏi hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 5}{x + 1}$ nghịch biến trên các khoảng nào ?

A. $(-\infty;-4)$ và $(2;+\infty)$. **B**. $(-4;2)$.

C. $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(-1;+\infty\right)$. **D.** $\left(-4;-1\right)$ và $\left(-1;2\right)$.

Câu 59. Xét các mệnh đề sau:

(I). Hàm số $y=-(x-1)^3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

(II). Hàm số $y=\ln(x-1)-\dfrac{x}{x-1}$ đồng biến trên tập xác định của nó.

(III). Hàm số $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hỏi có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 60. Hàm số $y=x^3-3x^2-9x+1$ đồng biến trên mỗi khoảng:

A. $\left(-1;3\right)$ và $\left(3;+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(1;3\right)$.

C. $\left(-\infty;3\right)$ và $\left(3;+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(3;+\infty\right)$.

Câu 61. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x=2$ và đạt cực tiểu tại $x=0$.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$ và đạt cực đại $x=0$.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x=-2$ và cực tiểu tại $x=0$.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và cực tiểu tại $x=-2$.

Câu 62. Hàm số nào sau đây đạt cực đại tại $x=1$?

A. $y=x^5-5x^2+5x-13$. **B.** $y=x^4-4x+3$.

C. $y=x+\dfrac{1}{x}$. **D.** $y=2\sqrt{x}-x$.

Câu 63. Hàm số nào sau đây có đúng hai điểm cực trị?

A. $y=x+\dfrac{1}{x+1}$. **B.** $y=x^3+3x^2+7x-2$.

C. $y=-x^4-2x^2+3$. **D.** $y=x-\dfrac{2}{x+1}$.

Câu 64. Hàm số nào sau đây không có cực trị?

A. $y=2x+\dfrac{2}{x+1}$. **B.** $y=x^3+3x^2$. **C.** $y=-x^4+2x^2+3$. **D.** $y=\dfrac{x+1}{x-2}$.

Câu 65. Cho hàm số $y=3x^4-6x^2+1$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $y_{CD}=-2$. **B.** $y_{CD}=1$. **C.** $y_{CD}=-1$. **D.** $y_{CD}=2$.

Câu 66. Biết đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ có hai điểm cực trị A,B . Khi đó phương trình đường thẳng AB là:

A. $y=x-2$. **B.** $y=2x-1$. **C.** $y=-2x+1$. **D.** $y=-x+2$.

Câu 67. Đồ thị hàm số $y=x^3-6x^2+9x-1$ có tọa độ điểm cực đại là:

A. $(3;0)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(1;4)$. **D.** $(3;1)$.

Câu 68. Giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 5$ là:

A. 5. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 69. Hàm số $y = -3\sqrt[3]{x^2} + 2$ có bao nhiêu cực đại?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 70. Hiệu số giữa giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ là:

A. 4. **B.** -2. **C.** 2. **D.** -4.

Câu 71. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Nếu đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị là gốc tọa độ và điểm $A(-1;-1)$ thì hàm số có phương trình là:

A. $y = 2x^3 - 3x^2$. **B.** $y = -2x^3 - 3x^2$.

C. $y = x^3 + 3x^2 + 3x$. **D.** $y = x^3 - 3x - 1$.

Câu 72. Điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \sqrt{1 + 4x - x^4}$ có tọa độ là:

A. $(1;2)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;4)$.

Câu 73. Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + ax + b$ có điểm cực trị là $A(1;3)$. Khi đó giá trị của $4a - b$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 74. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 2$. Gọi a, b lần lượt là giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số đó. Giá trị của $2a^2 + b$ là:

A. -8. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 75. Cho hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 3$ đạt cực trị tại x_1, x_2, x_3. Khi đó, giá trị của tích $x_1x_2x_3$ là:

A. 0. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 76. Trong các hàm số sau, hàm số nào chỉ có cực đại mà không có cực tiểu?

A. $y = -10x^4 - 5x^2 + 7$. **B.** $y = -17x^3 + 2x^2 + x + 5$.

C. $y = \dfrac{x-2}{x+1}$. **D.** $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1}$.

Câu 77. Hàm số bậc ba có thể có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0 hoặc 1 hoặc 2. **B.** 1 hoặc 2. **C.** 0 hoặc 2. **D.** 0 hoặc 1.

Câu 78. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Hỏi hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi nào?

A. $\left[\begin{array}{l} a = b = c = 0 \\ a < 0; b^2 - 3ac < 0 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \geq 0 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} a = b = 0, c > 0 \\ a < 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{array}\right.$.

Câu 79. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$ có khoảng nghịch biến chứa hữu hạn số nguyên nếu

A. $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$.

Câu 80. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$ có khoảng đồng biến chứa hữu hạn số nguyên nếu

A. $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 81. Giả sử hàm số $(C): y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K. Nhận xét các phát biểu sau:

A. Nếu hàm số (C) đạt cực tiểu trên khoảng K thì cũng sẽ đạt cực đại trên khoảng đó.

B. Nếu hàm số (C) có hai điểm cực tiểu thì phải có một điểm cực đại.

C. Số nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ bằng số điểm cực trị của hàm số đã cho.

D. Hàm số có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm.

Câu 82. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 15$.

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$.

B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

C. Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;+\infty)$.

Câu 83. Cho hàm số $y = -x^3 - x^2 + 5x + 4$.

A. Hàm số nghịch biến trên $\left(-\frac{5}{3};1\right)$. **B.** Hàm số đồng biến trên $\left(-\frac{5}{3};1\right)$.

C. Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;-\frac{5}{3}\right)$. **D.** Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Câu 84. Cho hàm số $y = \dfrac{3x-1}{-4+2x}$.

A. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số luôn đồng biến trên từng khoảng xác định.

C. Đồ thị hàm số không có cực trị.

D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

Câu 85. Cho hàm số $y = \sqrt{3x^2 - x^3}$.

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0);(2;3)$.

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0);(2;3)$.

D. Đồ thị hàm số có hai cực trị.

Câu 86. Cho hàm số $y = |x+1|(x-2)$.

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Câu 87. Cho hàm số $y=x^4-2x^2+3$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có ba điểm cực trị.
B. Hàm số chỉ có đúng 2 điểm cực trị.
C. Hàm số không có cực trị.
D. Hàm số chỉ có đúng một điểm cực trị.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 88. Hỏi hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3+2x^2+5x-44$ đồng biến trên khoảng nào?

Câu 89. Tìm khoảng đồng biến của hàm số $y=-x^3+3x^2+9x+4$

Câu 90. Cho các hàm số sau:

$(\text{I}): y=\frac{1}{3}x^3-x^2+3x+4$; $(\text{II}): y=\frac{x-1}{x+1}$; $(\text{III}): y=\sqrt{x^2+4}$

$(\text{IV}): y=x^3+4x-\sin x$; $(\text{V}): y=x^4+x^2+2$.

Có bao nhiêu hàm số đồng biến trên những khoảng mà nó xác định?

Câu 91. Cho các hàm số nào sau:

1. $y=x^3+3x^2$.

2. $y=x^3-x$.

3. $y=x^4-3x^2+2$.

4. $y=x^3$.

Có bao nhiêu hàm số không có cực trị?

Câu 92. Cho hàm số $y=\sqrt{x^2-2x}$. Hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

Câu 93. Cho hàm số $y=\frac{3x^2+13x+19}{x+3}$. Tìm đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Câu 94. Hàm số $y=\left|x^2+5x+6\right|$ có mấy điểm cực trị ?

DẠNG 3

XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ KHI BIẾT HÀM SỐ HOẶC BẢNG BIẾN THIÊN HOẶC ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y=f'(x)$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 95. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=(x+1)^2(x-1)^3(2-x)$. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(2;+\infty)$.

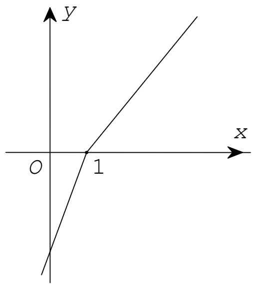
Câu 96. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(3-x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(x)$ đạt **cực đại** tại

A. $x=0$. **B.** $x=1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=3$.

Câu 97. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-2)^2(x-3)^3(x+5)^4$. Hỏi hàm số $y=f(x)$ có mấy điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.**4. **D.** 5.

Câu 98. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

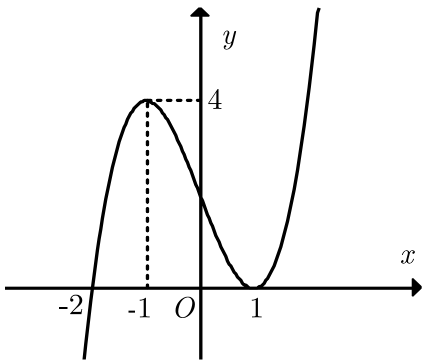
A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;1)$.

B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 99. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ $(a\neq 0)$. Biết rằng hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khi đó nhận xét nào sau đây là **sai**?



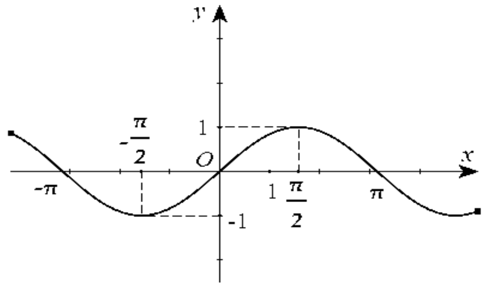
A. Trên $(-2;1)$ thì hàm số $f(x)$ luôn tăng.

B. Hàm $f(x)$ giảm trên đoạn $[-1;1]$.

C. Hàm $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

D. Hàm $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$

Câu 100. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$. Biết $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Xét trên $(-\pi;\pi)$, khẳng định nào sau đây **đúng**?

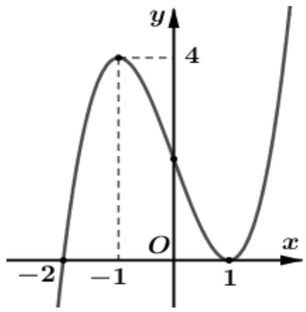
A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\pi;\pi)$.

B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\pi;\pi)$.

C. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\pi;\frac{-\pi}{2}\right)$ và $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;\pi)$.

Câu 101. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên.



Khẳng định nào sau đây sai?

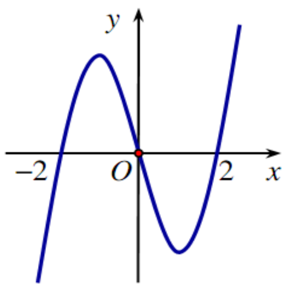
A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-2;1)$.

B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

C. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 2 .

D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$.

Câu 102. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



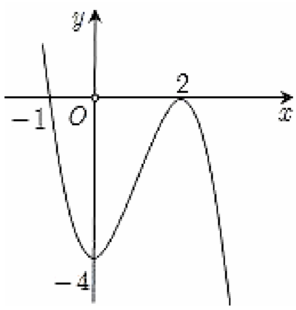
A. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;\ 2)$.

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;1)$.

D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;\ 2)$.

Câu 103. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

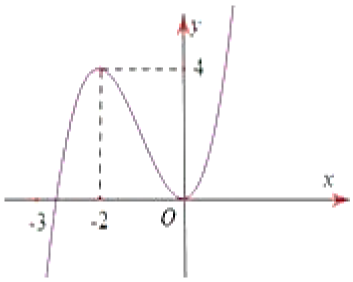
A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-4;2)$.

B. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

D. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-4)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 104. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?



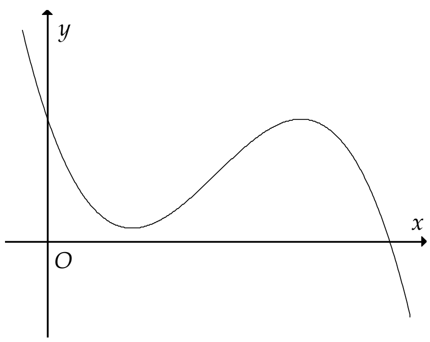
A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2);(0;+\infty)$.

B. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-3;+\infty)$.

D. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$

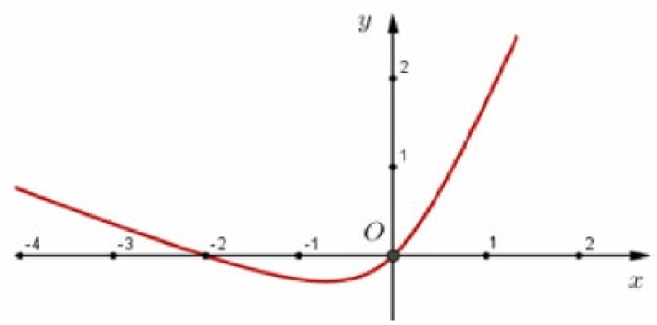
Câu 105. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên.



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$.

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 106. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên.



Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

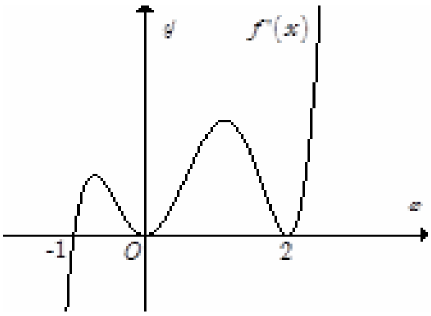
A. $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0.$

B. $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-2.$

C. $f(x)$ đạt cực đại tại $x=-2.$

D. Giá trị cực tiểu của $f(x)$ nhỏ hơn giá trị cực đại của $f(x)$.

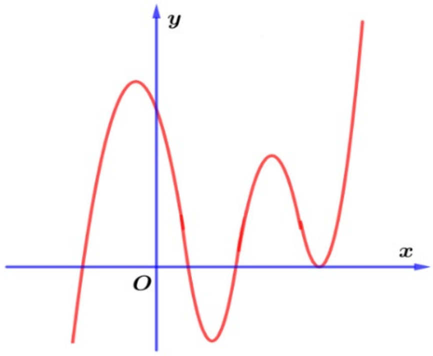
Câu 107. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng K. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên khoảng K.



Hỏi hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 108. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Tìm số điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=f(x)$.



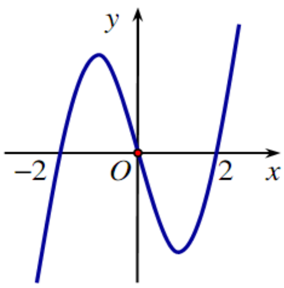
A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 109. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(x-2)^4(x^2-4)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(|x|)$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 110. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ là đường cong trong hình bên.



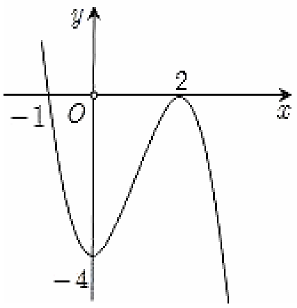
A. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;\ 2)$.

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;1)$.

D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;\ 2)$.

Câu 111. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-4;2)$.

B. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

C. Hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị.

D. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-4)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 112. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2-1)(x+1)(5-x)$.

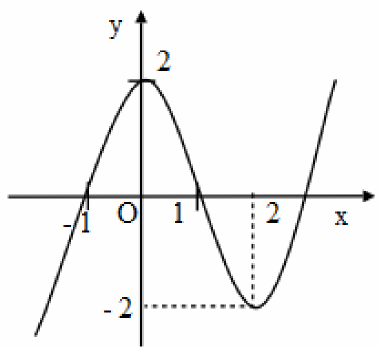
A. $f(1) < f(4) < f(2)$.

B. $f(1) < f(2) < f(4)$.

C. $f(2) < f(1) < f(4)$.

D. $f(4) < f(2) < f(1)$.

Câu 113. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y = f'(x)$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



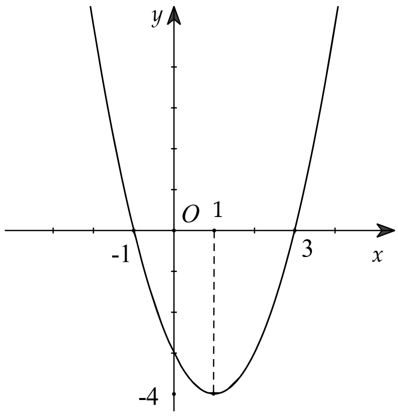
A. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

B. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

C. Hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị.

D. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$

Câu 114. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



A. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-1)$.

B. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

C. Hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị.

D. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$.

Câu 115. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ:

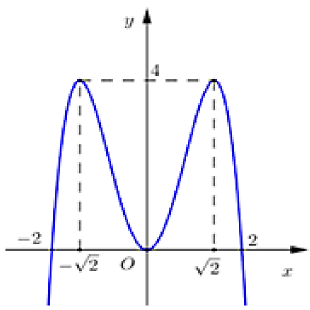
A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

C. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị.

D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một điểm có một điểm cực trị.

Câu 116. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên.



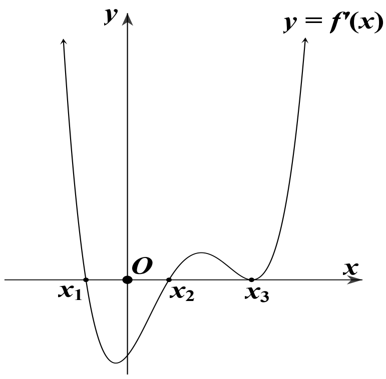
A. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 2$.

B. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

C. Hàm số $y=f(x)$ có 3 cực trị.

D. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại $x=\sqrt{2}$.

Câu 117. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị trên một khoảng K như hình vẽ bên.



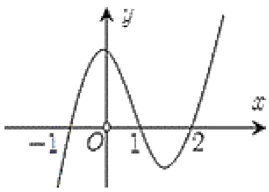
A. Trên K, hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị.

B. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại x_3.

C. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại x_2.

D. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại x_1.

Câu 118. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên.



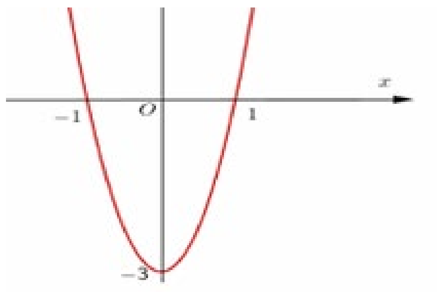
A. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

B. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ và $(2;+\infty)$

C. Hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị.

D. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 119. Cho hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.



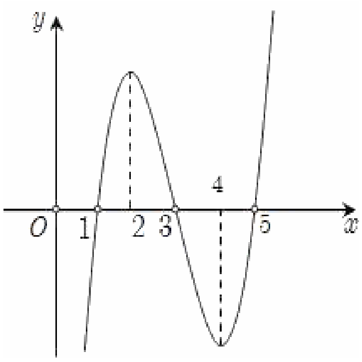
A. Hàm số $y=f(x)$ có 2 cực trị.

B. $f\left(\frac{1}{2}\right) < f\left(\frac{-1}{2}\right)$.

C. Hàm số $y = f(x)$ giảm trên khoảng $(-1;1)$.

D. Hàm số $y = f(x)$ giảm trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Câu 120. Cho hàm số $y = f(x)$. Biết $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



A. Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.

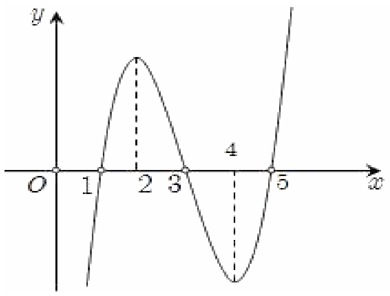
B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

C. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

D. Đồ thị hàm số $f(x)$ chỉ có hai điểm cực trị và chúng nằm về hai phía của trục hoành.

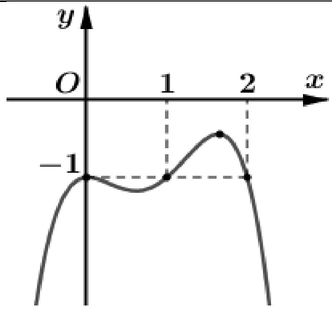
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 121. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hàm số $y = f(x)$ đồng biến và nghịch biến trên khoảng nào?

Câu 122. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



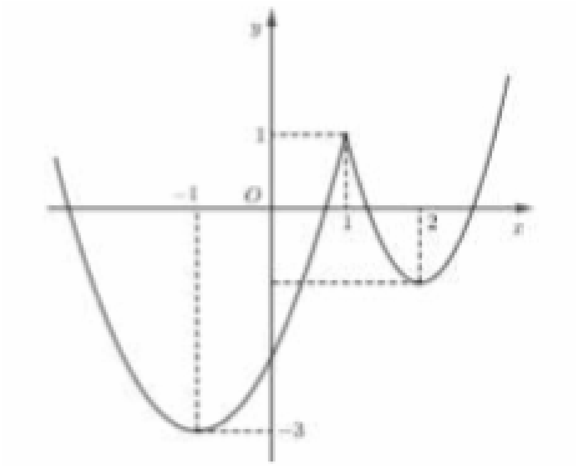
Hàm số $y = f(x)$ đồng biến và nghịch biến trên khoảng nào?

Câu 123. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm $f'\left(x\right)$ như sau :

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

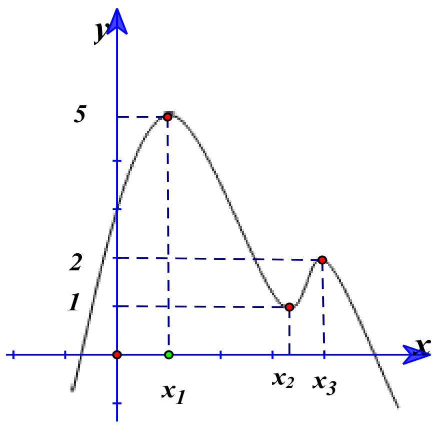
Hàm số $y = f(x)$ đồng biến và nghịch biến trên khoảng nào?

Câu 124. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



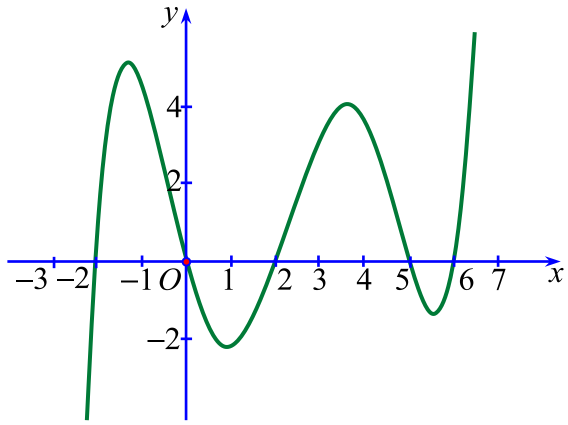
Hàm số $y = f(x)$ có mấy cực đại

Câu 125. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



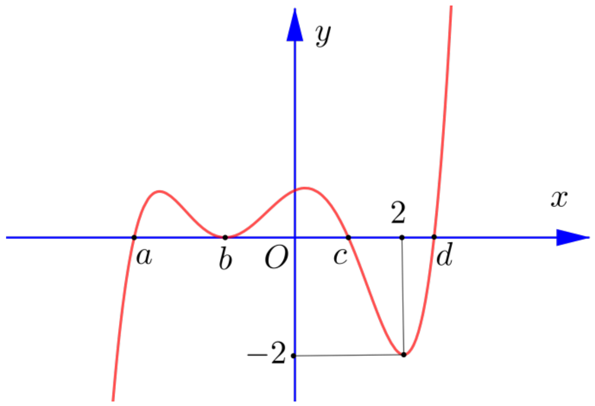
Hàm số $y = f(x)$ có mấy cực trị ?

Câu 126. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hàm số $y=f\left(x\right)$ có mấy cực tiểu ?

Câu 127. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm đa thức có đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ



Hàm số $y=f\left(x\right)$ có mấy cực trị ?

Câu 128. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ Biết hàm số $y=f'\left(x\right)$ có bảng xét dấu sau

x	$-\infty$		-3		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x\right)$ là bao nhiêu?

Câu 129. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x\right)$

Câu 130. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=x\left(x+2\right)^4\left(x^2+4\right)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ là

CHƯƠNG 1
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1
TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

1. Tính đơn điệu của hàm số

a. Khái niệm tính đơn điệu của hàm số

Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định trên tập $K \subset \mathbb{R}$, với K là một khoảng, nửa khoảng hoặc đoạn.

Hàm số $y = f\left(x\right)$ gọi là đồng biến (tăng) trên K nếu mọi x_1, x_2 thuộc K mà $x_1 < x_2$ thì $f\left(x\right)_1 < f\left(x_2\right)$

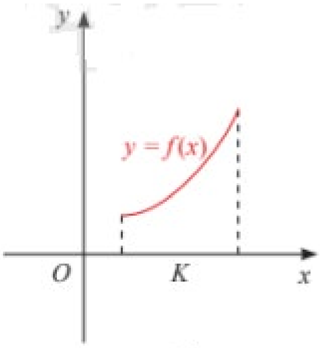
.

Hàm số $y = f\left(x\right)$ gọi là nghịch biến (tăng) trên K nếu mọi x_1, x_2 thuộc K mà $x_1 < x_2$ thì $f\left(x\right)_1 > f\left(x_2\right)$.

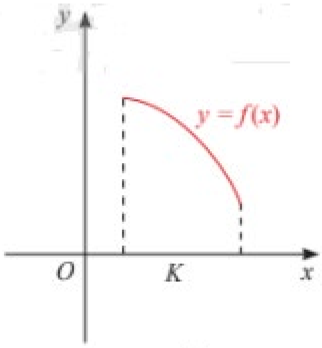
Chú ý:

Nếu hàm số $y = f\left(x\right)$ đồng biến trên K thì đồ thị của nó đi lên từ trái sang phải (Hình a).

Nếu hàm số $y = f\left(x\right)$ nghịch biến trên K thì đồ thị của nó đi xuống từ trái sang phải (Hình b).



a)



b)

Hàm số $y = f\left(x\right)$ đồng biến hoặc nghịch biến trên K thì gọi chung là đơn điệu trên K.

Định lí

Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm trên tập $K \subset \mathbb{R}$, với K là một khoảng, nửa khoảng hoặc đoạn.

• Nếu $f'\left(x\right) > 0,\ \forall x \in K$ thì hàm số $y = f\left(x\right)$ đồng biến trên K.

• Nếu $f'\left(x\right) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số $y = f\left(x\right)$ nghịch biến trên K.

Chú ý: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm trên tập $K \subset \mathbb{R}$, với K là một khoảng, nửa khoảng hoặc đoạn.

• Nếu $f'\left(x\right) \geq 0,\ \forall x \in K$ và $f'\left(x\right) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của K thì hàm số $y = f\left(x\right)$ đồng biến trên K.

- Nếu $f'(x)\le 0,\ \forall x\in K$ và $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của K thì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên K.
- Nếu $f'(x)=0,\ \forall x\in K$ và $f'(x)=0$ thì hàm số $y=f(x)$ không đổi trên K.

b. Sử dụng bảng biến thiên xét tính đơn điệu của hàm số

Để xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $y=f(x)$, ta có thể thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số $y=f(x)$.

Bước 2: Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i\ (i=1,2,3,...,n)$ tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

Bước 3: Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên để xét dấu $y'=f'(x)$.

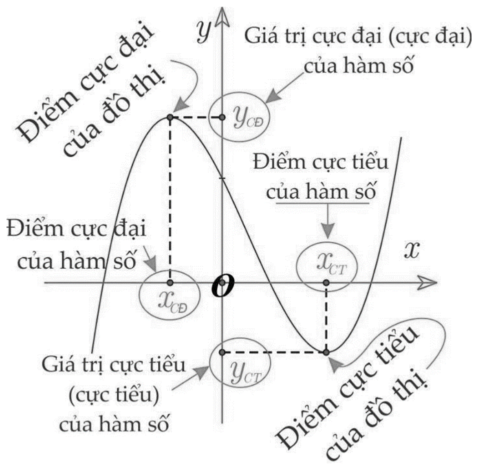
Bước 4: Dựa vào bảng biến thiên, nêu kết luận các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số.

2. Cực trị của hàm số

a. Khái niệm: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên tập $K\subset\mathbb{R}$, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng và $x_0\in\mathbb{R}, x_1\in K$.

- x_0 được gọi là **điểm cực đại** của hàm số $y=f(x)$ nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_o sao cho $(a;b)\subset K$ và $f(x)<f(x_o),\forall x\in(a;b)\setminus\{x_o\}$. Khi đó, $f(x_o)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số $y=f(x)$, kí hiệu f_{CD}.
- x_1 được gọi là **điểm cực tiểu** của hàm số $y=f(x)$ nếu tồn tại một khoảng $(c;d)$ chứa điểm x_1 sao cho $(c;d)\subset K$ và $f(x)>f(x_1),\forall x\in(c;d)\setminus\{x_1\}$. Khi đó, $f(x_1)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số $y=f(x)$, kí hiệu f_{CT}.
- Điểm cực trị đại và điểm cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị**. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **giá trị cực trị** (hay **cực trị**)

Chú ý: Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ thì người ta nói rằng hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó, điểm $M(x_o;f(x_o))$ được gọi là điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$.



b. Tìm cực trị của hàm số

Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_o và có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_o)$ và $(x_o;b)$. Khi đó

- Nếu $f'(x)<0$ với mọi $x\in(a;x_o)$ và $f'(x)>0$ với mọi $x\in(x_o;b)$ thì hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0.
- Nếu $f'(x)>0$ với mọi $x\in(a;x_o)$ và $f'(x)<0$ với mọi $x\in(x_o;b)$ thì hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0.

Nhận xét: Để tìm điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$, ta có thể thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số $y=f(x)$.

Bước 2: Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i\,(i=1,2,3,...,n)$ tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

Bước 3: Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên để xét dấu $y'=f'(x)$.

Bước 4: Dựa vào bảng biến thiên, nêu kết luận về các điểm cực trị của hàm số.

CHỦ ĐỀ 1

XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Để xét tính đồng biến, nghịch biến và điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x\right)$, ta có thể thực hiện các bước sau:

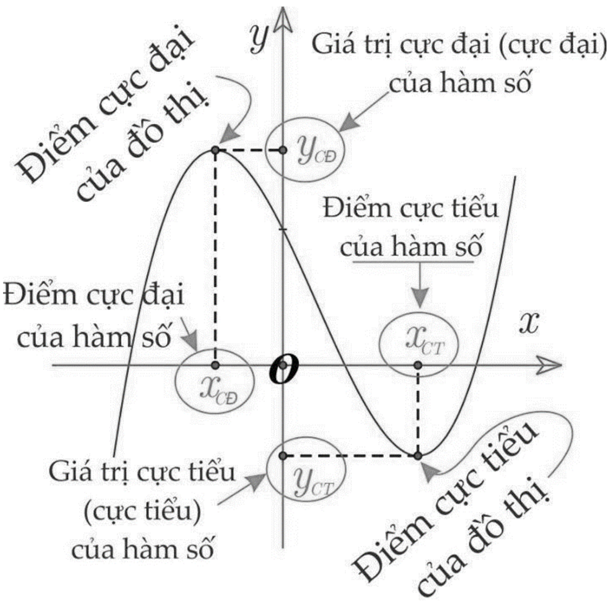
Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số $y=f\left(x\right)$.

Bước 2: Tính đạo hàm $f'\left(x\right)$. Tìm các điểm $x_i\left(i=1,2,3,...,n\right)$ tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

Bước 3: Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên để xét dấu $y'=f'(x)$.

Bước 4: Dựa vào bảng biến thiên, nêu kết luận các khoảng đồng biến, nghịch biến và các điểm cực trị của hàm số.

Chú ý:



DẠNG 1
XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ KHI BIẾT BẢNG BIẾN THIÊN HOẶC ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y=f\left(x\right)$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(1;+\infty\right)$. **B.** $\left(0;1\right)$. **C.** $\left(-1;0\right)$. **D.** $\left(0;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B.

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(0;1\right)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-1;+\infty\right)$. **B.** $\left(-1;4\right)$. **C.** $\left(0;1\right)$. **D.** $\left(-1;0\right)$

Lời giải

Chọn D.

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đã cho đồng biến trên $\left(-1;0\right)$ và $\left(1;+\infty\right)$

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-1;0\right)$ **B.** $\left(-\infty;0\right)$ **C.** $\left(1;+\infty\right)$ **D.** $\left(0;1\right)$

Lời giải

Chọn D.

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(0;1)$ và $(-\infty;-1)$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;1)$ **B.** $(1;+\infty)$ **C.** $(-\infty;1)$ **D.** $(-1;0)$

Lời giải

Chọn A.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy trên khoảng $(0;1)$ thì $f'(x)>0$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;2)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy trên khoảng $(0;2)$ thì $f'(x)<0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

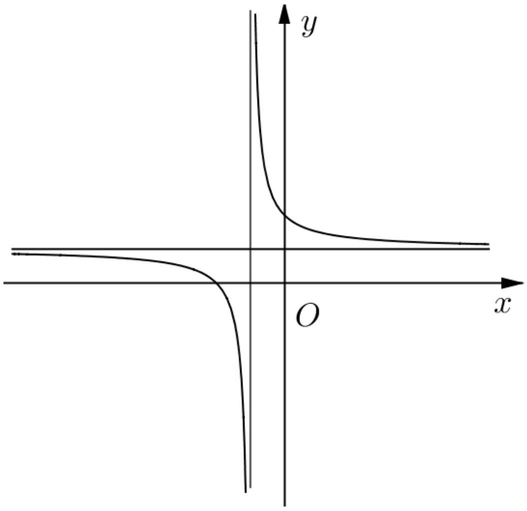
A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn D.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Câu 7. Biết hàm số $y=\dfrac{x+a}{x+1}$ (a là số thực cho trước, $a\neq 1$) có đồ thị như trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $y'<0,\forall x\in\mathbb{R}$. **B.** $y'>0,\forall x\neq -1$. **C.** $y'<0,\forall x\neq -1$. **D.** $y'>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

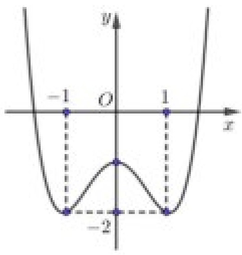
Lời giải

Chọn C.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ nên loại đáp án A và D.

Dạng đồ thị đi xuống thì $y'<0$ nên loại đáp án B.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Hàm số đã cho nghịch biến trong khoảng nào dưới đây?

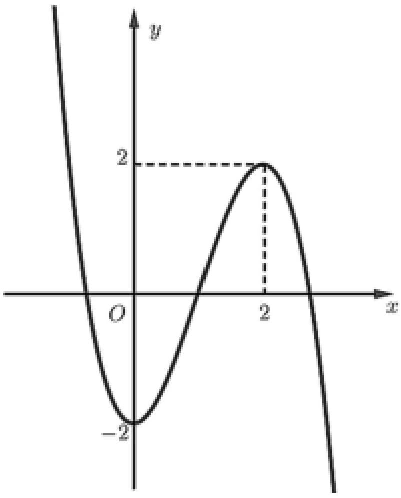
A. $(0;1)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-1;1)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: đồ thị hàm số đi xuống trên khoảng $(0;1)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



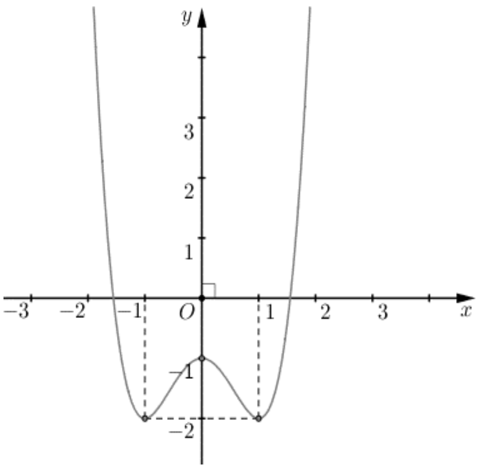
A. $(-\infty;2)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-2;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B.

Dựa vào đồ thị hàm số ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



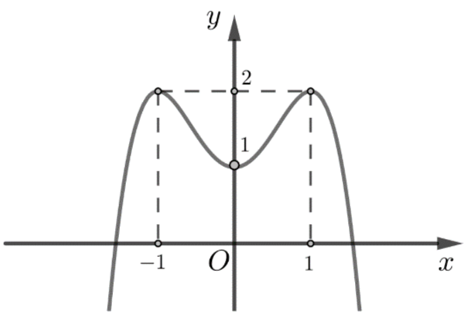
A. $\left(-\infty-1\right)$ **B.** $\left(-1;1\right)$ **C.** $\left(-1;0\right)$ **D.** $\left(0;1\right)$

Lời giải

Chọn C.

Từ đồ thị, ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-1;0\right)$ và $\left(1;+\infty\right)$.

Câu 11. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;1)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-1;0)$.

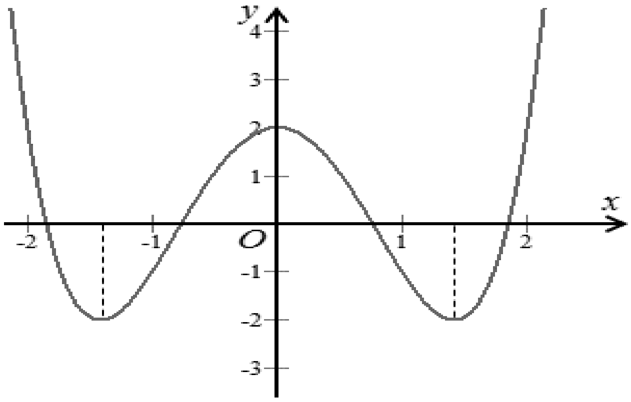
Lời giải

Chọn A.

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta có hàm số đồng biến trên hai khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$

$\Rightarrow$ chọn đáp án **A.**

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty;-1)$ **B.** $(-1;1)$ **C.** $(1;2)$ **D.** $(0;1)$

Lời giải

Chọn D.

Nhìn vào đồ thị đã cho, ta có trên khoảng $(0;1)$ đồ thị hàm số đi xuống (theo chiều từ trái qua phải) nên nghịch biến trên khoảng $(0;1)$

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-3		-2		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D.

Dựa vào bảng xét dấu đạo hàm ta thấy đạo hàm đổi dấu qua các điểm $-3,-2,3,5$.

Vậy hàm số có 4 điểm cực trị.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. -1. **B.** 5 . **C.** -3 . **D.** 1 .

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $f'(x)$ đổi dấu từ $(-)$ sang $(+)$ khi đi qua nghiệm $x=-1$ nên hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=-1$

.

Vậy hàm số đã cho có giá trị cực tiểu là $y=-3$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 3 . **B.** -1. **C.** -5 . **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng 3 tại $x=-1$.

Câu 16. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	-	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 3. **B.** -5. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B.

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị cực tiểu của hàm số bằng -5.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 3 **B.** 2 **C.** -2 **D.** -3

Lời giải

Chọn B.

Từ BBT ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x=3$ và giá trị cực đại là $y=2$.

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm dưới đây

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

.

Số điểm cực trị của hàm số là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C.

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	-∞		1		2		3		4		+∞
f '(x)		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Kết luận nào sau đây đúng

A. Hàm số có 4 điểm cực trị.

B. Hàm số có 2 điểm cực đại.

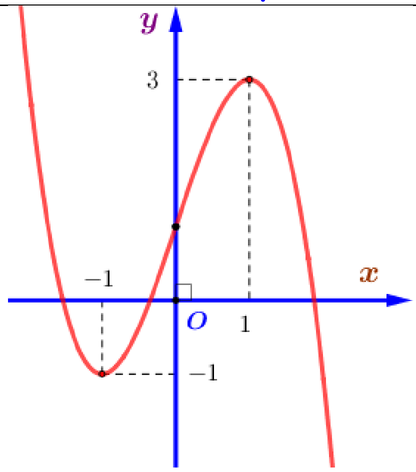
C. Hàm số có 2 điểm cực trị.

D. Hàm số có 2 điểm cực tiểu.

Lời giải

Chọn D.

Câu 20. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới.



Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ là

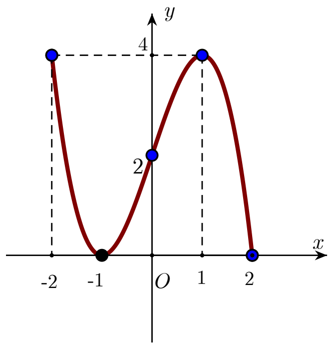
A. $(1;3)$. **B.** $(3;1)$. **C.** $(-1;-1)$. **D.** $(1;-1)$.

Lời giải

Chọn C.

Từ đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x)$, ta có điểm cực tiểu của đồ thị hàm số có tọa độ là $(-1;-1)$.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



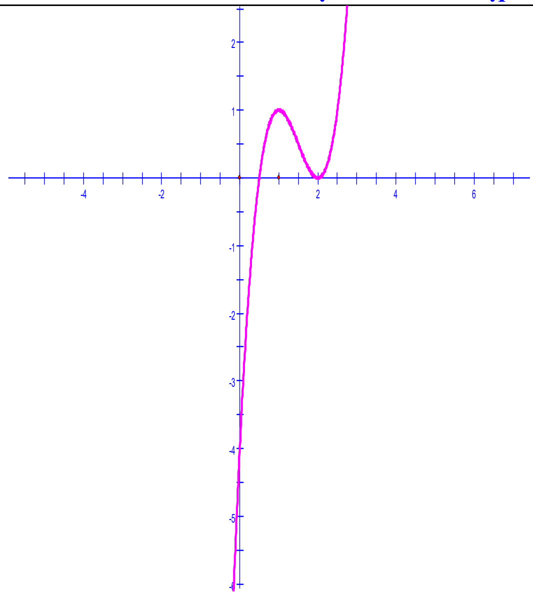
Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x = 1$. **B.** $x = -2$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = -1$.

Lời giải

Chọn D.

Câu 22. Cho đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ.



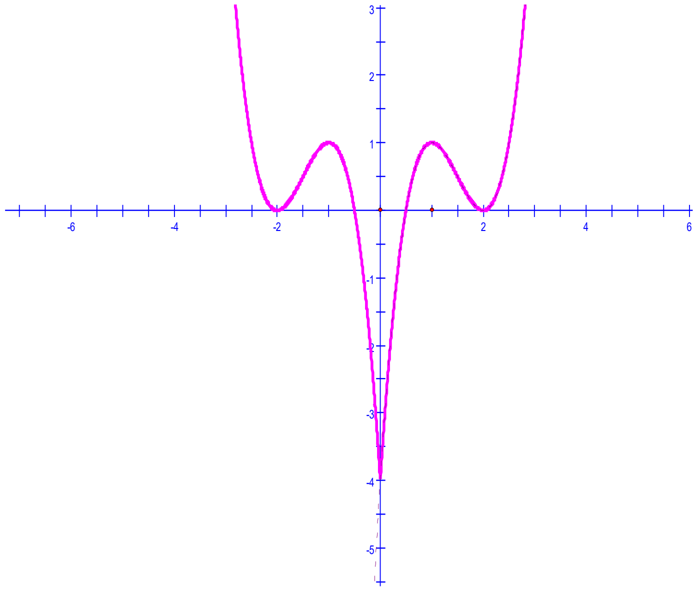
Số cực trị của đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ là:

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Lời giải

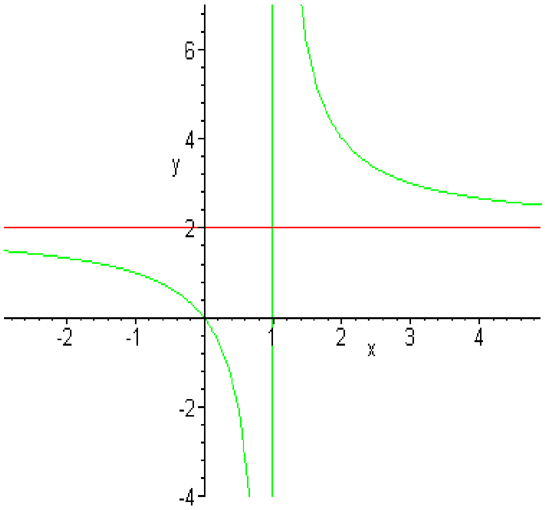
Chọn D.

Đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ là:



Từ đồ thị trên suy ra đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có 5 cực trị

Câu 23. Cho đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ.



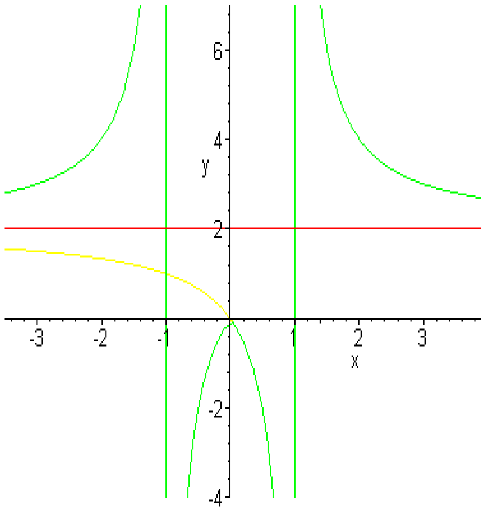
Số cực trị của đồ thị hàm số $y = f\left(|x|\right)$ là:

A. 1 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 2

Lời giải

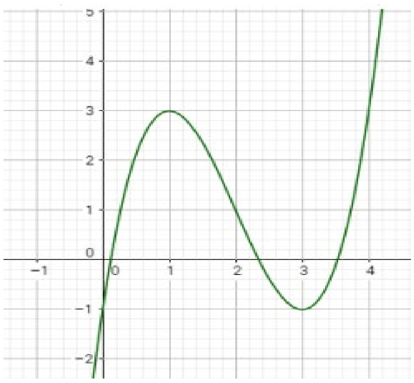
Chọn A.

Đồ thị hàm số $y = f\left(|x|\right)$ là:



Từ đồ thị trên suy ra đồ thị hàm số $y = f\left(|x|\right)$ có 1 cực trị

Câu 24. Cho đồ thị của hàm số $y = f\left(x\right)$ như hình vẽ.



Số cực trị của đồ thị hàm số $y = \left|f\left(|x|\right)\right|$ là:

A. 10 **B.** 12 **C.** 11 **D.** 13

Lời giải

Chọn C.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:

Hàm số $y = \left|f(x)\right|$ có mấy cực trị?

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;3)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Lời giải

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$. **SAI**

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;3)$. **SAI**

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;0)$. **ĐÚNG**

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$. **ĐÚNG**

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

A. Hàm số đã cho có điểm cực đại $x = 3$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho có giá trị cực đại $y = 4$

Lời giải

A. Hàm số đã cho có điểm cực đại $x = 3$. **ĐÚNG**

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$. SAI vì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ và $\left(-\frac{1}{2};3\right)$

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$. **ĐÚNG**

D. Hàm số đã cho có giá trị cực đại $y = 4$ **ĐÚNG**

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$

Lời giải

Theo bảng xét dấu thì $y' < 0$ khi $x \in (0;2)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ **SAI**

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$ **SAI**

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ **SAI**

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ **ĐÚNG**

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

A. Hàm số đạt cực đại tại $x=2$.

B. Hàm số đạt cực đại tại $x=3$.

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=4$.

D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2$.

Lời giải

Chọn A.

A. Hàm số đạt cực đại tại $x=2$. **ĐÚNG**

B. Hàm số đạt cực đại tại $x=3$. **SAI**

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=4$. **ĐÚNG**

D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2$. **SAI**

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên .

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$.

C. Hàm số có giá trị cực tiểu là $-\frac{1}{3}$.

D. Hàm số không có cực trị.

Lời giải

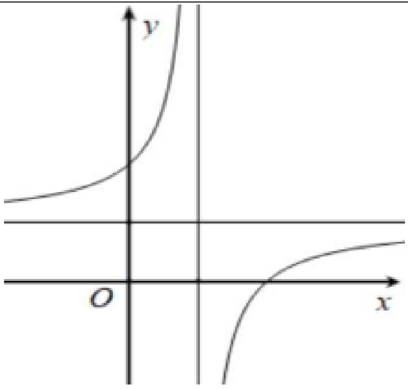
A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$. **SAI**

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$. **SAI**

C. Hàm số có giá trị cực tiểu là $-\frac{1}{3}$. **ĐÚNG**

D. Hàm số không có cực trị. **SAI**

Câu 31. Biết hàm số $y=\frac{x+a}{x-1}$ (a là số thực cho trước, $a\neq -1$) có đồ thị như trong hình vẽ sau



A. $y' > 0, \forall x \neq 1$.

B. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

C. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

D. $y' < 0, \forall x \neq 1$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số đã cho là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{-1-a}{(x-1)^2}, \forall x \neq 1$.

Từ đồ thị của hàm số suy ra hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng xác định vì vậy $y' > 0, \forall x \neq 1$

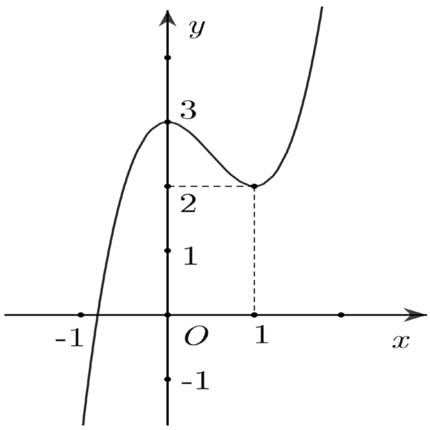
A. $y' > 0, \forall x \neq 1$. **ĐÚNG**

B. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ **SAI**

C. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ **SAI**

D. $y' < 0, \forall x \neq 1$. **SAI**

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$

B. Hàm số đạt cực trị tại các điểm $x = 0$ và $x = 1$

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$ và $(1;+\infty)$

Lời giải

Từ đồ thị, ta thấy

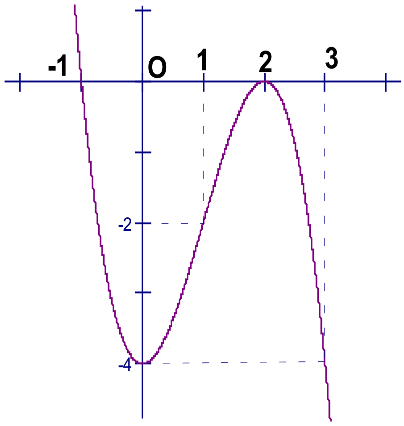
A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ **ĐÚNG**

B. Hàm số đạt cực trị tại các điểm $x = 0$ và $x = 1$ **ĐÚNG**

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$ **ĐÚNG**

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$ và $(1;+\infty)$ **SAI**

Câu 33. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng$(-4;2)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$ và $(2;3)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-4;1)$.

Lời giải

Từ đồ thị, ta thấy

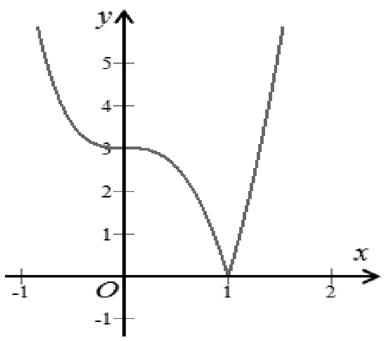
A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$. **SAI**

B. Hàm số đồng biến trên khoảng$(-4;2)$. **SAI**

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$ và $(2;3)$. **ĐÚNG**

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-4;1)$. **SAI**

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

Lời giải

Chọn D.

Nhìn vào đồ thị đã cho, ta có trên khoảng $(-\infty;1)$ đồ thị hàm số đi xuống (theo chiều từ trái qua phải) nên nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$. Trên khoảng $(1;+\infty)$ đồ thị hàm số đi lên (theo chiều từ trái qua phải) nên đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;2)$. **SAI**

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$. **ĐÚNG**

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$. **SAI**

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$. **ĐÚNG**

Câu 35. Cho hàm số $y=|f(x)|$ có đồ thị như hình vẽ:

A. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ chỉ có điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.

B. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực tiểu và một điểm cực đại.

C. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bốn điểm cực trị.

D. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu.

Lời giải

Có điểm cực tiểu $(-1;0),(2;0)$ và cực đại $(1;4)$

A. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ chỉ có điểm cực tiểu và không có điểm cực đại. **SAI**

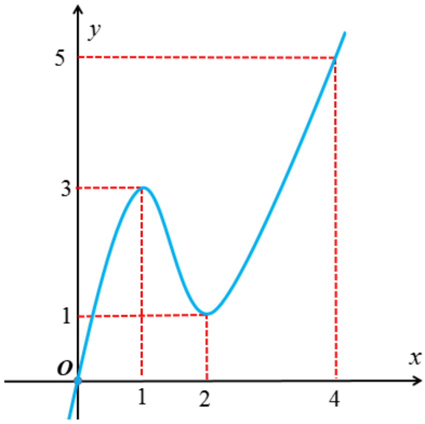
B. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực tiểu và một điểm cực đại. **SAI**

C. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bốn điểm cực trị. **SAI**

D. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu. **ĐÚNG**

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 36. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f\left(x\right)$.

b) Tìm điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$.

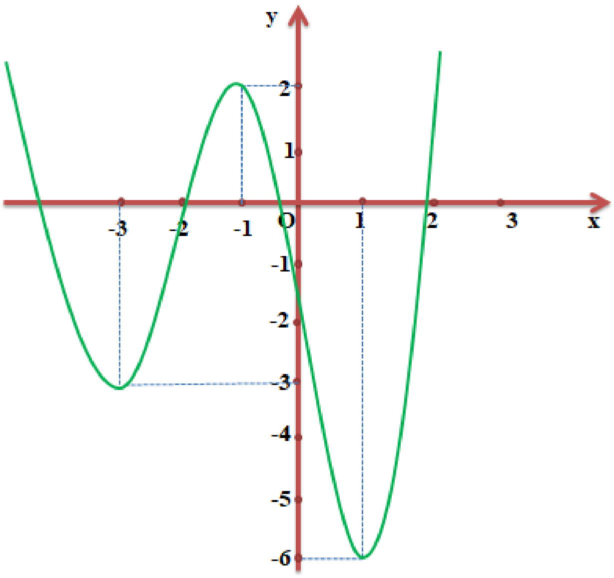
Lời giải

Nhìn vào đồ thị đã cho, ta có:

a) hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;1\right)$ và $\left(2;+\infty\right)$; nghịch biến trên khoảng $\left(1;2\right)$

b) đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $\left(2;1\right)$; điểm cực đại $\left(1;3\right)$

Câu 37. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f\left(x\right)$.

b) Tìm điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$.

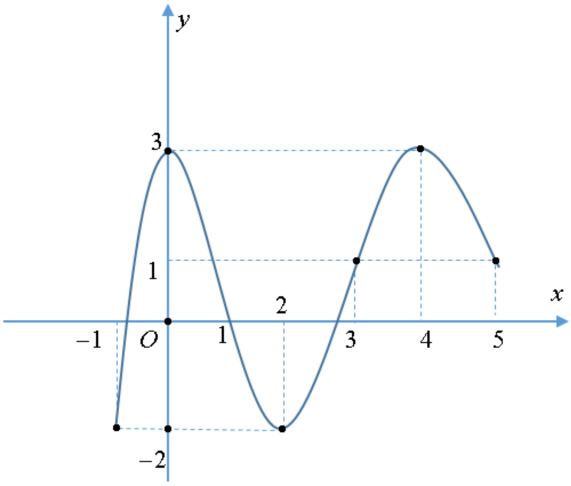
Lời giải

Nhìn vào đồ thị đã cho, ta có:

a) hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-3;-1\right)$ và $\left(1;+\infty\right)$; nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-3\right)$ và $\left(-1;1\right)$

b) đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $\left(-3;3\right)$ và $\left(1;-6\right)$; điểm cực đại $\left(-1;2\right)$

Câu 38. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\left[-1;5\right]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = f\left(x\right)$.

b) Tìm điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$.

Lời giải

Nhìn vào đồ thị đã cho, ta có:

a) hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-1;0\right)$ và $\left(2;4\right)$; nghịch biến trên khoảng $\left(0;2\right)$ và $\left(4;5\right)$

b) đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $\left(2;-2\right)$; điểm cực đại $\left(0;3\right)$ và $\left(4;3\right)$

Câu 39. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

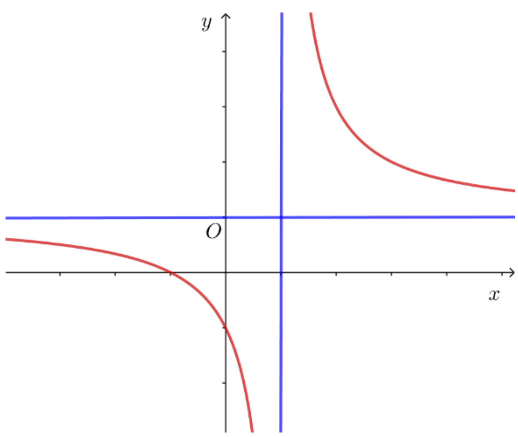
Hàm số nghịch biến trong khoảng nào?

Lời giải

Đáp án $\left(-1;0\right)$ **và** $\left(0;1\right)$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(-1;0\right)$ và $\left(0;1\right)$

Câu 40. Biết hàm số $y = \dfrac{x+a}{x-1}$ (a là số thực cho trước và $a \neq -1$) có đồ thị như trong hình bên.



Tìm giá trị số thực a

Lời giải

Đáp án $a > -1$

TXĐ : $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Khi đó: $y' = \dfrac{-1-a}{(x-1)^2}$ $\forall x \neq 1$.

Hai nhánh của đồ thị có chiều đi xuống nên

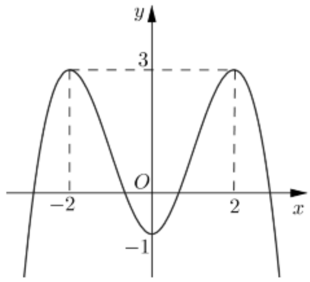
$y' < 0, \forall x \neq 1$.

$\Leftrightarrow \dfrac{-1-a}{(x-1)^2} < 0$

$\Leftrightarrow -1-a < 0$

$\Leftrightarrow a > -1$

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào?



Lời giải

Đáp án $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm điểm cực tiểu của hàm số đã cho .

Lời giải

Đáp án $x = 1$

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là $x = 1$.

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Tìm giá trị cực tiểu của hàm số đã cho

Lời giải

Đáp án $y=1$

Câu 44. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Tìm số điểm cực trị của hàm số đã cho

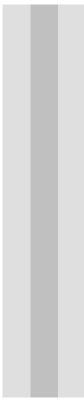
Lời giải

Đáp án 4

Dựa vào bảng xét dấu, $f'(x)$ đổi dấu khi qua các điểm $x\in\{-2;-1;1;4\}$.

Vậy số điểm cực trị của hàm số đã cho là 4 .

Câu 45. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



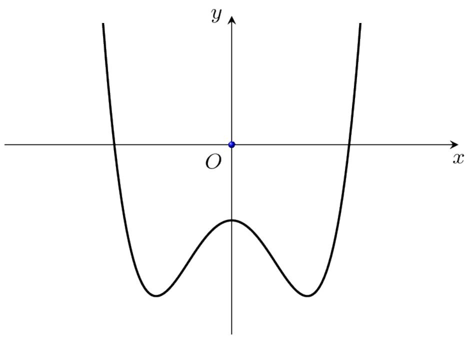
Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có mấy điểm cực trị?

Lời giải

Đáp án 2

Dựa vào đồ thị ta suy ra số điểm cực trị của hàm số đã là 2 .

Câu 46. Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như đường cong trong hình bên.



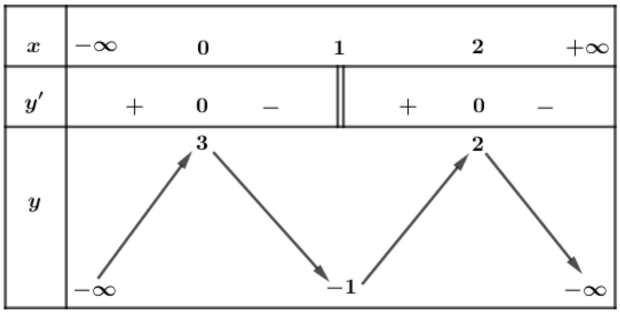
Số điểm cực trị của hàm số đã cho là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án 3

Dựa vào đồ thị ta suy ra số điểm cực trị của hàm số đã là 3 .

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau ?



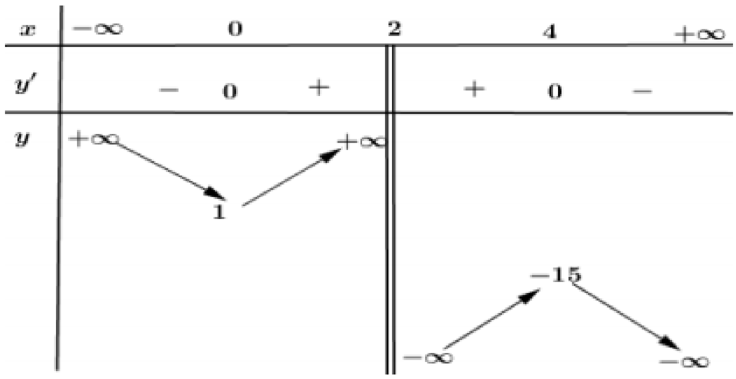
Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

Lời giải

Đáp án 3

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra số điểm cực trị của hàm số đã là 3 với 2 cực đại $(0;3);(2;2)$ và 1cực tiểu $(1;-1)$

Câu 48. Cho đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.



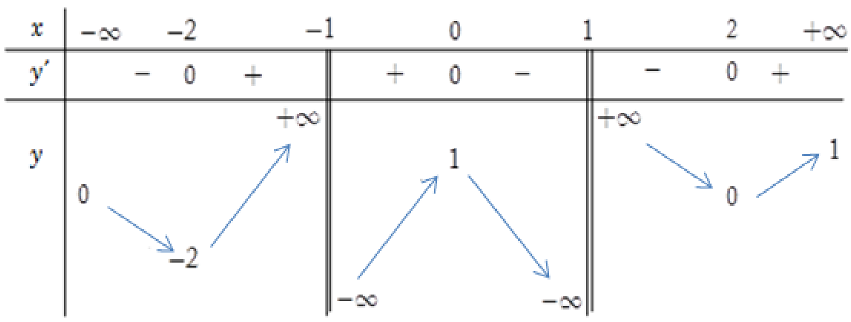
Số cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$?

Lời giải

Đáp án 2

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra số điểm cực trị của hàm số đã là 2 với 1 cực đại $(4;-15)$ và 1cực tiểu $(0;1)$

Câu 49. Giả sử tồn tại hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình bên.



Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu cực trị?

Lời giải

Đáp án 3

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra số điểm cực trị của hàm số đã là 3 với 1 cực đại $(0;1)$ và 2 cực tiểu $(-2;2);(2;0)$

Câu 50. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y=|f(x)|$ có mấy cực trị?

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Lời giải

Đáp án 3

Đồ thị $y=|f(x)|$ là phần đối xứng phần nằm dưới trục Ox của đồ thị $y=f(x)$ nên có 3 cực trị

DẠNG 2

XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ $y=f(x)$ KHI BIẾT HÀM SỐ $y=f(x)$

Để xét tính đồng biến, nghịch biến và điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$, ta có thể thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số $y=f(x)$.

Bước 2: Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i\ (i=1,2,3,...,n)$ tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

Bước 3: Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên để xét dấu $y'=f'(x)$.

Bước 4: Dựa vào bảng biến thiên, nêu kết luận các khoảng đồng biến, nghịch biến và các điểm cực trị của hàm số.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 51. Chọn phát biểu đúng khi nói về tính đơn điệu của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, a \neq 0$.

A. Hàm số có thể đơn điệu trên R.

B. Khi a > 0 thì hàm số luôn đồng biến.

C. Hàm số luôn tồn tại đồng thời khoảng đồng biến và nghịch biến.

D. Khi a < 0 hàm số có thể nghịch biến trên R.

Lời giải

Chọn C.

Vì $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x\left(2ax^2 + b\right)$ luôn đổi dấu khi $a \neq 0$.

Câu 52. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

D. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn A.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -3x^2 + 6x - 3 = -3(x-1)^2 \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Câu 53. Hỏi hàm số $y = \frac{3}{5}x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 2$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(-\infty;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. $y' = 3x^4 - 12x^3 + 12x^2 = 3x^2(x-2)^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Câu 54. Cho hàm số $y = -2x^3 + 3x^2 + 2$. Khẳng định nào sau đây là đúng về tính đơn điệu của hàm số

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A.

+ TXĐ: $D = R.$

+ $y' = -6x^2 + 6x.$

+ $y'=0 \Leftrightarrow -6x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$.

Câu 55. Tìm khoảng nghịch biến của hàm số $y=x^3+3x^2-9x$

A. $(-\infty;-3)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-3;1)$. **D.** $(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C.

$y'=3x^2+6x-9$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	27	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có hàm số nghịch biến trên $(-3;1)$.

Câu 56. Hỏi hàm số $y=x^3-3x$ nghịch biến trên khoảng nào ?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $y'=3x^2-3$;

$y'=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Hàm số $y=x^3-3x$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Câu 57. Hỏi hàm số nào sau đây luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $h(x)=x^4-4x^2+4$. **B.** $g(x)=x^3+3x^2+10x+1$.

C. $f(x)=-\frac{4}{5}x^5+\frac{4}{3}x^3-x$.   **D.** $k(x)=x^3+10x-\cos^2 x$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $f'(x)=-4x^4+4x^2-1=-(2x^2-1)^2\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 58. Hỏi hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+5}{x+1}$ nghịch biến trên các khoảng nào ?

A. $(-\infty;-4)$ và $(2;+\infty)$.   **B.** $(-4;2)$.

C. $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.   **D.** $(-4;-1)$ và $(-1;2)$.

Lời giải

Chọn D.

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. $y'=\dfrac{x^2+2x-8}{(x+1)^2}$. Giải $y'=0\Rightarrow x^2+2x-8=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\x=-4\end{array}\right.$

y' không xác định khi $x=-1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-4		-1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-11	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-4;-1)$ và $(-1;2)$

Câu 59. Xét các mệnh đề sau:

(I). Hàm số $y=-(x-1)^3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

(II). Hàm số $y=\ln(x-1)-\dfrac{x}{x-1}$ đồng biến trên tập xác định của nó.

(III). Hàm số $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hỏi có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 3.   **B.** 2.   **C.** 1.   **D.** 0.

Lời giải

Chọn A.

(I) $y'=\left(-(x-1)^3\right)'=-3(x-1)^2\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$

(II) $y'=\left(\ln(x-1)-\dfrac{x}{x-1}\right)'=\dfrac{x}{(x-1)^2}>0,\forall x>1$

(III) $y'=\dfrac{1.\sqrt{x^2+1}-x.\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{x^2+1}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x.\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^2+1}=\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}>0,\forall x\in\mathbb{R}$

Câu 60. Hàm số $y=x^3-3x^2-9x+1$ đồng biến trên mỗi khoảng:

A. $(-1;3)$ và $(3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$ và $(1;3)$.

C. $(-\infty;3)$ và $(3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $y'=3x^2-6x-9$ nên $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu của y' là

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Do đó hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$.

Câu 61. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x=2$ và đạt cực tiểu tại $x=0$.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$ và đạt cực đại $x=0$.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x=-2$ và cực tiểu tại $x=0$.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và cực tiểu tại $x=-2$.

Lời giải

Chọn B.

$y'=3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$ và đạt cực đại tại $x=0$

Câu 62. Hàm số nào sau đây đạt cực đại tại $x=1$?

A. $y = x^5 - 5x^2 + 5x - 13$.

B. $y = x^4 - 4x + 3$.

C. $y = x + \dfrac{1}{x}$.

D. $y = 2\sqrt{x} - x$.

Lời giải

Chọn D.

Hàm số $y = 2\sqrt{x} - x$ có TXĐ $D = [0;+\infty)$

$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) = -\dfrac{1}{2} < 0 \end{cases}$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

Câu 63. Hàm số nào sau đây có đúng hai điểm cực trị?

A. $y = x + \dfrac{1}{x+1}$.

B. $y = x^3 + 3x^2 + 7x - 2$.

C. $y = -x^4 - 2x^2 + 3$.

D. $y = x - \dfrac{2}{x+1}$.

Lời giải

Chọn A.

Hàm số $y = x + \dfrac{1}{x+1}$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$$y' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$$

y' đổi dấu khi x chạy qua -2 và 0 nên hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

Câu 64. Hàm số nào sau đây không có cực trị?

A. $y = 2x + \dfrac{2}{x+1}$.

B. $y = x^3 + 3x^2$.

C. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.

D. $y = \dfrac{x+1}{x-2}$.

Lời giải

Chọn D.

Hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}\setminus\{2\}$

$y' = -\dfrac{3}{(x-2)^2} < 0, \forall x \in D$ nên hàm số không có cực trị

Câu 65. Cho hàm số $y = 3x^4 - 6x^2 + 1$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $y_{CD} = -2$.

B. $y_{CD} = 1$.

C. $y_{CD} = -1$.

D. $y_{CD} = 2$.

Lời giải

Chọn B.

$$y' = 12x^3 - 12x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và $y_{CD}=1$.

Câu 66. Biết đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ có hai điểm cực trị A,B . Khi đó phương trình đường thẳng AB là:

A. $y=x-2$. **B.** $y=2x-1$. **C.** $y=-2x+1$. **D.** $y=-x+2$.

Lời giải

Chọn C.

Phương pháp tự luận:

$$y'=3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$$

$\Rightarrow A(1;-1),\mathrm{B}(-1;3)$ $\Rightarrow$ Phương trình $AB:y=-2x+1$

Phương pháp trắc nghiệm:

Cách 1:

Lấy $\dfrac{y}{y'}=\dfrac{x^3-3x+1}{3x^2-3}=\left(\dfrac{1}{3}x\right).\left(3x^2-3\right)-2x+1$

$\Rightarrow$ Phương trình $AB:y=-2x+1$

Cách 2:

Lấy $y-\dfrac{y'.y''}{18a}=x^3-3x+1-\dfrac{\left(3x^2-3\right).6x}{18}=-2x+1$

$\Rightarrow$ Phương trình $AB:y=-2x+1$

Cách 3: Bấm máy tính:

Bước 1 : Bấm Mode 2 (CMPLX)

Bước 2 : $x^3-3x+1-\left(3x^2-3\right)\left(\dfrac{x}{3}\right)$

Bước 3 : CALC $x=i$

Kết quả : $1-2i\Rightarrow$ phương trình AB: $y=1-2x$

Câu 67. Đồ thị hàm số $y=x^3-6x^2+9x-1$ có tọa độ điểm cực đại là:

A. $(3;0)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(1;4)$. **D.** $(3;1)$.

Lời giải

Chọn B.

$y'=3x^2-12x+9$.

$$y'=0\Leftrightarrow 3x^2-12x+9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$$

Hàm số đạt cực đại tại $x=1\Rightarrow y_{CD}=3$.

Câu 68. Giá trị cực tiểu của hàm số $y=x^4-2x^2+5$ là:

A. 5. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B.

$y'=4x^3-4x=4x(x^2-1)$

$y'=0\Leftrightarrow 4x(x^2-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\end{array}\right.$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=\pm1$ và $y_{CT}=4$.

Câu 69. Hàm số $y=-3\sqrt[3]{x^2}+2$ có bao nhiêu cực đại?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C.

+ Ta có: $y'=-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$. Dễ dàng nhận thấy $x=0$ là điểm tới hạn của hàm số, và y' đổi dấu khi đi qua $x=0$.

Nên $x=0$ là cực trị của hàm số. Hơn nữa, ta có hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$ và nghịch biến trên $(0;+\infty)$. Do đó, $x=0$ là cực đại của hàm số.

Câu 70. Hiệu số giữa giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y=x^3-3x^2+4$ là:

A. 4. **B.** -2. **C.** 2. **D.** -4.

Lời giải

Chọn A.

$y'=3x^2-6x=3x(x-2)$

$y'=0\Leftrightarrow 3x(x-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

$y_{CD}-y_{CT}=y(0)-y(2)=4$.

Câu 71. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$. Nếu đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị là gốc tọa độ và điểm $A(-1;-1)$ thì hàm số có phương trình là:

A. $y=2x^3-3x^2$. **B.** $y=-2x^3-3x^2$.

C. $y=x^3+3x^2+3x$. **D.** $y=x^3-3x-1$.

Lời giải

Chọn B.

$y'=3ax^2+2bx+c$

+ Đồ thị hàm số có điểm cực trị là gốc tọa độ, ta có:

$\begin{cases}y'(0)=0\\y(0)=0\end{cases}\Leftrightarrow c=d=0$

+ Đồ thị hàm số có điểm cực trị là $A(-1;-1)$, ta có:

$\begin{cases} y'(-1)=0 \\ y(-1)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-2b=0 \\ b-a=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-3 \end{cases}$

Vậy hàm số là: $y=-2x^3-3x^2$.

Câu 72. Điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\sqrt{1+4x-x^4}$ có tọa độ là:

A. $(1;2)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;4)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $y'=\dfrac{2-2x^3}{\sqrt{1+4x-x^4}}$. $y'=0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y(1)=2$

Câu 73. Biết đồ thị hàm số $y=x^3-2x^2+ax+b$ có điểm cực trị là $A(1;3)$. Khi đó giá trị của $4a-b$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $y'=3x^2-4x+a$

Đồ thị hàm số có điểm cực trị là $A(1;3)$, ta có: $\begin{cases} y'(1)=-1+a=0 \\ y(1)=-1+a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$

Khi đó ta có, $4a-b=1$.

Câu 74. Cho hàm số $y=x^3-3x^2-2$. Gọi a,b lần lượt là giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số đó. Giá trị của $2a^2+b$ là:

A. -8. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C.

$y'=3x^2-6x$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Ta có: $a=y(0)=-2; b=y(2)=-6 \Rightarrow 2a^2+b=2$.

Câu 75. Cho hàm số $y=x^4-5x^2+3$ đạt cực trị tại x_1,x_2,x_3. Khi đó, giá trị của tích $x_1x_2x_3$ là:

A. 0. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A.

+ Hàm số trùng phương luôn đạt cực trị tại $x=0$. Do đó: $x_1x_2x_3=0$.

Câu 76. Trong các hàm số sau, hàm số nào chỉ có cực đại mà không có cực tiểu?

A. $y=-10x^4-5x^2+7$. **B.** $y=-17x^3+2x^2+x+5$.

C. $y=\dfrac{x-2}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$.

Lời giải

Chọn A.

Hàm số $y=-10x^4-5x^2+7$ có $y'=-40x^3-10x=0\Leftrightarrow x=0$ và $y''(0)=-10<0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

Câu 77. Hàm số bậc ba có thể có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0 hoặc 1 hoặc 2. **B.** 1 hoặc 2. **C.** 0 hoặc 2. **D.** 0 hoặc 1.

Lời giải

Chọn C.

Hàm số bậc ba: $y=ax^3+bx^2+cx+d,(a\neq 0)$ có TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$y'=3ax^2+2bx+c$

$\Delta'=b^2-3ac$

Nếu $\Delta'\leq 0$ thì y' không đổi dấu trên $\mathbb{R}$ nên hàm số không có cực trị.

Nếu $\Delta'>0$ thì phương trình $y'=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 và y' đổi dấu khi x chạy qua x_1,x_2 nên hàm số đạt cực trị tại x_1,x_2.

Câu 78. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$. Hỏi hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi nào?

A. $\left[\begin{array}{l} a=b=c=0 \\ a<0;b^2-3ac<0 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} a=b=0,c>0 \\ a>0;b^2-3ac\geq 0 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} a=b=0,c>0 \\ a<0;b^2-3ac\leq 0 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} a=b=0,c>0 \\ a>0;b^2-3ac\leq 0 \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn D.

$$y'=3ax^2+2bx+c\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a=b=0,c>0 \\ a>0;b^2-3ac\leq 0 \end{array}\right.$$

Câu 79. Hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d,a\neq 0$ có khoảng nghịch biến chứa hữu hạn số nguyên nếu

A. $\begin{cases} a>0 \\ b^2-3ac>0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} a<0 \\ b^2-3ac<0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} a<0 \\ b^2-3ac>0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} a>0 \\ b^2-3ac<0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A.

Hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d,a\neq 0$ có khoảng đồng biến chứa hữu hạn số nguyên thì chỉ được đồng biến trong khoảng $(x_1;x_2)$ với x_1,x_2 là nghiệm của phương trình $y'=0$.

Tức là phải có bảng xét dấu y' như sau: Vậy $\begin{cases} a>0 \\ \Delta_{y'}>0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a>0 \\ b^2-3ac>0 \end{cases}$.

Câu 80. Hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d,a\neq 0$ có khoảng đồng biến chứa hữu hạn số nguyên nếu

A. $\begin{cases} a>0 \\ b^2-3ac>0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} a<0 \\ b^2-3ac>0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} a<0 \\ b^2-3ac<0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} a>0 \\ b^2-3ac<0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B.

Hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d, a\neq 0$ có khoảng đồng biến chứa hữu hạn số nguyên thì chỉ được đồng biến trong khoảng $(x_1;x_2)$ với x_1,x_2 là nghiệm của phương trình $y'=0$.

Tức là phải có bảng xét dấu y’ như sau: Vậy $\begin{cases} a<0 \\ \Delta_{y'}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ b^2-3ac>0 \end{cases}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 81. Giả sử hàm số $(C): y=f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K. Nhận xét các phát biểu sau:

A. Nếu hàm số (C) đạt cực tiểu trên khoảng K thì cũng sẽ đạt cực đại trên khoảng đó.

B. Nếu hàm số (C) có hai điểm cực tiểu thì phải có một điểm cực đại.

C. Số nghiệm của phương trình $f'(x)=0$ bằng số điểm cực trị của hàm số đã cho.

D. Hàm số có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm.

Lời giải

A. Nếu hàm số (C) đạt cực tiểu trên khoảng K thì cũng sẽ đạt cực đại trên khoảng đó. **SAI**

B. Nếu hàm số (C) có hai điểm cực tiểu thì phải có một điểm cực đại. **SAI**

C. Số nghiệm của phương trình $f'(x)=0$ bằng số điểm cực trị của hàm số đã cho. **SAI**

D. Hàm số có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm. **ĐÚNG**

A.; **B.** sai vì hàm số có thể có điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu và ngược lại. Chẳng hạn, hàm số $f(x)=x^4$ có điểm cực tiểu mà không có điểm cực đại.

C. sai. Vì $f'(x)=0$ chỉ là điều kiện cần để hàm số đạt cực trị. Nói cách khác $f'(x_0)=0$ thì chưa thể nói rằng x_0 là điểm cực trị.

D. đúng.

Câu 82. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-9x+15$.

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$.

B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

C. Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;+\infty)$.

Lời giải

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$. **ĐÚNG**

B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. **SAI**

C. Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị. **ĐÚNG**

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;+\infty)$. **SAI**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Do $y'=3x^2+6x-9=3(x-1)(x+3)$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-\infty$	

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;1)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ và $(1;+\infty)$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị.

Câu 83. Cho hàm số $y=-x^3-x^2+5x+4$.

A. Hàm số nghịch biến trên $\left(-\frac{5}{3};1\right)$.

B. Hàm số đồng biến trên $\left(-\frac{5}{3};1\right)$.

C. Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;-\frac{5}{3}\right)$.

D. Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Lời giải

A. Hàm số nghịch biến trên $\left(-\frac{5}{3};1\right)$. **SAI**

B. Hàm số đồng biến trên $\left(-\frac{5}{3};1\right)$. **ĐÚNG**

C. Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;-\frac{5}{3}\right)$. **SAI**

D. Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$. **SAI**

$$y=-x^3-x^2+5x+4 \Rightarrow y'=-3x^2-2x+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\frac{5}{3} \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-\infty$	

Hàm số đồng biến trên $\left(-\frac{5}{3};1\right)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-\frac{5}{3}\right)$ và $(1;+\infty)$

Câu 84. Cho hàm số $y=\dfrac{3x-1}{-4+2x}$.

A. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số luôn đồng biến trên từng khoảng xác định.

C. Đồ thị hàm số không có cực trị.

D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

Lời giải

A. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$. **SAI**

B. Hàm số luôn đồng biến trên từng khoảng xác định. **SAI**

C. Đồ thị hàm số không có cực trị. **ĐÚNG**

D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$. **ĐÚNG**

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Ta có $y'=-\dfrac{10}{(-4+2x)^2}<0, \forall x\in D$.

Câu 85. Cho hàm số $y=\sqrt{3x^2-x^3}$.

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0);(2;3)$.

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0);(2;3)$.

D. Đồ thị hàm số có hai cực trị.

Lời giải

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$. **ĐÚNG**

B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0);(2;3)$. **SAI**

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0);(2;3)$. **ĐÚNG**

D. Đồ thị hàm số có hai cực trị. **ĐÚNG**

HSXĐ: $3x^2-x^3\ge 0\Leftrightarrow x\le 3$ suy ra $D=(-\infty;3]$. $y'=\dfrac{6x-3x^2}{2\sqrt{3x^2-x^3}}$, $\forall x\in(-\infty;3)$.

Giải $y'=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

y' không xác định khi $\begin{cases}x=0\\x=3\end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		3
y'		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

Hàm số nghịch biến $(-\infty;0)$ và $(2;3)$.

Hàm số đồng biến $(0;2)$

Đồ thị hàm số có hai cực trị

Câu 86. Cho hàm số $y=|x+1|(x-2)$.

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Lời giải

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$. **ĐÚNG**

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$. **SAI**

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **ĐÚNG**

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **ĐÚNG**

$y'=\begin{cases}2x-1 & khi\quad x\ge -1\\-2x+1 & khi\quad x<-1\end{cases}$; $y'=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Câu 87. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có ba điểm cực trị.

B. Hàm số chỉ có đúng 2 điểm cực trị.

C. Hàm số không có cực trị.

D. Hàm số chỉ có đúng một điểm cực trị.

Lời giải

Chọn A.

$$y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có 1 cực đại $(0;3)$ và 2 cực tiểu $(-1;2),(1;2)$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 88. Hỏi hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x - 44$ đồng biến trên khoảng nào?

Lời giải

Đáp án: $(-1;5)$

$y' = -x^2 + 4x + 5$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 5 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{140}{3}$	$\nearrow$	$-\frac{32}{3}$	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;5)$.

Câu 89. Tìm khoảng đồng biến của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x + 4$

Lời giải

Đáp án: $(-1;3)$

$y=-x^3+3x^2+9x+4$. TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

$y'=-3x^2+6x+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Dựa vào bảng xét dấu tam thức bậc hai thấy $y'>0 \Leftrightarrow x\in(-1;3)$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;3)$.

Câu 90. Cho các hàm số sau:

$(\text{I}): y=\frac{1}{3}x^3-x^2+3x+4$; $(\text{II}): y=\frac{x-1}{x+1}$; $(\text{III}): y=\sqrt{x^2+4}$

$(\text{IV}): y=x^3+4x-\sin x$; $(\text{V}): y=x^4+x^2+2$.

Có bao nhiêu hàm số đồng biến trên những khoảng mà nó xác định?

Lời giải

Đáp án: 3

(I): $y'=x^2-2x+3=(x-1)^2+2>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

(II): $y'=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'=\frac{2}{(x+1)^2}>0,\ \forall x\neq -1$

(III): $y'=\left(\sqrt{x^2+4}\right)'=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

(IV): $y'=3x^2+4-\cos x>0, \forall x\in\mathbb{R}$

(V): $y'=4x^3+2x=2x(2x^2+1)$

Câu 91. Cho các hàm số nào sau:

1. $y=x^3+3x^2$.

2. $y=x^3-x$.

3. $y=x^4-3x^2+2$.

4. $y=x^3$.

Có bao nhiêu hàm số không có cực trị?

Lời giải

Đáp án: 1

1. $y=x^3+3x^2$.

Có $y'=3x^2\geq 0 \forall x\in R$. Do đó, hàm số này luôn đồng biến trên R. Hay nói cách khác, hàm số này không có cực trị.

2. $y=x^3-x$.

Đây là hàm số bậc 3 có $b^2 - 3ac = 3 > 0$. Do đó, hàm số này có 2 cực trị.

3. $y = x^4 - 3x^2 + 2.$

Hàm số trùng phương luôn có cực trị.

4. $y = x^3.$

Đây là hàm số bậc 3 có $b^2 - 3ac = 9 > 0$. Do đó, hàm số này có 2 cực trị.

Câu 92. Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x}$. Hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

Đáp án: Hàm số không có cực trị.

$y = \sqrt{x^2 - 2x}$. **TXĐ:** $D = (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$.

$$y' = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x}} = 0 \Leftrightarrow x = 1(l) \ .$$

y' không đổi dấu trên các khoảng xác định nên hàm số không có cực trị.

Câu 93. Cho hàm số $y = \dfrac{3x^2 + 13x + 19}{x+3}$. Tìm đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Lời giải

Đáp án: $y = 6x + 13.$

Phương pháp tự luận:

$y' = \dfrac{3x^2 + 18x + 20}{(x+3)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-9+\sqrt{21}}{3} \\ x = \dfrac{-9-\sqrt{21}}{3} \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y = 6x + 13$.

Phương pháp trắc nghiệm:

Tại điểm cực trị của đồ thị hàm số phân thức , ta có: $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Vậy phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là

$$y = \frac{\left(3x^2 + 13x + 19\right)'}{(x+3)'} \Leftrightarrow y = 6x + 13$$

Câu 94. Hàm số $y = \left|x^2 + 5x + 6\right|$ có mấy điểm cực trị ?

Lời giải

Đáp án: 3

$$y = \left|x^2 + 5x + 6\right| = \sqrt{\left(x^2 + 5x + 6\right)^2}$$

* Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R}$.

$$y'=\frac{(2x+5)(x^2+5x+6)}{\sqrt{(x^2+5x+6)^2}}\qquad \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-2;-3\}$$

Hàm số không có đạo hàm tại $x=0$ và $x=2$.

* Cho $y'=0\Leftrightarrow(2x+5)(x^2+5x+6)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+5=0\\x^2+5x+6=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{5}{2}\\x=-2\\x=-3\end{array}\right.$

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		$-\frac{5}{2}$		-2		$+\infty$
$x\ y'$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
$y=f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$-\frac{1}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

* Dựa vào bảng biến thiên:

+ Hàm số có 2 cực tiểu $(-3,0);(-2,0)$; Hàm số có 1 cực đại $\left(-\frac{5}{2},-\frac{1}{4}\right)$

DẠNG 3

XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ KHI BIẾT HÀM SỐ HOẶC BẢNG BIẾN THIÊN HOẶC ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y=f'(x)$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 95. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=(x+1)^2(x-1)^3(2-x)$. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow(x+1)^2(x-1)^3(2-x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Lập bảng xét dấu của $f'(x)$ ta được:

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$

y'		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$ $-\infty$

Vậy hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(1;2\right)$.

Câu 96. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(3-x\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f\left(x\right)$ đạt **cực đại** tại

A. $x=0$. **B.** $x=1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=3$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow(x-1)(3-x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y=f\left(x\right)$ đạt cực đại tại $x=3$.

Câu 97. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-2)^2(x-3)^3(x+5)^4$. Hỏi hàm số $y=f(x)$ có mấy điểm cực trị?

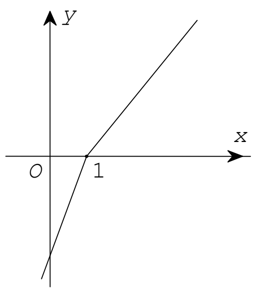
A. 2. **B.** 3. **C.**4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A.

$f'(x)$ đổi dấu khi x chạy qua -1 và 3 nên hàm số có 2 điểm cực trị.

Câu 98. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;1)$.

B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

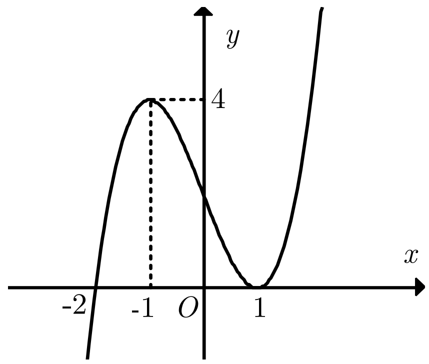
D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C.

Trên khoảng $(1;+\infty)$ đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía trên trục hoành.

Câu 99. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\ \ (a\neq 0)$. Biết rằng hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khi đó nhận xét nào sau đây là **sai**?



A. Trên $(-2;1)$ thì hàm số $f(x)$ luôn tăng.

B. Hàm $f(x)$ giảm trên đoạn $[-1;1]$.

C. Hàm $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

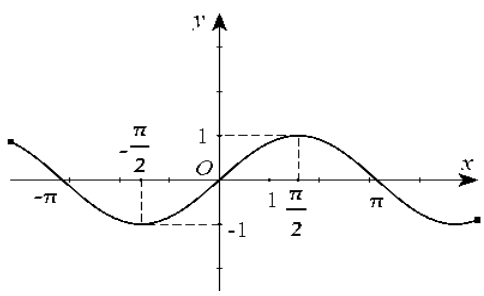
D. Hàm $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$

Lời giải

Chọn B.

Trên khoảng $[-1;1]$ đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía trên trục hoành.

Câu 100. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$. Biết $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Xét trên $(-\pi;\pi)$, khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\pi;\pi)$.

B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\pi;\pi)$.

C. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\pi;\frac{-\pi}{2}\right)$ và $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

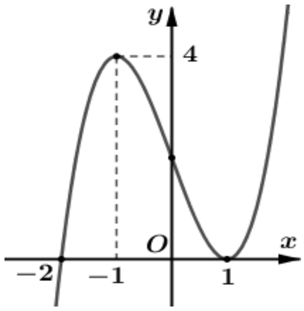
D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;\pi)$.

Lời giải

Chọn D.

Trong khoảng $(0;\pi)$ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nằm phía trên trục hoành nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;\pi)$.

Câu 101. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên.



Khẳng định nào sau đây sai?

A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-2;1)$.

B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

C. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 2 .

D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$.

Lời giải

Chọn C.

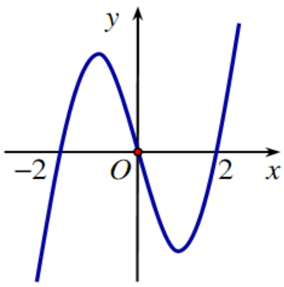
Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta thấy:

$f'(x)>0$ khi $\left[\begin{array}{l}-2<x<1\\ x>1\end{array}\right. \longrightarrow f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-2;1)$, $(1;+\infty)$. Suy ra A đúng, B đúng.

$f'(x)<0$ khi $x<-2 \longrightarrow f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$. Suy ra D đúng.

Dùng phương pháp loại trừ, ta chọn C

Câu 102. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



A. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;\ 2)$.

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;1)$.

D. Hàm số $f\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\ 2\right)$.

Lời giải

Chọn D.

Cách 1: sử dụng bảng biến thiên.

Từ đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y		↘		↗		↘		↗	

Cách 2: Quan sát đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$

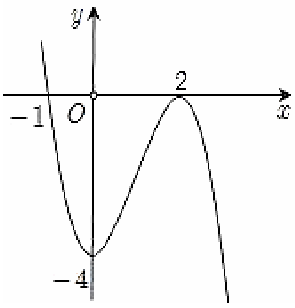
Nếu trong khoảng K đồ thị hàm số $f'\left(x\right)$ nằm trên trục hoành (có thể tiếp xúc) thì $f\left(x\right)$ đồng biến trên K.

Nếu trong khoảng K đồ thị hàm số $f'\left(x\right)$ nằm dưới trục hoành (có thể tiếp xúc) thì $f\left(x\right)$ nghịch biến trên K.

Nếu trong khoảng K đồ thị hàm số $f'\left(x\right)$ vừa có phần nằm dưới trục hoành vừa có phần nằm trên trục hoành thì loại phương án đó.

Trên khoảng $\left(0;\ 2\right)$ ta thấy đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ nằm bên dưới trục hoành.

Câu 103. Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'\left(x\right)$ như hình vẽ.



Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(-4;2\right)$.

B. Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-1\right)$.

C. Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;2\right)$.

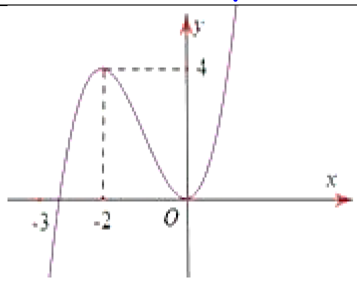
D. Hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-4\right)$ và $\left(2;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B.

Trong khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ đồ thị hàm số $f'\left(x\right)$ nằm trên trục hoành nên hàm số đồng biến $\left(-\infty;-1\right)$.

Câu 104. Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'\left(x\right)$ như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?



A. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2);(0;+\infty)$.

B. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

C. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-3;+\infty)$.

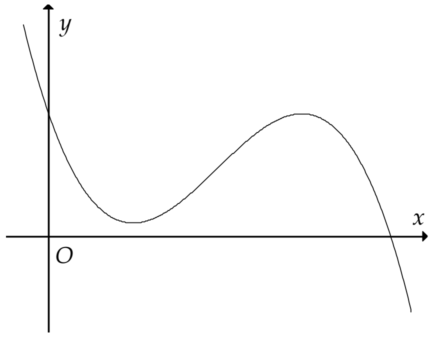
D. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$

Lời giải

Chọn C.

Trên khoảng $(-3;+\infty)$ ta thấy đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm trên trục hoành.

Câu 105. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên.



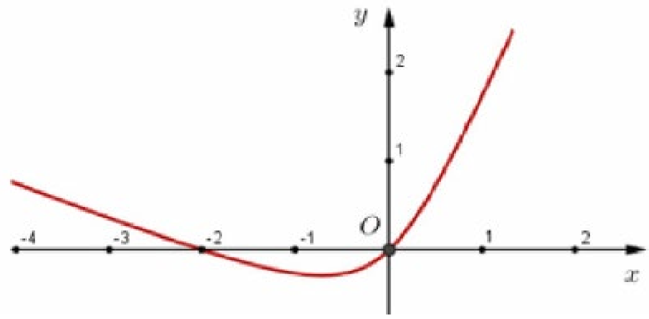
Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$.

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B.

Câu 106. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên.



Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

B. $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-2$.

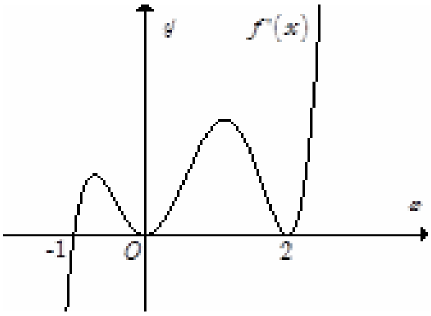
C. $f(x)$ đạt cực đại tại $x=-2$.

D. Giá trị cực tiểu của $f(x)$ nhỏ hơn giá trị cực đại của $f(x)$.

Lời giải

Chọn B.

Câu 107. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng K. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên khoảng K.



Hỏi hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

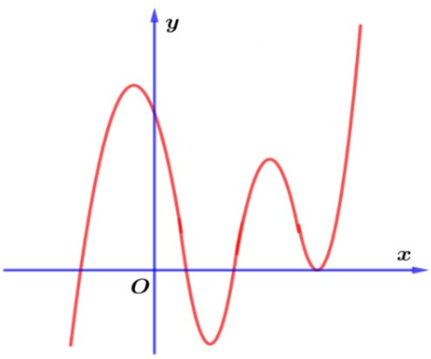
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B.

Đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại điểm $x=-1$.

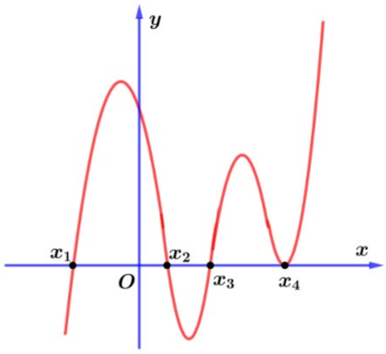
Câu 108. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Tìm số điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=f(x)$.



A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Chọn A.



Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ giao với trục hoành tại 4 điểm. x_1, x_2, x_3, x_4.

Nhận thấy $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua x_1 và x_3 nên hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_1 và x_3.

Và $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua x_2 nên hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_2.

$f'(x)$ không đổi dấu khi đi qua x_4 nên x_4 không là điểm cực trị của hàm số.

Vậy hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực đại.

Câu 109. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x-2)^4(x^2-4)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D.

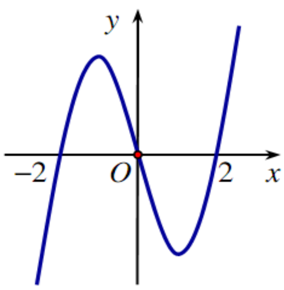
Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)^4(x^2-4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$.

Do $f'(x)$ đổi dấu khi x đi qua 3 điểm $x = 1$ và $x = \pm 2$ nên hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị nhưng có 2 điểm cực trị dương $x = 1$ và $x = 2$.

Do $f(|x|) = f(x)$ nếu $x \geq 0$ và $f(|x|)$ là hàm số chẵn nên hàm số $f(|x|)$ có 5 điểm cực trị đó là $x = \pm 1$, $x = \pm 2$ và $x = 0$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 110. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ là đường cong trong hình bên.



A. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;\ 2)$.

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;1)$.

D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;\ 2)$.

Lời giải

A. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$. **SAI**

B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;\ 2)$. **SAI**

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;1)$. **SAI**

D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;\ 2)$. **ĐÚNG**

Cách 1: sử dụng bảng biến thiên.

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y		↘		↗		↘		↗	

Cách 2: Quan sát đồ thị hàm số $y = f'(x)$

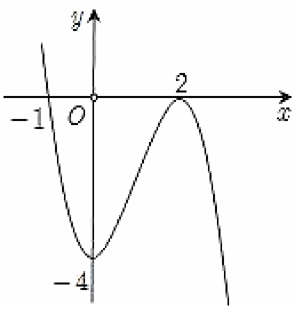
Nếu trong khoảng K đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm trên trục hoành (có thể tiếp xúc) thì $f(x)$ đồng biến trên K.

Nếu trong khoảng K đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm dưới trục hoành (có thể tiếp xúc) thì $f(x)$ nghịch biến trên K.

Nếu trong khoảng K đồ thị hàm số $f'(x)$ vừa có phần nằm dưới trục hoành vừa có phần nằm trên trục hoành thì loại phương án đó.

Trên khoảng $(0;\ 2)$ ta thấy đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm bên dưới trục hoành.

Câu 111. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-4;2)$.

B. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

C. Hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị.

D. Hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-4\right)$ và $\left(2;+\infty\right)$.

Lời giải

A. Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(-4;2\right)$. **SAI**

B. Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-1\right)$. **ĐÚNG**

C. Hàm số $y=f\left(x\right)$ có một điểm cực trị. **ĐÚNG**

D. Hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-4\right)$ và $\left(2;+\infty\right)$. **SAI**

+ Trong khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ đồ thị hàm số $f'\left(x\right)$ nằm trên trục hoành nên hàm số đồng biến $\left(-\infty;-1\right)$.

+ đồ thị hàm số $f'\left(x\right)$ cắt trục hoành tại 1 điểm nên có một điểm cực trị

Câu 112. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x^2-1\right)\left(x+1\right)\left(5-x\right)$.

A. $f\left(1\right)<f\left(4\right)<f\left(2\right)$.

B. $f\left(1\right)<f\left(2\right)<f\left(4\right)$.

C. $f\left(2\right)<f\left(1\right)<f\left(4\right)$.

D. $f\left(4\right)<f\left(2\right)<f\left(1\right)$.

Lời giải

A. $f\left(1\right)<f\left(4\right)<f\left(2\right)$. **SAI**

B. $f\left(1\right)<f\left(2\right)<f\left(4\right)$. **ĐÚNG**

C. $f\left(2\right)<f\left(1\right)<f\left(4\right)$. **SAI**

D. $f\left(4\right)<f\left(2\right)<f\left(1\right)$. **SAI**

Dựa vào sự so sánh ở các phương án, ta thấy chỉ cần xét sự biến thiên của hàm số trên khoảng $\left(1;4\right)$.

Ta có: $f'\left(x\right)=\left(x+1\right)^2\left(x-1\right)\left(5-x\right)>0, \forall x\in\left(1;4\right)$.

Nên hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(1;4\right)$ mà $1<2<4\Rightarrow f\left(1\right)<f\left(2\right)<f\left(4\right)$.

Lưu ý: dùng tích phân để giải:

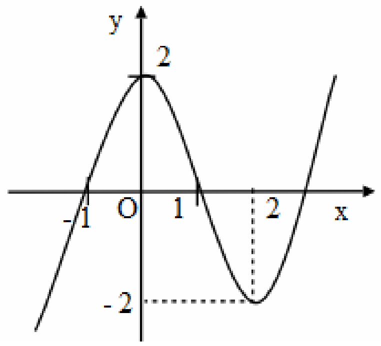
Có thể dùng máy tính casio

Bấm: $\int_1^2 f'\left(x\right)dx$ thấy dương $\Rightarrow f\left(2\right)>f\left(1\right)$;

Bấm: $\int_2^4 f'\left(x\right)dx$ thấy dương $\Rightarrow f\left(4\right)>f\left(2\right)$.

Vậy: $f\left(1\right)<f\left(2\right)<f\left(4\right)$.

Câu 113. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y=f'\left(x\right)$. Biết rằng hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



A. Hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-1\right)$

B. Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-1\right)$

C. Hàm số $y=f\left(x\right)$ có ba điểm cực trị.

D. Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$

Lời giải

A. Hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ **ĐÚNG**

B. Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ **SAI**

C. Hàm số $y=f\left(x\right)$ có ba điểm cực trị. **ĐÚNG**

D. Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$ **SAI**

Cách 1: Quan sát đồ thị $y=f'\left(x\right)$

Từ đồ thị của $f'\left(x\right)$ ta có:

+ $f'\left(x\right)>0$ trên mỗi khoảng $\left(-1;1\right)$ và $\left(2;+\infty\right)$ suy ra $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-1;1\right)$ và $\left(2;+\infty\right)$

+ $f'\left(x\right)<0$ trên mỗi khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(1;2\right)$ suy ra $y=f\left(x\right)$ nghịch biến mỗi khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(1;2\right)$.

+ đồ thị hàm số $f'\left(x\right)$ cắt trục hoành tại 3 điểm nên có ba điểm cực trị

Cách 2: Sử dụng bảng biến thiên

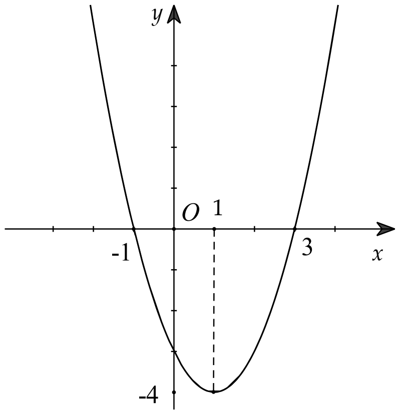
Từ đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$ $+\infty$		-1		1		2	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	↘		↗		↘		↗ $+\infty$

Hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-1\right)$

+ đồ thị hàm số $f'\left(x\right)$ cắt trục hoành tại 3 điểm nên có ba điểm cực trị

Câu 114. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



A. Hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left(-\infty;-1\right)$.

B. Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(1;+\infty\right)$.

C. Hàm số $y=f\left(x\right)$ có một điểm cực trị.

D. Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(3;+\infty\right)$.

Lời giải

A. Hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left(-\infty;-1\right)$. **SAI**

B. Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(1;+\infty\right)$. **SAI**

C. Hàm số $y=f\left(x\right)$ có một điểm cực trị. **SAI**

D. Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(3;+\infty\right)$. **ĐÚNG**

Cách 1: Sử dụng bảng biến thiên

Từ đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗		↘		↗	$+\infty$

+ Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(3;+\infty\right)$.

+ đồ thị hàm số $f'\left(x\right)$ cắt trục hoành tại 2 điểm nên có 2 điểm cực trị

Cách 2: Quan sát đồ thị $y=f'(x)$

Từ đồ thị của $f'(x)$ ta có:

+ $f'(x)>0$ trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$ suy ra $y=f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$

+ $f'(x)<0$ trên khoảng $(-1;3)$ suy ra $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;3)$.

+ đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm nên có 2 điểm cực trị

Câu 115. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ:

A. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

B. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

C. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị.

D. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một điểm có một điểm cực trị.

Lời giải

A. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt. **SAI**

B. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị. **SAI**

C. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị. **SAI**

D. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một điểm có một điểm cực trị. **ĐÚNG**

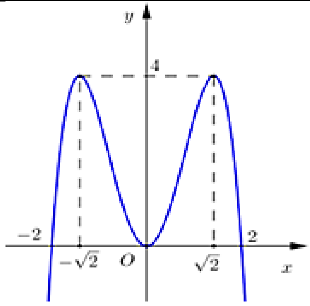
Số cực trị là số giao điểm của đồ thị $y=f'(x)$ với trục ox và qua giao điểm đó $f'(x)$ phải đổi dấu

Từ đồ thị:

+ Qua nghiệm $x=3$ đồ thị $y=f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $x=3$ là hoành độ cực tiểu của đồ thị $y=f(x)$.

Vậy Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có 1 điểm cực trị.

Câu 116. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên.



A. Hàm số $y=f\left(x\right)$ đạt cực đại tại $x=2$.

B. Hàm số $y=f\left(x\right)$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

C. Hàm số $y=f\left(x\right)$ có 3 cực trị.

D. Hàm số $y=f\left(x\right)$ đạt cực đại tại $x=\sqrt{2}$.

Lời giải

A. Hàm số $y=f\left(x\right)$ đạt cực đại tại $x=2$. **ĐÚNG**

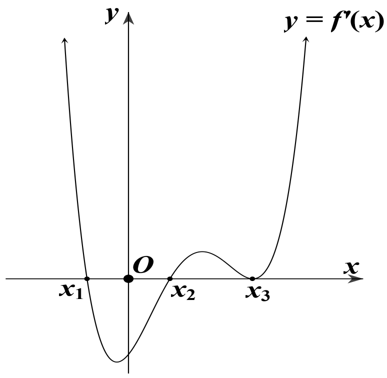
B. Hàm số $y=f\left(x\right)$ đạt cực tiểu tại $x=0$. **SAI**

C. Hàm số $y=f\left(x\right)$ có 3 cực trị. **SAI**

D. Hàm số $y=f\left(x\right)$ đạt cực đại tại $x=\sqrt{2}$. **SAI**

Giá trị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua $x=2$.

Câu 117. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị trên một khoảng K như hình vẽ bên.



A. Trên K, hàm số $y=f\left(x\right)$ có ba điểm cực trị.

B. Hàm số $y=f\left(x\right)$ đạt cực tiểu tại x_3.

C. Hàm số $y=f\left(x\right)$ đạt cực tiểu tại x_2.

D. Hàm số $y=f\left(x\right)$ đạt cực tiểu tại x_1.

Lời giải

A. Trên K, hàm số $y=f\left(x\right)$ có ba điểm cực trị. **ĐÚNG**

B. Hàm số $y=f\left(x\right)$ đạt cực tiểu tại x_3. **SAI**

C. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại x_2. **ĐÚNG**

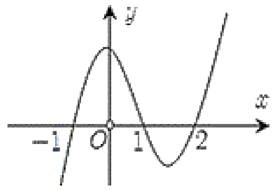
D. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại x_1. **SAI**

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f'(x)$, ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	+	

Như vậy: trên K, hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại là x_1 và điểm cực tiểu là x_2, x_3 không phải là điểm cực trị của hàm số.

Câu 118. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên.



A. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

B. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ và $(2;+\infty)$

C. Hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị.

D. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Lời giải

A. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$. **SAI**

B. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ và $(2;+\infty)$ **ĐÚNG**

C. Hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị. **ĐÚNG**

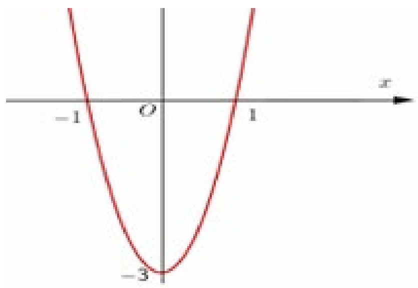
D. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$. **SAI**

Đồ thị $f'(x)$ nằm phía trên trục hoành nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$, $(2;+\infty)$.

Đồ thị $f'(x)$ nằm phía dưới trục hoành nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$, $(1;2)$

Đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm.

Câu 119. Cho hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.



A. Hàm số $y=f(x)$ có 2 cực trị.

B. $f\left(\frac{1}{2}\right)<f\left(\frac{-1}{2}\right)$.

C. Hàm số $y=f(x)$ giảm trên khoảng $(-1;1)$.

D. Hàm số $y=f(x)$ giảm trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Lời giải

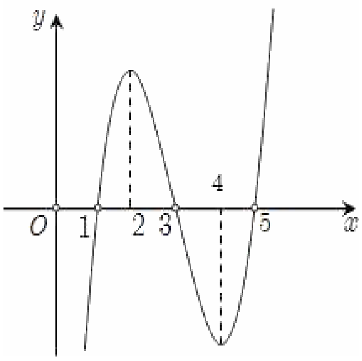
A. Hàm số $y=f(x)$ có 2 cực trị. **ĐÚNG** vì đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm.

B. $f\left(\frac{1}{2}\right)<f\left(\frac{-1}{2}\right)$. **ĐÚNG** vì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

C. Hàm số $y=f(x)$ giảm trên khoảng $(-1;1)$. **ĐÚNG** vì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

D. Hàm số $y=f(x)$ giảm trên khoảng $(-\infty;-1)$. **SAI** vì trên khoảng $(-\infty;-1)$ đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía trên trục hoành.

Câu 120. Cho hàm số $y=f(x)$. Biết $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



A. Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.

B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

C. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

D. Đồ thị hàm số $f(x)$ chỉ có hai điểm cực trị và chúng nằm về hai phía của trục hoành.

Lời giải

A. Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị. **SAI**

B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$. **ĐÚNG**

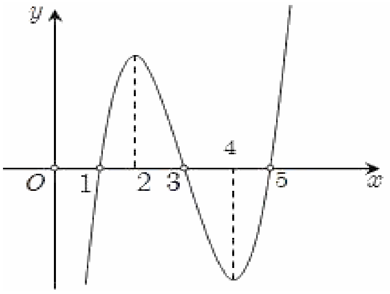
C. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$. **SAI**

D. Đồ thị hàm số $f(x)$ chỉ có hai điểm cực trị và chúng nằm về hai phía của trục hoành. **SAI**

Trong khoảng $(1;3)$ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nằm phía trên trục hoành nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 121. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hàm số $y=f(x)$ đồng biến và nghịch biến trên khoảng nào?

Lời giải

Đáp án:

+ Hàm số đồng biến trên khoảng: $\left(1;3\right)$ và $\left(5;+\infty\right)$

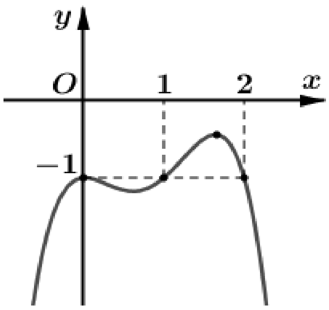
+ Hàm số nghịch biến trên khoảng: $\left(-\infty;1\right)$ và $\left(3;5\right)$

Từ đồ thị $y=f'\left(x\right)$ ta có:

+ trên khoảng: $\left(1;3\right)$ và $\left(5;+\infty\right)$ đồ thị $y=f'\left(x\right)$ nằm trên trục hoành nên hàm số đồng biến trên khoảng: $\left(1;3\right)$ và $\left(5;+\infty\right)$

+ trên khoảng: $\left(-\infty;1\right)$ và $\left(3;5\right)$ đồ thị $y=f'\left(x\right)$ nằm dưới trục hoành nên hàm số nghịch biến trên khoảng: $\left(1;3\right)$ và $\left(5;+\infty\right)$

Câu 122. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hàm số $y=f(x)$ đồng biến và nghịch biến trên khoảng nào?

Lời giải

Đáp án: Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Từ đồ thị $y=f'\left(x\right)$ ta có $f'\left(x\right)$ nằm dưới trục hoành nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Câu 123. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm $f'\left(x\right)$ như sau :

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến và nghịch biến trên khoảng nào?

Lời giải

Đáp án:

+ Hàm số đồng biến trên khoảng: $(-2;3)$

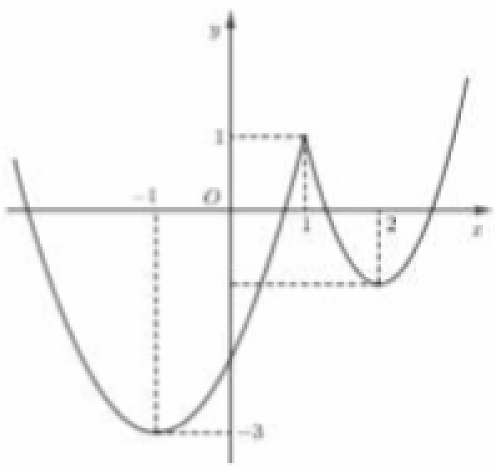
+ Hàm số nghịch biến trên khoảng: $(-\infty;-2)$ và $(3;+\infty)$

Từ bảng biến thiên $y=f'(x)$ ta có:

+ trên khoảng: $(-2;3)$ có $f'(x)\geq 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng: $(-2;3)$

+ trên khoảng: $(-\infty;-2)$ và $(3;+\infty)$ có $f'(x)<0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng: $(1;3)$ và $(5;+\infty)$

Câu 124. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



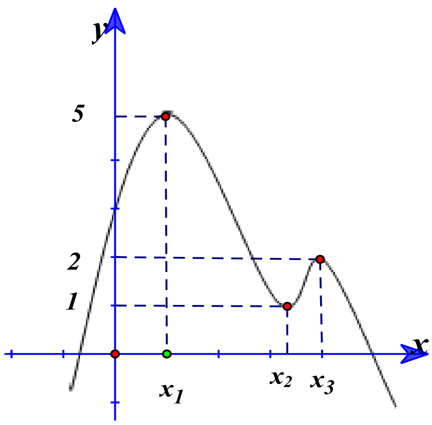
Hàm số $y=f(x)$ có mấy cực đại

Lời giải

Đáp án: 2.

Đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm nên có 4 cực trị gồm 2 cực tiểu và 2 cực đại

Câu 125. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



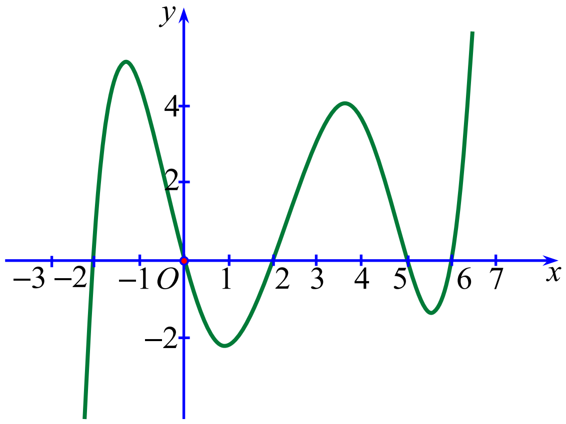
Hàm số $y=f(x)$ có mấy cực trị ?

Lời giải

Đáp án: 2.

Đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm nên có 2cực trị

Câu 126. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hàm số $y = f(x)$ có mấy cực tiểu ?

Lời giải

Đáp án: 3.

Số cực trị là số giao điểm của đồ thị $y = f'(x)$ với trục ox và qua giao điểm đó $f'(x)$ phải đổi dấu

Từ đồ thị:

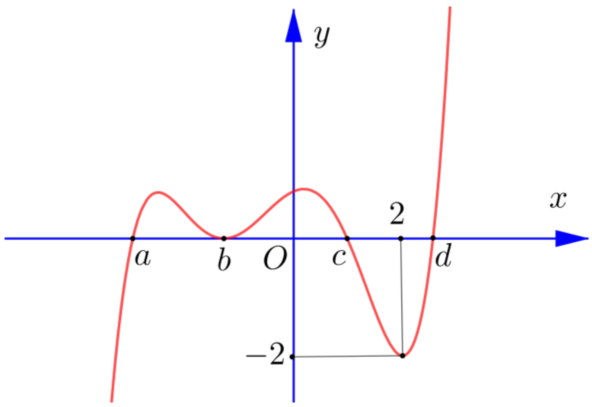
+ Qua nghiệm $x = -2$ đồ thị $y = f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $x = -2$ là hoành độ cực tiểu của đồ thị $y = f(x)$.

+ Qua nghiệm $x = 2$ đồ thị $y = f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $x = 2$ là hoành độ cực tiểu của đồ thị $y = f(x)$.

+ Qua nghiệm $x = 5$ đồ thị $y = f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $x = 5$ là hoành độ cực tiểu của đồ thị $y = f(x)$.

Vậy Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực tiểu.

Câu 127. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y = f(x)$ có mấy cực trị ?

Lời giải

Đáp án: 3.

Đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm nên có 3 cực trị

Câu 128. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ Biết hàm số $y=f'(x)$ có bảng xét dấu sau

x	$-\infty$		-3		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 3.

Số cực trị là số giao điểm của đồ thị $y=f'(x)$ với trục ox và qua giao điểm đó $f'(x)$ phải đổi dấu

Từ bảng biến thiên:

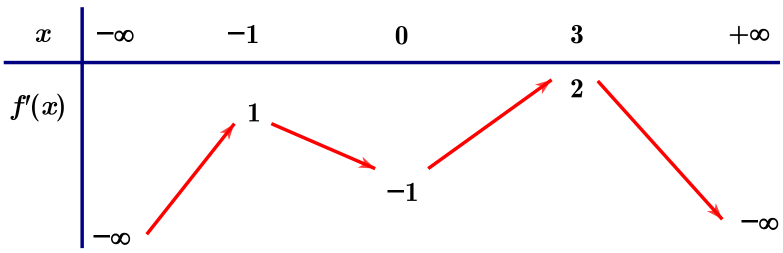
+ Qua nghiệm $x=-3$ đồ thị $y=f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $x=-3$ là hoành độ cực tiểu của đồ thị $y=f(x)$.

+ Qua nghiệm $x=2$ đồ thị $y=f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm nên $x=2$ là hoành độ cực đại của đồ thị $y=f(x)$.

+ Qua nghiệm $x=5$ đồ thị $y=f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $x=5$ là hoành độ cực tiểu của đồ thị $y=f(x)$.

Vậy Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 129. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$

Lời giải

Đáp án: 4.

Từ bảng biến thiên ta có đồ thị $y=f'(x)$ cắt trục hoành 4 điểm nên hàm số $y=f(x)$ có 4 cực trị

Câu 130. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+2)^4(x^2+4)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(|x|)$ là

Lời giải

Đáp án: 1.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow x(x+2)^4(x^2+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Do $f'(x)$ chỉ đổi dấu khi x đi qua điểm $x=0$ nên hàm số $f(x)$ có 1 điểm cực trị $x=0$.

Do $f(|x|)=f(x)$ nếu $x\geq 0$ và $f(|x|)$ là hàm số chẵn nên hàm số $f(|x|)$ có 1 điểm cực trị $x=0$.

CHỦ ĐỀ 2
ỨNG DỤNG THỰC TẾ CỦA TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

• Nếu phương trình chuyển động của vật là $s = f(t)$ thì $v(t) = f'(t)$ là vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t.

• Một vật chuyển động có phương trình $s = f(t)$ thì đạo hàm cấp hai (nếu có) là gia tốc tức thời của chuyển động. Ta có: $a(t) = f''(t)$.

• Nếu hàm số $T = f(t)$ biểu thị nhiệt độ T theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ thay đổi nhiệt độ theo thời gian tại thời điểm t_0.

• Cường độ tức thời của điện lượng $Q = Q(t)$ tại thời điểm t_0 là : $I(t_0) = Q'(t_0)$.

Câu 1. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t + 2$ với $t \geq 0$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Trong khoảng thời gian nào vận tốc của vật tăng?

A. $(0;+\infty)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-4;+\infty)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Câu 2. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 9t$ với $t \geq 0$ (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và S (mét) là quãng đường vật chuyển động trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, khoảng thời gian nào vận tốc của vật tăng?

A. $(0;5)$. **B.** $(0;4)$. **C.** $(4;10)$. **D.** $(3;10)$.

Câu 3. Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được cung cấp bởi một nguồn pin $12V$ được cho bởi công thức $P = 12I - 0,5I^2$ với I (đơn vị A) là cường độ dòng điện. Hỏi công suất P tăng trong khoảng cường độ dòng điện nào?.

A. $(0;20)$. **B.** $(4;20)$. **C.** $(12;+\infty)$. **D.** $(0;12)$.

Câu 4. Để giảm nhiệt độ trong phòng từ 28^0C, một hệ thống làm mát được phép hoạt động trong 10 phút. Gọi T (đơn vị ^0C) là nhiệt độ phòng ở phút thứ t được cho bởi công thức $T = -0,008t^3 - 0,16t + 28$ với $t \in [1;10]$. Trong thời gian 10 phút kể từ khi hệ thống làm mát bắt đầu hoạt động, nhiệt độ trong phòng tăng hay giảm?

A. Tăng. **B.** Giảm. **C.** Tăng rồi giảm. **D.** Giảm rồi tăng.

Câu 5. Một hợp tác xã nuôi cá thí nghiệm trong hồ. Người ta thấy rằng nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n) = 480 - 20n$ (gam). Hỏi phải thả cá trong khoảng nào trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để số gam tăng?

A. $(0;20)$. **B.** $(0;30)$. **C.** $(12;+\infty)$. **D.** $(0;12)$.

Câu 6. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x)=0.025x^2(30-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân nằm trong khoảng nào để huyết áp bệnh nhân giảm?

A. $(0;20)$. **B.** $(0;30)$. **C.** $(20;+\infty)$. **D.** $(0;25)$.

Câu 7. Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt khoảng cách là 300 *km*. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v)=cv^3t$, trong đó c là hằng số và E tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên nằm ở khoảng nào thì năng lượng tiêu hao của cá giảm?

A. $(6;10)$. **B.** $(6;12)$. **C.** $(6;9)$. **D.** $(9;+\infty)$.

Câu 8. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t)=45t^2-t^3, t=0,1,2,...,25$. Nếu coi $f(t)$ là hàm số xác định trên đoạn [0;25] thì đạo hàm $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t. Xác định khoảng thời gian mà tốc độ truyền bệnh giảm?

A. $(0;15)$. **B.** $(0;10)$. **C.** $(15;25)$. **D.** $(10;25)$.

CHỦ ĐỀ 2
ỨNG DỤNG THỰC TẾ CỦA TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

- Nếu phương trình chuyển động của vật là $s = f(t)$ thì $v(t) = f'(t)$ là vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t.
- Một vật chuyển động có phương trình $s = f(t)$ thì đạo hàm cấp hai (nếu có) là gia tốc tức thời của chuyển động. Ta có: $a(t) = f''(t)$.
- Nếu hàm số $T = f(t)$ biểu thị nhiệt độ T theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ thay đổi nhiệt độ theo thời gian tại thời điểm t_0.
- Cường độ tức thời của điện lượng $Q = Q(t)$ tại thời điểm t_0 là : $I(t_0) = Q'(t_0)$.

Câu 1. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t + 2$ với $t \geq 0$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Trong khoảng thời gian nào vận tốc của vật tăng?

A. $(0;+\infty)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-4;+\infty)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có vận tốc của chuyển động tại thời điểm t bằng đạo hàm cấp một của phương trình chuyển động tại thời điểm t.

$$v(t) = S'(t) = \left(\frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t + 2\right)' = t^2 - 6t + 5$$

Xét hàm $v(t) = t^2 - 6t + 5$ với $t \geq 0$

$v'(t) = 2t - 6$

$2t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 3$

Bảng biến thiên:

t	0		3		$+\infty$
$v'(t)$		$-$	0	$+$	
$v(t)$	5	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có trong khoảng thời gian $(3;+\infty)$ thì vận tốc của vật tăng

Câu 2. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S=-\frac{1}{3}t^3+4t^2+9t$ với $t\geq 0$ (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và S (mét) là quãng đường vật chuyển động trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, khoảng thời gian nào vận tốc của vật tăng?

A. $(0;5)$. **B.** $(0;4)$. **C.** $(4;10)$. **D.** $(3;10)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $v=S'=-t^2+8t+9,\ t\in(0;10)$

$v'=-2t+8$. Xét $v'=0\Rightarrow t=4\in(0;10)$

Bảng biến thiên:

t	0		4		10
v'		$+$	0	$-$	
v	$v(0)$	$\nearrow$	25	$\searrow$	$v(10)$

Từ bảng biến thiên ta có trong khoảng thời gian $(0;4)$ thì vận tốc của vật tăng

Câu 3. Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được cung cấp bởi một nguồn pin $12V$ được cho bởi công thức $P=12I-0,5I^2$ với I (đơn vị A) là cường độ dòng điện. Hỏi công suất P tăng trong khoảng cường độ dòng điện nào?.

A. $(0;20)$. **B.** $(4;20)$. **C.** $(12;+\infty)$. **D.** $(0;12)$.

Lời giải

Chọn D.

Xét hàm số $P=12I-0,5I^2$ với $I\geq 0$.

$P'=12-I$. $P'=0\Leftrightarrow I=12$.

Bảng biến thiên:

I	0		12		$+\infty$
P		$\nearrow$	72	$\searrow$	

Từ bảng biến thiên ta có công suất P tăng trong khoảng cường độ dòng điện $(0;12)$

Câu 4. Để giảm nhiệt độ trong phòng từ 28^0C, một hệ thống làm mát được phép hoạt động trong 10 phút. Gọi T (đơn vị ^0C) là nhiệt độ phòng ở phút thứ t được cho bởi công thức $T=-0,008t^3-0,16t+28$ với $t\in[1;10]$. Trong thời gian 10 phút kể từ khi hệ thống làm mát bắt đầu hoạt động, nhiệt độ trong phòng tăng hay giảm?

A. Tăng . **B.** Giảm. **C.** Tăng rồi giảm. **D.** Giảm rồi tăng .

Lời giải

Chọn B.

Xét hàm số $T=-0,008t^3-0,16t+28$ với $t\in[1;10]$.

$T'=-0,024t^2-0,16<0,\forall t\in[1;10]$.

Suy ra hàm số T nghịch biến trên đoạn $[1;10]$.

nhiệt độ trong phòng giảm

Câu 5. Một hợp tác xã nuôi cá thí nghiệm trong hồ. Người ta thấy rằng nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n)=480-20n$ (gam). Hỏi phải thả cá trong khoảng nào trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để số gam tăng?

A. $(0;20)$. **B.** $(0;30)$. **C.** $(12;+\infty)$. **D.** $(0;12)$.

Lời giải

Chọn D.

Sau một vụ, trung bình số cá trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ cân nặng: $f(n)=nP(n)=480n-20n^2$ (gam).

$f'(n)=480-40n=0\Leftrightarrow n=12$

Bảng biến thiên:

n	0		12		$+\infty$
$f'(n)$		$+$	0	$-$	
$f(n)$		$\nearrow$	$f(12)$	$\searrow$	

Từ bảng biến thiên ta có: trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ, thả cá trong khoảng $(0;12)$ thì số gam tăng

Câu 6. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x)=0.025x^2(30-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân nằm trong khoảng nào để huyết áp bệnh nhân giảm?

A. $(0;20)$. **B.** $(0;30)$. **C.** $(20;+\infty)$. **D.** $(0;25)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $G(x)=0.75x^2-0.025x^3, x>0$; $G'(x)=1.5x-0.075x^2$; $G'(x)=0\Leftrightarrow x=0,x=20$

Bảng biến thiên:

x	0		20		$+\infty$
$G'(x)$		$+$	0	$-$	
$G(x)$		$\nearrow$	100	$\searrow$	

Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân nằm trong khoảng $(0;20)$ thì huyết áp bệnh nhân giảm

Câu 7. Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt khoảng cách là 300 *km*. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v)=cv^3t$, trong đó c là hằng số và E tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên nằm ở khoảng nào thì năng lượng tiêu hao của cá giảm?

A. $(6;10)$. **B.** $(6;12)$. **C.** $(6;9)$. **D.** $(9;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C.

Khi bơi ngược dòng vận tốc của cá là: $v-6$ (km/h)

Thời gian để cá vượt khoảng cách 300 km là $t=\dfrac{300}{v-6}\,(v>6)$

Năng lượng tiêu hao của cá khi vượt khoảng cách 300km là: $E(v)=cv^3\dfrac{300}{v-6}=300c\dfrac{v^3}{v-6}$

$E'(v)=600cv^2\dfrac{v-9}{(v-6)^2}$; $E'(v)=0\Leftrightarrow v=9$ do $(v>6)$

Bảng biến thiên:

v	6		9		$+\infty$
$E'(v)$		$-$	0	$+$	
$E(v)$		↘	$E(9)$	↗	

Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên nằm ở khoảng $(6;9)$ thì năng lượng tiêu hao của cá giảm

Câu 8. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ *t* là $f(t)=45t^2-t^3, t=0,1,2,...,25$. Nếu coi *f(t)* là hàm số xác định trên đoạn [0;25] thì đạo hàm *f'(t)* được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm *t*. Xác định khoảng thời gian mà tốc độ truyền bệnh giảm?

A. $(0;15)$. **B.** $(0;10)$. **C.** $(15;25)$. **D.** $(10;25)$.

Lời giải

Chọn D.

$f'(t)=90t-3t^2$; $f''(t)=90-6t$, $f''(t)=0\Leftrightarrow t=15$

Bảng biến thiên

t	0		15		25
$f''(t)$		$+$	0	$-$	
$f'(t)$		↗	675	↘	

khoảng thời gian $(15;25)$ ngày thì tốc độ truyền bệnh giảm

CHỦ ĐỀ 3
TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$ CÓ LIÊN QUAN ĐẾN THAM SỐ m

Cho hàm số $y = f(x,m)$ với m là tham số, có tập xác định D.

- Hàm số $y = f(x,m)$ đồng biến trên D $\Leftrightarrow y' \ge 0 \quad \forall x \in D$
- Hàm số $y = f(x,m)$ nghịch biến trên D $\Leftrightarrow y' \le 0 \quad \forall x \in D$

$\Rightarrow$ Tham số m

- Hàm số $y = f(x,m)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = f'(x,m) \ge 0, \ \forall x \in D \Leftrightarrow \min y' \ge 0$
- Hàm số $y = f(x,m)$ nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = f'(x,m) \le 0, \ \forall x \in D \Leftrightarrow \max y' \le 0$
- Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì nó phải xác định trên $\mathbb{R}$.

DẠNG 1
TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$ CÓ LIÊN QUAN ĐẾN THAM SỐ m

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 2. Tổng các giá trị nguyên của tham số $m \in [-10;10)$ để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3(m+2)x + 3m - 2025$ đồng biến trên trên $\mathbb{R}$ là:

A. 27. **B.** 35. **C.** 44. **D.** 54.

Câu 3. Biết giá trị tham số $m \in \left[a; \frac{b}{c}\right]$ (với $a,b,c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản) thì hàm số $y = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$ đồng biến trên trên $\mathbb{R}$. Giá trị biểu thức $P = \frac{a^2 + b^2}{c}$

A. $P = \frac{9}{4}$. **B.** $P = \frac{13}{2}$. **C.** $P = 4$. **D.** $P = \frac{13}{4}$.

Câu 4. Biết giá trị tham số $m \in \left[\frac{a}{b}; c\right]$ (với $a,b,c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) thì hàm số $y = \frac{1}{3}(3-m)x^3 - (m+3)x^2 + (m+2)x - 2024$ đồng biến trên trên $\mathbb{R}$. Giá trị biểu thức $P = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a.b.c}$

A. $P = -\frac{14}{5}$. **B.** $P = \frac{14}{5}$. **C.** $P = -\frac{7}{3}$. **D.** $P = \frac{7}{3}$.

Câu 5. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+(4-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là

A. $(-\infty;1]$ **B.** $(-\infty;4]$ **C.** $(-\infty;1)$ **D.** $(-\infty;4)$

Câu 6. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=x^3-3(2m+1)x^2+(12m+5)x+2$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$. Số phần tử của S bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 8. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y=\frac{-3}{4}x^4+\frac{9}{2}x^2-(2m+15)x-m+3$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 9. Tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=-x^4+(2m-3)x^2+m$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ là $\left(-\infty;\frac{p}{q}\right]$, trong đó phân số $\frac{p}{q}$ tối giản và $q>0$. Hỏi tổng $p+q$ là?

A. 5. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 3.

Câu 10. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=mx+(m+1)\sqrt{x-2}$ nghịch biến trên $D=[2;+\infty)$ là

A. $m\le -1$. **B.** $m\ge 0$. **C.** $m<-1$. **D.** $-2\le m\le 1$.

Câu 11. Cho hàm số $y=\frac{mx-2m-3}{x-m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S.

A. Vô số **B.** 3 **C.** 5 **D.** 4

Câu 12. Cho hàm số $f(x)=\frac{-mx+3m+4}{x-m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 13. Tồn tại bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=\frac{x-2}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** Vô số.

Câu 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\frac{(m+1)x+2m+12}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 6. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 4.

Câu 15. Gọi S là tập các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=\dfrac{2\sqrt{1-x}-14}{m-\sqrt{1-x}}$ đồng biến trên khoảng $(-15;-3)$. Số phần tử của tập S là

A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{x^2-(m+1)+2m-1}{x-m}$ tăng trên từng khoảng xác định của nó?

A. $m>1$. **B.** $m\le 1$. **C.** $m<1$. **D.** $m\ge 1$.

Câu 17. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{2x^2+(1-m)x+1+m}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{mx^2+6x-2}{x+2}$ nghịch biến trên nửa khoảng $[1;+\infty)$.

A. $m\ge\dfrac{1}{2}$. **B.** $m<-\dfrac{14}{5}$. **C.** $m\le-\dfrac{14}{5}$. **D.** $m\le\dfrac{1}{2}$.

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\cos 2x+mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. m > 4. **B.** m < 2. **C.** $m\ge 1$ **D.** $m\ge 2$.

Câu 20. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=3x+m(\sin x+\cos x+m)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 3. **B.** Vô số. **C.** 4. **D.** 5.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 21. Cho hàm số sau $y=-\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-3)x-m+2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 22. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+(2-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

Câu 23. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-x^3-6x^2+(4m-9)x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

Câu 24. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{x-m+2}{x+1}$ giảm trên các khoảng mà nó xác định.

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{mx+4}{x+m}$ giảm trên khoảng $\left(-\infty;1\right)$?

Câu 26. Tìm số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx+18}{2x+m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(-2;5\right)$.

Câu 27. Cho hàm số $y=\dfrac{(4-m)\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{6-x}+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong khoảng $(-10;10)$ sao cho hàm số đồng biến trên khoảng $(-8;5)$?

Câu 28. Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-1}$. Tìm m để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Câu 29. Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-1}$. Tìm m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

Câu 30. Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{m\sin x+4}{\sin x+m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$?

Câu 31. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{2\sin x-1}{\sin x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

DẠNG 2

BIỆN LUẬN CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ $y=f\left(x\right)$ CÓ LIÊN QUAN ĐẾN THAM SỐ m

I. Biện luận số cực trị của hàm số

1. Biện luận số cực trị của hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $\left(a\neq 0\right)\left(*\right)$

Ta có: $y'=3ax^2+2bx+c\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow 3ax^2+2bx+c=0\quad \left(1\right)$

+ Hàm số $\left(*\right)$ **có 2 cực trị** $\Leftrightarrow\left(1\right)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 0\\ \Delta_{(1)}>0\end{cases}$

+ Hàm số $\left(*\right)$ **không có cực trị** $\Leftrightarrow\left(1\right)$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm $\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 0\\ \Delta_{(1)}\leq 0\end{cases}$

2. Biện luận số cực trị của hàm trùng phương: $y=ax^4+bx^2+c$ $\left(a\neq 0\right)$

Ta có: $y'=4ax^3+2bx=x\left(4ax^2+2b\right)\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ 4ax^2+2b=0=g\left(x\right)\ \left(1\right)\end{array}\right.$

- Hàm số $\left(*\right)$ **có 3 cực trị** $\Leftrightarrow\left(1\right)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow\begin{cases}g\left(0\right)\neq 0\\ \Delta_{(1)}>0\end{cases}$

  Khi đó: Hàm số có 2 cực tiểu, 1 cực đại khi $a>0$.

  Hàm số có 2 cực đại, 1 cực tiểu khi $a<0$.

- Hàm số có **1 cực trị** khi và chỉ khi $\left(1\right)$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm hoặc có 1 nghiệm $x=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\Delta_{(1)}\leq 0\\ g\left(0\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta<0\\ g\left(0\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a.b>0\\ b=0\end{cases}$$

  Khi đó: Hàm số chỉ có cực tiểu khi $a>0$ (nghĩa là có cực tiểu mà không có cực đại).

  Hàm số chỉ có cực đại khi $a<0$ (nghĩa là có cực đại mà không có cực tiểu).

Chú ý: Hàm bậc 4 trùng phương:

- Luôn có ít nhất 1 cực trị.
- Nếu có 3 cực trị thì 3 cực trị này luôn tạo thành 1 tam giác cân tại đỉnh thuộc trục oy.

3. Biện luận số cực trị của hàm hữu tỉ: $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ $\left(*\right)$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{e}{d}\right\}$

Ta có: $y'=\dfrac{adx^2+2aex+be-cd}{\left(dx+e\right)^2}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow adx^2+2aex+be-cd=0=g\left(x\right)\quad\left(1\right)$

+ Hàm số $\left(*\right)$ **có 2 cực trị** $\Leftrightarrow\left(1\right)$ có hai nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{e}{d}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}ad\neq 0\\ \Delta_{(1)}>0\\ g\left(-\dfrac{e}{d}\right)\neq 0\end{cases}$

+ Hàm số $(*)$ **không có cực trị** $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm kép hoặc vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} ad \neq 0 \\ \Delta_{(1)} \leq 0 \end{cases}$

Cách viết phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị của hàm số phân thức:

$$y = f(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$$

+ Giả sử (x_o, y_o) là điểm cực trị thì $y_o = \dfrac{Q'(x_o)}{P'(x_o)}$.

+ Giả sử hàm số có cực đại và cực tiểu thì phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị ấy là: $y = \dfrac{Q'(x)}{P'(x)} = \dfrac{2ax + b}{d} = \dfrac{2a}{d}.x + \dfrac{b}{d}$.

(Lấy đạo hàm tử chia đạo hàm mẫu $\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị)

II. Tìm tham số m để hàm số có cực trị tại x_0

Bài toán 1: Cho hàm số $y = f(x, m)$. Tìm tham số m để hàm số đạt **cực trị** tại điểm $x = x_0$.

Phương pháp giải

+ Tìm tập xác định

+ Tính $y' = f'(x, m)$

+ Để hàm số đạt cực trị tại $x = x_0$ thì: $\begin{cases} f'(x_0, m) = 0 \\ \left[f''(x_0, m) \neq 0 \right. \end{cases} \Rightarrow m$.

Bài toán 2: Cho hàm số $y = f(x, m)$. Tìm tham số m để hàm số đạt **cực đại** tại điểm $x = x_0$.

Phương pháp giải

+ Tìm tập xác định

+ Tính $y' = f'(x, m); y'' = f''(x, m)$

+ Để hàm số đạt **cực đại** tại $x = x_0$ thì: $\begin{cases} f'(x_0, m) = 0 \\ f''(x_0, m) < 0 \end{cases} \Rightarrow m$

Bài toán 3: Cho hàm số $y = f(x, m)$. Tìm tham số m để hàm số đạt **cực tiểu** tại điểm $x = x_0$.

Phương pháp giải

+ Tìm tập xác định

+ Tính $y' = f'(x, m); y'' = f''(x, m)$

+ Để hàm số đạt **cực tiểu** tại $x = x_0$ thì: $\begin{cases} f'(x_0, m) = 0 \\ f''(x_0, m) > 0 \end{cases} \Rightarrow m$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 32. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -(m^2 + 5m)x^3 + 6mx^2 + 6x - 6$ có cực trị tại $x = 1$.

A. $\left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=1 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=1 \end{array}\right.$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-2$.

Câu 33. Hàm số $y=x^3-3x^2+mx-2$ đạt cực tiểu tại $x=2$ khi?

A. $m>0$. **B.** $m\neq 0$. **C.** $m=0$. **D.** $m<0$.

Câu 34. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+(\mathrm{m}^2-m+2)x^2+\left(3m^2+1\right)x$ đạt cực tiểu tại $x=-2$.

A. $\left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=1 \end{array}\right.$. **B.** $m=3$. **C.** $m=1$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=-1 \end{array}\right.$.

Câu 35. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực tiểu tại $x=2$.

A. $\left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=1 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=1 \end{array}\right.$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-3$.

Câu 36. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2mx^2+(4m-1)x-3$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Hàm số có cực đại, cực tiểu khi $m<\frac{1}{2}$. **B.** Với mọi m, hàm số luôn có cực trị.

C. Hàm số có cực đại, cực tiểu khi $m\neq\frac{1}{2}$. **D.** Hàm số có cực đại, cực tiểu khi $m>1$.

Câu 37. Với giá trị tham số $m\in(a;b)\setminus\{c\}$ (với $a,b,c\in\mathbb{Z}$) thì hàm số $y=(m+2)x^3+3x^2+mx-6$ có 2 cực trị. Giá trị biểu thức $P=a+b+c$ là:

A. $P=-4$. **B.** $P=4$. **C.** $P=-3$. **D.** $P=-5$.

Câu 38. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số $m\in[-2020;2020)$ để hàm số $y=mx^3+3mx^2-(m-1)x-1$ có cực trị ?

A. 2038. **B.** 2020. **C.** 2018. **D.** 2021.

Câu 39. Giả sử A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ và đường thẳng AB đi qua gốc tọa độ. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=abc+ab+c$.

A. $-\frac{16}{25}$. **B.** -9. **C.** $-\frac{25}{9}$. **D.** 1.

Câu 40. Với giá trị tham số $m\in(-\infty;a]\cup[b;+\infty)$ (với $a,b\in\mathbb{Z}$) thì hàm số $y=mx^4+(m-1)x^2+m$ chỉ có đúng một cực trị. Giá trị biểu thức là $P=2a^{2019}+3b^{2020}$:

A. $P=2^{2019}+3$. **B.** $P=2+3.2^{2020}$. **C.** $P=3$. **D.** $P=0$.

Câu 41. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-1000;2010)$ để hàm số $y=mx^4+\left(m^2-9\right)x^2+10$ có 3 điểm cực trị.

A. 1000. **B.** 3010. **C.** 2010. **D.** 999.

Câu 42. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+2mx+5}{x-1}$. Tìm tham số thực m để hàm số có hai điểm cực trị.

A. $m\ge 3$. **B.** $m\le 3$. **C.** $m\ne 3$. **D.** $m<3$.

Câu 43. Tìm các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{x^2-(m+1)x-m^2+4m-2}{x-1}$ có cực đại và cực tiểu.

A. $1\le m\le 2$. **B.** $1\le m<2$. **C.** $1<m\le 2$. **D.** $1<m<2$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 44. Tìm tổng các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=x^3+(m-1)x^2+3x-2$ không có cực trị.

Câu 45. Cho hàm số $y=(m-1)x^3-3x^2-(m+1)x+3m^2-m+2$. Tìm tham số m để hàm số có cực đại, cực tiểu.

Câu 46. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y=mx^4-(m+1)x^2+2m-1$ có 3 điểm cực trị.

Câu 47. Cho hàm số: $y=\dfrac{x^2+(m+1)x+2m+1}{x+1}$.

a) Tìm tham số m để hàm số sau đây có 2 cực trị.

b) Hãy viết phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số.

Câu 48. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+mx}{1-x}$. Tìm tham số m để hàm số có 2 cực trị.

Câu 49. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2mx+2}{x+1}$. Tìm tham số m để hàm số có cực đại và cực tiểu.

DẠNG 3

TÌM THAM SỐ m ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ THOẢ MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC CỦA BÀI TOÁN

(liên quan hệ thức Vi -et)

HÀM SỐ BẬC 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ \left(a \neq 0\right)$

Cách viết phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị của hàm bậc ba: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ \left(a \neq 0\right)$

Cách 1: Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $y - \dfrac{y'.y''}{18a}$.

Cách 2: Chia y cho y' ta được: $y = Q(x).y' + Ax + B$

$\Rightarrow$ Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị : $y = Ax + B$

Câu 50. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số: $y = \dfrac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3\left(m-2\right)x + \dfrac{1}{6}$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$.

A. $1 - \dfrac{\sqrt{6}}{2} < m < 1 + \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

B. $\left[\begin{array}{l} m = \dfrac{2}{3} \\ m = 2 \end{array}\right.$.

C. $m \in \left(1 - \dfrac{\sqrt{6}}{2}; 1 + \dfrac{\sqrt{6}}{2}\right) \setminus \left\{0\right\}$.

D. $m = 2$.

Câu 51. Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3\left(m^2 - 1\right)x - m^3 + m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để : $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$

A. $m = \pm\sqrt{2}$.
B. $m = \pm 2$.
C. $m = 0$.
D. $m = \pm 1$.

Câu 52. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{m}{3}x^3 + 2x^2 + mx + 1$ có 2 điểm cực trị thỏa mãn $x_{CĐ} < x_{CT}$.

A. $m < 2$.
B. $-2 < m < 0$.
C. $-2 < m < 2$.
D. $0 < m < 2$.

Câu 53. Với các giá trị thực của tham số $m \in \left(\dfrac{a}{b}; +\infty\right) \setminus \left\{c\right\}$ (với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản) thì đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + \left(2m-1\right)x + 2$ có hai điểm cực trị và hoành độ cực trị đều dương. Tính giá trị biểu thức $P = \dfrac{a+b+c}{a^2.b^2.c^2}$

A. $P = -\dfrac{1}{2}$
B. $P = \dfrac{3}{5}$
C. $P = \dfrac{3}{2}$.
D. $P = \dfrac{1}{4}$

Câu 54. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in \left(-2019; 2019\right)$ thì đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3\left(m+1\right)x^2 - \left(3m^2 + 7m - 1\right)x + m^2 - 1$ có điểm cực tiểu tại một điểm có hoành độ nhỏ hơn 1?

A. 2018
B. 2020
C. 2019.
D. 4038

Câu 55. Với các giá trị thực của tham số $m=a$ (với $a\in\mathbb{Z}$) thì đồ thị hàm số $y=2x^3+mx^2-12x-13$ có cực đại và cực tiểu, đồng thời các điểm này cách đều trục tung Oy. Biết t thoả mãn phương trình sau: $4t^2+3at+a^2+3a-9=0$. Tính giá trị của t.

A. $t=3$ **B.** $t=\pm\dfrac{3}{2}$ **C.** $t=\dfrac{3}{2}$. **D.** $t=\pm3$

Câu 56. Với các giá trị thực của tham số $m=\dfrac{a}{b}$ (với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản) thì đồ thị hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+12mx-3m+4$ (C) có hai điểm cực trị là A và B và hai điểm này cùng với điểm $C\left(-1;-\dfrac{9}{2}\right)$ lập thành tam giác nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm. Tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{a^2+b^2}{2ab}$

A. $P=\dfrac{25}{4}$ **B.** $P=\dfrac{15}{4}$ **C.** $P=\dfrac{7}{2}$. **D.** $P=-\dfrac{5}{4}$

Câu 57. Cho hàm số $y=x^3-6x^2+3(m+2)x-m-6$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số có hoành độ 2 cực trị cùng dấu .

A. $-2<m<2$. **B.** $\dfrac{-15}{4}<m<2$. **C.** $\dfrac{-21}{4}<m<2$. **D.** $\dfrac{-17}{4}<m<2$.

Câu 58. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=2x^3+3(m-1)x^2+6m(1-2m)x$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trên đường thẳng có phương trình: $y=-4x$ (d) .

A. $m\in\{1\}$. **B.** $m\in\{0;1\}$. **C.** $m\in\left\{0;\dfrac{1}{2};1\right\}$. **D.** $m\in\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

Câu 59. Với các giá trị thực của tham số $m=a$ hoặc $m=b$ (với $a,b\in\mathbb{Z}$) thì thị hàm số: $y=-x^3+3x^2+3(m^2-1)x-3m^2-1$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu cùng với gốc tọa độ tạo thành tam giác vuông tại O. Tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{a+b}{a^2+b^2}$.

A. $P=\dfrac{1}{2}$ **B.** $P=1$ **C.** $P=2$ **D.** $P=0$

Câu 60. Với các giá trị thực của tham số $m=-\dfrac{a}{b}$ hoặc $m=\dfrac{c}{d}$ (với $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b},\dfrac{c}{d}$ là các phân số tối giản) thì hàm số $y=-x^3+3x^2+3(m^2-1)x-3m^2-1$ có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số cách đều gốc tọa độ O. Tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{a+b+c+d}{a^2+b^2}$.

A. $P=\dfrac{6}{5}$ **B.** $P=\dfrac{5}{6}$ **C.** $P=\dfrac{4}{7}$ **D.** $P=\dfrac{7}{4}$

Câu 61. Với các giá trị thực của tham số $m=-\frac{a\sqrt{2}}{b}$ hoặc $m=\frac{c\sqrt{2}}{d}$ (với $a,b,c,d\in\mathbb{Z}^{+}$ và $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ là các phân số tối giản) thì đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^3$ có các điểm cực đại và cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $(d): y=x$. Giá trị biểu thức $P=a^3+b^3+c^3+d^3$ là:

A. $P=8$ **B.** $P=28$ **C.** $P=10$. **D.** $P=18$

Câu 62. Với các giá trị thực của tham số $m=a$ hoặc $m=-\frac{b}{c}$ (với $a,b,c\in\mathbb{Z}^{+}$ và $\frac{b}{c}$ phân số tối giản) thì đồ thị hàm số $y=mx^3-3mx^2+3m-3$ có hai điểm cực trị A,B và thoả mãn $2AB^2-(OA^2+OB^2)=20$ (trong đó O là gốc tọa độ) . Giá trị biểu thức $P=\frac{a+b+c}{a.b.c}$ là:

A. $P=\frac{187}{28}$ **B.** $P=\frac{28}{187}$. **C.** $P=\frac{187}{29}$. **D.** $P=\frac{29}{187}$.

Câu 63. Với các giá trị thực của tham số $m=a$ hoặc $m=-\frac{b}{c}$ (với $a,b,c\in\mathbb{Z}^{+}$ và $\frac{b}{c}$ phân số tối giản) thì đường thẳng $\Delta: x+my+3=0$ tạo với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2$ (C) một góc α, biết $\cos\alpha=\frac{4}{5}$.Giá trị biểu thức $P=\frac{a+b+c}{a-b-c}$ là:

A. $P=-\frac{15}{11}$. **B.** $P=\frac{15}{11}$. **C.** $P=\frac{11}{15}$. **D.** $P=-\frac{11}{15}$.

Câu 64. Cho hàm số $y=2x^3-9x^2+12x+m$. Giả sử đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là A, B đồng thời A, B cùng với gốc tọa đọ O không thẳng hàng. Khi đó chu vi ΔOAB nhỏ nhất bằng bao nhiêu ?

A. $\sqrt{10}-\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{10}+\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{20}-\sqrt{10}$. **D.** $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG $y=ax^4+bx^2+c\ (a\neq 0)$

Câu 65. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^4-2(m+1)x^2+m^2$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

A. Không tồn tại m. **B.** $m=0$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-1 \end{array}\right.$. **D.** $m=-1$.

Câu 66. Với các giá trị thực của tham số $m=a$ hoặc $m=b$ (với $a\in\mathbb{Z}^-;b\in\mathbb{Z}^+$) thì đồ thị hàm số $y=x^4-2m^2x^2+1\ (C)$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông cân. Giá trị biểu thức $P=\dfrac{3a^2-b^2}{a.b}$ là:

A. $P=0$ **B.** $P=-1$. **C.** $P=2$. **D.** $P=-2$

Câu 67. Với các giá trị thực của tham số $m=a+\dfrac{b\sqrt[3]{3}}{c}$ (với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản) thì đồ thị hàm số $y=x^4-4(m-1)x^2+2m-1$ có 3 điểm cực trị tạo thành 3 đỉnh của một tam giác đều. Giá trị biểu thức $P=2^a+3^b+4^c$ là:

A. $P=11$. **B.** $P=9$. **C.** $P=21$. **D.** $P=15$

Câu 68. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m-1$. Để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành 1 tam giác nhận gốc tọa độ O làm trực tâm thì giá trị của tham số thưc m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $m\in(-10;-5)$. **B.** $m\in(-5;0)$. **C.** $m\in(0;5)$. **D.** $m\in(5;10)$.

Câu 69. Với các giá trị thực của tham số $m=-a$ hoặc $m=b$ (với $a,b\in\mathbb{Z}^+$) thì đồ thị hàm số: $y=x^4-2m^2x^2+m^4+1$ có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc O tạo thành 1 tứ giác nội tiếp. Giá trị biểu thức $P=a^2+5ab+b^2$ là:

A. $P=7$ **B.** $P=2$ **C.** $P=5$. **D.** $P=3$

Câu 70. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^4-8m^2x^2+1$ có ba điểm cực trị . Đồng thời ba điểm cực trị đó là ba đỉnh của một tam giác có diện tích bằng 64.

A. Không tồn tại m. **B.** $m=\sqrt[5]{2}$. **C.** $m=-\sqrt[5]{2}$. **D.** $m=\pm\sqrt[5]{2}$.

Câu 71. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^4-(3m-1)x^2+2m+1$ có ba điểm cực trị. Đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với điểm $D(7;3)$ nội tiếp được một đường tròn.

A. $m=3$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-1$. **D.** Không tồn tại m.

Câu 72. Với các giá trị thực của tham số $m=\dfrac{a}{b}$ hoặc $m=\dfrac{c-\sqrt{2}}{d}$ hoặc $m=\dfrac{e+\sqrt{2}}{f}$ (với $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{Z}^+$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản) thì đồ thị hàm số: $y=-x^4+2mx^2-4m+1$ có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc tọa độ tạo thành 1 hình thoi. Giá trị biểu thức $P=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{d^2+e^2+f^2}$ là:

A. $P=\dfrac{1}{4}$. **B.** $P=\dfrac{3}{4}$ **C.** $P=\dfrac{1}{2}$ **D.** $P=\dfrac{4}{5}$

HÀM SỐ HỮU TỈ: $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$

Cách viết phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị của hàm số phân thức:

$$y = f(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$$

+ Giả sử (x_o, y_o) là điểm cực trị thì $y_o = \frac{Q'(x_o)}{P'(x_o)}$.

+ Giả sử hàm số có cực đại và cực tiểu thì phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị ấy là: $y = \frac{Q'(x)}{P'(x)} = \frac{2ax + b}{d} = \frac{2a}{d}.x + \frac{b}{d}$.

(Lấy đạo hàm tử chia đạo hàm mẫu $\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị)

Câu 73. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx}{1 - x}$. Tìm m để khoảng cách giữa hai điểm cực trị bằng 10.

A. $m = 4$ **B.** $m = 1$ **C.** $m = -1$. **D.** $m = 2$

Câu 74. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + (m+1)x + m + 1}{x + 1}$. Gọi $A;B$ là hai điểm cực trị, định m để diện tích ΔOAB bằng 2. Với m vừa tìm được, tính khoảng cách từ O đến đường thẳng AB.

A. $\left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -1 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m = 1 \end{array}\right.$ **C.** $m = -1$. **D.** $m = 2$

Câu 75. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2mx + 2}{x + 1}$. Tìm tham số m để hàm số có cực đại và cực tiểu, đồng thời khoảng cách từ hai điểm ấy đến đường thẳng $\Delta : x + y + 2 = 0$ bằng nhau.

A. $m = -\frac{1}{2}$ **B.** $m = 1$ **C.** $m = -1$. **D.** $m = \frac{1}{2}$

Câu 76. Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x - 1}$. Tìm tham số thực m để hàm số có hai điểm cực trị, đồng thời hai điểm cực trị này nằm về hai phía so với trục hoành.

A. $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ **B.** $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (-1; +\infty)$

C. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (0; +\infty)$. **D.** $m \in (-1; +\infty)$

Câu 77. Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 2mx + 5}{x - 1}$. Tìm tham số thực m để hàm số có hai điểm cực trị, đồng thời hai điểm cực trị này nằm về hai phía so với đường thẳng $\Delta : y = 2x$.

A. $m < -2$ **B.** $m \geq 2\sqrt{6}$

C. $-2 - 2\sqrt{6} < m < -2 + 2\sqrt{6}$. **D.** $-\sqrt{6} < m < \sqrt{6}$

Câu 78. Tìm các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{x^2-(m+1)x-m^2+4m-2}{x-1}$ có cực đại và cực tiểu, đồng thời tích các giá trị cực đại và cực tiểu đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m=-\dfrac{1}{2}$ **B.** $m=\dfrac{7}{5}$ **C.** $m=-\dfrac{3}{2}$. **D.** $m=\dfrac{3}{2}$

DẠNG 4

CỰC TRỊ HÀM SỐ TRỊ TUYỆT ĐỐI CHỨA THAM SỐ m

- Hàm số $y=f(x)$ có n số điểm cực trị dương thì hàm số $y=f(|x|)$ có $2n+1$ số điểm cực trị.
- Hàm số $y=f(x)$ có n số điểm cực trị và phương trình $f(x)=0$ có m số nghiệm đơn và bội lẻ thì hàm số $y=|f(x)|$ có $n+m$ số điểm cực trị.
- Hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị x_1,x_2. Khi đó hàm số $y=|f(x)|$ có:

  + 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow f(x_1).f(x_2)\ge 0$

+ 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow f\left(x_1\right).f\left(x_2\right)<0$

Câu 79. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|x^4-2mx^2+64x\right|$ có đúng ba điểm cực trị?

A. 5. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 11.

Câu 80. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số a để hàm số $y=\left|x^4+ax^2-8x\right|$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. 5. **B.** 6. **C.** 11. **D.** 10.

Câu 81. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x)=\left|x^3+3x^2-3+m\right|$ có ba điểm cực trị.

A. $m=3$ hoặc $m=-1$. **B.** $m\geq 1$ hoặc $m\leq -3$.

C. $1\leq m\leq 3$. **D.** $m\geq 3$ hoặc $m\leq -1$.

Câu 82. Tổng các giá trị của tham số m để hàm số $y=\left|x^3-3x^2-9x-5+\frac{m}{2}\right|$ có 5 điểm cực trị bằng

A. -2016. **B.** -496. **C.** 1952. **D.** 2016.

Câu 83. Cho hàm số $f\left(x\right)=mx^3-3mx^2+\left(3m-2\right)x+2-m$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in\left[-10;10\right]$ để hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x\right)\right|$ có **đúng** 5 điểm cực trị ?

A. 7. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

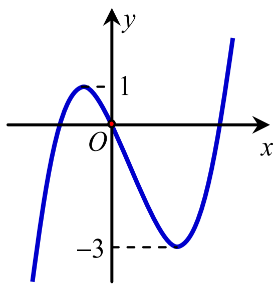
Câu 84. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\left|x\right|^3-\left(2m+1\right)x^2+3m\left|x\right|-5$ có ba điểm cực trị?

A. $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)$ **B.** $\left[0;\frac{1}{4}\right)\cup\left(1;+\infty\right)$ **C.** $\left(-\infty;0\right]$ **D.** $\left(1;+\infty\right)$

Câu 85. Cho hàm số $f\left(x\right)=\left(m^4+1\right)x^4+(-2^{m+1}.m^2+4)x^2+4^m+16$ với m là tham số thực. Số cực trị của đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x\right)-1\right|$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 86. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.

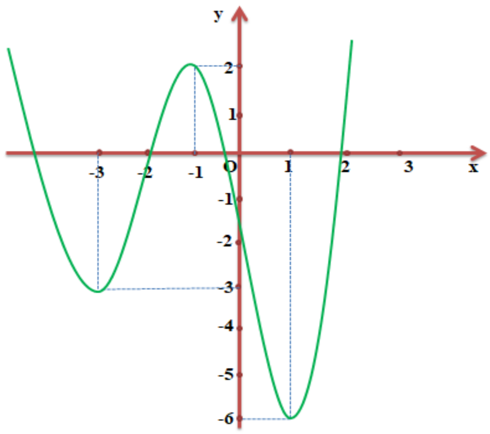


Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x\right)+m\right|$ có 3 điểm cực trị là

A. $m\leq -1$ hoặc $m\geq 3$. **B.** $m\leq -3$ hoặc $m\geq 1$.

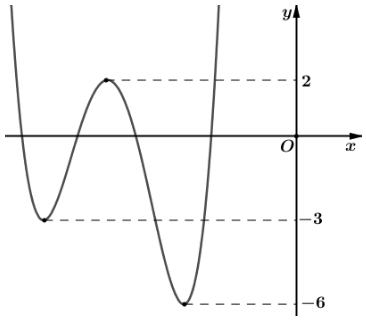
C. $m=-1$ hoặc $m=3$. **D.** $1\leq m\leq 3$.

Câu 87. Hình vẽ là đồ thị hàm số $y = f(x)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |f(x-1)+m|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng



A. 9. **B.** 12. **C.** 18. **D.** 15.

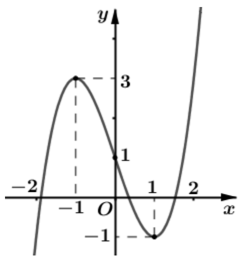
Câu 88. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Đồ thị hàm số $g(x) = |f(x+2018)+m|$ có 7 điểm cực trị khi

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

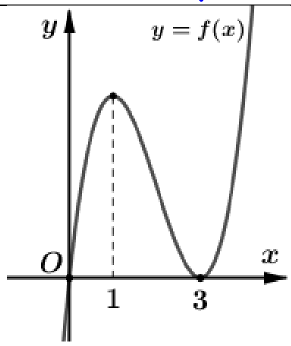
Câu 89. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Với $m < -1$ thì hàm số $g(x) = f(|x+m|)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 90. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $h(x)=\left|f^2(x)+f(x)+m\right|$ có đúng 3 điểm cực trị.

A. $m>\frac{1}{4}$.   **B.** $m\geq\frac{1}{4}$.   **C.** $m<1$.   **D.** $m\leq 1$.

CHỦ ĐỀ 3
TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$ CÓ LIÊN QUAN ĐẾN THAM SỐ m

Cho hàm số $y = f(x,m)$ với m là tham số, có tập xác định D.

- Hàm số $y = f(x,m)$ đồng biến trên D $\Leftrightarrow y' \geq 0 \quad \forall x \in D$
- Hàm số $y = f(x,m)$ nghịch biến trên D $\Leftrightarrow y' \leq 0 \quad \forall x \in D$

$\Rightarrow$ Tham số m

- Hàm số $y = f(x,m)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = f'(x,m) \geq 0, \quad \forall x \in D \Leftrightarrow \min y' \geq 0$
- Hàm số $y = f(x,m)$ nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = f'(x,m) \leq 0, \quad \forall x \in D \Leftrightarrow \max y' \leq 0$
- Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì nó phải xác định trên $\mathbb{R}$.

DẠNG 1
TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$ CÓ LIÊN QUAN ĐẾN THAM SỐ m

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $f'(x) = x^2 + 2mx + 4$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (Dấu '=' xảy ra tại hữu hạn điểm).

Ta có $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \leq 0$

$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 4 \leq 0$

$\Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$, vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 2. Tổng các giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10)$ để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3(m+2)x + 3m - 2025$ đồng biến trên trên $\mathbb{R}$ là:

A. 27. **B.** 35. **C.** 44. **D.** 54.

Lời giải

Chọn C.

$y = x^3 - 3x^2 + 3(m+2)x + 3m - 2025$

* Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R}$.

* Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = 3x^2 - 6x + 3(m+2) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \\ 9 - 9(m+2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq -1 .$$

* Vậy $m \geq -1$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do $m \in [-10;10)$ nên Tổng các giá trị nguyên của tham số là 44.

Câu 3. Biết giá trị tham số $m \in \left[a; \frac{b}{c}\right]$ (với $a,b,c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản) thì hàm số $y = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$ đồng biến trên trên $\mathbb{R}$. Giá trị biểu thức $P = \frac{a^2+b^2}{c}$

A. $P = \frac{9}{4}$. **B.** $P = \frac{13}{2}$. **C.** $P = 4$. **D.** $P = \frac{13}{4}$.

Lời giải

Chọn B.

Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R}$.

* Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = 3x^2 - 2(2m-1)x + (2-m) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 > 0 \\ \Delta' = (2m-1)^2 - 3(2-m) = 4m^2 - m - 5 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq \frac{5}{4}.$$

* Vậy $-1 \leq m \leq \frac{5}{4}$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do $m \in \left[a; \frac{b}{c}\right]$ nên $\begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow P = \frac{a^2+b^2}{c} = \frac{13}{2}$

Câu 4. Biết giá trị tham số $m \in \left[\frac{a}{b}; c\right]$ (với $a,b,c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) thì hàm số $y = \frac{1}{3}(3-m)x^3 - (m+3)x^2 + (m+2)x - 2024$ đồng biến trên trên $\mathbb{R}$. Giá trị biểu thức $P = \frac{a^2+b^2+c^2}{a.b.c}$

A. $P = -\frac{14}{5}$. **B.** $P = \frac{14}{5}$. **C.** $P = -\frac{7}{3}$. **D.** $P = \frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn D.

* Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R}$.

Để hàm số (1) luôn tăng trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = (3-m)x^2 - 2(m+3)x + (m+2) \geq 0 \quad \forall x \in R$

* Trường hợp 1: $3 - m = 0 \Leftrightarrow m = 3 \Rightarrow y' = -12x + 5 \Rightarrow m = 3$ không thỏa

* Trường hợp 2: $3 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3$

Để hàm số (1) luôn tăng trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0 \quad \forall x \in R$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 - m > 0 \\ \Delta' = (m+3)^2 - (3-m)(m+2) = 2m^2 + 5m + 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ -\dfrac{3}{2} \leq m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{3}{2} \leq m \leq -1.$$

Do $m \in \left[\dfrac{a}{b}; c\right]$ nên $P = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{a.b.c} = \dfrac{7}{3}$

Câu 5. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (4-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là

A. $(-\infty;1]$ **B.** $(-\infty;4]$ **C.** $(-\infty;1)$ **D.** $(-\infty;4)$

Lời giải

Chọn B.

Ta có.

$y' = 3x^2 - 6x + 4 - m$. $ycbt \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (2;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 4 - m \geq 0, \forall x \in (2;+\infty) \Leftrightarrow m \leq 3x^2 - 6x + 4, \forall x \in (2;+\infty)$

$\Leftrightarrow m \leq \min\limits_{(2;+\infty)} g(x)$ với $g(x) = 3x^2 - 6x + 4$

Ta có.

$g'(x) = 6x - 6$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$	1	2		$+\infty$
$g'(x)$		0		$+$	
$g(x)$			4	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra: $m \leq 4$ thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy: $m \in (-\infty;4]$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 6. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 2$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$. Số phần tử của S bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5$.

Hàm số đồng biến trong khoảng $(2;+\infty)$ khi $y' \geq 0$, $\forall x \in (2;+\infty)$ $\Leftrightarrow 3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5 \geq 0$, $\forall x \in (2;+\infty)$.

$3x^2-6(2m+1)x+12m+5\ge 0 \Leftrightarrow m\le \dfrac{3x^2-6x+5}{12(x-1)}, \forall x\in(2;+\infty)$

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{3x^2-6x+5}{12(x-1)}$ với $x\in(2;+\infty)$.

$g'(x)=\dfrac{3x^2-6x+1}{12(x-1)^2}>0$ với $\forall x\in(2;+\infty)$ $\Rightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Do đó $m\le g(x), \forall x\in(2;+\infty) \Rightarrow m\le g(2) \Leftrightarrow m\le \dfrac{5}{12}$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$y'=6x^2-6(2m+1)x+6m(m+1)$, $y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=m+1 \end{array}\right.$ (do $\Delta=(2m+1)^2-4(m^2+m)=1$).

Suy r hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;m)$ và $(m+1;+\infty)$.

Do đó hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)\Leftrightarrow m+1\le 2\Leftrightarrow m\le 1$. Do $m\in\mathbb{N}^*$ nên $m=1$.

Câu 8. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y=\dfrac{-3}{4}x^4+\dfrac{9}{2}x^2-(2m+15)x-m+3$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y'=-3x^3+9x-2m-15\le 0 \forall x\in(0;+\infty)$ và dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm thuộc $(0;+\infty)\Leftrightarrow 3x^3-9x+15\ge -2m\ \forall x\in(0;+\infty)$.

Xét hàm số: $g(x)=3x^3-9x+15$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có: $g'(x)=9x^2-9$

$g'(x)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1\ (l) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	15	$\searrow$	9	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT ta có: $-2m \le 9 \Leftrightarrow m \ge -\dfrac{9}{2}$

Vậy $m \in \{-4;-3;-2;-1\}$.

Câu 9. Tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = -x^4 + (2m-3)x^2 + m$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ là $\left(-\infty;\dfrac{p}{q}\right]$, trong đó phân số $\dfrac{p}{q}$ tối giản và $q > 0$. Hỏi tổng $p+q$ là?

A. 5. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = -4x^3 + 2(2m-3)x$.

Hàm số nghịch biến trên $(1;2) \Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \in (1;2) \Leftrightarrow m \le x^2 + \dfrac{3}{2} = g(x), \forall x \in (1;2)$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(1;2)$. $g'(x) = 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bảng biến thiên

x	1		2
g'		$+$	0
g	$\dfrac{5}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{11}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên, kết luận: $m \le \min g(x) \Leftrightarrow m \le \dfrac{5}{2}$.

Vậy $p+q = 5+2 = 7$.

Câu 10. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx + (m+1)\sqrt{x-2}$ nghịch biến trên $D = [2;+\infty)$ là

A. $m \le -1$. **B.** $m \ge 0$. **C.** $m < -1$. **D.** $-2 \le m \le 1$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $y = mx + (m+1)\sqrt{x-2} \Rightarrow y' = m + \dfrac{m+1}{2\sqrt{x-2}}$, y' xác định trên khoảng $(2;+\infty)$.

Nhận xét: khi x nhận giá trị trên $(2;+\infty)$ thì $\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}$ nhận mọi giá trị trên $(0;+\infty)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \in (2;+\infty) \Leftrightarrow (m+1)t + m \le 0, \forall t \in (0;+\infty)$ (đặt $t = \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}$).

$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \le 0 \\ m+(m+1)\cdot 0 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \le -1$.

Câu 11. Cho hàm số $y = \dfrac{mx-2m-3}{x-m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S.

A. Vô số **B.** 3 **C.** 5 **D.** 4

Lời giải

Chọn B.

$y' = \dfrac{-m^2+2m+3}{(x-m)^2}$ hàm số đồng biến trên khoảng xác định khi $-1 < m < 3$ nên có 3 giá trị của m nguyên

Câu 12. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{-mx+3m+4}{x-m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Ta có: $f'(x) = \dfrac{m^2-3m-4}{(x-m)^2}$.

Hàm số $f(x) = \dfrac{-mx+3m+4}{x-m}$ nghịch biến trên $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi:

$\begin{cases} f'(x) < 0 \\ m \notin (2;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-3m-4 < 0 \\ m \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 4 \\ m \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \le 2.$

Do m nhận giá trị nguyên nên $m \in \{0;1;2\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 13. Tồn tại bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = \dfrac{x-2}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $y = \dfrac{x-2}{x-m} \Rightarrow y' = \dfrac{-m+2}{(x-m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1) \Leftrightarrow \begin{cases} -m+2 > 0 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m > -1 \end{cases}$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của m để hàm số $y=\frac{x-2}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Câu 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\frac{(m+1)x+2m+12}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 6. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$ $\Leftrightarrow y'=\frac{m^2-m-12}{(x+m)^2}<0$ với $\forall x\in(1;+\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-m-12<0 \\ x+m\neq 0 \end{cases}, \forall x\in(1;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -3<m<4 \\ m\neq -x \end{cases}, \forall x\in(1;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -3<m<4 \\ m\notin(-\infty;-1) \end{cases} \Leftrightarrow -1\le m<4.$$

$$\begin{cases} -1\le m<4 \\ m\in\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m=\{-1;0;1;2;3\}.$$

Câu 15. Gọi S là tập các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=\frac{2\sqrt{1-x}-14}{m-\sqrt{1-x}}$ đồng biến trên khoảng $(-15;-3)$. Số phần tử của tập S là

A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D.

Đặt $t=\sqrt{1-x}$, $x\in(-15;-3)\Rightarrow t\in(2;4)$ và $y_t=\frac{2t-14}{m-t}$.

Ta có $y'_x=y'_t.t'_x=\frac{2m-14}{(m-t)^2}\left(\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}\right)$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-15;-3)$

$$\Leftrightarrow y'_x=\frac{2m-14}{(m-t)^2}\left(\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}\right)>0,\quad \forall x\in(-15;-3), \forall t\in(2;4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2m-14}{(m-t)^2}<0,\ \forall t\in(2;4) \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-14<0 \\ m-t\neq 0 \end{cases},\quad \forall t\in(2;4) \Leftrightarrow \begin{cases} m<7 \\ m\notin(2;4) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4\le m<7 \\ m\le 2 \end{array}\right..$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 4\le m<7 \\ m\le 2 \end{array}\right. \\ m\in\mathbb{N}^* \end{cases} \Rightarrow m=\{1;2;4;5;6\}.$$

Vậy có 5 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn.

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{x^2-(m+1)+2m-1}{x-m}$ tăng trên từng khoảng xác định của nó?

A. $m>1$. **B.** $m\le 1$. **C.** $m<1$. **D.** $m\ge 1$.

Lời giải

Chọn B.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$. Ta có $y'=\dfrac{x^2-2mx+m^2-m+1}{(x-m)^2}$

Để hàm số tăng trên từng khoảng xác định của nó $\Leftrightarrow y'\ge 0,\ \forall x\in D \Leftrightarrow x^2-2mx+m^2-m+1\ge 0, \forall x\in D$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1\ge 0\,(hn) \\ m-1\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\le 1$

Câu 17. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{2x^2+(1-m)x+1+m}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$. Ta có $y'=\dfrac{2x^2-4mx+m^2-2m-1}{(x-m)^2}=\dfrac{g(x)}{(x-m)^2}$

Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $g(x)\ge 0, \forall x>1$ và $m\le 1$ (1)

Vì $\Delta_g{}'=2(m+1)^2\ge 0, \forall m$ nên $(1)\Leftrightarrow g(x)=0$ có hai nghiệm thỏa $x_1\le x_2\le 1$

Điều kiện tương đương là $\begin{cases} 2g(1)=2(m^2-6m+1)\ge 0 \\ \dfrac{S}{2}=m\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow m\le 3-2\sqrt{2}\approx 0,2$.

Do đó không có giá trị nguyên dương của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{mx^2+6x-2}{x+2}$ nghịch biến trên nửa khoảng $[1;+\infty)$.

A. $m\ge \dfrac{1}{2}$. **B.** $m<-\dfrac{14}{5}$. **C.** $m\le -\dfrac{14}{5}$. **D.** $m\le \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

* Hàm số xác định trên nửa khoảng $[1;+\infty)$.

* Ta có: $y'=\dfrac{mx^2+4mx+14}{(x+2)^2}$.

* Để hàm số nghịch biến trên nửa khoảng $[1;+\infty) \Leftrightarrow y'\le 0, \forall \in [1;+\infty)$.

$$\Leftrightarrow \frac{mx^2+4mx+14}{(x+2)^2}\le 0,\forall\in[1;+\infty)\Leftrightarrow mx^2+4mx+14\le 0,\forall\in[1;+\infty).$$

$$\Leftrightarrow m\le\frac{-14}{x^2+4x}=g(x),\forall\in[1;+\infty)\Leftrightarrow m\le\min_{x\ge 1}g(x)=g(1)=-\frac{14}{5}.$$

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\cos 2x+mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m>4$. **B.** $m<2$. **C.** $m\ge 1$ **D.** $m\ge 2$.

Lời giải

Chọn D.

Phương pháp

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(a;b)\Leftrightarrow f'(x)\ge 0\ \forall\in(a;b)$ và bằng 0 tại hữu hạn điểm.

Cách giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=-2\sin 2x+m$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow -2\sin 2x+m\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m\ge 2\sin 2x\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m\ge 2$.

Câu 20. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=3x+m(\sin x+\cos x+m)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 3. **B.** Vô số. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $y'=3+m(\cos x-\sin x)$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ (1).

Đặt $t=\cos x-\sin x, t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$, thu được hàm $y'(t)=3+mt, t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

Khi đó điều kiện (1) trở thành:

$$y'(t)\ge 0,\forall t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\Leftrightarrow\begin{cases}y'\left(-\sqrt{2}\right)\ge 0\\ y'\left(\sqrt{2}\right)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3-\sqrt{2}m\ge 0\\ 3+\sqrt{2}m\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{3}{\sqrt{2}}\le m\le\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Các giá trị nguyên của m nhận được là: $-2,-1,0,1,2$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 21. Cho hàm số sau $y=-\frac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-3)x-m+2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Đáp án: $-3\le m\le 1$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=-x^2-2mx+2m-3$.

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $y'\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a_{y'}<0\\ \Delta'\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<0\ \ (hn)\\ m^2+2m-3\le 0\end{cases}\Leftrightarrow -3\le m\le 1$

Câu 22. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+(2-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

Lời giải

Đáp án: $m\le 2$

Ta có $y'=3x^2-6x+2-m$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi $y'\ge 0,\forall x\in(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2-6x+2-m\ge 0,\forall x\in(2;+\infty)$ $m\le 3x^2-6x+2,\forall x\in(2;+\infty)$.

Xét hàm số $f(x)=3x^2-6x+2,\forall x\in(2;+\infty)$.

$f'(x)=6x-6$; $f'(x)=0\Rightarrow 6x-6=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	2		$+\infty$
$f'(x)$		0		$+$	
$f(x)$			2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $m\le 2$.

Vậy $m\in(-\infty;2]$.

Câu 23. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-x^3-6x^2+(4m-9)x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

Lời giải

Đáp án: $m\le -\frac{3}{4}$

Ta có $y'=-3x^2-12x+4m-9$

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ thì $y'=-3x^2-6x+4m-9\le 0\quad\forall x\in(-\infty;-1)$

$\Leftrightarrow 4m \le 3x^2 + 12x + 9 \quad \forall x \in (-\infty;-1) \Leftrightarrow 4m \le \min\limits_{(-\infty;-1]} f(x), \quad f(x) = 3x^2 + 12x + 9$

Ta có $f'(x) = 6x + 12; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Khi đó, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra $\min\limits_{(-\infty;0]} f(x) = -3 \Rightarrow 4m \le -3 \Leftrightarrow m \le -\dfrac{3}{4}$.

Câu 24. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{x - m + 2}{x + 1}$ giảm trên các khoảng mà nó xác định.

Lời giải

Đáp án: $m < 1$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ta có $y' = \dfrac{m-1}{(x+1)^2}$

Để hàm số giảm trên các khoảng mà nó xác định $\Leftrightarrow y' < 0, \forall x \ne -1 \Leftrightarrow m < 1$

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{mx + 4}{x + m}$ giảm trên khoảng $(-\infty;1)$?

Lời giải

Đáp án: $-2 < m \le -1$

* Hàm số xác định trên khoảng $(-\infty;1)$.

* Ta có: $y' = \dfrac{m^2 - 4}{(x+m)^2}, \forall x \ne -m$.

* Để hàm đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} y' < 0, \forall x \in (-\infty;1) \\ -m \notin (-\infty;1) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ -m \notin (-\infty;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ -m \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \le -1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < -1.$$

* Vậy thỏa yêu cầu bài toán thì: $-2 < m < -1$.

Câu 26. Tìm số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{mx + 18}{2x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(-2;5)$.

Lời giải

Đáp án: $m = \{4;5\}$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{-m}{2}\right\}$.

Ta có $y=\frac{mx+18}{2x+m}\Rightarrow y'=\frac{m^2-36}{(2x+m)^2}$.

YCBT $\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-36<0\\ \frac{-m}{2}\notin(-2;5)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-6<m<6\\ \left[\begin{array}{l}-\frac{m}{2}\ge 5\\ -\frac{m}{2}\le -2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-6<m<6\\ \left[\begin{array}{l}m\le -10\\ m\ge 4\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow 4\le m<6$.

Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m là $m=\{4;5\}$.

Câu 27. Cho hàm số $y=\frac{(4-m)\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{6-x}+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong khoảng $(-10;10)$ sao cho hàm số đồng biến trên khoảng $(-8;5)$?

Lời giải

Đáp án: có 14 số m nguyên

Đặt $t=\sqrt{6-x}\Rightarrow f(t)=\frac{(4-m)t+3}{t+m}\Rightarrow f'(x)=f'(t).t'(x)$.

Với $x\in(-8;5)$, ta có $t'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{6-x}}<0,\forall x\in(-8;5)$ và $x\in(-8;5)\Rightarrow t\in(1;\sqrt{14})$.

Từ đó ta suy ra hàm số $y=\frac{(4-m)\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{6-x}+m}$ đồng biến trên khoảng $(-8;5)$ khi hàm số $f(t)=\frac{(4-m)t+3}{t+m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;\sqrt{14})$.

$f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(1;\sqrt{14})\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-m^2+4m-3<0\\ -m\le 1\end{cases}\\ \begin{cases}-m^2+4m-3<0\\ -m\ge\sqrt{14}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\in[-1;1)\cup(3;+\infty)\\ m\le-\sqrt{14}\end{array}\right.$

Do $m\in(-10;10)$ nên $m\in\{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-1;0;4;5;6;7;8;9\}$.

Như vậy có 14 số m nguyên trong khoảng $(-10;10)$ sao cho hàm số đồng biến trên khoảng $(-8;5)$.

Câu 28. Cho hàm số $y=\frac{2x^2-3x+m}{x-1}$. Tìm m để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Lời giải

Đáp án: $m\le 9$

Tập xác định: $D=R\setminus\{1\}$. $y'=\frac{2x^2-4x+3-m}{(x-1)^2}=\frac{f(x)}{(x-1)^2}$.

Ta có: $f(x)\ge 0\Leftrightarrow m\le 2x^2-4x+3$.

Đặt $g(x)=2x^2-4x+3\ \Rightarrow g'(x)=4x-4$

Hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-1}$ đồng biến trên $(-\infty;-1) \Leftrightarrow y'\ge 0,\ \forall x\in(-\infty;-1) \Leftrightarrow m\le \min\limits_{(-\infty;-1]} g(x)$

Dựa vào BBT của hàm số $g(x),\ \forall x\in(-\infty;-1]$ ta suy ra $m\le 9$.

Vậy $m\le 9$ thì hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$

Câu 29. Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-1}$. Tìm m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

Lời giải

Đáp án: $m\le 1$

Tập xác định: $D=R\setminus\{1\}$.

$$y'=\frac{2x^2-4x+3-m}{(x-1)^2}=\frac{f(x)}{(x-1)^2}.$$

Ta có: $f(x)\ge 0 \Leftrightarrow m\le 2x^2-4x+3$. Đặt $g(x)=2x^2-4x+3 \quad \Rightarrow g'(x)=4x-4$

Hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-1}$ đồng biến trên $(1;2)$ $\Leftrightarrow y'\ge 0,\ \forall x\in(1;2) \Leftrightarrow m\le \min\limits_{[1;2]} g(x)$

Dựa vào BBT của hàm số $g(x),\ \forall x\in(-\infty;-1]$ ta suy ra $m\le 1$.

Vậy $m\le 1$ thì hàm số đồng biến trên $(1;2)$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{m\sin x+4}{\sin x+m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$?

Lời giải

Đáp án: có 3 giá trị nguyên $m\in\{-1;0;1\}$

Đk: $\sin x\ne -m$.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{(m^2-4)\cos x}{(\sin x+m)^2}$

Vì $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên $\cos x>0, 0<\sin x<1$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow f'(x)<0, \forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{(m^2-4)\cos x}{(\sin x+m)^2}<0, \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4<0 \\ \left[\begin{array}{l} -m\le 0 \\ -m\ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2<m\le -1 \\ 0\le m<2 \end{array}\right..$$

Mà m nguyên nên $m\in\{-1;0;1\}$. Vậy có 3 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 31. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{2\sin x-1}{\sin x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải

Đáp án: $m \le 0$

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Đặt $t = \sin x$, với $x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0;1)$. Ta có hàm số $t = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Do đó hàm số $y = \dfrac{2\sin x - 1}{\sin x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi hàm số $y = \dfrac{2t-1}{t-m}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

$\Leftrightarrow f'(t) > 0,\ \forall t \in (0;1) \Leftrightarrow \dfrac{-2m+1}{(t-m)^2} > 0,\ \forall t \in (0;1)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2m+1>0 \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \le 0.$$

Vậy $m \le 0$.

DẠNG 2

BIỆN LUẬN CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$ CÓ LIÊN QUAN ĐẾN THAM SỐ m

I. Biện luận số cực trị của hàm số

1. Biện luận số cực trị của hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)\ (*)$

Ta có: $y'=3ax^2+2bx+c\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow 3ax^2+2bx+c=0\quad (1)$

+ Hàm số $(*)$ **có 2 cực trị** $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0\\ \Delta_{(1)}>0\end{cases}$

+ Hàm số $(*)$ **không có cực trị** $\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0\\ \Delta_{(1)}\le 0\end{cases}$

2. Biện luận số cực trị của hàm trùng phương: $y=ax^4+bx^2+c\ (a\neq 0)$

Ta có: $y'=4ax^3+2bx=x\left(4ax^2+2b\right)\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ 4ax^2+2b=0=g(x)\ (1)\end{array}\right.$

- Hàm số $(*)$ **có 3 cực trị** $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} g(0)\neq 0\\ \Delta_{(1)}>0\end{cases}$

  Khi đó: Hàm số có 2 cực tiểu, 1 cực đại khi $a>0$.

  Hàm số có 2 cực đại, 1 cực tiểu khi $a<0$.

- Hàm số có **1 cực trị** khi và chỉ khi (1) có nghiệm kép hoặc vô nghiệm hoặc có 1 nghiệm $x=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\Delta_{(1)}\le 0\\ g(0)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta<0\\ g(0)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a.b>0\\ b=0\end{cases}$$

  Khi đó: Hàm số chỉ có cực tiểu khi $a>0$ (nghĩa là có cực tiểu mà không có cực đại).

  Hàm số chỉ có cực đại khi $a<0$ (nghĩa là có cực đại mà không có cực tiểu).

Chú ý: Hàm bậc 4 trùng phương:

- Luôn có ít nhất 1 cực trị.
- Nếu có 3 cực trị thì 3 cực trị này luôn tạo thành 1 tam giác cân tại đỉnh thuộc trục oy.

3. Biện luận số cực trị của hàm hữu tỉ: $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}\quad (*)$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{e}{d}\right\}$

Ta có: $y'=\dfrac{adx^2+2acx+bc-cd}{(dx+e)^2}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow adx^2+2acx+bc-cd=0=g(x)\quad (1)$

+ Hàm số $(*)$ **có 2 cực trị** $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{e}{d}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} ad\neq 0\\ \Delta_{(1)}>0\\ g\left(-\dfrac{e}{d}\right)\neq 0\end{cases}$

+ Hàm số $(*)$ **không có cực trị** $\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} ad\neq 0\\ \Delta_{(1)}\le 0\end{cases}$

Cách viết phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị của hàm số phân thức:

$$y=f(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$$

+ Giả sử (x_o,y_o) là điểm cực trị thì $y_o=\dfrac{Q'(x_o)}{P'(x_o)}$.

+ Giả sử hàm số có cực đại và cực tiểu thì phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị ấy là: $y=\dfrac{Q'(x)}{P'(x)}=\dfrac{2ax+b}{d}=\dfrac{2a}{d}.x+\dfrac{b}{d}$.

(Lấy đạo hàm tử chia đạo hàm mẫu $\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị)

II. Tìm tham số m để hàm số có cực trị tại x_0

Bài toán 1: Cho hàm số $y=f(x,m)$. Tìm tham số m để hàm số đạt **cực trị** tại điểm $x=x_0$.

Phương pháp giải

+ Tìm tập xác định

+ Tính $y'=f'(x,m)$

+ Để hàm số đạt cực trị tại $x=x_0$ thì: $\begin{cases} f'(x_0,m)=0 \\ \left[f''(x_0,m)\neq 0\right. \end{cases}\Rightarrow m$.

Bài toán 2: Cho hàm số $y=f(x,m)$. Tìm tham số m để hàm số đạt **cực đại** tại điểm $x=x_0$.

Phương pháp giải

+ Tìm tập xác định

+ Tính $y'=f'(x,m); y''=f''(x,m)$

+ Để hàm số đạt **cực đại** tại $x=x_0$ thì: $\begin{cases} f'(x_0,m)=0 \\ f''(x_0,m)<0 \end{cases}\Rightarrow m$

Bài toán 3: Cho hàm số $y=f(x,m)$. Tìm tham số m để hàm số đạt **cực tiểu** tại điểm $x=x_0$.

Phương pháp giải

+ Tìm tập xác định

+ Tính $y'=f'(x,m); y''=f''(x,m)$

+ Để hàm số đạt **cực tiểu** tại $x=x_0$ thì: $\begin{cases} f'(x_0,m)=0 \\ f''(x_0,m)>0 \end{cases}\Rightarrow m$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 32. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-(m^2+5m)x^3+6mx^2+6x-6$ có cực trị tại $x=1$.

A. $\left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=1 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=1 \end{array}\right.$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-2$.

Lời giải

Chọn A.

Phương pháp tự luận

* Hàm số đã cho liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$.

* Ta có: $y'=-3\left(m^2+5m\right)x^2+12mx+6 \Rightarrow y''=-6\left(m^2+5m\right)x+12m$.

* Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(1)=0 \\ y''(1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3m^2-3m+6=0 \\ -6m^2-18m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=1 \end{array}\right. \\ \begin{cases} m\neq -3 \\ m\neq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=1 \end{array}\right.$.

Phương pháp trắc nghiệm

+ Chọn $m=-2 \Rightarrow y=6x^3-12x^2+6x-6$

$\Rightarrow y'=18x^2-24x+6$

$\Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow 18x^2-24x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{1}{3} \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên thấy có cực trị tại $x=1$. Loại **B, C**

+ Chọn $m=1 \Rightarrow y=-6x^3+6x^2+6x-6$

$\Rightarrow y'=-18x^2+12x+6$

$\Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow -18x^2+12x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\frac{1}{3} \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên thấy có cực trị tại $x=1$.

Vậy Đáp A đúng

Câu 33. Hàm số $y=x^3-3x^2+mx-2$ đạt cực tiểu tại $x=2$ khi?

A. $m>0.$ **B.** $m\neq 0.$ **C.** $m=0.$ **D.** $m<0.$

Lời giải

Chọn C.

$y'=3x^2-6x+m$

$y''=6x-6$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$ khi: $\begin{cases} y'(2)=3.2^2-6.2+m=0 \\ y''(2)=6.2-6>0 \end{cases} \Leftrightarrow m=0$

Câu 34. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+(\mathrm{m}^2-m+2)x^2+\left(3m^2+1\right)x$ đạt cực tiểu tại $x=-2$.

A. $\left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=1 \end{array}\right.$. **B.** $m=3$. **C.** $m=1$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=-1 \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn B.

$y'=x^2+2(m^2-m+2)x+3m^2+1$

$y''=2x+2(m^2-m+2)$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2$ khi: $\begin{cases} y'(-2)=0 \\ y''(-2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2+4m-3=0 \\ m^2-m>0 \end{cases} \Leftrightarrow m=3$

Câu 35. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực tiểu tại $x=2$.

A. $\left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=1 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=1 \end{array}\right.$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-3$.

Lời giải

Chọn D.

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

* Ta có: $y'=\dfrac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2} \Rightarrow y''=\dfrac{2x+2m}{(x+m)^4}$

* Hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực đại tại $x=2$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} y'(2)=0 \\ y''(2)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m^2+4m-3}{(2+m)^2}=0 \\ \dfrac{2m+4}{(2+m)^4}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=1 \end{array}\right. \\ m<-2 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{m=-3}.$$

Câu 36. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-2mx^2+(4m-1)x-3$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Hàm số có cực đại, cực tiểu khi $m<\dfrac{1}{2}$.

B. Với mọi m, hàm số luôn có cực trị.

C. Hàm số có cực đại, cực tiểu khi $m\neq\dfrac{1}{2}$.

D. Hàm số có cực đại, cực tiểu khi $m>1$.

Lời giải

Chọn C.

Phương pháp trắc nghiệm

Hàm số bậc 3 có cực đại, cực tiểu thì $b^2-3ac>0 \Leftrightarrow 4m^2-(4m-1)>0$

$\Leftrightarrow (2m-1)^2>0 \Leftrightarrow m\neq\dfrac{1}{2}$.

Câu 37. Với giá trị tham số $m\in(a;b)\setminus\{c\}$ (với $a,b,c\in\mathbb{Z}$) thì hàm số $y=(m+2)x^3+3x^2+mx-6$ có 2 cực trị. Giá trị biểu thức $P=a+b+c$ là:

A. $P=-4$. **B.** $P=4$. **C.** $P=-3$. **D.** $P=-5$.

Lời giải

Chọn A.

$y'=3(m+2)x^2+6x+m$

Hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq -2\\ m^2+2m-3<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq -2\\ -3<m<1\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-3;1)\setminus\{-2\}\Rightarrow P=a+b+c=-4$$

Câu 38. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số $m\in[-2020;2020)$ để hàm số $y=mx^3+3mx^2-(m-1)x-1$ có cực trị ?

A. 2038. **B.** 2020. **C.** 2018. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn B.

* $y'=3mx^2+6mx-(m-1)$

+ Khi $m=0\Rightarrow y'=1>0\Rightarrow$ hàm số luôn đồng biến $\Rightarrow m=0$ không thỏa

+ Khi $m\neq 0\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow 3mx^2+6mx-(m-1)=0\quad(1)$

$$\Delta'=9m^2+3m(m-1)=12m^2-3m$$

Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow \Delta'>0\Leftrightarrow 12m^2-3m>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<0\\ m>\dfrac{1}{4}\end{array}\right.$

Suy ra Có 2020 bao nhiêu giá trị nguyên âm

Câu 39. Giả sử A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ và đường thẳng AB đi qua gốc tọa độ. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=abc+ab+c$.

A. $-\dfrac{16}{25}$. **B.** -9. **C.** $-\dfrac{25}{9}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A.

TXĐ $D=\mathbb{R}$.

$f'(x)=3x^2+2ax+b$. Điều kiện để hàm số có hai điểm cực trị là $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Rightarrow a^2-3b>0$.

Lấy $f(x)$ chia cho $f'(x)$.

Ta có $f(x)=f'(x).\left(\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{9}a\right)+\left(\dfrac{2}{3}b-\dfrac{2}{9}\right)x+c-\dfrac{1}{9}ab$.

Suy ra đường thẳng đi qua A, B là: $y=\left(\frac{2}{3}b-\frac{2}{9}\right)x+c-\frac{1}{9}ab\ (d)$.

Theo đầu bài (d) đi qua gốc tọa độ $\Rightarrow c-\frac{1}{9}ab=0 \Leftrightarrow ab=9c$.

Khi đó $P=abc+ab+c \Leftrightarrow P=9c^2+10c \Leftrightarrow P=\left(3c+\frac{5}{3}\right)^2-\frac{25}{9}$.

Suy ra $\min P=-\frac{25}{9}$.

Câu 40. Với giá trị tham số $m\in(-\infty;a]\cup[b;+\infty)$ (với $a,b\in\mathbb{Z}$) thì hàm số $y=mx^4+(m-1)x^2+m$ chỉ có đúng một cực trị. Giá trị biểu thức là $P=2a^{2019}+3b^{2020}$:

A. $P=2^{2019}+3$. **B.** $P=2+3.2^{2020}$. **C.** $P=3$. **D.** $P=0$.

Lời giải

Chọn C.

Trường hợp 1: $m=0$

Ta có hàm số: $y=-x^2$, hàm số này có 1 cực trị. Vậy $m=0$ thỏa mãn.

Trường hợp 2: $m\neq 0$

$y'=4mx^3+2(m-1)x$

Hàm số có đúng 1 cực trị $\Leftrightarrow \frac{m-1}{m}\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\geq 1 \\ m<0 \end{array}\right.$

Kết hợp TH1 và TH2, ta có: $\left[\begin{array}{l} m\leq 0 \\ m\geq 1 \end{array}\right.$ thỏa mãn.

$P=2a^{2019}+3b^{2020}=3$

Câu 41. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-1000;2010)$ để hàm số $y=mx^4+(m^2-9)x^2+10$ có 3 điểm cực trị.

A. 1000. **B.** 3010. **C.** 2010. **D.** 999.

Lời giải

Chọn D.

Để hàm số có ba cực trị thì trước hết hàm số phải là hàm số trùng phương tức $m\neq 0$.

Ta có : $y'=4mx^3+2(m^2-9)x=4mx(x^2+\frac{m^2-9}{2m})$.

Hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi : y' có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \frac{m^2-9}{2m}<0$

$\Leftrightarrow m(m^2-9)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<m<3 \\ m<-3 \end{array}\right.$.

Vậy các giá trị cần tìm của m là : $\left[\begin{array}{l} 0<m<3 \\ m<-3 \end{array}\right.$.

Có 999 giá trị nguyên.

Câu 42. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+2mx+5}{x-1}$. Tìm tham số thực m để hàm số có hai điểm cực trị.

A. $m\ge 3$. **B.** $m\le 3$. **C.** $m\ne 3$. **D.** $m<3$.

Lời giải

Chọn D.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Để hàm số có hai cực trị thì $y'=\dfrac{-x^2+2x-(2m-5)}{(x-1)^2}=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2\ne 1$.

$\Leftrightarrow g(x)=-x^2+2x-(2m-5)=0$ (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2\ne 1$.

$\Leftrightarrow \begin{cases}-x^2+2x-(2m-5)=0 \text{ có nghiệm}\\ g(1)\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\begin{cases}a=-1\ne 0\\ \Delta'=-2m+6>0\end{cases}\\ -2m+6\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow m<3$.

Câu 43. Tìm các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{x^2-(m+1)x-m^2+4m-2}{x-1}$ có cực đại và cực tiểu.

A. $1\le m\le 2$. **B.** $1\le m<2$. **C.** $1<m\le 2$. **D.** $1<m<2$.

Lời giải

Chọn D.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Hàm số có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi:

$y'=\dfrac{x^2-2x+m^2-3m+3}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow g(x)=x^2-2x+m^2-3m+3=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2\ne 1\Leftrightarrow \begin{cases}a=1\ne 0\\ \Delta'=-m^2+3m-2>0\\ g(1)=m^2-3m+2\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow 1<m<2$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 44. Tìm tổng các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=x^3+(m-1)x^2+3x-2$ không có cực trị.

Lời giải

Đáp án: 7

* Hàm số đã cho liên tục và xác định trên $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.
* Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow y'=3x^2+2(m-1)x+3=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta' = (m-1)^2 - 9 \le 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 8 \le 0 \Leftrightarrow \boxed{-2 \le m \le 4}$.

Suy ra tổng các giá trị nguyên là 7.

Câu 45. Cho hàm số $y = (m-1)x^3 - 3x^2 - (m+1)x + 3m^2 - m + 2$. Tìm tham số m để hàm số có cực đại, cực tiểu.

Lời giải

Đáp án: $m \ne 1$.

Hàm số đã cho liên tục và xác định trên $\mathrm{D} = \mathbb{R}$.

Hàm số có cực đại và cực tiểu (2 cực trị) $\Leftrightarrow y' = 3(m-1)x^2 - 6x - (m+1) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = m-1 \ne 0 \\ \Delta' = 9 + 3(m-1)(m+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ne 1 \\ \Delta' = m^2 + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \ne 1.$$

Câu 46. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = mx^4 - (m+1)x^2 + 2m - 1$ có 3 điểm cực trị.

Lời giải

Đáp án: $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 0 \end{array}\right.$

$y' = 4mx^3 - 2(m+1)x = 0$

$\Leftrightarrow 2x(2mx^2 - m - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2mx^2 = m+1 \end{array}\right.$

Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow m(m+1) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 0 \end{array}\right.$

Câu 47. Cho hàm số: $y = \dfrac{x^2 + (m+1)x + 2m + 1}{x+1}$.

a) Tìm tham số m để hàm số sau đây có 2 cực trị.

b) Hãy viết phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số.

Bài giải

Đáp án:

a) hàm số có 2 cực trị khi $\begin{cases} m \ne -1 \\ m < 1 \end{cases}$

b) phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị: $y = -2x + m + 1$ với $\begin{cases} m \ne -1 \\ m < 1 \end{cases}$

Hàm số đã cho xác định trên: $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{x^2 + 2x - m}{(x+1)^2}$.

$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - m = 0 = g(x)$

$\Delta = -1 + m$

+ để hàm số có 2 cực trị thì: $\begin{cases} g(-1) \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2 - m \neq 0 \\ -1 + m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m < 1 \end{cases} \Rightarrow$ có 2 cực trị

* Ta có: $y = \dfrac{\left[x^2 + (m+1)x + 2m + 1\right]'}{(x+1)'} = 2x + m + 1$

* phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị: $y = -2x + m + 1$ với $\begin{cases} m \neq -1 \\ m < 1 \end{cases}$

Câu 48. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx}{1 - x}$. Tìm tham số m để hàm số có 2 cực trị.

Bài giải

Đáp án: $m > -1$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Để hàm số có hai cực trị thì $y' = \dfrac{-x^2 + 2x + m}{(1-x)^2} = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\neq 1$.

$\Leftrightarrow g(x) = -x^2 + 2x + m = 0 \quad (1)$ có hai nghiệm phân biệt $\neq 1$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = -x^2 + 2x + m = 0 \text{ có nghiệm} \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a = -1 \neq 0 \\ \Delta'_g = 1 + m > 0 \Leftrightarrow m > -1 \end{cases} \\ 1 + m \neq 0 \end{cases}$

Câu 49. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2mx + 2}{x + 1}$. Tìm tham số m để hàm số có cực đại và cực tiểu.

Bài giải

Đáp án: $m < \dfrac{3}{2}$

Hàm số đã cho liên tục và xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Để hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y' = \dfrac{x^2 + 2x + 2m - 2}{(x+1)^2} = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\neq -1$

$\Leftrightarrow g(x) = x^2 + 2x + 2m - 2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\neq -1$. $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \neq 0 \\ \Delta' = 3 - 2m > 0 \\ g(-1) = 2m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \dfrac{3}{2}$

DẠNG 3

TÌM THAM SỐ m ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ THOẢ MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC CỦA BÀI TOÁN

(liên quan hệ thức Vi -et)

HÀM SỐ BẬC 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ \left(a \neq 0\right)$

Cách viết phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị của hàm bậc ba: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ \left(a \neq 0\right)$

Cách 1: Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $y - \dfrac{y'.y''}{18a}$.

Cách 2: Chia y cho y' ta được: $y = Q(x).y' + Ax + B$

$\Rightarrow$ Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị : $y = Ax + B$

Câu 50. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số: $y = \dfrac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3\left(m-2\right)x + \dfrac{1}{6}$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$.

A. $1 - \dfrac{\sqrt{6}}{2} < m < 1 + \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

B. $\left[\begin{array}{l} m = \dfrac{2}{3} \\ m = 2 \end{array}\right.$.

C. $m \in \left(1 - \dfrac{\sqrt{6}}{2}; 1 + \dfrac{\sqrt{6}}{2}\right) \backslash \left\{0\right\}$.

D. $m = 2$.

Lời giải

Chọn B.

Phương pháp tự luận

$y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3\left(m-2\right)$

Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn: $x_1 + 2x_2 = 1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \left(m-1\right)^2 - 3m\left(m-2\right) > 0 \\ x_1x_2 = \dfrac{3\left(m-2\right)}{m} \\ x_1 + x_2 = \dfrac{2\left(m-1\right)}{m} \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 1 - \dfrac{\sqrt{6}}{2} < m < 1 + \dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ x_1 = \dfrac{3m-4}{m} \\ x_2 = \dfrac{2-m}{m} \\ x_1x_2 = \dfrac{3\left(m-2\right)}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 1 - \dfrac{\sqrt{6}}{2} < m < 1 + \dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ x_1 = \dfrac{3m-4}{m} \\ x_2 = \dfrac{2-m}{m} \\ \left(\dfrac{3m-4}{m}\right)\left(\dfrac{2-m}{m}\right) = \dfrac{3\left(m-2\right)}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

Phương pháp trắc nghiệm

+ Chọn $m = 1 \Rightarrow y = \dfrac{1}{3}x^3 - 3x + \dfrac{1}{6}$

$\Rightarrow y' = x^2 - 3x$

$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$ suy ra hàm số có hai cực trị

Và không thoả $x_1 + 2x_2 = 1$. Loại **A, C**

+ Chọn $m=\frac{2}{3}\Rightarrow y=\frac{2}{9}x^3+\frac{1}{3}x^2-4x$

$\Rightarrow y'=\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{2}x-4$

$\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow \frac{2}{3}x^2+\frac{2}{2}x-4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=2 \end{array}\right.$ suy ra hàm số có hai cực trị

Và có thoả $x_1+2x_2=1$. Loại **D**

Vậy đáp B

+ Cách làm này là loại đáp án sai chứ không phải chọn đáp án đúng nhé các em !!!

+ Chọn giá trị m cho khéo để loại trừ đáp án càng nhiều càng tốt.

Câu 51. Gọi x_1,x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-m^3+m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để : $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=7$

A. $m=\pm\sqrt{2}$. **B.** $m=\pm 2$. **C.** $m=0$. **D.** $m=\pm 1$.

Lời giải

Chọn B.

Phương pháp tự luận

$y'=3x^2-6mx+3\left(m^2-1\right)$

Hàm số luôn luôn có cực trị với moi m

Theo định lí Viet : $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1.x_2=m^2-1 \end{cases}$

$x_1^2+x_2^2-x_1x_2=7\Leftrightarrow (2m)^2-3\left(m^2-1\right)=7\Leftrightarrow$ m= ±2

Cách 2 :

y’=0 $\Leftrightarrow x^2-2mx+\left(m^2-1\right)$=0$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m+1 \\ x=m-1 \end{array}\right.$

$x_1^2+x_2^2-x_1x_2=7\Leftrightarrow (m+1)^2+(m-1)^2-(m-1)(m+1)=7$

$\Leftrightarrow m=\pm 2$.

Câu 52. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{m}{3}x^3+2x^2+mx+1$ có 2 điểm cực trị thỏa mãn $x_{CĐ}<x_{CT}$.

A. $m<2$. **B.** $-2<m<0$. **C.** $-2<m<2$. **D.** $0<m<2$.

Lời giải

Chọn D.

$y'=mx^2+4x+m$

ycbt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{y'} > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m^2 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 2$

Câu 53. Với các giá trị thực của tham số $m \in \left(\dfrac{a}{b}; +\infty\right) \backslash \{c\}$ (với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản) thì đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x + 2$ có hai điểm cực trị và hoành độ cực trị đều dương. Tính giá trị biểu thức $P = \dfrac{a+b+c}{a^2.b^2.c^2}$

A. $P = -\dfrac{1}{2}$ **B.** $P = \dfrac{3}{5}$ **C.** $P = \dfrac{3}{2}$. **D.** $P = \dfrac{1}{4}$

Lời giải

Chọn C.

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Ta có: $y' = x^2 - 2mx + (2m-1)$, $y' = 0 \Leftrightarrow g(x) = x^2 - 2mx + (2m-1) = 0 \quad (1)$.

* Để đồ thị hàm số có hai cực trị dương $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm dương phân biệt:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - 2m + 1 > 0 \\ S = -\dfrac{b}{a} = 2m > 0 \\ P = \dfrac{c}{a} = 2m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 > 0 \\ m > 0 \\ m > \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

* Vậy $\begin{cases} m \neq 1 \\ m > \dfrac{1}{2} \end{cases}$ là những giá trị cần tìm thỏa yêu cầu bài toán.

$\Rightarrow P = \dfrac{a+b+c}{a^2.b^2.c^2} = \dfrac{3}{2}$

Câu 54. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-2019; 2019)$ thì đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3(m+1)x^2 - (3m^2 + 7m - 1)x + m^2 - 1$ có điểm cực tiểu tại một điểm có hoành độ nhỏ hơn 1?

A. 2018 **B.** 2020 **C.** 2019. **D.** 4038

Lời giải

Chọn C.

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Hàm số đạt cực tiểu tại một điểm có hoành độ nhỏ hơn 1.

$\Leftrightarrow y' = g(x) = -3x^2 + 6(m+1)x - (3m^2 + 7m - 1) = 0 \ (1)$ có 2 nghiệm $x_1; x_2$ thỏa $\left[\begin{array}{ll} x_1 < 1 < x_2 & (2) \\ x_1 < x_2 \leq 1 & (3) \end{array}\right.$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(2) \Leftrightarrow a.g(\alpha) = -3.g'(1) < 0 \\ (3) \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta' > 0 \\ -3.g'(1) \ge 0 \\ \dfrac{S}{2} < 1\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3\left(3m^2 + m - 4\right) < 0 \\ \begin{cases}9(m+1)^2 - 3\left(3m^2 + 7m - 1\right) > 0 \\ 3\left(3m^2 + m - 4\right) \ge 0 \\ m + 1 < 1\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\dfrac{4}{3} < m < 1 \\ \begin{cases}-3m + 12 > 0 \\ \left(3m^2 + m - 4\right) \ge 0 \\ m < 0\end{cases}\end{array}\right. .$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\dfrac{4}{3} < m < 1 \\ \begin{cases}m < 4 \\ \left[\begin{array}{l}m \le -\dfrac{4}{3} \\ m \ge 1\end{array}\right. \\ m < 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\dfrac{4}{3} < m < 1 \\ m \le -\dfrac{4}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \boxed{m < 1}$$

Có 2019 giá trị nguyên

Câu 55. Với các giá trị thực của tham số $m = a$ (với $a \in \mathbb{Z}$) thì đồ thị hàm số $y = 2x^3 + mx^2 - 12x - 13$ có cực đại và cực tiểu, đồng thời các điểm này cách đều trục tung Oy. Biết t thoả mãn phương trình sau: $4t^2 + 3at + a^2 + 3a - 9 = 0$. Tính giá trị của t.

A. $t = 3$ **B.** $t = \pm\dfrac{3}{2}$ **C.** $t = \dfrac{3}{2}$. **D.** $t = \pm 3$

Lời giải

Chọn B.

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Để hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow y' = 6x^2 + 2mx - 12 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1 \ne x_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a = 6 \ne 0 \\ \Delta' = m^2 + 72 > 0\end{cases} \Rightarrow \forall m \in \mathbb{R} \text{ hàm số luôn có 2 cực trị.}$$

* Hai điểm cực trị cách đều trục tung $\Leftrightarrow |x_1| = |x_2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1 = x_2 \ \left(do\ x_1 \ne x_2\right) \\ x_1 = -x_2\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2m}{6} = 0 \Leftrightarrow \boxed{m = 0}$.

$\Rightarrow 4t^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow t = \pm\dfrac{3}{2}$

Câu 56. Với các giá trị thực của tham số $m = \dfrac{a}{b}$ (với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản) thì đồ thị hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 12mx - 3m + 4$ (C) có hai điểm cực trị là A và B và hai điểm này cùng với điểm $C\left(-1; -\dfrac{9}{2}\right)$ lập thành tam giác nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm. Tính giá trị biểu thức $P = \dfrac{a^2 + b^2}{2ab}$

A. $P = \dfrac{25}{4}$ **B.** $P = \dfrac{15}{4}$ **C.** $P = \dfrac{7}{2}$. **D.** $P = -\dfrac{5}{4}$

Lời giải

Chọn D.

Ta có $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 12m$. Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ $(m-1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ (*). Khi đó hai điểm cực trị là $A(2; 9m)$, $B(2m; -4m^3 + 12m^2 - 3m + 4)$.

ΔABC nhận O làm trọng tâm $\Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 2m - 1 = 0 \\ -4m^3 + 12m^2 + 6m + 4 - \dfrac{9}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2}$ (thoả (*).

Câu 57. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 3(m+2)x - m - 6$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số có hoành độ 2 cực trị cùng dấu .

A. $-2 < m < 2$. **B.** $\dfrac{-15}{4} < m < 2$. **C.** $\dfrac{-21}{4} < m < 2$. **D.** $\dfrac{-17}{4} < m < 2$.

Lời giải

Chọn D.

$y' = 3x^2 - 12x + 3(m+2)$

$y' = 0 \Leftrightarrow y' = x^2 - 4x + (m+2) = 0$

Hàm số có 2 điểm cực trị x_1, x_2 $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 2$

Chia y cho y' ta được : $y = \dfrac{1}{3}y'(x-2) + (m-2)(2x+1)$

Điểm cực trị tương ứng : $A\left(x_1; (m-2)(2x_1+1)\right)$ và $B\left(x_2; (m-2)(2x_2+1)\right)$

Có : $y_1.y_2 = (m-2)^2\left(4x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 1\right)$

Với : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1x_2 = m + 2 \end{cases}$ nên : $y_1.y_2 = (m-2)^2(4m + 17)$

Hai cực trị cùng dấu $\Leftrightarrow y_1.y_2 > 0 \Leftrightarrow (m-2)^2(4m+17) > 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{-17}{4} \\ m \neq 2 \end{cases}$

Kết hợp đk : $-\frac{17}{4}<m<2$.

Câu 58. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=2x^3+3(m-1)x^2+6m(1-2m)x$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trên đường thẳng có phương trình: $y=-4x\ (d)$.

A. $m\in\{1\}$. **B.** $m\in\{0;1\}$. **C.** $m\in\left\{0;\frac{1}{2};1\right\}$. **D.** $m\in\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Lời giải

Chọn A.

$y'=6x^2+6(m-1)x+6m(1-2m)$

Hàm số có 2 cực trị $m\neq\frac{1}{3}$

Bấm máy tính:

$2x^3+3(m-1)x^2+6m(1-2m)x-\left(6x^2+6(m-1)x+6m(1-2m)\right)\left(\frac{x}{3}+\frac{m-1}{6}\right)\xrightarrow{x=i,m=A=1000}$

$1997001000-8994001i=\left(2.10^9-3.10^6+10^3\right)-\left(9.10^6-6.10^3+1\right)i=$

$=-\left(9m^2-6m+1\right)x+2m^3-3m^2+m$

Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là: $y=-\left(9m^2-6m+1\right)x+2m^3-3m^2+m\ (\Delta)$

$$\Delta\equiv d\Leftrightarrow\begin{cases}-\left(9m^2-6m+1\right)=-4\\2m^3-3m^2+m=0\end{cases}\Leftrightarrow m=1.$$

Câu 59. Với các giá trị thực của tham số $m=a$ hoặc $m=b$ (với $a,b\in\mathbb{Z}$) thì thị hàm số: $y=-x^3+3x^2+3\left(m^2-1\right)x-3m^2-1$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu cùng với gốc tọa độ tạo thành tam giác vuông tại O. Tính giá trị biểu thức $P=\frac{a+b}{a^2+b^2}$.

A. $P=\frac{1}{2}$ **B.** $P=1$ **C.** $P=2$ **D.** $P=0$

Lời giải

Chọn D.

$y'=-3x^2+6x+3\left(m^2-1\right)$

Lấy y chia y' ta được phương trình qua 2 điểm cực trị là: $y=2m^2x-2m^2-2$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A\left(x_1;2m^2x_1-2m^2-2\right)$; $B\left(x_2;2m^2x_2-2m^2-2\right)$

ΔOAB vuông tại $O\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0$

$\Leftrightarrow x_1x_2+\left(2m^2x_1-2m^2-2\right)\left(2m^2x_2-2m^2-2\right)=0$

$\Leftrightarrow x_1x_2+4m^4x_1x_2-4m^2\left(m^2+1\right)(x_1+x_2)+4\left(m^2+1\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \left(1-m^2\right)\left(1+4m^4\right)+4\left(m^2+1\right)\left(1+m^2-2m^2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(1-m^2\right)\left(4m^4+4m^2+5\right)=0 \Leftrightarrow m=\pm 1.$

Câu 60. Với các giá trị thực của tham số $m=-\dfrac{a}{b}$ hoặc $m=\dfrac{c}{d}$ (với $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b},\dfrac{c}{d}$ là các phân số tối giản) thì hàm số $y=-x^3+3x^2+3\left(m^2-1\right)x-3m^2-1$ có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số cách đều gốc tọa độ O. Tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{a+b+c+d}{a^2+b^2}$.

A. $P=\dfrac{6}{5}$ **B.** $P=\dfrac{5}{6}$ **C.** $P=\dfrac{4}{7}$ **D.** $P=\dfrac{7}{4}$

Lời giải

Chọn A.

Ta có **:** $y'=-3x^2+6x+3\left(m^2-1\right)=-3\left(x^2-2x-m^2+1\right)$.

$g(x)=x^2-2x-m^2+1$ là tam thức bậc hai có $\Delta'=m^2$. Do đó: y có cực đại cực tiểu $\Leftrightarrow$ y' có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $g(x)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $\Delta'>0 \Leftrightarrow$ $m\neq 0$. (1)

Khi đó y' có các nghiệm là: $1\pm m$ $\Rightarrow$ tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A\left(1-m;-2-2m^3\right)$ và $B\left(1+m;-2+2m^3\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{OA}\left(1-m;-2-2m^3\right) \Rightarrow OA^2=(1-m)^2+4\left(1+m^3\right)^2$.

$\overrightarrow{OB}\left(1+m;-2+2m^3\right) \Rightarrow OB^2=(1+m)^2+4\left(1-m^3\right)^2$.

A và B cách đều gốc tọa độ khi và chỉ khi :

$OA=OB \Leftrightarrow OA^2=OB^2 \Leftrightarrow (1-m)^2+4\left(1+m^3\right)^2=(1+m)^2+4\left(1-m^3\right)^2$

$\Leftrightarrow -4m+16m^3=0 \qquad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\pm\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Đối chiếu với điều kiện (1), ta thấy chỉ $m=\pm\dfrac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$\Rightarrow P=\dfrac{a+b+c+d}{a^2+b^2}=\dfrac{6}{5}$

Câu 61. Với các giá trị thực của tham số $m=-\dfrac{a\sqrt{2}}{b}$ hoặc $m=\dfrac{c\sqrt{2}}{d}$ (với $a,b,c,d\in\mathbb{Z}^+$ và $\dfrac{a}{b},\dfrac{c}{d}$ là các phân số tối giản) thì đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^3$ có các điểm cực đại và cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $(d): y=x$. Giá trị biểu thức $P=a^3+b^3+c^3+d^3$ là:

A. $P=8$ **B.** $P=28$ **C.** $P=10$. **D.** $P=18$

Lời giải

Chọn D.

$y' = 3x^2 - 6mx$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m \end{array}\right.$ Để hàm số có cực đại và cực tiểu thì $m \neq 0$.

Giả sử hàm số có hai điểm cực trị là: $A(0;4m^3); B(2m;0) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2m;-4m^3)$

Trung điểm của đoạn AB là $I(m;2m^3)$.

Điều kiện để AB đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$ là AB vuông góc với đường thẳng $(d): y = x$ và

$I \in (d) \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 4m^3 = 0 \\ 2m^3 = m \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện ta có: $m = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$P = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 18$

Câu 62. Với các giá trị thực của tham số $m = a$ hoặc $m = -\dfrac{b}{c}$ (với $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ và $\dfrac{b}{c}$ phân số tối giản) thì đồ thị hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 + 3m - 3$ có hai điểm cực trị A, B và thoả mãn $2AB^2 - (OA^2 + OB^2) = 20$ (trong đó O là gốc tọa độ) . Giá trị biểu thức $P = \dfrac{a+b+c}{a.b.c}$ là:

A. $P = \dfrac{187}{28}$ **B.** $P = \dfrac{28}{187}$. **C.** $P = \dfrac{187}{29}$. **D.** $P = \dfrac{29}{187}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $y' = m(3x^2 - 6x)$

Với mọi $m \neq 0$, ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 3m - 3 \\ x = 2 \Rightarrow y = -m - 3 \end{array}\right.$. Vậy hàm số luôn có hai điểm cực trị.

Giả sử $A(0;3m-3); B(2;-m-3)$.

Ta có : $2AB^2 - (OA^2 + OB^2) = 20 \Leftrightarrow 11m^2 + 6m - 17 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\dfrac{17}{11} \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy giá trị m cần tìm là: $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\dfrac{17}{11} \end{array}\right.$.

$\Rightarrow P = \dfrac{a+b+c}{a.b.c} = \dfrac{29}{187}$

Câu 63. Với các giá trị thực của tham số $m=a$ hoặc $m=-\frac{b}{c}$ (với $a,b,c\in\mathbb{Z}^+$ và $\frac{b}{c}$ phân số tối giản) thì đường thẳng $\Delta: x+my+3=0$ tạo với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2$ (C) một góc α, biết $\cos\alpha=\frac{4}{5}$.Giá trị biểu thức $P=\frac{a+b+c}{a-b-c}$ là:

A. $P=-\frac{15}{11}$. **B.** $P=\frac{15}{11}$. **C.** $P=\frac{11}{15}$. **D.** $P=-\frac{11}{15}$.

Lời giải

Chọn A.

Đường thẳng đi qua ĐCĐ, ĐCT là $\Delta_1: 2x+y=0$ có $VTPT$ $\vec{n}_1(2;1)$

Đường thẳng đã cho $\Delta: x+my+3=0$ có $VTPT$ $\vec{n}_2(1;m)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \cos(\Delta,\Delta_1)=\left|\cos(\vec{n}_1,\vec{n}_2)\right|=\frac{|m+2|}{\sqrt{5}.\sqrt{m^2+1}}=\frac{4}{5}$

$\Leftrightarrow 25(m^2+4m+4)=5.16.(m^2+1)\Leftrightarrow 11m^2-20m-4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2\\ m=-\frac{2}{11}\end{array}\right.$

$\Rightarrow P=\frac{a+b+c}{a-b-c}=-\frac{15}{11}$

Câu 64. Cho hàm số $y=2x^3-9x^2+12x+m$. Giả sử đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là A, B đồng thời A, B cùng với gốc tọa độ O không thẳng hàng. Khi đó chu vi ΔOAB nhỏ nhất bằng bao nhiêu ?

A. $\sqrt{10}-\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{10}+\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{20}-\sqrt{10}$. **D.** $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có : $y'=6x^2-18x+12$

$y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow y(1)=5+m\\ x=2\Rightarrow y(2)=4+m\end{array}\right.$

$A(1;5+m)$ và $B(2;4+m)$là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

$\overrightarrow{OA}=(1;5+m)$, $\overrightarrow{OB}=(2;4+m)$, $\overrightarrow{AB}=(1;-1)$

OAB là 1 tam giác $\Leftrightarrow -4-m\neq 2\Leftrightarrow m\neq -6$

Chu vi của ΔOAB là: $2p=\sqrt{1+(m+5)^2}+\sqrt{4+(m+4)^2}+\sqrt{2}$

Sử dụng tính chất $|\vec{u}|+|\vec{v}|\geq|\vec{u}+\vec{v}|$ với $\vec{u}=(1;-5-m)$ và $\vec{v}=(2;4+m)$

Từ đó ta có : $\sqrt{1+(m+5)^2}+\sqrt{4+(m+4)^2}+\sqrt{2}\geq\sqrt{3^2+(-1)^2}+\sqrt{2}=\sqrt{10}+\sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u},\vec{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \frac{-5-m}{4+m}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow m=-\frac{14}{3}$.

Vậy chu vi ΔOAB nhỏ nhất bằng $\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}\right)$ khi $m=-\dfrac{14}{3}$.

HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG $y=ax^4+bx^2+c\ \left(a\neq 0\right)$

Câu 65. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^4-2\left(m+1\right)x^2+m^2$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

A. Không tồn tại m. **B.** $m=0$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-1 \end{array}\right.$. **D.** $m=-1$.

Lời giải

Chọn B.

$y'=4x^3-4\left(m+1\right)x$

$y'=0\Leftrightarrow 4x\left(x^2-m-1\right)=0$

Hàm số có điểm 3 cực trị $\Leftrightarrow m>-1$

Khi đó 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số là : $A\left(0;m^2\right)$, $B\left(-\sqrt{m+1};-2m-1\right)$, $C\left(\sqrt{m+1};-2m-1\right)$

Do tính chất đối xứng, ta có ΔABC cân tại đỉnh A .

Vậy ΔABC chỉ có thể vuông cân tại đỉnh $A\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$

$\Leftrightarrow -\left(m+1\right)+(-m^2-2m-1)^2=0\Leftrightarrow m^4+4m^3+6m^2+3m=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-1 \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện ta có: $m=0$ (thỏa mãn).

Lưu ý: Có thể làm theo cách khác:

+) Cách 1: Gọi M là trung điểm của BC, tìm tọa độ điểm M, ΔABC vuông tại đỉnh A thì $2AM=BC$.

+) Cách 2: Sử dụng định lý Pitago $BC^2=AB^2+AC^2$

+) Cách 3: $\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\cos 45^0$

+) Hoặc sử dụng công thức $\frac{b^3}{8a}+1=0$

Câu 66. Với các giá trị thực của tham số $m=a$ hoặc $m=b$ (với $a\in\mathbb{Z}^-;b\in\mathbb{Z}^+$) thì đồ thị hàm số $y=x^4-2m^2x^2+1$ (C) có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông cân. Giá trị biểu thức $P=\frac{3a^2-b^2}{a.b}$ là:

A. $P=0$ **B.** $P=-1$. **C.** $P=2$. **D.** $P=-2$

Lời giải

Chọn D.

$y'=4x^3-4m^2x$

$y'=0\Leftrightarrow 4x\left(x^2-m^2\right)=0$

Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow m\neq 0$

Khi đó 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số là : $A(0;1)$, $B\left(m;1-m^4\right)$, $C\left(-m;1-m^4\right)$

Do tính chất đối xứng, ta có ΔABC cân tại đỉnh A .

Vậy ΔABC chỉ có thể vuông cân tại đỉnh $A\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow -m^2+m^8=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=0\\ m=\pm 1\end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện ta có: $m=\pm 1$ (thỏa mãn).

<u>*Lưu ý:*</u> có thể sử dụng công thức $\frac{b^3}{8a}+1=0$.

Câu 67. Với các giá trị thực của tham số $m=a+\frac{b\sqrt[3]{3}}{c}$ (với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản) thì đồ thị hàm số $y=x^4-4(m-1)x^2+2m-1$ có 3 điểm cực trị tạo thành 3 đỉnh của một tam giác đều. Giá trị biểu thức $P=2^a+3^b+4^c$ là:

A. $P=11$. **B.** $P=9$. **C.** $P=21$. **D.** $P=15$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $y'=4x^3-8(m-1)x=4x\left(x^2-2(m-1)\right)$.

$y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2=2(m-1)\end{array}\right.$ nên hàm số có 3 điểm cực trị khi $m>1$.

Với đk $m>1$ đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị là:

$A(0;2m-1),B\left(\sqrt{2(m-1)};-4m^2+10m-5\right),B\left(-\sqrt{2(m-1)};-4m^2+10m-5\right)$.

Ta có:

$$AB^2=AC^2=2(m-1)+16(m-1)^4$$
$$BC^2=8(m-1)$$

Để 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành tam giác đều thì:

$AB = AC = BC \Leftrightarrow AB^2 = AC^2 = BC^2 \Leftrightarrow 2(m-1)+16(m-1)^4 = 8(m-1)$

$\Leftrightarrow 8(m-1)^4 - 3(m-1) = 0 \Leftrightarrow (m-1)\left[8(m-1)^3 - 3\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m = 1+\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2} \end{array}\right.$

So sánh với điều kiện ta có: $m = 1+\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}$ thỏa mãn.

$\Rightarrow P = 2^a + 3^b + 4^c = 21$

Cách khác: áp dụng công thức $\Leftrightarrow \dfrac{b^3}{8a} + 3 = 0 \Leftrightarrow -8(m-1)^3 + 3 = 0 \Leftrightarrow m = 1+\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}$

Câu 68. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$. Để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành 1 tam giác nhận gốc tọa độ O làm trực tâm thì giá trị của tham số thực m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $m \in (-10;-5)$. **B.** $m \in (-5;0)$. **C.** $m \in (0;5)$. **D.** $m \in (5;10)$.

Lời giải

Chọn C.

$y' = 4x^3 - 4mx$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$. Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow m > 0$

Khi đó đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị là:

$A(0;m-1)$; $B\left(\sqrt{m};m^2+m-1\right)$; $C\left(-\sqrt{m};m^2+m-1\right)$

Vì B,C đối xứng nhau qua trục tung nên $BC \perp OA$

Do đó O là trực tâm tam giác ABC $\Leftrightarrow OB \perp AC$ hay $\overrightarrow{OB}\overrightarrow{AC} = 0$

Với $\overrightarrow{OB} = \left(\sqrt{m}, m^2+m-1\right), \overrightarrow{AC} = \left(-\sqrt{m}, m^2\right)$

Từ đó : $-m + m^2\left(m^2+m-1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right.$

Vậy $m = 1$ là gtct .

Câu 69. Với các giá trị thực của tham số $m = -a$ hoặc $m = b$ (với $a,b \in \mathbb{Z}^+$) thì đồ thị hàm số: $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 1$ có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc O tạo thành 1 tứ giác nội tiếp. Giá trị biểu thức $P = a^2 + 5ab + b^2$ là:

A. $P = 7$ **B.** $P = 2$ **C.** $P = 5$. **D.** $P = 3$

Lời giải

Chọn A.

$y' = y = 4x^3 - 4m^2x$

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $m \neq 0$

Khi đó 3 điểm cực trị là: $A\left(0;m^4+1\right),B\left(-m;1\right),C\left(m;1\right)$

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp(nếu có) của tứ giác $ABOC$. Do tính chất đối xứng , ta có:

A,O,I thẳng hàng $\Rightarrow AO$ là đường kính của đường tròn ngoại tiếp(nếu có) của tứ giác $ABOC$.

Vậy $AB\perp OB \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OB}=0 \Leftrightarrow m^2-m^4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\pm 1\end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện $m=\pm 1$ (thỏa mãn).

$P=a^2+5ab+b^2=7$

Câu 70. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^4-8m^2x^2+1$ có ba điểm cực trị . Đồng thời ba điểm cực trị đó là ba đỉnh của một tam giác có diện tích bằng 64.

A. Không tồn tại m. **B.** $m=\sqrt[5]{2}$. **C.** $m=-\sqrt[5]{2}$. **D.** $m=\pm\sqrt[5]{2}$.

Lời giải

Chọn D.

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $m\neq 0$

Áp dụng công thức $S_{\Delta ABC}=\dfrac{b^2}{4|a|}\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$, ta có: $S_{\Delta ABC}=\dfrac{b^2}{4|a|}\sqrt{-\dfrac{b}{2a}} \Rightarrow 64=\dfrac{64m^4}{4}\sqrt{\dfrac{8m^2}{2}} \Leftrightarrow m=\pm\sqrt[5]{2}$ (thỏa mãn).

Câu 71. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^4-\left(3m-1\right)x^2+2m+1$ có ba điểm cực trị. Đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với điểm $D\left(7;3\right)$ nội tiếp được một đường tròn.

A. $m=3$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-1$. **D.** Không tồn tại m.

Lời giải

Chọn A.

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $m>\dfrac{1}{3}$

Áp dụng công thức:

Phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC là: $x^2+y^2-\left(\dfrac{2}{b}-\dfrac{\Delta}{4a}+c\right)y+c\left(\dfrac{2}{b}-\dfrac{\Delta}{4a}\right)=0$

Thay vào ta có phương trình:

$$x^2+y^2-\left(\frac{-27m^3+75m^2-m-15}{4\left(3m-1\right)}\right)y+\frac{-54m^4+75m^3+41-27m-11}{4\left(3m-1\right)}=0\ \left(T\right)$$

$D\left(7;3\right)\in\left(T\right)\Rightarrow 27m^4-78m^3+92m^2-336m+99=0$

Sử dụng chức năng SOLVE , tìm ra nghiệm duy nhất thỏa mãn là $m=3$.

Câu 72. Với các giá trị thực của tham số $m=\dfrac{a}{b}$ hoặc $m=\dfrac{c-\sqrt{2}}{d}$ hoặc $m=\dfrac{e+\sqrt{2}}{f}$ (với $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{Z}^+$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản) thì đồ thị hàm số: $y=-x^4+2mx^2-4m+1$ có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc tọa độ tạo thành 1 hình thoi. Giá trị biểu thức $P=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{d^2+e^2+f^2}$ là:

A. $P=\dfrac{1}{4}$. **B.** $P=\dfrac{3}{4}$ **C.** $P=\dfrac{1}{2}$ **D.** $P=\dfrac{4}{5}$

Lời giải

Chọn B.

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $m>0$

Ba điểm cực trị là: $A(0;1-4m),B\left(-\sqrt{m};m^2-4m+1\right),C\left(\sqrt{m};m^2-4m+1\right)$

Tứ giác $OBAC$ đã có $OB=OC,AB=AC$. Vậy tứ giác $OBAC$ là hình thoi chỉ cần thêm điều kiện

$OB=AC\Leftrightarrow m+\left(m^2-4m+1\right)^2=m+m^4\Leftrightarrow\left(m^2-4m+1\right)^2-m^4=0$

$\Leftrightarrow\left(m^2-4m+1-m^2\right)\left(m^2-4m+1+m^2\right)=0\Leftrightarrow(1-4m)\left(2m^2-4m+1\right)$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{1}{4}\\ m=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$ (thỏa mãn

$\Rightarrow P=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{d^2+e^2+f^2}=\dfrac{3}{4}$

HÀM SỐ HỮU TỈ: $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$

Cách viết phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị của hàm số phân thức:

$$y=f(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$$

+ Giả sử (x_o, y_o) là điểm cực trị thì $y_o=\dfrac{Q'(x_o)}{P'(x_o)}$.

+ Giả sử hàm số có cực đại và cực tiểu thì phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị ấy là: $y=\dfrac{Q'(x)}{P'(x)}=\dfrac{2ax+b}{d}=\dfrac{2a}{d}.x+\dfrac{b}{d}$.

(Lấy đạo hàm tử chia đạo hàm mẫu $\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị)

Câu 73. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+mx}{1-x}$. Tìm m để khoảng cách giữa hai điểm cực trị bằng 10.

A. $m=4$ **B.** $m=1$ **C.** $m=-1$. **D.** $m=2$

Lời giải

Chọn A.

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

* Để hàm số có hai cực trị thì $y'=\dfrac{-x^2+2x+m}{(1-x)^2}=0$ có hai nghiệm phân biệt $\neq 1$.

$\Leftrightarrow g(x)=-x^2+2x+m=0\ \ (1)$ có hai nghiệm phân biệt $\neq 1$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = -x^2 + 2x + m = 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases}$ có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a = -1 \neq 0 \\ \Delta'_g = 1 + m > 0 \Leftrightarrow \boxed{m > -1} \end{cases} (2) \\ 1 + m \neq 0 \end{cases}$

* Gọi hoành độ cực trị của hàm số là x_1, x_2, nó cũng chính là 2 nghiệm của phương trình (1).

* Theo định lý Viet: $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = 2;\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = -m \quad (3)$

* Giả sử $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ là các điểm cực trị của hàm số. Ta có:

$y_1 = \dfrac{2x_1 + m}{-1} = -2x_1 - m;\ y_2 = -2x_2 - m$ (thay vào phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị)

[thay vào phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị: $y = \dfrac{(x^2 + mx)'}{(1 - x)'} = \dfrac{2x + m}{-1} = -2x - m$]

* Theo đề bài, ta có: $MN = 10 \Leftrightarrow MN^2 = 100 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 100 \ (4)$

* Thay (3) vào (4), ta được: $(x_2 - x_1)^2 + 4(x_2 - x_1)^2 = 100 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 = 20$

$\Leftrightarrow (x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2 = 20 \Leftrightarrow 4 + 4m = 20 \Rightarrow m = 4$

* So lại với $(2) \Rightarrow \boxed{m = 4}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 74. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + (m+1)x + m + 1}{x + 1}$. Gọi $A;B$ là hai điểm cực trị, định m để diện tích ΔOAB bằng 2. Với m vừa tìm được, tính khoảng cách từ O đến đường thẳng AB.

A. $\left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -1 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m = 1 \end{array}\right.$ **C.** $m = -1$. **D.** $m = 2$

Lời giải

Chọn B.

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

* Ta có: $y' = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2};\ \forall x \neq -1$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = m + 1 \\ x = -2 \Rightarrow y = m - 3 \end{array}\right.$.

Do đó hai điểm cực trị là $A(0; m+1); B(-2; m-3)$.

* Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{OA} = (x_A - x_O; y_A - y_O) = (0; m+1) \Rightarrow OA = \sqrt{(0)^2 + (m+1)^2} = |m+1| \\ \overrightarrow{OB} = (x_B - x_O; y_B - y_O) = (-2; m-3) \Rightarrow OB = \sqrt{(-2)^2 + (m-3)^2} = \sqrt{m^2 - 6m + 13} \end{cases}$.

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\sqrt{(OA.OB)^2 - (\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB})^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{(m+1)^2(m^2 - 6m + 13) - [(m-1)(m-3)]^2} = |m+1|$.

* Mà $S_{\Delta ABC}=2\Leftrightarrow |m+1|=2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=1 \end{array}\right.$.

Câu 75. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2mx+2}{x+1}$. Tìm tham số m để hàm số có cực đại và cực tiểu, đồng thời khoảng cách từ hai điểm ấy đến đường thẳng $\Delta: x+y+2=0$ bằng nhau.

A. $m=-\dfrac{1}{2}$ **B.** $m=1$ **C.** $m=-1$. **D.** $m=\dfrac{1}{2}$

Lời giải

Chọn D.

* Hàm số đã cho liên tục và xác định trên $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

* Để hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y'=\dfrac{x^2+2x+2m-2}{(x+1)^2}=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\neq -1$

$\Leftrightarrow g(x)=x^2+2x+2m-2=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\neq -1$. $\Leftrightarrow \begin{cases} a=1\neq 0 \\ \Delta'=3-2m>0 \\ g(-1)=2m-3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m<\dfrac{3}{2}\ (1)$.

* Gọi x_1, x_2 là nghiệm của $g(x)=0$, đó chính là hoành độ cực trị. Khi đó, phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị là: $y=\dfrac{(x^2+2mx+2)'}{(x+1)'}=\dfrac{2x+2m}{1}=2x+2m$.

$\Rightarrow$ Hai điểm cực trị của đồ thị là: $A(x_1;2x_1+2m);B(x_2;2x_2+2m)$.

* Theo định lí Viét: $x_1+x_2=-2,\ x_1x_2=-2m$.

* Theo đề: $d(A,\Delta)=d(B,\Delta)\Leftrightarrow \dfrac{|x_1+y_1+2|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|x_2+y_2+2|}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow |3x_1+2m+2|=|3x_2+2m+2|$

$\Leftrightarrow (3x_1+2m+2)^2=(3x_2+2m+2)^2\Leftrightarrow (3x_1+2m+2)^2-(3x_2+2m+2)^2=0$

$\Leftrightarrow (x_1-x_2)[3(x_1+x_2)+4m+4]=0\Leftrightarrow 3(x_1+x_2)+4m+4=0, (do\ x_1\neq x_2)$

$\Leftrightarrow 3(-2)+4m+4=0\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$. Kết hợp với $(1)\Rightarrow \boxed{m=\dfrac{1}{2}}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 76. Cho hàm số $y=\dfrac{mx^2+3mx+2m+1}{x-1}$. Tìm tham số thực m để hàm số có hai điểm cực trị, đồng thời hai điểm cực trị này nằm về hai phía so với trục hoành.

A. $m\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$ **B.** $m\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)\cup(-1;+\infty)$

C. $m\in\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)\cup(0;+\infty)$. **D.** $m\in(-1;+\infty)$

Lời giải

Chọn C.

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

* Để hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow y' = \dfrac{mx^2 - 2mx - 5m - 1}{(x-1)^2} = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \neq 1$.

$\Leftrightarrow g(x) = mx^2 - 2mx - 5m - 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \neq 1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = m \neq 0 \\ \Delta' = m^2 + m(5m+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} m < -\dfrac{1}{6} \\ m > 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -\dfrac{1}{6} \\ m > 0 \end{array}\right. \quad (*)$$

* Phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị: $y = \dfrac{(mx^2 + 3mx + 2m + 1)'}{(x-1)'} = 2mx + 3m$.

* Để 2 điểm cực trị này nằm về hai phía so với trục hoành $Ox \Leftrightarrow y(x_1).y(x_2) < 0$

$\Leftrightarrow (2mx_1 + 3m)(2mx_2 + 3m) < 0 \Leftrightarrow 4m^2\left[x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1\right] < 0$.

$$\Leftrightarrow 4m(-2m-1) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -\dfrac{1}{2} \\ m > 0 \end{array}\right.$$

* Kết hợp với $(*) \Rightarrow \boxed{m \in \left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right) \cup (0; +\infty)}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 77. Cho hàm số $y = \dfrac{-x^2 + 2mx + 5}{x - 1}$. Tìm tham số thực m để hàm số có hai điểm cực trị, đồng thời hai điểm cực trị này nằm về hai phía so với đường thẳng $\Delta : y = 2x$.

A. $m < -2$

B. $m \geq 2\sqrt{6}$

C. $-2 - 2\sqrt{6} < m < -2 + 2\sqrt{6}$.

D. $-\sqrt{6} < m < \sqrt{6}$

Lời giải

Chọn C.

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

* Để hàm số có hai cực trị thì $y' = \dfrac{-x^2 + 2x - (2m-5)}{(x-1)^2} = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2 \neq 1$.

$\Leftrightarrow g(x) = -x^2 + 2x - (2m-5) = 0 \ (1)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2 \neq 1$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+2x-(2m-5)=0 \\ g(1)\neq 0 \end{cases}$ có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a=-1\neq 0 \\ \Delta' = -2m+6>0 \Leftrightarrow m<3 \end{cases} \\ -2m+6\neq 0 \end{cases} (2).$

* Gọi hoành độ cực trị của hàm số là x_1, x_2, nó cũng chính là 2 nghiệm của phương trình (1).

* Theo định lý Viet: $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = 2;\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = 2m-5 \quad (3)$

* Giả sử $M(x_1;y_1), N(x_2;y_2)$ là các điểm cực trị của hàm số. Ta có:

$y_1 = -2x_1 + 2m;\ y_2 = -2x_2 + 2m$.

(thay vào phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị)

* Để hai điểm cực trị $M(x_1;y_1), N(x_2;y_2)$ nằm về hai phía so với đường thẳng $\Delta : y = 2x$ thì:

$(2x_1 - y_1)(2x_2 - y_2) < 0 \Leftrightarrow (4x_1 - 2m)(4x_2 - 2m) < 0 \Leftrightarrow 16x_1x_2 - 8m(x_1 + x_2) + 4m^2 < 0 \ (4)$.

* Thay (3) vào (4), ta được: $16(2m-5) - 8m.2 + 4m^2 < 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 20 < 0$

$\Leftrightarrow -2-2\sqrt{6} < m < -2+2\sqrt{6}$

* So với (2), ta được: $\boxed{-2-2\sqrt{6} < m < -2+2\sqrt{6}}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 78. Tìm các giá trị của m để hàm số $y = \dfrac{x^2 - (m+1)x - m^2 + 4m - 2}{x-1}$ có cực đại và cực tiểu, đồng thời tích các giá trị cực đại và cực tiểu đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m = -\dfrac{1}{2}$ **B.** $m = \dfrac{7}{5}$ **C.** $m = -\dfrac{3}{2}$. **D.** $m = \dfrac{3}{2}$

Lời giải

Chọn B.

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

* Hàm số có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi:

$y' = \dfrac{x^2 - 2x + m^2 - 3m + 3}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow g(x) = x^2 - 2x + m^2 - 3m + 3 = 0 \ (1)$ có hai nghiệm phân biệt

$x_1; x_2 \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \neq 0 \\ \Delta' = -m^2 + 3m - 2 > 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2 \\ g(1) = m^2 - 3m + 2 \neq 0 \end{cases} (2).$

* Gọi $A(x_1;y_1); B(x_2;y_2)$ là các điểm cực trị của hàm số thì $x_1; x_2$ là nghiệm của $g(x) = 0$.

* Khi đó: $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 - \sqrt{-m^2+3m-2} \Rightarrow y_1 = 1 - m + 2\sqrt{-m^2+3m-2} \\ x_2 = 1 + \sqrt{-m^2+3m-2} \Rightarrow y_2 = 1 - m - 2\sqrt{-m^2+3m-2} \end{array}\right.$.

* Ta có: $y_1.y_2 = \left(1 - m + 2\sqrt{-m^2+3m-2}\right)\left(1 - m - 2\sqrt{-m^2+3m-2}\right)$.

$$=(1-m)^2-4(-m^2+3m-2)=5m^2-14m+9=5\left(m-\frac{7}{5}\right)^2-\frac{4}{5}\geq-\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow (y_1.y_2)_{\min}=-\frac{4}{5}\ khi\ m=\frac{7}{5}$$

* So lại với điều kiện $(2)\Rightarrow m=\frac{7}{5}$ là giá trị cần tìm.

DẠNG 4
CỰC TRỊ HÀM SỐ TRỊ TUYỆT ĐỐI CHỨA THAM SỐ m

- Hàm số $y=f(x)$ có n số điểm cực trị dương thì hàm số $y=f(|x|)$ có $2n+1$ số điểm cực trị.
- Hàm số $y=f(x)$ có n số điểm cực trị và phương trình $f(x)=0$ có m số nghiệm đơn và bội lẻ thì hàm số $y=|f(x)|$ có $n+m$ số điểm cực trị.
- Hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị x_1,x_2. Khi đó hàm số $y=|f(x)|$ có:

  + 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow f(x_1).f(x_2)\geq 0$

  + 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow f(x_1).f(x_2)<0$

Câu 79. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=|x^4-2mx^2+64x|$ có đúng ba điểm cực trị?

A. 5. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 11.

Lời giải

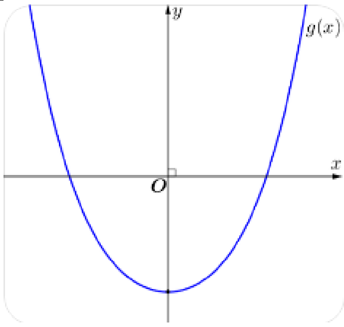
Chọn C.

Xét hàm số $g(x)=x^4-2mx^2+64x$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=+\infty$

$$g(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^3-2mx+64=0\end{array}\right..$$

Suy ra phương trình $g(x)=0$ có ít nhất hai nghiệm đơn phân biệt.

Do đó hàm số $y=|g(x)|$ có đúng ba điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y=g(x)$ có đúng một điểm cực trị.



Ta có $g'(x)=4x^3-4mx+64$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow m=x^2+\dfrac{16}{x}$ (vì $x=0$ không là nghiệm của phương trình $g'(x)=0$).

Xét hàm số $h(x)=x^2+\dfrac{16}{x}$; $h'(x)=2x-\dfrac{16}{x^2}=\dfrac{2x^3-16}{x^2}$; $h'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty \searrow$		$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	12	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $m \le 12$.

Vậy có 12 giá trị nguyên dương của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 80. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số a để hàm số $y=\left|x^4+ax^2-8x\right|$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. 5. **B.** 6. **C.** 11. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B.

Xét $g(x)=x^4+ax^2-8x$

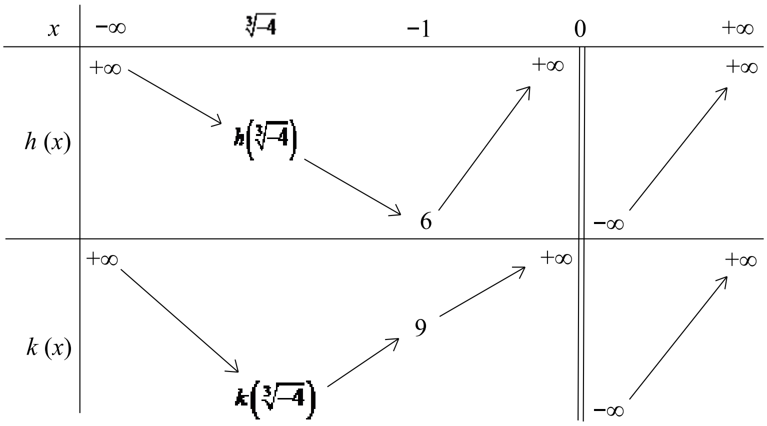
$g'(x)=4x^3+2ax-8$

Xét $g'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3+2ax-8=0 \Leftrightarrow -a=\dfrac{2x^3-4}{x}=2x^2-\dfrac{4}{x}=h(x)$ (do $x=0$ không là nghiệm)

$$g(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^3+ax-8=0 \Leftrightarrow -a=\dfrac{x^3-8}{x}=x^2-\dfrac{8}{x}=k(x) \end{array}\right.$$

$h'(x)=4x+\dfrac{4}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=-1$.

$k'(x)=2x+\dfrac{8}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{-4}$.



Để hàm số $y=\left|g\left(x\right)\right|$ có đúng 3 cực trị $\Leftrightarrow -a\le 6 \Leftrightarrow a\ge -6$.

Mà a là số nguyên âm nên $a\in\left\{-6;-5;-4;-3;-2;-1\right\}$.

Câu 81. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x)=\left|x^3+3x^2-3+m\right|$ có ba điểm cực trị.

A. $m=3$ hoặc $m=-1$. **B.** $m\ge 1$ hoặc $m\le -3$.

C. $1\le m\le 3$. **D.** $m\ge 3$ hoặc $m\le -1$.

Lời giải

Chọn D.

Nhận xét: Dùng phép biến đổi đồ thị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối và nhận xét hình dạng đồ thị thông qua bảng biến thiên để kết luận về cực trị hàm số.

Phân tích: Xét hàm số $y=g(x)=x^3+3x^2-3+m$ trên $\mathbb{R}$. Hệ số $a=1>0$.

Hàm số có $y'=g'(x)=3x^2+6x$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$. Hàm số $y=g(x)$ luôn có hai cực trị.

Nếu $g(x)=0$ có 3 nghiệm hay trục hoành giao với đồ thị hàm số tại ba điểm phân biệt thì hàm số $y=\left|g(x)\right|$ có năm cực trị.

Nếu $g(x)=0$ có một hoặc hai nghiệm thì hàm số $y=\left|g(x)\right|$ sẽ có ba cực trị.

Điều kiện: $g(x_{cd}).g(x_{ct})\ge 0\Leftrightarrow g(0).g(-2)\ge 0$ hay $(-3+m)(1+m)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 3\\m\le -1\end{array}\right.$.

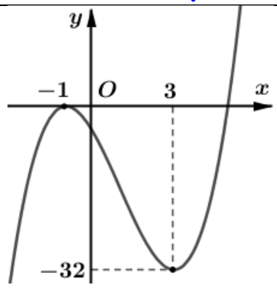
Câu 82. Tổng các giá trị của tham số m để hàm số $y=\left|x^3-3x^2-9x-5+\frac{m}{2}\right|$ có 5 điểm cực trị bằng

A. -2016. **B.** -496. **C.** 1952. **D.** 2016.

Lời giải

Chọn D.

Cách 1: Vẽ đồ thị hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x^2-9x-5$ như hình bên dưới



Ta thấy hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị nên $f(x)+\frac{m}{2}$ cũng luôn có 2 điểm cực trị.

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f(x)+\frac{m}{2}$ với trục hoành là 3.

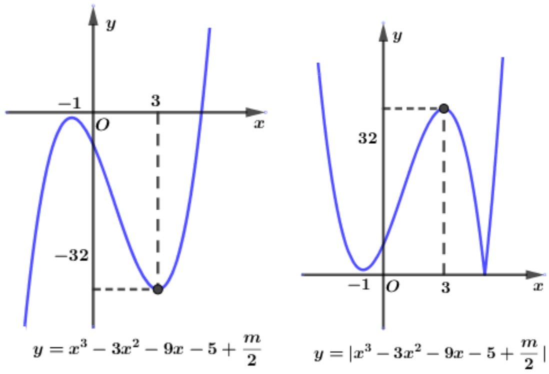
Để số giao điểm của đồ thị $f(x)+\frac{m}{2}$ với trục hoành là 3, ta cần tịnh tiến đồ thị $f(x)$ lên trên nhưng phải nhỏ hơn 32 đơn vị $\longrightarrow 0<\frac{m}{2}<32 \Leftrightarrow 0<m<64 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{1;\ 2;\ 3;\ ...;\ 63\}$

$\longrightarrow \sum m=2016.$ Chọn D.

Cách 2: Biện luận. Đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-9x-5+\frac{m}{2}$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-9x-5$ lên trên $\frac{m}{2}$ đơn vị nếu $m>0$ hoặc tịnh tiến xuống dưới $-\frac{m}{2}$ đơn vị nếu $m<0$.

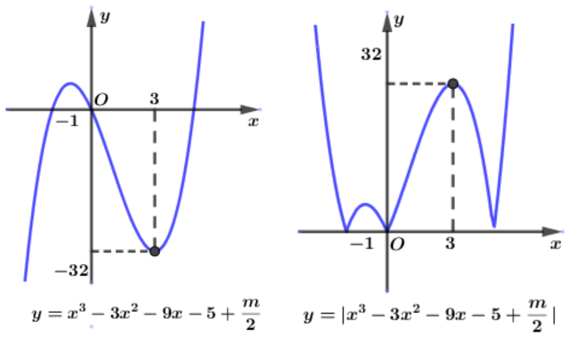
Có 3 trường hợp:

TH1. $m\le 0$, ta có đồ thị như sau



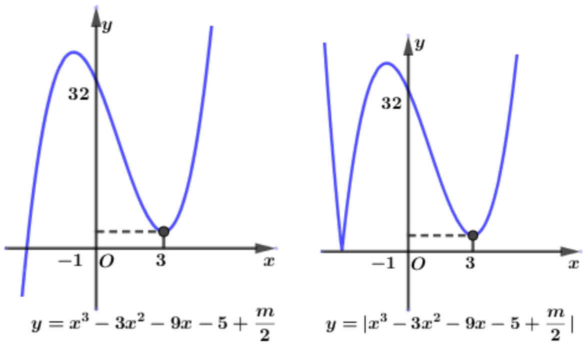
Hàm số $y=\left|x^3-3x^2-9x-5+\frac{m}{2}\right|$ có ba cực trị. Không thỏa yêu cầu bài toán.

TH2. $0<\frac{m}{2}<32$, ta có đồ thị như sau



Hàm số $y=\left|x^3-3x^2-9x-5+\dfrac{m}{2}\right|$ có năm cực trị. Thỏa yêu cầu bài toán.

TH3. $\dfrac{m}{2}\geq 32$, ta có đồ thị như sau



Hàm số $y=\left|x^3-3x^2-9x-5+\dfrac{m}{2}\right|$ có ba cực trị. Không thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy tất cả các giá trị m thỏa yêu cầu bài toán là $\begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ 0<\dfrac{m}{2}<32 \end{cases} \Leftrightarrow m\in\{1,2,...63\}$.

Vậy tổng các giá trị m thỏa yêu cầu bài toán là 2016.

Câu 83. Cho hàm số $f(x)=mx^3-3mx^2+(3m-2)x+2-m$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ để hàm số $g(x)=|f(x)|$ có **đúng** 5 điểm cực trị ?

A. 7. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C.

Cách 1: Để $g(x)=|f(x)|$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt. $(*)$

Xét $f(x)=0\Leftrightarrow(x-1)(mx^2-2mx+m-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1 \\ mx^2-2mx+m-2=0 \quad (1) \end{array}\right.$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác $1\Leftrightarrow\begin{cases} m\neq 0 \\ \Delta'=m^2-m(m-2)>0 \\ f(1)=-2\neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m>0\xrightarrow[m\in[-10;10]]{m\in\mathbb{Z}} m\in\{1;\ 2;\ 3;\ ...;\ 10\}$.

Cách 2: Hàm số $y=|mx^3-3mx^2+(3m-2)x+2-m|$ có 5 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y=mx^3-3mx^2+(3m-2)x+2-m$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình $mx^3-3mx^2+(3m-2)x+2-m=0$ (1) có 3 nghiệm phân biệt.

Ta có (1) $\Leftrightarrow(x-1)(mx^2-2mx+m-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1 \\ f(x)=mx^2-2mx+m-2=0\,(2) \end{array}\right.$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - m(m-2) > 0 \\ f(1) = -2 \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m > 0$. Vì m nguyên và $m \in [-10;10]$, nên $m \in \{1,2,3,...,10\}$.

Vậy có 10 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 84. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = |x|^3 - (2m+1)x^2 + 3m|x| - 5$ có ba điểm cực trị?

A. $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$ **B.** $\left[0; \frac{1}{4}\right) \cup (1; +\infty)$ **C.** $(-\infty; 0]$ **D.** $(1; +\infty)$

Lời giải

Chọn B.

Hàm số $y = |x|^3 - (2m+1)x^2 + 3m|x| - 5$ có ba điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số

$y = x^3 - (2m+1)x^2 + 3mx - 5$ có hai điểm cực trị **không âm**.

Vậy phương trình $3x^2 - 2(2m+1)x + 3m = 0$ khi: $\begin{cases} \Delta' = 4m^2 - 5m + 1 > 0 \\ S = \dfrac{2(2m+1)}{3} > 0;\ P = m \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq m < \dfrac{1}{4} \\ m > 1 \end{array}\right.$.

Câu 85. Cho hàm số $f(x) = (m^4+1)x^4 + (-2^{m+1}.m^2 + 4)x^2 + 4^m + 16$ với m là tham số thực. Số cực trị của đồ thị hàm số $g(x) = |f(x) - 1|$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A.

Cách 1: Ta có: $y = |f(x) - 1| = \sqrt{(f(x)-1)^2}$

Suy ra $y' = \dfrac{f'(x).[f(x)-1]}{\sqrt{(f(x)-1)^2}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f(x) - 1 = 0 \end{array}\right.$

$f'(x) = 0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt vì $-(m^4+1)(2^{m+1}.m^2+4) < 0$ với mọi m.

$f(x) - 1 = 0$ vô nghiệm do $\Delta' = (2^m.m^2+2)^2 - (m^4+1).(4^m+15) = 4.2^m.m^2 + 4 - 15m^4 - 4^m - 15$ $= -(2^m - m^2)^2 - 11m^4 - 11 < 0$.

Vậy hàm số đã cho có 3 cực trị.

Cách 2. Hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị (do hệ số a và b trái dấu) $\longrightarrow f(x) - 1$ cũng có 3 điểm cực trị.

Phương trình $f(x) - 1 = 0$ vô nghiệm (đã giải thích ở trên).

Vậy hàm số $g(x) = |f(x) - 1|$ có 3 cực trị.

Cách 3: Đặc biệt hóa ta cho $m=0$, khi đó ta được hàm $f(x)-1=x^4-4x^2+16$.

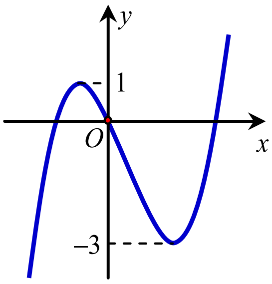
Đặt $g(x)=f(x)-1=x^4-4x^2+16 \Rightarrow g'(x)=4x^3-8x$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3-8x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Ta có BBT

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	12	$\nearrow$	16	$\searrow$	12	$\nearrow$	$+\infty$

Do đồ thị hàm số $y=g(x)$ nằm hoàn toàn bên trên trục hoành nên đồ thị hàm số $y=|g(x)|$ cũng chính là đồ thị của hàm số $y=g(x)$. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)=|f(x)-1|$ là 3.

Câu 86. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x)=|f(x)+m|$ có 3 điểm cực trị là

A. $m\le -1$ hoặc $m\ge 3$.
B. $m\le -3$ hoặc $m\ge 1$.
C. $m=-1$ hoặc $m=3$.
D. $1\le m\le 3$.

Lời giải

Chọn A.

Cách 1:

Nhận xét: Số điểm cực trị của hàm số $|f(x)|$ bằng $A+B$ với

- A là số điểm cực trị của hàm $f(x)$
- B là số giao điểm của $f(x)$ với trục hoành (không tính các điểm trùng với A ở trên)

Áp dụng: Vì hàm $f(x)$ đã cho có 2 điểm cực trị nên $f(x)+m$ cũng luôn có 2 điểm cực trị.

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f(x)+m$ với trục hoành là 1.

Để số giao điểm của đồ thị $f(x)+m$ với trục hoành là 1, ta cần

- Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ xuống dưới tối thiểu 1 đơn vị $\longrightarrow m\le -1$.
- Hoặc tịnh tiến đồ thị $f(x)$ lên trên tối thiểu 3 đơn vị $\longrightarrow m\ge 3$.

Vậy $m \le -1$ hoặc $m \ge 3$.

Cách 2:

- Đồ thị hàm số $y = f(x) + m$ có được khi ta tịnh tiến (lên trên hoặc xuống dưới) đồ thị hàm số $y = f(x)$ theo phương trục tung $|m|$ đơn vị

- Đồ thị hàm số $y = |f(x) + m|$ gồm hai phần.

Phần 1: Là phần đồ thị nằm phía trên trục hoành của hàm số $y = f(x) + m$

Phần 2: Lấy đối xứng phần đồ thị nằm phía dưới trục hoành của hàm số $y = f(x) + m$ qua trục hoành.

Nhận xét:

- Ứng với mỗi điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x) + m$ sẽ cho ta một điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = |f(x) + m|$ (các điểm cực trị tương ứng đó của hai đồ thị sẽ trùng nhau hoặc đối xứng nhau qua trục hoành)

- Mỗi giao điểm của đồ thị của hàm số $y = f(x) + m$ với trục hoành sẽ tạo thành một điểm cực trị của hàm số $y = |f(x) + m|$

Do đồ thị hàm số $y = f(x) + m$ đã có hai điểm cực trị nên để đồ thị hàm số $y = |f(x) + m|$ có ba điểm cực trị, xảy ra hai trường hợp sau:

TH1: Đồ thị hàm số $y = f(x) + m$ có đúng một điểm chung với trục hoành $\Leftrightarrow y_{CD}.y_{CT} > 0$

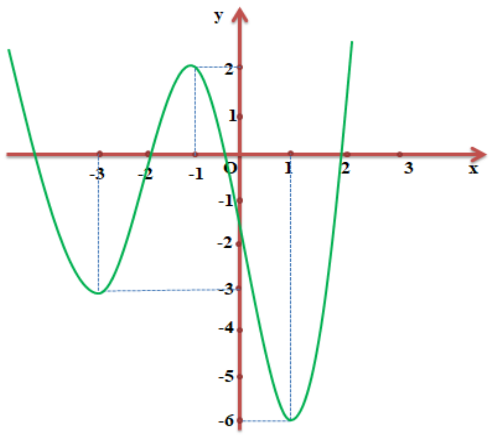
$\Leftrightarrow (m+1).(m-3) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 3 \end{array}\right.$.

TH2: Đồ thị hàm số $y = f(x) + m$ có một điểm cực trị thuộc trục hoành $\Leftrightarrow y_{CD}.y_{CT} = 0$

$\Leftrightarrow (m+1).(m-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 3 \end{array}\right.$.

Kết hợp cả hai trường hợp ta có $m \ge 3$ hoặc $m \le -1$ là giá trị cần tìm.

Câu 87. Hình vẽ là đồ thị hàm số $y = f(x)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |f(x-1) + m|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng



A. 9. **B.** 12. **C.** 18. **D.** 15.

Lời giải

Chọn B.

Cách 1:

Số cực trị của hàm số $y=\left|f\left(x-1\right)+m\right|$ bằng số cực trị của hàm $y=f\left(x-1\right)$ hay $y=f\left(x\right)$ cộng với số nghiệm đơn của phương trình $f\left(x-1\right)+m=0(*)$

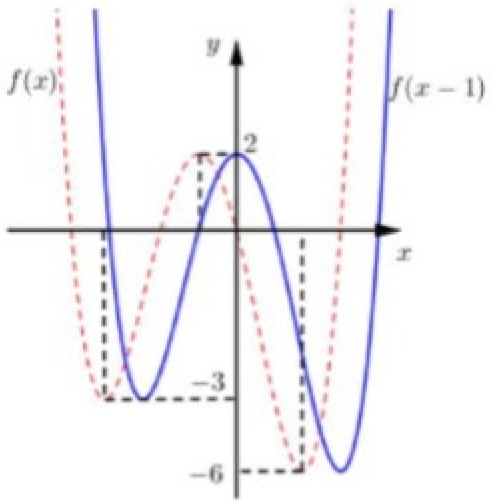
Phương trình (*): $f\left(x-1\right)+m=0 \Leftrightarrow f\left(x-1\right)=-m \Leftrightarrow f\left(t\right)=-m, t=x-1$

Yêu cầu bài toán xảy ra khi phương trình (*) có hai nghiệm đơn phân biệt

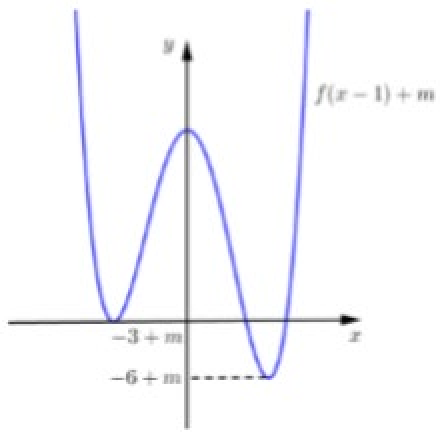
Do đó $-6<-m\le -3$ hoặc $2\le -m$. Vậy $m\in\left\{3;4;5\right\}$.

Cách 2:

Đồ thị hàm số $y=f\left(x-1\right)$ nhận được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ sang phải 1 đơn vị nên không làm thay đổi tung độ các điểm cực trị.



Đồ thị hàm số $y=f\left(x-1\right)+m$ nhận được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f\left(x-1\right)$ lên trên m đơn vị nên ta có: $y_{CD}=2+m; y_{CT}=-3+m, y_{CT}=-6+m$



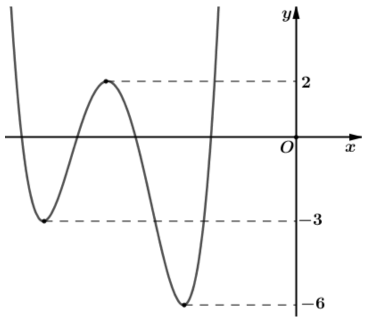
Đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x-1\right)+m\right|$ nhận được bằng cách từ đồ thị hàm số $y=f\left(x-1\right)+m$ lấy đối xứng phần đồ thị phía dưới trục hoành qua trục hoành và xóa đi phần đồ thị phía dưới trục hoành.

Để đồ thị hàm số có 5 cực trị

$\Leftrightarrow -6+m<0\le -3+m \Leftrightarrow 3\le m<6 \Rightarrow m\in\left\{3;4;5\right\}$

$\Rightarrow S=\left\{3;4;5\right\} \Rightarrow 3+4+5=12.$

Câu 88. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x+2018\right)+m\right|$ có 7 điểm cực trị khi

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A.

Vì hàm $f\left(x\right)$ đã cho có 3 điểm cực trị nên $f\left(x+2018\right)+m$ cũng luôn có 3 điểm cực trị (do phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị).

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f\left(x+2018\right)+m$ với trục hoành là $4.$

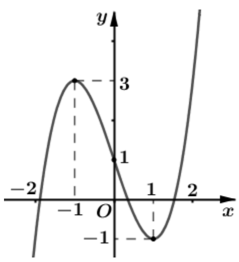
Để số giao điểm của đồ thị $f\left(x+2018\right)+m$ với trục hoành là $4,$ ta cần đồng thời

Tịnh tiến đồ thị $f\left(x\right)$ xuống dưới nhỏ hơn 2 đơn vị $\longrightarrow m>-2$

Tịnh tiến đồ thị $f\left(x\right)$ lên trên nhỏ hơn 3 đơn vị $\longrightarrow m<3.$

Vậy $-2<m<3 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}^+} m\in\left\{1;\ 2\right\}.$ Chọn A.

Câu 89. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



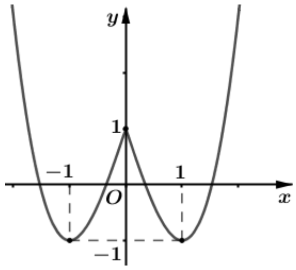
Với $m < -1$ thì hàm số $g(x) = f(|x+m|)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

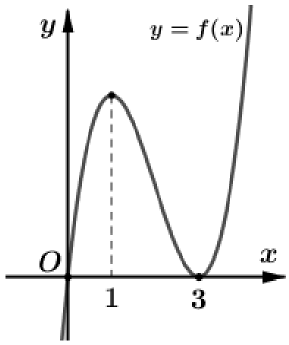
Chọn C.

Đồ thị hàm số $f(|x+m|)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $f(x)$ bằng cách lấy đối xứng trước rồi mới tịnh tiến. Lấy đối xứng trước ta được đồ thị hàm số $f(|x|)$ như hình bên dưới



Dựa vào đồ thị hàm số $f(|x|)$ ta thấy có 3 điểm cực trị $\longrightarrow f(|x+m|)$ cũng luôn có 3 điểm cực trị (vì phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị).

Câu 90. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $h(x) = \left|f^2(x) + f(x) + m\right|$ có đúng 3 điểm cực trị.

A. $m > \frac{1}{4}$. **B.** $m \geq \frac{1}{4}$. **C.** $m < 1$. **D.** $m \leq 1$.

Lời giải

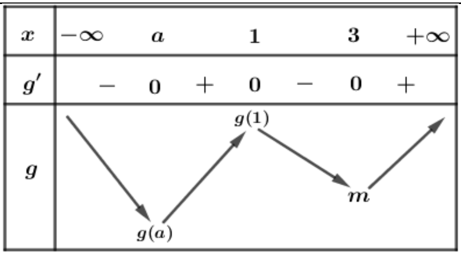
Chọn B.

Xét $g(x) = f^2(x) + f(x) + m \longrightarrow g'(x) = f'(x)[2f(x)+1]$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ 2f(x) = -1 \end{array}\right. \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f(x)} \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \\ x = a \ (a < 0) \end{array}\right. .$$

Ta tính được $$\begin{cases} g(1) = f^2(1) + f(1) + m > m \\ g(3) = m \\ g(a) = m - \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$



Dựa vào bảng biến thiên, suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Suy ra đồ thị hàm số $h(x)=\left|f^2(x)+f(x)+m\right|=\left|\left[f(x)+\dfrac{1}{2}\right]^2+m-\dfrac{1}{4}\right|$ có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $g(x)$ nằm hoàn toàn phía trên trục Ox (kể cả tiếp xúc) $\longrightarrow m\geq\dfrac{1}{4}$.

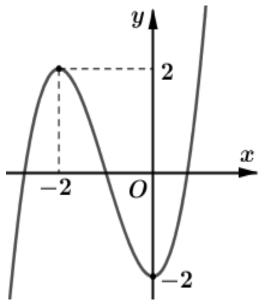
CHỦ ĐỀ 4
XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM HỢP $y=f(u)$ KHI BIẾT HÀM, ĐỒ THỊ VÀ BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM $y=f(x)$

Chú ý: $y'=\left[f(u)\right]'=u'.f(u)$

DẠNG 1
XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM HỢP $y=f(u)$ KHI BIẾT HÀM, ĐỒ THỊ VÀ BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM $y=f(x)$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

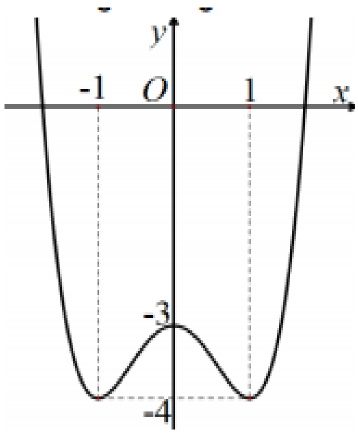
Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Hàm số $y=f(x-2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;0)$ **B.** $(2;+\infty)$ **C.** $(0;2)$ **D.** $(-\infty;-2)$

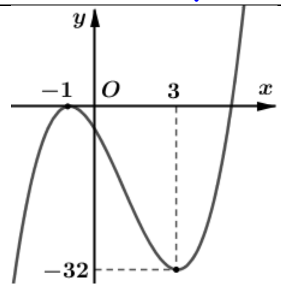
Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y=f(x+2019)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-2020)$ **B.** $(2020;+\infty)$ **C.** $(1;+\infty)$ **D.** $(-2018;+\infty)$

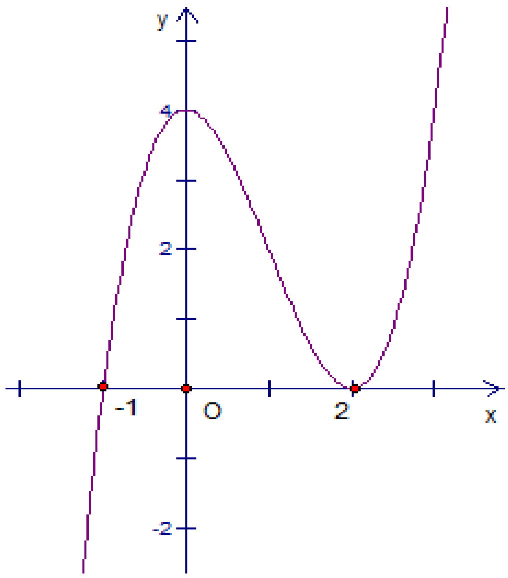
Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y=f\left(x\right)+2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\infty;-1\right)$ **B.** $\left(1;3\right)$ **C.** $\left(-1;+\infty\right)$ **D.** $\left(-\infty;3\right)$

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hỏi hàm số $y=f\left(2-x^2\right)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(1;+\infty\right)$. **B.** $\left(-1;0\right)$. **C.** $\left(-2;1\right)$. **D.** $\left(0;1\right)$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biên thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	-2	↗	$+\infty$

Hàm số $g(x)=f\left(2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $\left(-1;\frac{1}{4}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{4};1\right)$. **C.** $\left(1;\frac{5}{4}\right)$. **D.** $\left(\frac{9}{4};+\infty\right)$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên R và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $g(x)=f(|x-2|)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây:.

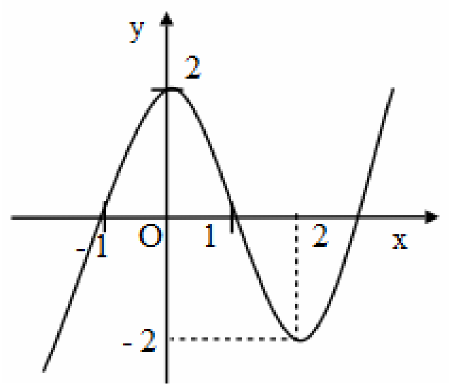
A. $(3;+\infty)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(-1;2)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Câu 7. Cho parabol (P): $y=f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ biết: (P) đi qua $M(4;3)$, (P) cắt Ox tại $N(3;0)$ và Q sao cho ΔINQ có diện tích bằng 1 đồng thời hoành độ điểm Q nhỏ hơn 3. Khi đó hàm số $f(2x-1)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây

A. $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(5;7)$. **D.** $(-\infty;2)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



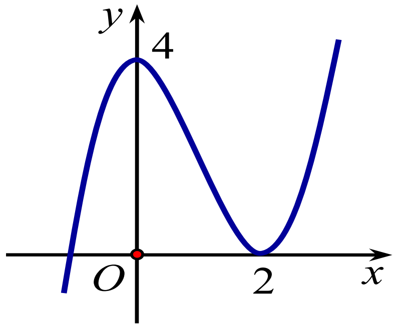
A. Hàm số $y=f(x+1)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

B. Hàm số $y=f(x+1)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

C. Hàm số $y=f(x+1)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

D. Hàm số $y=f(x+1)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên.



Đặt $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)$.

A. $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

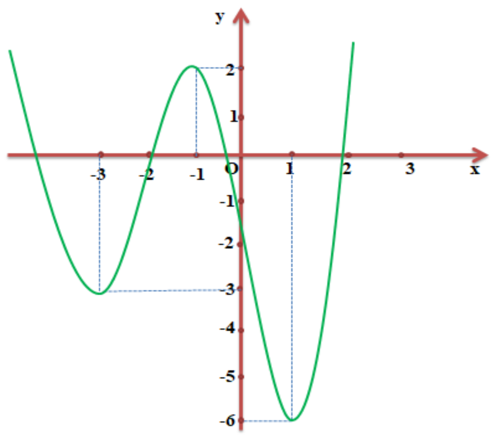
B. $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

C. $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{-1}{2};0\right)$.

D. $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y=f(x-1)+2022$ nghịch biến trên khoảng nào?

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$			0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Hàm số $y=f(|f(x)|)$ đồng biến trên khoảng nào ?

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1)<0$ và $[f(x)-x]f(x)=x^6+3x^4+2x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$.. Hàm số $g(x)=f(x)+2x^2$ đồng biến trên khoảng nào ?

Câu 13. Cho đa thức $f(x)$ hệ số thực và thỏa điều kiện $2f(x)+f(1-x)=x^2, \forall x \in R$. Hàm số $y=3x.f(x)+x^2+4x+1$ đồng biến trên khoảng nào?

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-1;1]$ và thỏa $f(1)=0$, $(f'(x))^2+4f(x)=8x^2+16x-8$. Hàm số $g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3-2x+3$ đồng biến trên khoảng nào?

DẠNG 2

XÉT CỰC TRỊ CỦA HÀM HỢP $y=f(u)$ KHI BIẾT HÀM, ĐỒ THỊ VÀ BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM $y=f(x)$

CỰC TRỊ HÀM HỢP $f(u(x))$ CHỨA TRỊ TUYỆT ĐỐI

- Hàm số $y=f(x)$ có n số điểm cực trị dương thì hàm số $y=f(|x|)$ có $2n+1$ số điểm cực trị.
- Hàm số $y=f(x)$ có n số điểm cực trị và phương trình $f(x)=0$ có m số nghiệm đơn và bội lẻ thì hàm số $y=|f(x)|$ có $n+m$ số điểm cực trị.
- Hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị x_1,x_2. Khi đó hàm số $y=|f(x)|$ có:

  + 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow f(x_1).f(x_2)\ge 0$

  + 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow f(x_1).f(x_2)<0$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

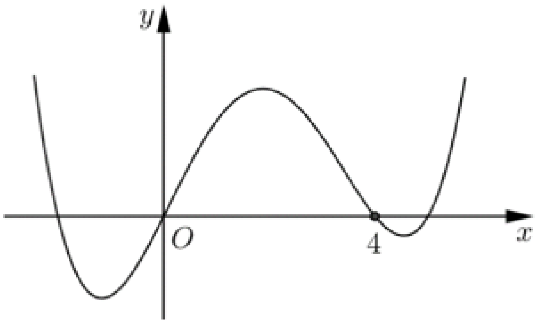
Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau ?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $g(x)=3f(x)+1$ đạt **cực tiểu** tại điểm nào sau đây ?

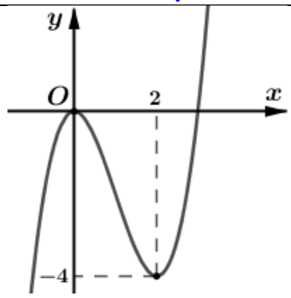
A. $x=-1$. **B.** $x=1$. **C.** $x=\pm 1$. **D.** $x=0$.

Câu 16. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x^3+3x^2)$ là



A. 5. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 11.

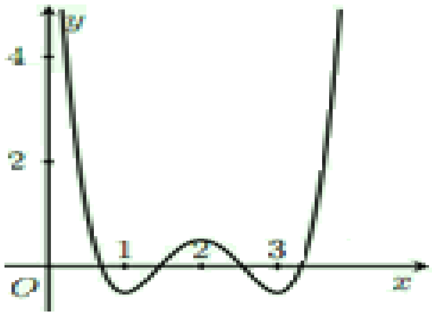
Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Hàm số $g(x)=f(f(x))$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

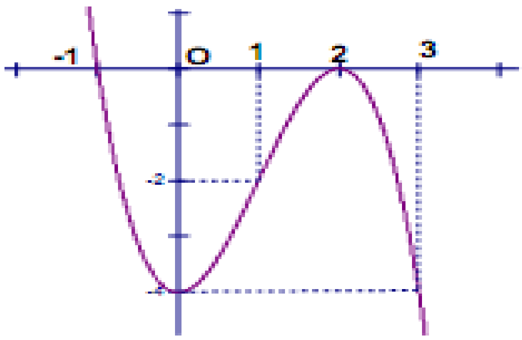
Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số điểm cực trị của hàm số $y=|f(x-1)|$ là:

A. 7 **B.** 5 **C.** 3 **D.** 6

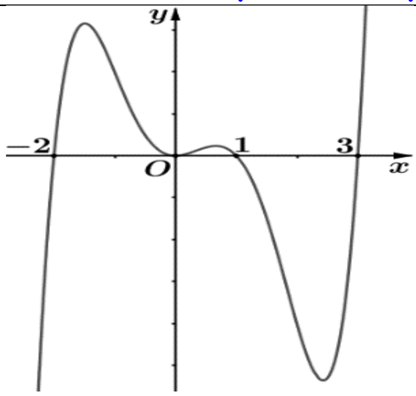
Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số điểm cực trị của hàm số $y=f(|x+2|)$ là:

A. 5 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 2

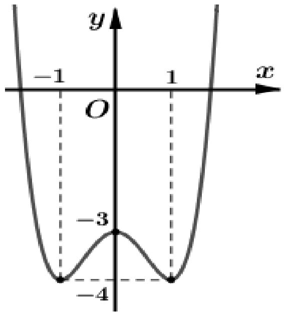
Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Đồ thị hàm số $h(x)=f(|x|)+2021$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

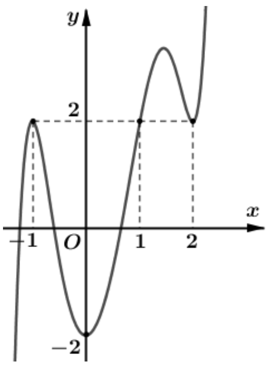
Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Đồ thị hàm số $g(x)=f(|x-2|)+1$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

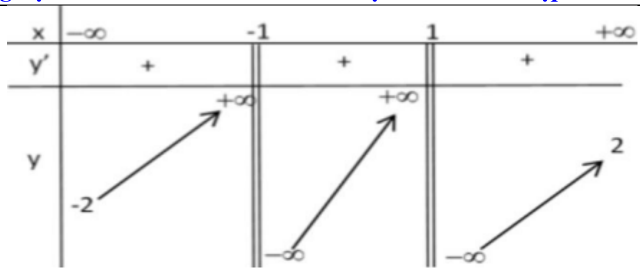
Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Đồ thị hàm số $g(x)=|2f(x)-3|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 4. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và liên tục trên từng khoảng xác định, có bảng biến thiên như hình vẽ.

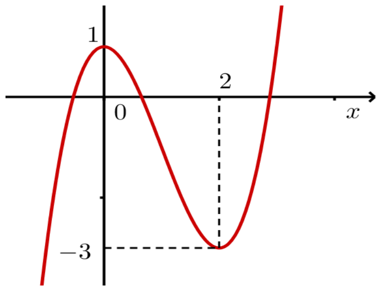


Đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)-1\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 2

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 24. Cho đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ như hình vẽ dưới đây.



Đặt $g\left(x\right)=f\left(x+1\right)-2$

A. Hàm số $g\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;1\right)$.

B. Hàm số $g\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-1;1\right)$.

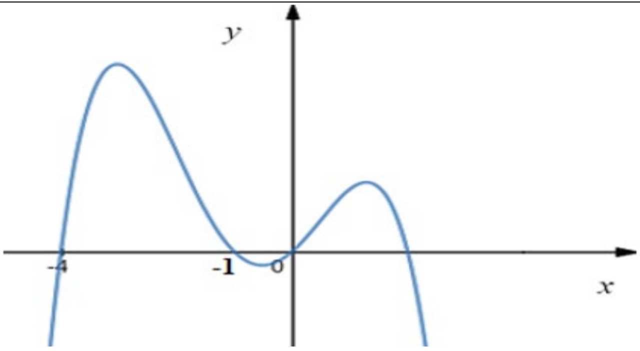
C. Hàm số $g\left(x\right)$ đạt cực đại tại $x=1$.

D. Đồ thị hàm số $g\left(x\right)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 25. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$có **đúng** ba điểm cực trị là $-2;-1;0$. Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và đồ thị có ba điểm cực trị như hình dưới đây



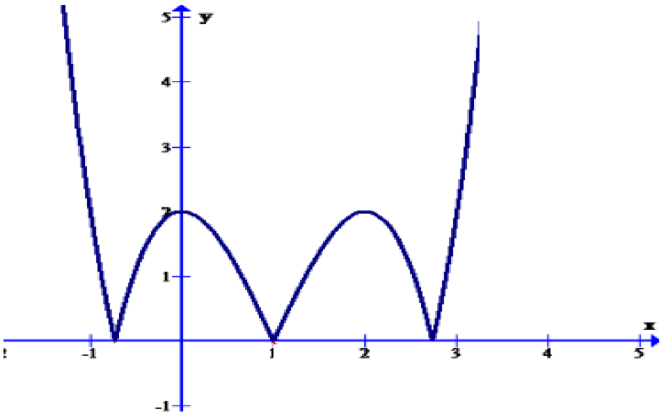
Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x^3-3x+2)$ là bao nhiêu?

Câu 27. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau ?

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	-2	↗	2	↗	$+\infty$

Hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2+1\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

Câu 28. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f\left(x-1\right)-\frac{1}{2}\right|$ là bao nhiêu?

Câu 29. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và liên tục trên từng khoảng xác định, có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)-2022\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

CHỦ ĐỀ 4

XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM HỢP $y=f\left(u\right)$ KHI BIẾT HÀM, ĐỒ THỊ VÀ BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM $y=f\left(x\right)$

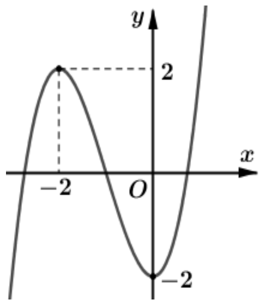
Chú ý: $y'=\left[f\left(u\right)\right]'=u'.f\left(u\right)$

DẠNG 1

XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM HỢP $y=f\left(u\right)$ KHI BIẾT HÀM, ĐỒ THỊ VÀ BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM $y=f\left(x\right)$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Hàm số $y=f\left(x-2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

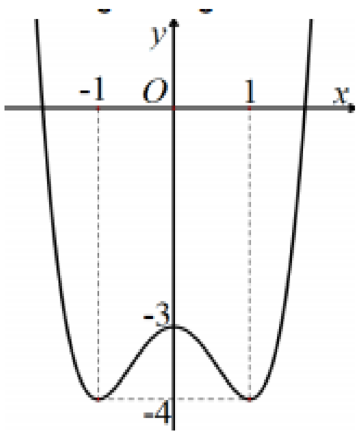
A. $\left(-2;0\right)$ **B.** $\left(2;+\infty\right)$ **C.** $\left(0;2\right)$ **D.** $\left(-\infty;-2\right)$

Lời giải

Chọn C.

Đồ thị hàm số $y=f\left(x-2\right)$ là tịnh tiến đồ thị $y=f\left(x\right)$ sang bên phải trục Ox 2 đơn vị $\Rightarrow$Hàm số $y=f\left(x-2\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;2\right)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y=f\left(x+2019\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

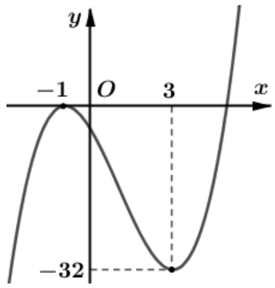
A. $\left(-\infty;-2020\right)$ **B.** $\left(2020;+\infty\right)$ **C.** $\left(1;+\infty\right)$ **D.** $\left(-2018;+\infty\right)$

Lời giải

Chọn C.

Đồ thị hàm số $y=f\left(x+2019\right)$ là tịnh tiến đồ thị $y=f\left(x\right)$ sang bên trái trục Ox 2019 đơn vị $\Rightarrow$ Hàm số $y=f\left(x+2019\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(-2020;-2019\right)$ và $\left(-2018;+\infty\right)$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y=f\left(x\right)+2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

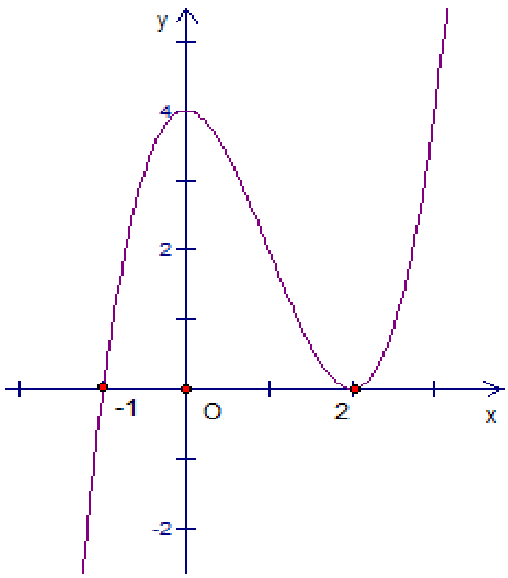
A. $\left(-\infty;-1\right)$ **B.** $\left(1;3\right)$ **C.** $\left(-1;+\infty\right)$ **D.** $\left(-\infty;3\right)$

Lời giải

Chọn A.

Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)+2$ là tịnh tiến đồ thị $y=f\left(x\right)$ lên bên trên trục Oy 2 đơn vị $\Rightarrow$ Tính đơn của hàm số $y=f\left(x\right)+2$ không thay đổi so với hàm số $y=f\left(x\right)$ $\Rightarrow$ $y=f\left(x\right)+2$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(3;+\infty\right)$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hỏi hàm số $y=f\left(2-x^2\right)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(1;+\infty\right)$. **B.** $\left(-1;0\right)$. **C.** $\left(-2;1\right)$. **D.** $\left(0;1\right)$.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị ta có hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

Xét hàm số $y=f\left(2-x^2\right)$ ta có $y'=-2xf'(2-x^2)$.

Để hàm số $y=f\left(2-x^2\right)$ đồng biến thì $-2xf'(2-x^2)>0 \Leftrightarrow xf'(2-x^2)<0$.

Ta có các trường hợp sau:

TH1: $\begin{cases} x>0 \\ f'\left(2-x^2\right)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 0<2-x^2<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<\sqrt{2}$.

TH2: $\begin{cases} x<0 \\ f'\left(2-x^2\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \\ \left[\begin{array}{l} 2-x^2>2 \\ 2-x^2<0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x<\sqrt{2}$.

Vậy hàm số $y=f(2-x^2)$ đồng biến trên các mỗi khoảng $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)$ và $\left(0;\sqrt{2}\right)$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biên thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $g(x)=f\left(2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $\left(-1;\frac{1}{4}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{4};1\right)$. **C.** $\left(1;\frac{5}{4}\right)$. **D.** $\left(\frac{9}{4};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn C.

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $f'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ x>3 \end{array}\right.$ và $f'(x)<0 \Leftrightarrow -2<x<3$.

Ta có $g'(x)=\left(4x-\frac{5}{2}\right)f'\left(2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)$. Xét $g'(x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x-\frac{5}{2}>0 \\ f'\left(2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)<0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4x-\frac{5}{2}<0 \\ f'\left(2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)>0 \end{cases} \end{array}\right.$.

$+\begin{cases}4x-\frac{5}{2}>0\\ f'\left(2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{5}{8}\\ -2<2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}<3\end{cases}\Leftrightarrow 1<x<\frac{9}{4}.$

$+\begin{cases}4x-\frac{5}{2}<0\\ f'\left(2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<\frac{5}{8}\\ 2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}>3\end{cases}\\ \begin{cases}x<\frac{5}{8}\\ 2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}<-2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1\\ \frac{1}{4}<x<\frac{5}{8}\end{array}\right..$

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên R và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $g(x)=f(|x-2|)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây:.

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(-1;2)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Lời giải

Chọn C.

- Do $h(x)=f(|x|)$ là hàm chẵn, đồ thị hàm số $y=h(x)$ nhận trục tung làm trục đối xứng nên từ bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ suy ra bảng biến thiên của hàm số $h(x)=f(|x|)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$		$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

- Tịnh tiến đồ thị hàm số $h(x)=f(|x|)$ sang phải (theo trục hoành) 2 đơn vị ta được đồ thịhàm số $g(x)=f(|x-2|)$. Suy ra bảng biến thiên của hàm số $g(x)=f(|x-2|)$:

x	$-\infty$ $+\infty$		-1		2		5	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$		$\nearrow$	4	$\searrow$ $-\infty$

Từ bảng biến thiên của hàm số $g(x)=f(|x-2|)$ ta thấy hàm số $g(x)=f(|x-2|)$ nghịch biến trên $(-1;2)$ và $(5;+\infty)$

Câu 7. Cho parabol (P): $y=f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ biết: (P) đi qua $M(4;3)$, (P) cắt Ox tại $N(3;0)$ và Q sao cho ΔINQ có diện tích bằng 1 đồng thời hoành độ điểm Q nhỏ hơn 3. Khi đó hàm số $f(2x-1)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây

A. $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(5;7)$. **D.** $(-\infty;2)$.

Lời giải

Chọn C.

Vì (P) đi qua $M(4;3)$ nên $3=16a+4b+c$ (1)

Mặt khác (P) cắt Ox tại $N(3;0)$ suy ra $0=9a+3b+c$ (2), (P) cắt Ox tại Q nên $Q(t;0)$, $t<3$

Theo định lý Viét ta có $\begin{cases} t+3=-\dfrac{b}{a} \\ 3t=\dfrac{c}{a} \end{cases}$

Ta có $S_{\Delta INQ}=\frac{1}{2}IH.NQ$ với H là hình chiếu của $I\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$ lên trục hoành

Do $IH=\left|-\frac{\Delta}{4a}\right|$, $NQ=3-t$ nên $S_{\Delta INQ}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|-\frac{\Delta}{4a}\right|.(3-t)=1$

$$\Leftrightarrow (3-t)\left|\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}\right|=\left|\frac{2}{a}\right| \Leftrightarrow (3-t)\left|\frac{(t+3)^2}{4}-3t\right|=\left|\frac{2}{a}\right| \Leftrightarrow (3-t)^3=\frac{8}{|a|} (3)$$

Từ (1) và (2) ta có $7a+b=3 \Leftrightarrow b=3-7a$ suy ra $t+3=-\frac{3-7a}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{a}=\frac{4-t}{3}$

Thay vào (3) ta có $(3-t)^3=\frac{8(4-t)}{3} \Leftrightarrow 3t^3-27t^2+73t-49=0 \Leftrightarrow t=1$

Suy ra $a=1 \Rightarrow b=-4 \Rightarrow c=3$.

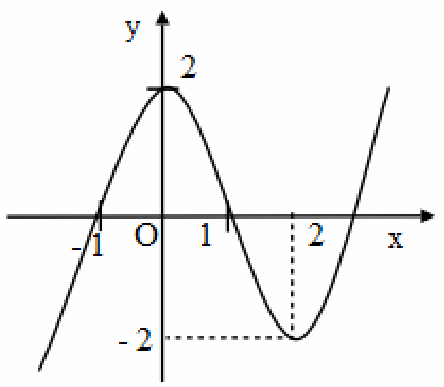
Vậy (P) cần tìm là $y=f(x)=x^2-4x+3$.

Khi đó $f(2x-1)=(2x-1)^2-4(2x-1)+3=4x^2-12x+8$

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 8. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



A. Hàm số $y=f\left(x+1\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-1\right)$

B. Hàm số $y=f\left(x+1\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-1\right)$

C. Hàm số $y=f\left(x+1\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-1;1\right)$.

D. Hàm số $y=f\left(x+1\right)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$

Lời giải

A. Hàm số $y=f\left(x+1\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ **SAI**

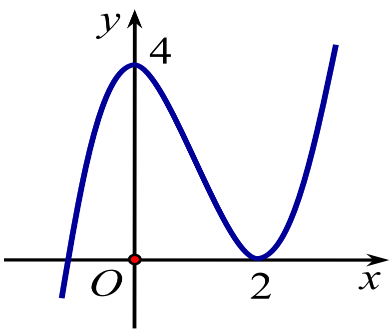
B. Hàm số $y=f\left(x+1\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ **ĐÚNG**

C. Hàm số $y=f\left(x+1\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-1;1\right)$. **ĐÚNG**

D. Hàm số $y=f\left(x+1\right)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$ **ĐÚNG**

Đồ thị hàm số $y=f\left(x+1\right)$ là tịnh tiến đồ thị $y=f\left(x\right)$ sang bên trái trục Ox 1 đơn vị $\Rightarrow$Hàm số $y=f\left(x+1\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-1\right);\left(1;+\infty\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-1;1\right)$

Câu 9. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên.



Đặt $g\left(x\right)=f\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)$.

A. $g\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;2\right)$.

B. $g\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(-1;0\right)$.

C. $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{-1}{2};0\right)$.

D. $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Lời giải

A. $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$. **SAI**

B. $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$. **SAI**

C. $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{-1}{2};0\right)$. **ĐÚNG**

D. $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$. **SAI**

Hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$; $f'(x)=3ax^2+2bx+c$, có đồ thị như hình vẽ.

Do đó $x=0\Rightarrow d=4$; $x=2\Rightarrow 8a+4b+2c+d=0$; $f'(2)=0\Rightarrow 12a+4b+c=0$; $f'(0)=0\Rightarrow c=0$.

Tìm được $a=1;b=-3;c=0;d=4$ và hàm số $y=x^3-3x^2+4$.

Ta có $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)=\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)^3-3\left(x^2+x+2\right)+4$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{3}{2}(2x+1)\sqrt{x^2+x+2}-3(2x+1)=3(2x+1)\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+x+2}-1\right);\ g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{1}{2} \\ x=1 \\ x=-2 \end{array}\right..$$

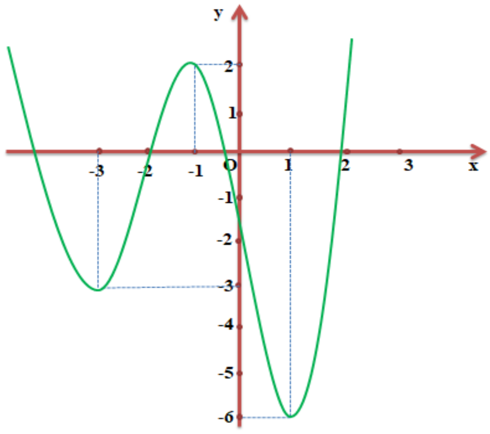
Bảng xét dấu của hàm $y=g(x)$:

x	$-\infty$		-2		$-1/2$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$\frac{7\sqrt{7}-10}{8}$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$; $\left(-\frac{1}{2};1\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$; $(1;+\infty)$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y=f(x-1)+2022$ nghịch biến trên khoảng nào?

Lời giải

Đáp án: Hàm số $y=f(x-1)+2022$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

Đồ thị hàm số $y=f(x-1)+2022$ là tịnh tiến đồ thị $y=f(x)$ lên bên trên trục Oy 2022 đơn vị và bên phải trục Ox 1 đơn vị $\Rightarrow$ $y=f(x-1)+2022$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Hàm số $y=f(|f(x)|)$ đồng biến trên khoảng nào ?

Lời giải

Đáp án: $y=f(|f(x)|)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Đặt $g(x)=f(|f(x)|)\Rightarrow g'(x)=f'(|f(x)|).\dfrac{f(x).f'(x)}{|f(x)|}$

Do đó $g'(x)$ không xác địnhkhi $f(x)=0$ hay $x=0$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\ f'(|f(x)|)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\ |f(x)|=1\\ |f(x)|=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\ f(x)=\pm1\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm1.$$

Từ bảng biến thiên của $f(x)$ ta có $|f(x)|\in[0;1],\ \forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra $f'(|f(x)|)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	

Từ đó suy ra $g(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1)<0$ và $\left[f(x)-x\right]f(x)=x^6+3x^4+2x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$.. Hàm số $g(x)=f(x)+2x^2$ đồng biến trên khoảng nào ?

Lời giải

Đáp án: Hàm số $g(x)=f(x)+2x^2$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3};1\right)$

Ta có $\left[f(x)-x\right]f(x)=x^6+3x^4+2x^2 \Leftrightarrow \left(f(x)\right)^2-x.f(x)-x^6-3x^4-2x^2=0$

Đặt $t=f(x)$ ta được phương trình $t^2-x.t-x^6-3x^4-2x^2=0$

Ta có $\Delta=x^2-4\left(-x^6-3x^4-2x^2\right)=4x^6+12x^4+9x^2=\left(2x^3+3x\right)^2$

Vậy $\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{x+2x^3+3x}{2}=x^3+2x \\ t=\dfrac{x-2x^3-3x}{2}=-x^3-x \end{array}\right.$. Suy ra $\left[\begin{array}{l} f(x)=x^3+2x \\ f(x)=-x^3-x \end{array}\right.$

Do $f(1)<0$ nên $f(x)=-x^3-x$.

Ta có

$g(x)=-x^3+2x^2-x \Rightarrow g'(x)=-3x^2+4x-1>0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}<x<1$.

Hàm số $g(x)=f(x)+2x^2$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3};1\right)$

Câu 13. Cho đa thức $f(x)$ hệ số thực và thỏa điều kiện $2f(x)+f(1-x)=x^2$, $\forall x\in R$. Hàm số $y=3x.f(x)+x^2+4x+1$ đồng biến trên khoảng nào?

Lời giải

Đáp án: Hàm số $y=3x.f(x)+x^2+4x+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Từ giả thiết, thay x bởi $x-1$ ta được $2f(1-x)+f(x)=(x-1)^2$.

Khi đó ta có $\begin{cases} 2f(x)+f(1-x)=x^2 \\ 2f(1-x)+f(x)=x^2-2x+1 \end{cases} \longrightarrow 3f(x)=x^2+2x-1$.

Suy ra $y=x^3+3x^2+3x+1 \Rightarrow y'=3x^2+6x+3\geq 0, \forall x\in R$. Nên hàm số đồng biến trên R.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-1;1]$ và thỏa $f(1)=0$, $\left(f'(x)\right)^2+4f(x)=8x^2+16x-8$. Hàm số $g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3-2x+3$ đồng biến trên khoảng nào?

Lời giải

Đáp án: hàm số $g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3-2x+3$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Chọn $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ (lý do: vế phải là hàm đa thức bậc hai).

$\Rightarrow f'(x)=2ax+b$.

Ta có:

$(f'(x))^2+4f(x)=8x^2+16x-8 \Leftrightarrow (2ax+b)^2+4(ax^2+bx+c)=8x^2+16x-8$

$\Leftrightarrow (4a^2+4a)x^2+(4ab+4b)x+b^2+4c=8x^2+16x-8$

Đồng nhất 2 vế ta được:

$$\begin{cases}4a^2+4a=8\\4ab+4b=16\\b^2+4c=-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=2\\c=-3\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}a=-2\\b=-4\\c=-6\end{cases}.$$

Do $f(1)=0 \Rightarrow a+b+c=0 \Rightarrow a=1,\ b=2$ và $c=-3$.

Vậy $f(x)=x^2+2x-3 \Rightarrow g(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2 \Rightarrow g'(x)=-x^2+2x \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

DẠNG 2

XÉT CỰC TRỊ CỦA HÀM HỢP $y=f(u)$ KHI BIẾT HÀM, ĐỒ THỊ VÀ BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM $y=f(x)$

CỰC TRỊ HÀM HỢP $f(u(x))$ CHỨA TRỊ TUYỆT ĐỐI

- Hàm số $y=f(x)$ có n số điểm cực trị dương thì hàm số $y=f(|x|)$ có $2n+1$ số điểm cực trị.
- Hàm số $y=f(x)$ có n số điểm cực trị và phương trình $f(x)=0$ có m số nghiệm đơn và bội lẻ thì hàm số $y=|f(x)|$ có $n+m$ số điểm cực trị.

- Hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị x_1,x_2. Khi đó hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có:

  + 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow f(x_1).f(x_2)\ge 0$

  + 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow f(x_1).f(x_2)<0$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau ?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $g(x)=3f(x)+1$ đạt **cực tiểu** tại điểm nào sau đây ?

A. $x=-1$. **B.** $x=1$. **C.** $x=\pm 1$. **D.** $x=0$.

Lời giải

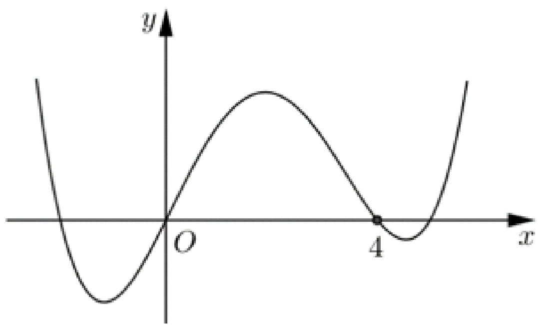
Chọn C.

Ta có $g'(x)=3f'(x)$

Do đó điểm cực tiểu của hàm số $g(x)$ trùng với điểm cực tiểu của hàm số $y=f(x)$.

Vậy điểm cực tiểu của hàm số là $x=\pm 1$.

Câu 16. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^3+3x^2\right)$ là



A. 5. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C.

Cách 1: Tự luận

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ như sau

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

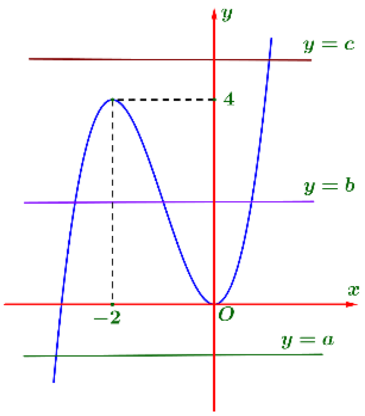
Ta có $g(x)=f\left(x^3+3x^2\right) \Rightarrow g'(x)=\left(3x^2+6x\right).f'\left(x^3+3x^2\right)$

Cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2+6x=0 \\ f'\left(x^3+3x^2\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \\ x^3+3x^2=a;\ a<0 \\ x^3+3x^2=b;\ 0<b<4 \\ x^3+3x^2=c;\ c>4 \end{array}\right.$

Xét hàm số $h(x)=x^3+3x^2 \Rightarrow h'(x)=3x^2+6x$. Cho $h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Ta có đồ thị của hàm $h(x)=x^3+3x^2$ như sau

Từ đồ thị ta thấy:

Đường thẳng $y=a$ cắt đồ thị hàm số $y=h(x)$ tại 1 điểm.

Đường thẳng $y=b$ cắt đồ thị hàm số $y=h(x)$ tại 3 điểm.

Đường thẳng $y=c$ cắt đồ thị hàm số $y=h(x)$ tại 1 điểm.

Như vậy phương trình $g'(x)=0$ có tất cả 7 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy hàm số $g(x)=f\left(x^3+3x^2\right)$ có 7 cực trị.

Cách 2: Phương pháp ghép trục

Xét hàm số $u=x^3+3x^2$ ta có $u'=3x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \end{array}\right.$.

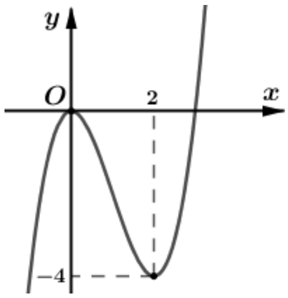
Gọi a,b,c là các điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x\right)$ khi đó $a<0<b<4<c$

Và ta cũng có $f\left(a\right)<f\left(c\right)<0$; $f\left(b\right)>0$.

x	-∞			-2		0				+∞
$u=x^3+3x^2$	-∞	a	b	4	b	0	b	4	c	+∞
$f(u)$	+∞	f(a)	f(b)	0	f(b)	0	f(b) -2	0	f(c)	+∞

Suy ra $g\left(x\right)=f\left(x^3+3x^2\right)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 17. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Hàm số $g\left(x\right)=f\left(f\left(x\right)\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B.

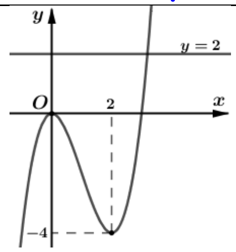
Cách 1: Dựa vào đồ thị ta thấy $f\left(x\right)$ đạt cực trị tại $x=0$, $x=2$.

Suy ra $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\ (\text{nghiem don})\\x=2\ (\text{nghiem don})\end{array}\right.$.

Ta có $g'(x)=f'(x).f'[f(x)]$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f'[f(x)]=0\end{array}\right.$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\ (\text{nghiem don})\\x=2\ (\text{nghiem don})\end{array}\right.$.

$f'[f(x)]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\ (1)\\f(x)=2\ (2)\end{array}\right.$.



Dựa vào đồ thị suy ra:

Phương trình (1) có hai nghiệm $x=0$ (nghiệm kép) và $x=a\,(a>2)$.

Phương trình (2) có một nghiệm $x=b\,(b>a)$.

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 4 nghiệm bội lẻ là $x=0,\ x=2,\ x=a$ và $x=b$.

Suy ra hàm số $g(x)=f\left[f(x)\right]$ có 4 điểm cực trị. Chọn B

Cách 2:

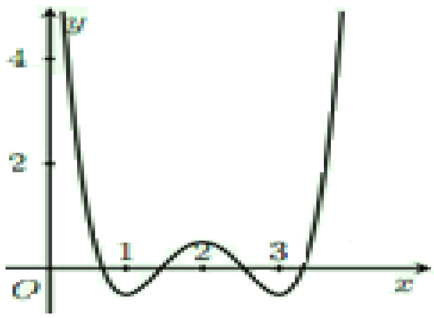
+) Ta có với $u=f(x)$ thì $f'\left(f(x)\right)_x=f'_u.u_x=f'_u.f'_x\Rightarrow f'\left(f(x)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'_u=0\\f'_x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=f(x)=0\\u=f(x)=2\\x=0\\x=2\end{array}\right.$

+) Ta thấy $f(x)=0$ có hai nghiệm $x_{1,2}=0\vee x_3>2$.

+) Ta thấy $f(x)=2$ có hai nghiệm $x_4>x_3$

$\Rightarrow f'\left(f(x)\right)=0$ có nghiệm $x=0$ bậc 3, $x=2,x_3,x_4$ bậc 1 $\Rightarrow$ hàm số có 4 cực trị.

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f(x-1)\right|$ là:

A. 7 **B.** 5 **C.** 3 **D.** 6

Lời giải

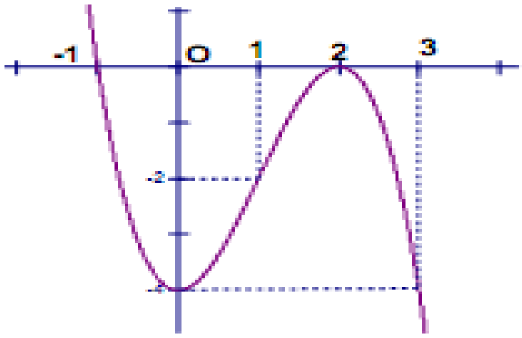
Chọn A.

♦ Đồ thị $y=f(x-1)$ là phép tịnh tiến của đồ thị $y=f(x)$ qua bên phải trục Oy 1 đơn vị nên số cực trị không thay đổi.

♦ Từ đồ thị ta thấy hàm số $y=f(x-1)$ có 2 điểm cực trị có tung độ âm

$\Rightarrow$ hàm số $y=\left|f(x-1)\right|$ có 7 điểm cực trị

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x+2|)$ là:

A. 5 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 2

Lời giải

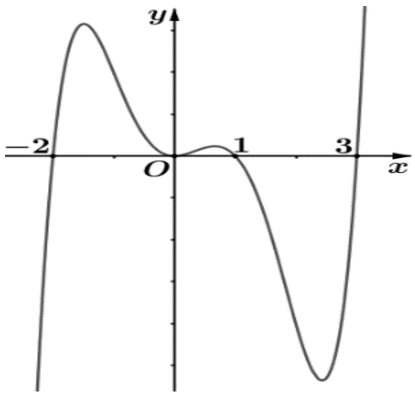
Chọn A.

♦ Đồ thị $y = f(x+2)$ là phép tịnh tiến của đồ thị $y = f(x)$ qua bên trái trục Oy 2 đơn vị nên số cực trị không thay đổi.

♦ Từ đồ thị ta thấy hàm số $y = f(x+2)$ có 0 điểm cực trị có hoành độ dương

$\Rightarrow$ hàm số $y = f(|x+2|)$ có 1 điểm cực trị

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Đồ thị hàm số $h(x) = f(|x|) + 2021$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

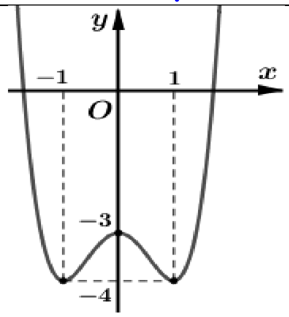
Chọn B.

Từ đồ thị ta thấy hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị có hoành độ dương

$\Rightarrow$ hàm số $f(|x|)$ có 5 điểm cực trị

$\Rightarrow$ hàm số $h(x) = f(|x|) + 2021$ có 5 điểm cực trị (vì phép tịnh tiến không làm thay đổi cực trị).

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Đồ thị hàm số $g(x)=f(|x-2|)+1$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B.

Đồ thị hàm số $g(x)=f(|x-2|)+1$ được suy ra từ đồ thị hàm số $f(x)$ như sau:

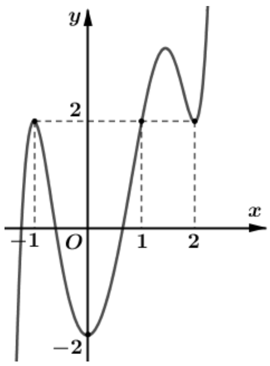
Bước 1: Lấy đối xứng qua Oy nhưng vì đồ thị đã đối xứng sẵn nên bước này bỏ qua.

Bước 2: Tịnh tiến đồ thị ở Bước 1 sang phải 2 đơn vị.

Bước 3: Tịnh tiến đồ thị ở Bước 2 lên trên 1 đơn vị.

Vì phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị nên ta không quan tâm đến Bước 2 và Bước 3. Từ nhận xét Bước 1 ta thấy số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x)$ bằng số điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x)$ là 3 điểm cực trị.

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Đồ thị hàm số $g(x)=|2f(x)-3|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 4. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

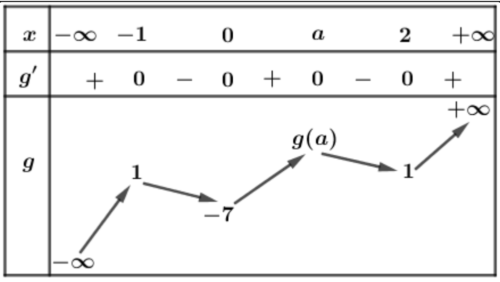
Lời giải

Chọn C.

Xét $g(x)=2f(x)-3 \longrightarrow g'(x)=2f'(x)$;

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=0 \xrightarrow{\text{theo do thi } f(x)} \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=a\ (1<a<2) \\ x=2 \end{array}\right.. \text{ Ta tính được } \begin{cases} g(-1)=1 \\ g(0)=-7 \\ g(a)>1 \\ g(2)=1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$



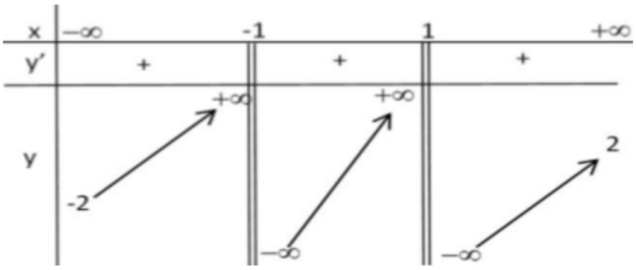
Dựa vào bảng biến thiên suy ra

+ Đồ thị hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực trị.

+ Đồ thị hàm số $g(x)$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt.

Suy ra đồ thị hàm số $h(x)=|2f(x)-3|$ có 7 điểm cực trị.

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và liên tục trên từng khoảng xác định, có bảng biến thiên như hình vẽ.



Đồ thị hàm số $y=|f(x)-1|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 2

Lời giải

Chọn B.

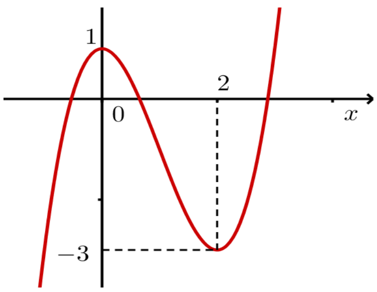
♦ Đồ thị $y=f(x)-1$ là phép tịnh tiến của đồ thị $y=f(x)$ qua bên phải trục Oy 1 đơn vị nên số cực trị không thay đổi.

♦ Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y=f(x)-1$ không có điểm cực trị và cắt trục Ox 3 điểm

$\Rightarrow$ hàm số $y=|f(x)-1|$ có 3 điểm cực trị

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 24. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Đặt $g(x)=f(x+1)-2$

A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

B. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

C. Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x=1$.

D. Đồ thị hàm số $g(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Lời giải

A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$. **SAI**

B. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$. **ĐÚNG**

C. Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x=1$. **SAI**

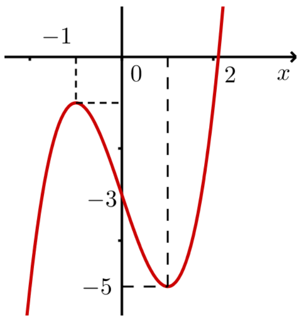
D. Đồ thị hàm số $g(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt. **SAI**

Cách 1: Thực hiện các phép biến đổi đồ thị:

Thực hiện các phép biến đổi đồ thị lần lượt là : tịnh tiến đồ thị $f(x)$ theo vec tơ $-\vec{i}$ sau đó tịnh tiến đồ thị theo vec tơ $\vec{m}=-2\vec{j}$ ta được đồ thị hàm số $g(x)$ như hình vẽ. Do đó hàm số nghịch biến trên $(-1;1)$.

Cách khác: Ta có $g'(x)=f'(x+1)$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Từ đó lập bảng biến thiên của hàm số $g(x)$.



PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ có **đúng** ba điểm cực trị là $-2;-1;0$. Hỏi hàm số $y=f(x^2-2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

Đáp án: hàm số đã cho có ba cực trị.

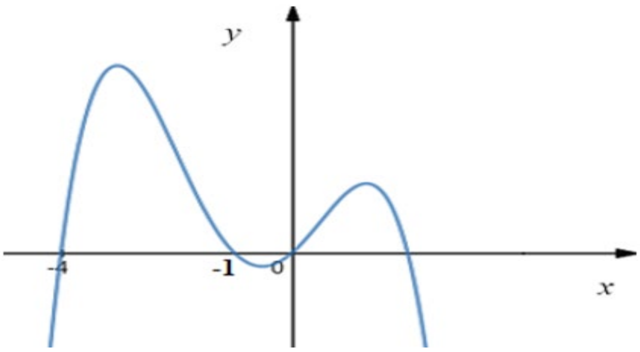
Từ giả thiết suy ra $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-1. \\ x=0 \end{array}\right.$

Đặt $g(x)=f(u), u=x^2-2x$ thì $g'(x)=2(x-1).f'(u)$ nên

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ f'(u)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x=-2\,(\text{VN}) \\ x^2-2x=-1(1) \\ x^2-2x=0(2) \end{array}\right.$$

Phương trình (1) có nghiệm kép là $x=1$; phương trình (2) có hai nghiệm đơn là $x=0; x=2$ nên phương trình $g'(x)=0$ có hai nghiệm đơn là $x=0; x=2$ và một nghiệm bội ba là $x=1$ nên hàm số đã cho có ba cực trị.

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và đồ thị có ba điểm cực trị như hình dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x^3-3x+2)$ là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: hàm số đã cho có 7 cực trị.

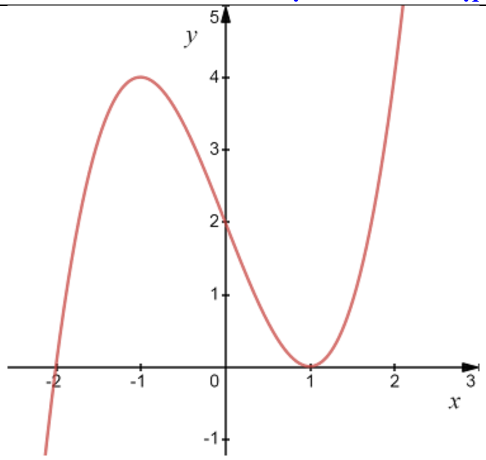
Cách 1: Tự luận

Ta có:

$$g'(x)=(3x^2-3).f'(x^3-3x+2)$$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2-3=0 \\ f'(x^3-3x+2)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \\ x^3-3x+2=a\ (1) \\ x^3-3x+2=b\ (2) \\ x^3-3x+2=c\ (3) \end{array}\right.$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=x^3-3x+2$, suy ra:



Phương trình (1) có 1 nghiệm khác ±1, vì $-4 < a < -1$

Phương trình (2) có 1 nghiệm khác ±1, vì $-1 < b < 0$

Phương trình (3) có 3 nghiệm phân biệt khác ±1, vì $0 < c < 4$

Như vậy phương trình $g'(x) = 0$ có 7 nghiệm phân biệt, tức là hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x + 2)$ có 7 điểm cực trị. Chọn B

Cách 2: Phương pháp ghép trục

Ta có hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x + 2)$

Đặt $t = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow t' = 3x^2 - 3; \Leftrightarrow t' = 0 \Leftrightarrow x = \pm1$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
t'		0	0	
t	$-\infty$	4	0	$+\infty$

Khi đó hàm số trở thành $g(t) = f(t)$.

Từ đồ thị hàm số $g(x) = f(x)$ ta có các điểm cực trị $a \in (-\infty; -1), b \in (-1; 0), c \in (0; +\infty)$.

Khi đó ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$				-1		1		$+\infty$
t	$-\infty$	a	b	c	4	c	0	c	$+\infty$
$f(t)$	$-\infty$	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$	$f(4)$	$f(c)$	$f(0)$	$f(c)$	$-\infty$

Vậy có tất cả 7 điểm cực trị.

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau ?

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $g(x)=f(x^2+1)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

Lời giải

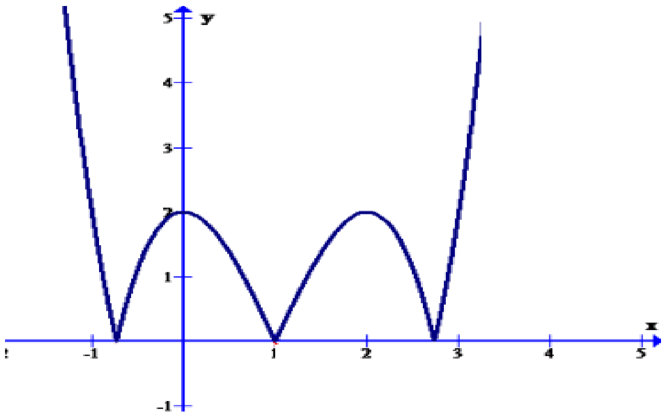
Đáp án: hàm số $g(x)=f(x^2+1)$ có 1 cực trị.

Ta có $g'(x)=2x.f'(x^2+1)$;

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2+1) \end{array}\right. \xleftrightarrow{\text{theo BBT}} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+1=-2 \\ x^2+1=1 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=0\ (\text{nghiem don}) \\ x=0\ (\text{nghiem kep}) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=0(\text{nghiem boi } 3).$$

Vậy $g'(x)=0$ có duy nhất nghiệm bội lẻ $x=0$ nên hàm số $g(x)$ có 1 điểm cực trị.

Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f(x-1)-\frac{1}{2}\right|$ là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: hàm số $y=\left|f(x-1)-\frac{1}{2}\right|$ có 11 cực trị.

♦ Đồ thị $y=f(x-1)-\frac{1}{2}$ là phép tịnh tiến của đồ thị $y=f(x)$ qua bên phải trục Oy 1 đơn vị và xuống dưới trục Ox $\frac{1}{2}$ đơn vị nên số cực trị không thay đổi.

♦ Từ đồ thị ta thấy hàm số $y=f(x-1)-\frac{1}{2}$ có 3 điểm cực trị có tung độ âm

$\Rightarrow$ hàm số $y=\left|f\left(x-1\right)-\frac{1}{2}\right|$ có 11điểm cực trị

Câu 29. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và liên tục trên từng khoảng xác định, có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)-2022\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

Lời giải

Đáp án: hàm số $y=\left|f\left(x\right)-2022\right|$ có 3 cực trị.

♦ Đồ thị $y=f\left(x\right)-2022$ là phép tịnh tiến của đồ thị $y=f\left(x\right)$ qua bên phải trục Oy 2022 đơn vị nên số cực trị không thay đổi.

♦ Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y=f\left(x\right)-2022$ có 1 điểm cực trị có tung độ âm

$\Rightarrow$ hàm số $y=\left|f\left(x\right)-2022\right|$ có 3 điểm cực trị

CHỦ ĐỀ 5
XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM HỢP KHI BIẾT HÀM $y = f'(x)$

DẠNG 1
XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM HỢP DẠNG $g(x) = f(u(x))$

VẤN ĐỀ 1
HÀM HỢP KHÔNG CHỨA THAM SỐ

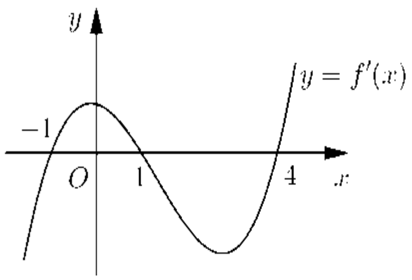
Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-9)(x-4)^2$. Khi đó hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-2;2)$ **B.** $(3;+\infty)$ **C.** $(-\infty;-3)$ **D.** $(-\infty;-3) \cup (0;3)$

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-2028)(x-2023)^2$. Khi đó hàm số $y = g(x) = f(x^2 + 2019)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(-2;2)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-3;0)$. **D.** $(2;+\infty)$.

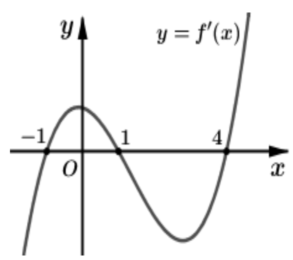
Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên.



Hàm số $y = g(x) = f(2-x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(1;3)$ **B.** $(2;+\infty)$ **C.** $(-2;1)$ **D.** $(-\infty;-2)$

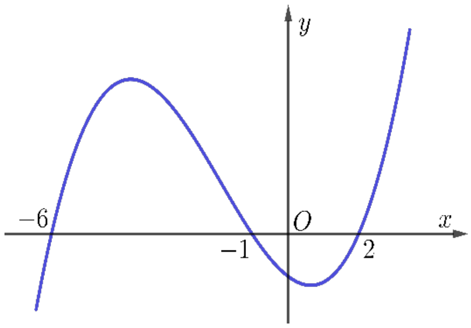
Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = f(x^2)$ có bao nhiêu khoảng nghịch biến.

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

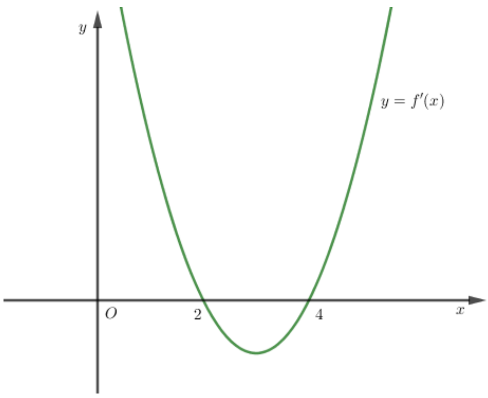
Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $y=f(3-x^2)$ đồng biến trên khoảng

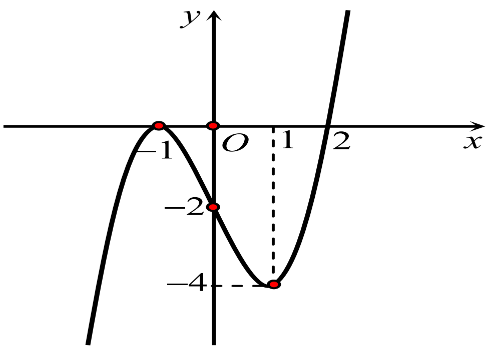
A. $(0;1)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(-2;-1)$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(1+x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(\sqrt{3};+\infty)$. **B.** $(-\sqrt{3};-1)$. **C.** $(1;\sqrt{3})$. **D.** $(0;1)$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, đồ thị hình bên là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$.



Xét hàm số $g(x)=f(x^2-2)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

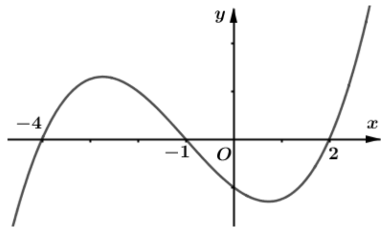
A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

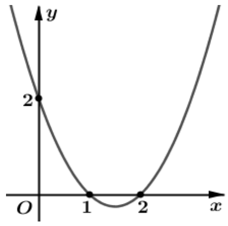
Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 - 5)$ có bao nhiêu khoảng nghịch biến?

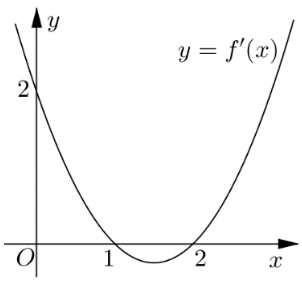
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(x - x^2)$ nghịch biến trên khoảng?



A. $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

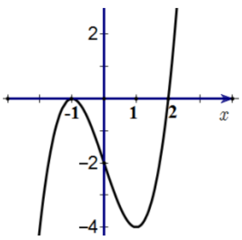
Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên.



Hàm số $y = f(1 + 2x - x^2)$ đồng biến trên khoảng dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;2)$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên R và đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x - 1)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-1;0)$.

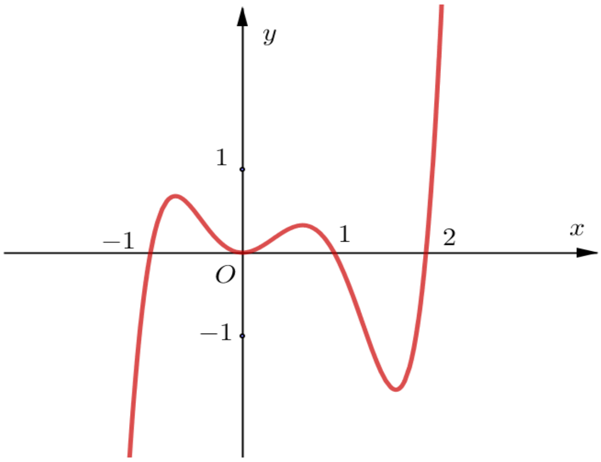
Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các khoảng đồng biến của hàm số $y = f\left(\sqrt{x^2+1}\right)$.

A. $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right),\left(0;\sqrt{3}\right)$.

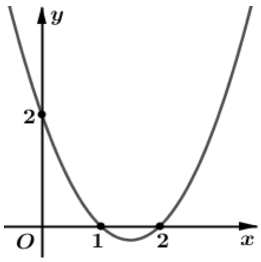
B. $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right),\left(\sqrt{3};+\infty\right)$.

C. $\left(-\sqrt{3};0\right),\left(\sqrt{3};+\infty\right)$.

D. $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right),\left(0;+\infty\right)$.



Câu 13. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình bên dưới



Hàm số $g\left(x\right)=f\left(\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

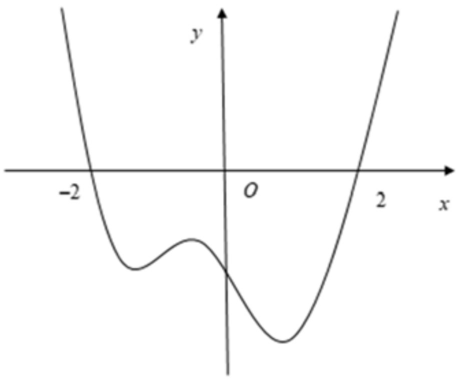
A. $\left(-\infty;-1\right)$.

B. $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$.

C. $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

D. $\left(-1;+\infty\right)$.

Câu 14. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f\left(-2\right)<0$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ



Khẳng định nào sau đây đúng?

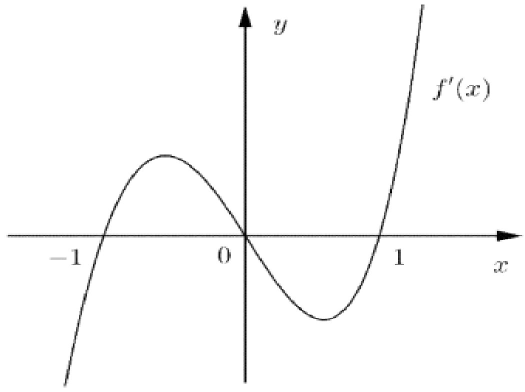
A. Hàm số $y=\left|f\left(1-x^2\right)\right|$ nghịch biến trên $\left(-\infty;-2\right)$.

B. Hàm số $y=\left|f\left(1-x^2\right)\right|$ đồng biến trên $\left(-\infty;-2\right)$.

C. Hàm số $y=\left|f\left(1-x^2\right)\right|$ nghịch biến trên $\left(-1;0\right)$.

D. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\left|f\left(-2\right)\right|$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $f'(x)=x^3+ax^2+bx+c\,(a,b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $g(x)=f(f'(x))$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ sau

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Hỏi hàm số $y=g(x)=f(x^2+2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(-\infty;-2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có bảng xét dấu như sau

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x)=f(2\cos x+1)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$. **B.** $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right)$. **C.** $\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

VẤN ĐỀ 2

HÀM HỢP CHỨA THAM SỐ

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(x^2+mx+9)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $g(x)=f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(3x^4+mx^3+1)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x)=f(x^2)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+2)(x^2+mx+5)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Số giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $g(x)=f(x^2+x-2)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ là

A. 7. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x)=(x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;20]$ để hàm số $y=f(x^2+3x-m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 18 **B.** 17. **C.** 16. **D.** 20.

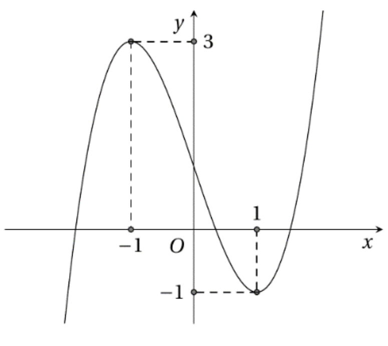
Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x)=(x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;20]$ để hàm số $y=f(x^2+3x-m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 20.

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-1)(x-4)$; $\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m<2021$ để hàm số $g(x)=f\left(\dfrac{2-x}{1+x}-m\right)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

A. 2022. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 2021

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như bên.



Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f(x^2+x+m)$ nghịch biến trên $(0;1)$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g\left(x\right)=f\left(x+m\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(0\,;2\right)$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 26. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là một hàm đa thức và có bảng xét dấu của $f'\left(x\right)$ như hình bên dưới:

x	$-\infty$		1		3		$-\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f(\sqrt{x-2}+m)$ (1) nghịch biến trên khoảng $\left(11;25\right)$.

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

DẠNG 2

XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM HỢP DẠNG $g\left(x\right)=f\left(x\right)+h\left(x\right)$

VẤN ĐỀ 1
HÀM HỢP KHÔNG CHỨA THAM SỐ

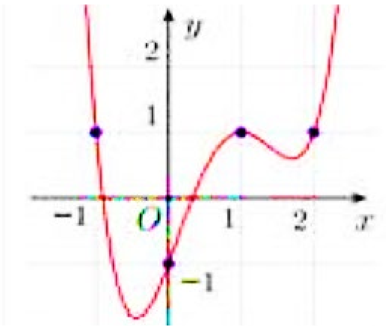
Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) = x^2(x-1)(4-x)$. Hàm số $y = g(x) = f(x) + f(1-x)$ đồng biến trên khoảng

A. $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. **D.** $(1;2)$.

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = x^2(x-1)^2(x-3)$. Hàm số $g(x) = f(x) + \frac{1}{3}x^3 - 5$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(0;\,2)$. **B.** $\left(2;\,\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2};\,2\right)$. **D.** $\left(0;\,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.

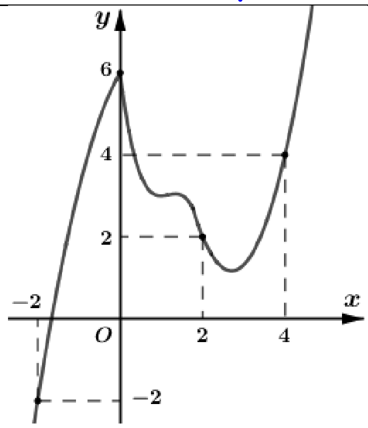


Đặt $g(x) = f(x) - x$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $g(-1) < g(1) < g(2)$. **B.** $g(2) < g(1) < g(-1)$.

C. $g(2) < g(-1) < g(1)$. **D.** $g(1) < g(-1) < g(2)$

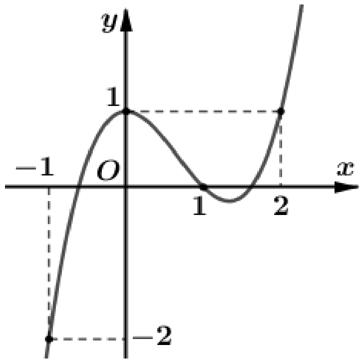
Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới.



Hàm số $g\left(x\right)=2f\left(x\right)-x^2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $\left(-\infty;-2\right)$. **B.** $\left(-2;2\right)$. **C.** $\left(2;4\right)$. **D.** $\left(2;+\infty\right)$.

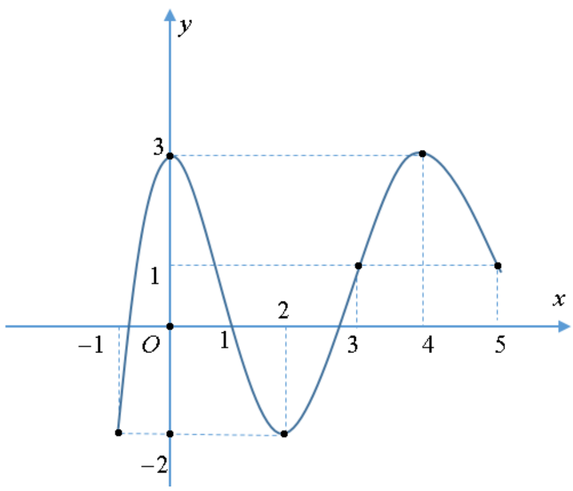
Câu 31. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right)-\dfrac{x^3}{3}+x^2-x+2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

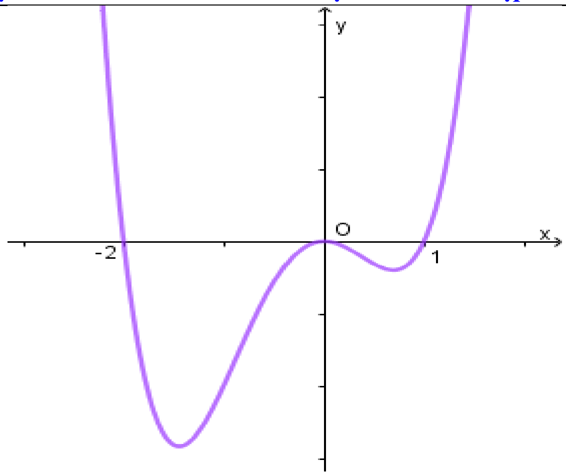
A. $\left(-1;0\right)$. **B.** $\left(0;2\right)$. **C.** $\left(1;2\right)$. **D.** $\left(0;1\right)$.

Câu 32. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\left[-1;5\right]$ có đồ thị của hàm $y=f'\left(x\right)$ được cho như hình bên dưới. Hàm số $g\left(x\right)=-2f\left(x\right)+x^2-4x+4$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?



A. $\left(-1;0\right)$. **B.** $\left(0;2\right)$. **C.** $\left(2;3\right)$. **D.** $\left(-2;-1\right)$.

Câu 33. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Đồ thị $y=f'\left(x\right)$ như hình bên dưới.



Hỏi hàm số $g(x)=f(x+1)+f(2-x)-x^2+6x-3$ đồng biến trên khoảng nào cho dưới đây

A. $(-\infty;0)$ **B.** $(0;3)$ **C.** $(1;2)$ **D.** $(3;+\infty)$

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên của $y=f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		x		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-3	↗	3	↗	$+\infty$

Hàm số $g(x)=f(x)-3x$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(2;2019)$ **B.** $(-2019;-2)$ **C.** $(1;2)$ **D.** $(-1;1)$

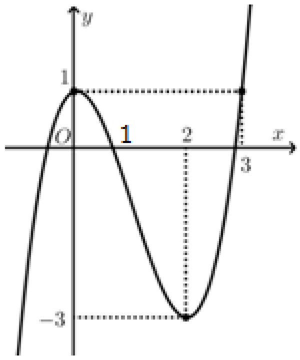
VẤN ĐỀ 2

HÀM HỢP CHỨA THAM SỐ

Câu 35. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right) = 3x^2 + 6x + 1, \forall x \in R$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $\left(-50;50\right)$ của tham số m để hàm số $g\left(x\right) = f\left(x\right) - \left(m+1\right)x - 2$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;2\right)$?

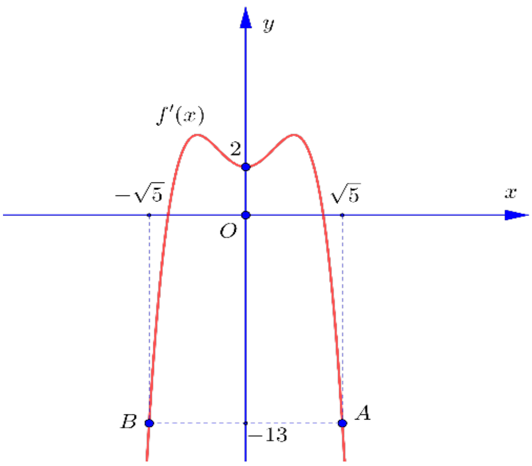
A. 26. **B.** 25. **C.** 51. **D.** 50.

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Các giá trị của m để hàm số $y = f(x) + (m-1)x$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$ là



A. $m > 4$. **B.** $m \leq 4$. **C.** $m \geq 4$. **D.** $0 > m > 4$.

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ:



Xét hàm số $g(x) = 2f(x) + 2x^3 - 4x - 3m - 6\sqrt{5}$ ($m \in \mathbb{R}$). Để $g(x) \leq 0$ với $\forall x \in \left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$ thì điều kiện của m là

A. $m \geq \dfrac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$. **B.** $m \leq \dfrac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$.

C. $m \leq \dfrac{2}{3}f(0) - 2\sqrt{5}$. **D.** $m \geq \dfrac{2}{3}f\left(-\sqrt{5}\right) - 4\sqrt{5}$.

DẠNG 3

XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM HỢP $g(x)=f(u(x))+h(x)$

VẤN ĐỀ 1
HÀM HỢP KHÔNG CHỨA THAM SỐ

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x)=(1-x)(x+2)g(x)+2021$ với $g(x)<0;\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(1-x)+2021x+2022$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn: $f'(x)=(1-x^2)(x-5)$

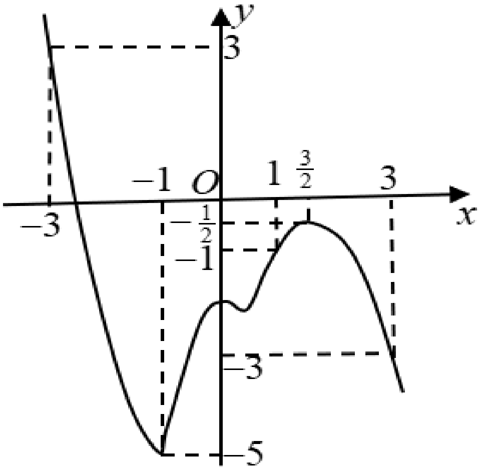
Hàm số $y=3f(x+3)-x^3+12x$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(1;5)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Câu 40. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x)=(1-x)(x+2)g(x)+1$ trong đó $g(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(1-x)+x+2$ nghịch biến trên các khoảng nào?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

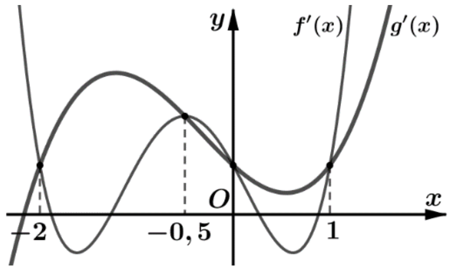
Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y=f(1-x)+\dfrac{x^2}{2}-x$ nghịch biến trên khoảng

A. $\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(-3;1)$. **D.** $(1;3)$.

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị các đạo hàm (đồ thị $y = g'(x)$ là đường đậm hơn) như hình vẽ



Hàm số $h(x) = f(x-1) - g(x-1)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{1}{2};1\right)$. **B.** $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 43. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.

x	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	3 ↘	1 ↘	-1 ↗	2 ↗	4

Hàm số $g(x) = f\left(1 - \frac{x}{2}\right) + x$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(-4;-2)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;4)$.

VẤN ĐỀ 2

HÀM HỢP CHỨA THAM SỐ

Câu 44. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x+1\right)\left(x-2\right)$. Tìm m để hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(x+2\right)-mx$ đồng biến trên khoảng $\left(-1;2\right)$.

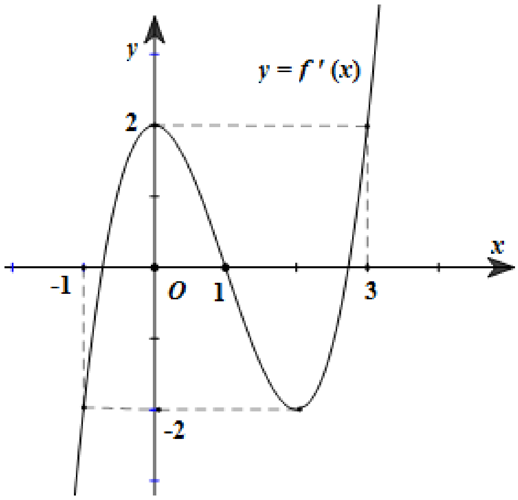
A. $m\le\frac{-9}{4}$. **B.** $-\frac{9}{4}\le m\le 10$. **C.** $m\ge\frac{-9}{4}$. **D.** $m\ge 10$.

Câu 45. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên R và có $f'\left(x\right)=x.\left(x+1\right)^3.\left(x-1\right)^4.\left(x-4\right)^5$.

Giá trị của tham số m để hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(1-x\right)+\frac{1}{x^2+mx+m^2+1}$ chắc chắn luôn đồng biến trên $\left(-3;0\right)$.

A. $m\in\left(-2;-1\right)$. **B.** $m\in\left(-\infty;-2\right)$. **C.** $m\in\left[-1;0\right]$. **D.** $m\in\left[0;+\infty\right)$

Câu 46. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ.



Đặt $g\left(x\right)=f\left(x-m\right)-\frac{1}{2}\left(x-m-1\right)^2+2021$ với m là tham số thực. Gọi S là tập các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=g\left(x\right)$ đồng biến trên khoản $\left(5;6\right)$.

Tổng các phần tử của S bằng:

A. 4. **B.** 11. **C.** 14. **D.** 20.

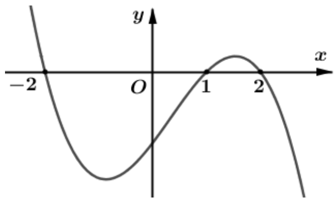
DẠNG 4

XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM HỢP $g(x)=\left[f\left(u(x)\right)\right]^k$

Câu 47. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm $f'(x)=(x+2)\left(x^2-9\right)\left(x^4-16\right)$ trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=g(x)=\left[f(2x-x^2)\right]^{2023}$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

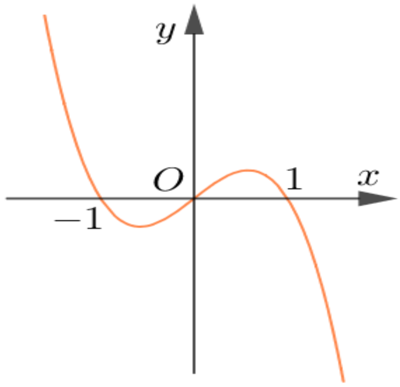
A. $\left(1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-1;3)$.

Câu 48. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thoả $f(2)=f(-2)=0$ và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ có dạng như hình bên. Hàm số $y=\left(f(x)\right)^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?



A. $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(1;2)$.

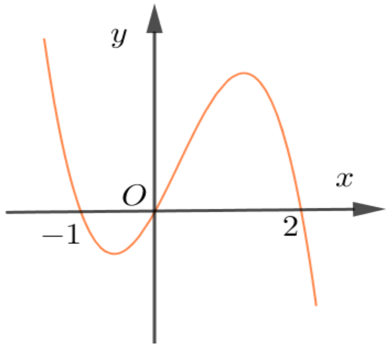
Câu 49. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên dưới.



Hàm số $g(x)=\left[f(2x-1)\right]^3$ nghịch biến trên các khoảng nào trong các khoảng sau

A. $(-1;0)$ **B.** $(0;1)$ **C.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ **D.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$

Câu 50. Cho hàm số $y=f(x)$. . Đồ thị $y=f'(x)$. như hình bên dưới và $f(1)=f(2)=0$



Hàm số $g(x)=\left[f\left(x^2-3\right)\right]^2$ đồng biến trên các khoảng nào trong các khoảng sau

A. $(1;2)$ **B.** $(0;1)$ **C.** $(-1;0)$ **D.** $(-2;-1)$

Câu 51. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ, đồ thị $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $-3;1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;20]$ để hàm số $y=\left(f\left(x^2+3x-m\right)\right)^3$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f'	$+\infty$	↘		↗	$+\infty$

A. 20. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 18.

DẠNG 5

XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM HỢP $y=g(x).f(x), y=\dfrac{g(x)}{f(x)}, y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Câu 52. Cho hàm số $y=f(x)$. Biết $f(0)=0$ và hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
y'	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Khi đó, hàm số $y=xf(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-2;2)$.

Câu 53. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(-1)=0$. Biết bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $g(x)=(x^2-x-2)f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $(-1;1)$.

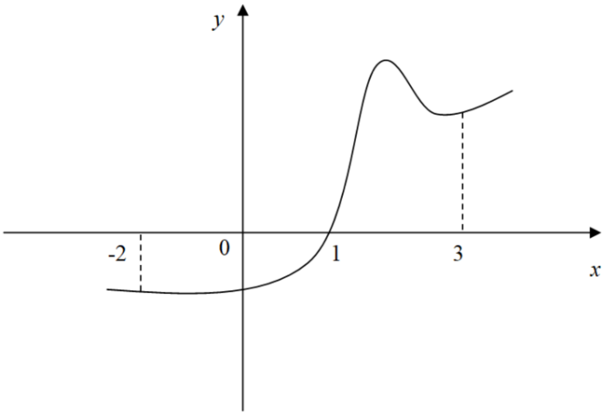
Câu 54. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$		-1		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	-	0	+	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Với $m<0$, hàm số $y=(x^2-2x+m).f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây

A. $(-1;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Câu 55. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có như sau:



Đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có giao điểm với trục hoành và $\underset{\mathbb{R}}{Max}\, f(x)=-1$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có duy nhất 1 giao điểm với trục hoành.Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số $g(x)=\dfrac{(x-1)^2\left(\left(-2m^2+1\right)x+m\right)}{f(x)}$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 5.

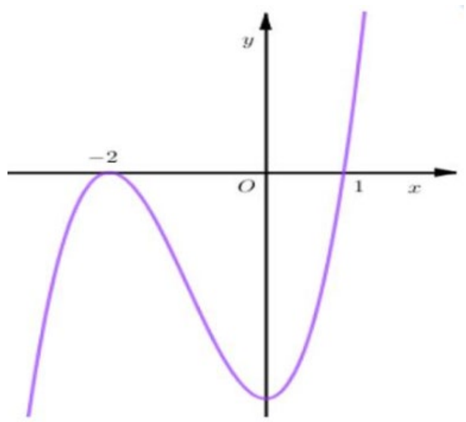
DẠNG 6

XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM $y=f(x)$ KHI BIẾT HÀM $y=f'(u(x))$

Câu 56. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên R và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x)=(1-x)(x+2)g(x)+2022$ với $g(x)<0,\forall x\in R$. Khi đó hàm số $y=f(1-x)+2022x+2023$ nghịch biến trên khoảng nào?

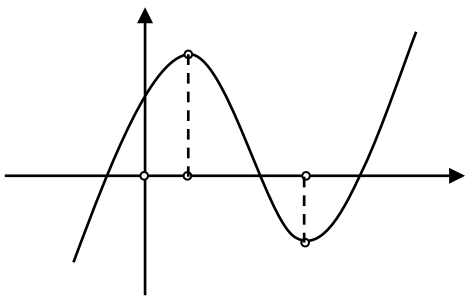
A. $(1;+\infty)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Câu 57. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(3x+5)$ như hình vẽ. Hàm số $y=f(x)$ nghịch trên khoảng nào?



A. $(-\infty;8)$. **B.** $\left(-\dfrac{7}{3};+\infty\right)$. **C.** $\left(\dfrac{4}{3};+\infty\right)$. **D.** $(-\infty;10)$.

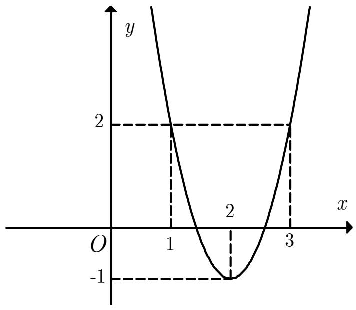
Câu 58. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $f(3x-2)$ nghịch biến trên khoảng $(\alpha;\beta)$. Khi đó giá trị lớn nhất của $\beta-\alpha$ là:



A. 9. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 1.

Câu 59. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x-2)+2$

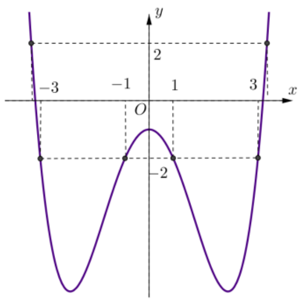
có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?

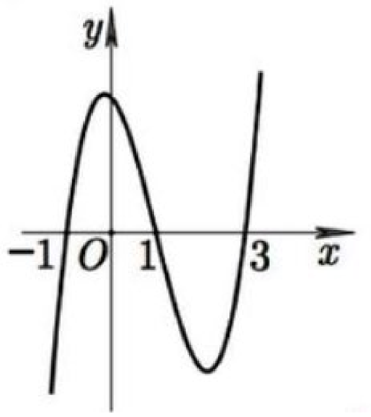
A. $(-\infty;2)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 60. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x+2)-2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?



A. $(-3;-1),(1;3)$. **B.** $(-1;1),(3;5)$. **C.** $(-\infty;-2),(0;2)$. **D.** $(-5;-3),(-1;1)$.

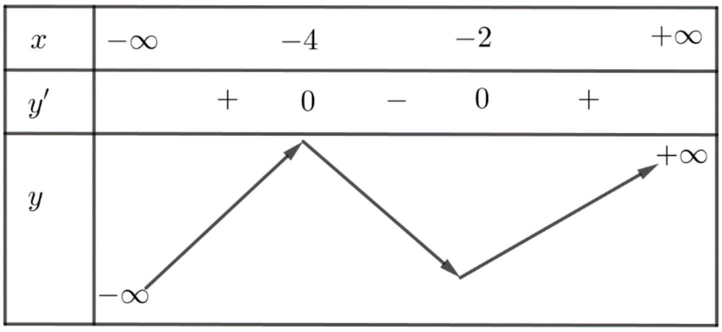
Câu 61. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'\left(2x+\frac{3}{2}\right)$ như hình vẽ bên.



Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right)$. **B.** $\left(-\frac{5}{4};\frac{1}{4}\right)$. **C.** $\left(\frac{3}{4};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$.

Câu 62. Cho hàm số $y=f(x+2)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ



Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến tên khoảng nào sau đây

A. $(0;2)$ **B.** $(2;5)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-4;-2)$.

CHỦ ĐỀ 5
XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM HỢP KHI BIẾT HÀM $y=f'(x)$

DẠNG 1
XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM HỢP DẠNG $g(x)=f(u(x))$

VẤN ĐỀ 1
HÀM HỢP KHÔNG CHỨA THAM SỐ

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-9)(x-4)^2$. Khi đó hàm số $g(x)=f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-2;2)$ **B.** $(3;+\infty)$ **C.** $(-\infty;-3)$ **D.** $(-\infty;-3)\cup(0;3)$

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=x^2(x-9)(x-4)^2 \Rightarrow f'(x^2)=2xx^4(x^2-9)(x^2-4)^2$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow 2x^5(x^2-9)(x^2-4)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 3 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$. Do $x=0$; $x=\pm 2$ không đổi dấu

x	$-\infty$		-3		-2		0		2		3		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
g		↘		↗		↗		↘		↘		↗	

Vậy hàm số $y=f(x^2)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-2028)(x-2023)^2$. Khi đó hàm số $y=g(x)=f(x^2+2019)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(-2;2)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-3;0)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $y=g(x)=f(x^2+2019) \Rightarrow y'=g'(x)=(x^2+2019)'f'(x^2+2019)=2x.f'(x^2+2019)$.

Mặt khác $f'(x)=x^2(x-2028)(x-2023)^2$. Nên suy ra:

$$y'=g'(x)=2x.f'(x^2+2019)=2x.(x^2+2019)^2(x^2+2019-2038)(x^2+2019-2023)^2$$
$$=2x.(x^2+2019)^2(x^2-9)(x^2-4)^2=2x.(x^2+2019)^2(x-3)(x+3)(x-2)^2(x+2)^2.$$

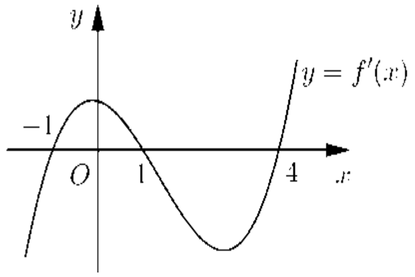
$$y' = 2x.\left(x^2+2019\right)^2(x-3)(x+3)(x-2)^2(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\ (nghiem\ don) \\ x=3\ (nghiem\ don) \\ x=-3\ (nghiem\ don) \\ x=2\ (nghiem\ boi\ 2) \\ x=-2\ (nghiem\ boi\ 2) \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-3		-2		0		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y		↘			↗				↘			↗	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y = g(x) = f\left(x^2+2019\right)$ đồng biến trên khoảng $(-3;0)$ và $(3;+\infty)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên.



Hàm số $y = g(x) = f(2-x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(1;3)$ **B.** $(2;+\infty)$ **C.** $(-2;1)$ **D.** $(-\infty;-2)$

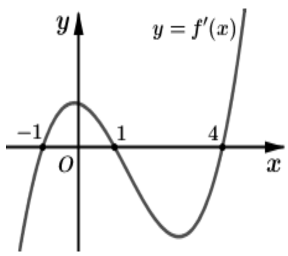
Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x) = (2-x)'.f'(2-x) = -f'(2-x)$

Hàm số đồng biến khi $g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(2-x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-x<-1 \\ 1<2-x<4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ -2<x<1 \end{array}\right.$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = f\left(x^2\right)$ có bao nhiêu khoảng nghịch biến.

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = \left[f\left(x^2\right)\right]' = 2x.f\left(x^2\right)$

Hàm số nghịch biến $\Leftrightarrow y' < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x > 0\\ f'\left(x^2\right) < 0\end{cases}\\ \begin{cases}x < 0\\ f'\left(x^2\right) > 0\end{cases}\end{array}\right. \xleftrightarrow{\text{theo dt } f'(x)} \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x > 0\\ x^2 < -1 \vee 1 < x^2 < 4\end{cases}\\ \begin{cases}x < 0\\ -1 < x^2 < 1 \vee x^2 > 4\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1 < x < 2\\ x < -2\\ -1 < x < 0\end{array}\right.$

Vậy hàm số $y = f\left(x^2\right)$ có 3 khoảng nghịch biến.

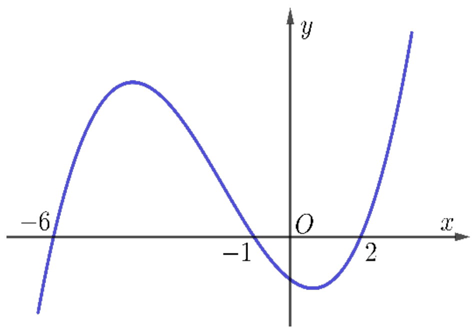
Cách 2. Ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 0\\ f'\left(x^2\right) = 0\end{array}\right. \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} \left[\begin{array}{l}x = 0\\ x^2 = -1\\ x^2 = 1\\ x^2 = 4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 0\\ x = \pm 1\\ x = \pm 2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta chọn B

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $y = f\left(3 - x^2\right)$ đồng biến trên khoảng

A. $(0;1)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(-2;-1)$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Ta có: $\left[f\left(3 - x^2\right)\right]' = 0 \Leftrightarrow f'\left(3 - x^2\right).(-2x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 0\\ f'\left(3 - x^2\right) = 0\end{array}\right.$.

Từ đồ thị hàm số suy ra $f'\left(3 - x^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3 - x^2 = -6\\ 3 - x^2 = -1\\ 3 - x^2 = 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pm 3\\ x = \pm 2\\ x = \pm 1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		1		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Lập bảng xét dấu của hàm số $y=f\left(3-x^2\right)$ ta được hàm số đồng biến trên $(-1;0)$.

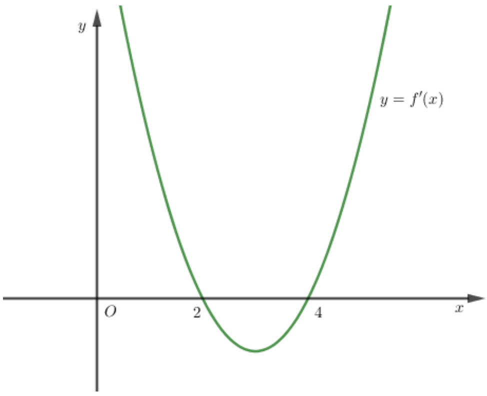
Cách 2:

Ta có: $y'=\left[f\left(3-x^2\right)\right]'=(-2x).f'\left(3-x^2\right)$

Hàm số $y=f\left(3-x^2\right)$ đồng biến khi và chỉ khi $(-2x).f'\left(3-x^2\right)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ f'\left(3-x^2\right)<0\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ f'\left(3-x^2\right)>0\end{cases}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}3-x^2<-6\\ -1<3-x^2<2\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ \left[\begin{array}{l}-6<3-x^2<-1\\ 3-x^2>2\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}x^2<9\\ 1<x^2<4\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ \left[\begin{array}{l}4<x^2<9\\ x^2<1\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\in\varnothing\\ -1<x<0\end{array}\right. \Leftrightarrow -1<x<0.$$

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y=f\left(1+x^2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\sqrt{3};-1\right)$. **C.** $\left(1;\sqrt{3}\right)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=\left[f\left(1+x^2\right)\right]'=2x.f'\left(1+x^2\right)\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ 1+x^2=2\\ 1+x^2=4\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm 1\\ x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Mặt khác ta có

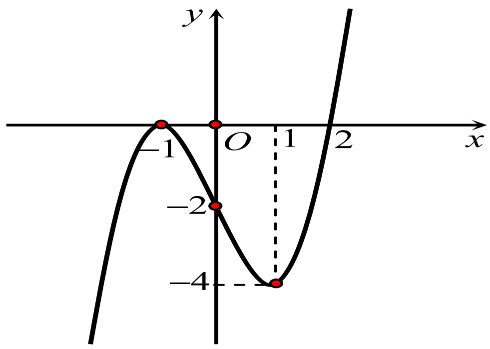
$f'\left(1+x^2\right)<0 \Leftrightarrow 2<1+x^2<4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{3}<x<-1 \\ 1<x<\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(1+x^2)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $y=f\left(1+x^2\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(1;\sqrt{3}\right)$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, đồ thị hình bên là đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$.



Xét hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2-2\right)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. Hàm số $g\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-2\right)$.

B. Hàm số $g\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(2;+\infty\right)$.

C. Hàm số $g\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-1;0\right)$.

D. Hàm số $g\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;2\right)$.

Lời giải

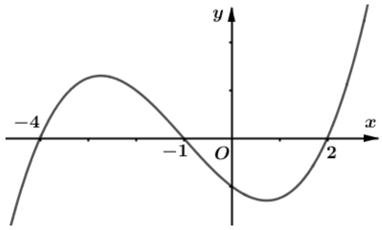
Chọn C

Ta có: $g'(x)=2x.f'\left(x^2-2\right)$; $g'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'\left(x^2-2\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-2=-1 \\ x^2-2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$

Từ đồ thị của $y=f'(x)$ suy ra $f'(x^2-2)>0 \Leftrightarrow x^2-2>2 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-2\right)\cup\left(2;+\infty\right)$ và ngược lại.

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'\left(2-x^2\right)$		$+$	0	$-$	0	$-$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$g\left(x\right)$	′	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Câu 8. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình bên dưới



Hỏi hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2-5\right)$ có bao nhiêu khoảng nghịch biến?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'\left(x\right)=2xf'\left(x^2-5\right)$

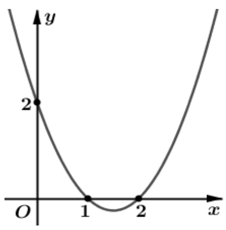
$$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'\left(x^2-5\right)=0\end{array}\right.\xleftrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)}\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2-5=-4\\ x^2-5=-1\\ x^2-5=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm1\\ x=\pm2\\ x=\pm\sqrt{7}\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{7}$		-2		-1		0		1		2		$\sqrt{7}$		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		↘		↗		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta chọn C

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y=f(x-x^2)$ nghịch biến trên khoảng?



A. $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=(1-2x)f'(x-x^2)$.

Hàm số $g(x)$ nghịch biến $\Leftrightarrow g'(x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}1-2x<0\\ f'(x-x^2)>0\end{cases}\\ \begin{cases}1-2x>0\\ f'(x-x^2)<0\end{cases}\end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $\begin{cases}1-2x<0\\ f'(x-x^2)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>\dfrac{1}{2}\\ x-x^2<1 \vee x-x^2>2\end{cases} \Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}$.

Trường hợp 2: $\begin{cases}1-2x>0\\ f'(x-x^2)<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<\dfrac{1}{2}\\ 1<x-x^2<2: \text{vo nghiem}\end{cases}$.

Kết hợp hai trường hợp ta được $x>\dfrac{1}{2}$. Chọn D

Cách 2. Ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-2x=0\\ f'(x-x^2)=0\end{array}\right. \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ x-x^2=1: \text{vo nghiem}\\ x-x^2=2: \text{vo nghiem}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

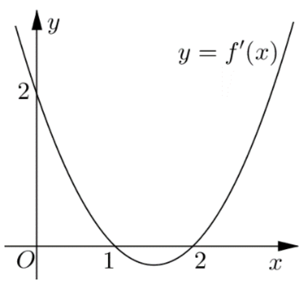
x	$-\infty$		$0,5$		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$		$\searrow$	

Cách 3. Vì $x-x^2=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}\le\dfrac{1}{4}\xrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} f'(x-x^2)>0$.

Suy ra dấu của $g'(x)$ phụ thuộc vào dấu của $1-2x$.

Yêu cầu bài toán cần $g'(x)<0 \longrightarrow 1-2x<0 \Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên.



Hàm số $y=f(1+2x-x^2)$ đồng biến trên khoảng dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Chọn D

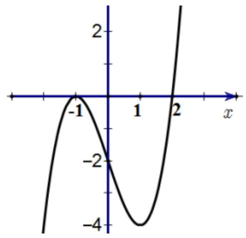
Ta có: $y'=(2-2x)f'(1+2x-x^2)$. Nhận xét: $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ 1+2x-x^2=1 \\ 1+2x-x^2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	0	-	
y		↗		↘		↗		↘	

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên R và đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x^2-2x-1)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $g'(x)=(2x-2).f'(x^2-2x-1)$.

Lại có $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x-1=-1 \\ x^2-2x-1=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=2; x=3 \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		2		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	+	0	+	0	$-$	0	$-$	0	+	
$g(x)$		↘		↗		↗		↘		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên $(-1;0)$.

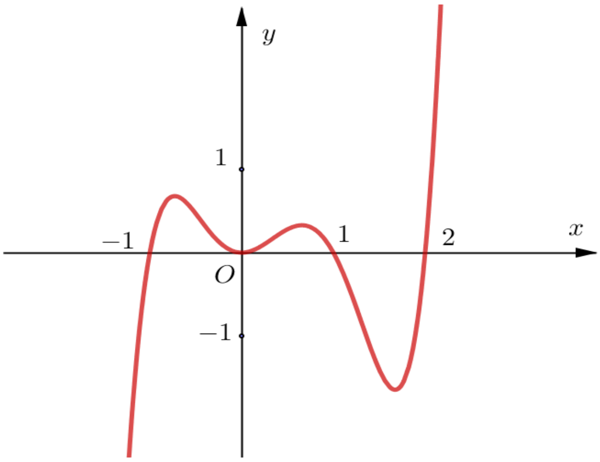
Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các khoảng đồng biến của hàm số $y=f\left(\sqrt{x^2+1}\right)$.

A. $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right),\left(0;\sqrt{3}\right)$.

B. $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right),\left(\sqrt{3};+\infty\right)$.

C. $\left(-\sqrt{3};0\right),\left(\sqrt{3};+\infty\right)$.

D. $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right),\left(0;+\infty\right)$.



Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y=f\left(\sqrt{x^2+1}\right)\Rightarrow y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}f'\left(\sqrt{x^2+1}\right)$.

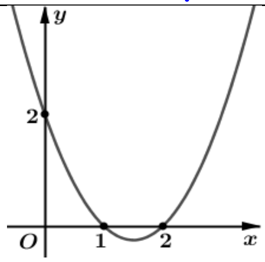
$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'\left(\sqrt{x^2+1}\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \sqrt{x^2+1}=-1\\ \sqrt{x^2+1}=0\\ \sqrt{x^2+1}=1\\ \sqrt{x^2+1}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \sqrt{x^2+1}=1\\ \sqrt{x^2+1}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2+1=1\\ x^2+1=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-\sqrt{3}\\ x=\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $y=f\left(\sqrt{x^2+1}\right)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\sqrt{3};0\right),\left(\sqrt{3};+\infty\right)$.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=(x+1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\right)f'\left(\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2+2x+2}\right)$.

$+\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}<0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. (1)

$+\ 0<u=\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2+2x+2}=\dfrac{1}{\sqrt{(x+1)^2+2}+\sqrt{(x+1)^2+1}}\le\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}<1\xrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)}f'(u)>0,\forall x\in\mathbb{R}.$ (2)

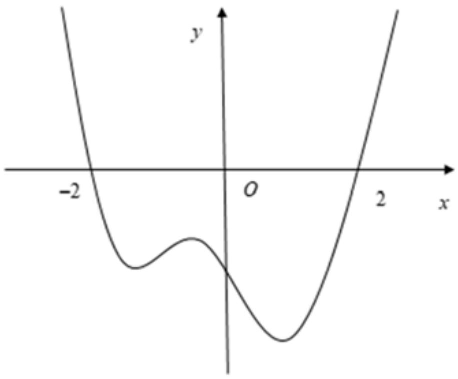
Từ (1) và (2), suy ra dấu của $g'(x)$ phụ thuộc vào dấu của nhị thức $x+1$ (ngược dấu)

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$		$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta chọn A

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(-2)<0$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y=\left|f\left(1-x^2\right)\right|$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số $y=\left|f\left(1-x^2\right)\right|$ đồng biến trên $(-\infty;-2)$.

C. Hàm số $y=\left|f\left(1-x^2\right)\right|$ nghịch biến trên $(-1;0)$.

D. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\left|f(-2)\right|$.

Lời giải

Chọn A

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-2)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có $f(-2)<0;1-x^2\le 1\Rightarrow f\left(1-x^2\right)<0.\forall x\in\mathbb{R}$

$t=1-x^2\Rightarrow f'(t)<0\Rightarrow t\in(-2;1)\Leftrightarrow x\in\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$

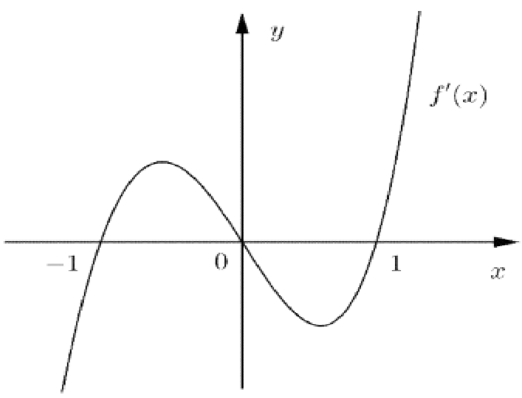
$0<f'(t)\Rightarrow t\in(-\infty;-2)\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)$

$$g(x)=\left|f\left(1-x^2\right)\right|\Rightarrow g'(x)=\sqrt{f^2\left(1-x^2\right)}=\frac{-4xf(t)f'(t)}{\sqrt{f^2(t)}}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$g\left(-\sqrt{3}\right)$	$\nearrow$	$g(0)$	$\searrow$	$g\left(\sqrt{3}\right)$	$\nearrow$	

Vậy hàm số $y=\left|f\left(1-x^2\right)\right|$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $f'(x)=x^3+ax^2+bx+c\,(a,b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $g(x)=f\left(f'(x)\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Vì các điểm $(-1;0),(0;0),(1;0)$ thuộc đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases}-1+a-b+c=0\\ c=0\\ 1+a+b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\ b=-1\Rightarrow f'(x)=x^3-x\Rightarrow f''(x)=3x^2-1\\ c=0\end{cases}$$

Ta có: $g(x)=f(f'(x))\Rightarrow g'(x)=f'(f'(x)).f''(x)$

Xét $g'(x)=0\Leftrightarrow g'(x)=f'(f'(x)).f''(x)=0\Leftrightarrow f'(x^3-x)(3x^2-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-x=0\\ x^3-x=1\\ x^3-x=-1\\ 3x^2-1=0\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\ x=0\\ x=1,325\\ x=-1,325\\ x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-1,325$		-1		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1		$1,325$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ sau

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Hỏi hàm số $y=g(x)=f(x^2+2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(-\infty;-2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=g'(x)=\left[f(x^2+2x)\right]'=(x^2+2x)'.f'(x^2+2x)=(2x+2).f'(x^2+2x)$.

Ta có $x^2+2x=(x+1)^2-1\geq -1$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ dựa vào bảng xét dấu trên ta có $f'\left(x^2+2x\right)\leq 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ dấu "$=$" chỉ xảy ra tại $x=-1$.

Từ đó $y'\geq 0 \Leftrightarrow (2x+2).f'\left(x^2+2x\right)\geq 0 \Leftrightarrow 2x+2\leq 0 \Leftrightarrow x\leq -1$ nên hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$.

Mặt khác $(-\infty;-2)\subset(-\infty;-1)$ nên phương án **C** thỏa mãn bài toán.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có bảng xét dấu như sau

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x)=f(2\cos x+1)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(0;\dfrac{\pi}{6}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{3}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$.

Lời giải

Chọn C.

Nhận thấy các tập hợp trong các đáp án đều là tập con của tập $(0;\pi)$ nên ở bài này ta xét trên khoảng $(0;\pi)$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến $\Leftrightarrow g'(x)\geq 0$ và $g'(x)=0$ tại hữu hạn điểm

$\Leftrightarrow -2\sin x.f'(2\cos x+1)\geq 0 \Leftrightarrow f'(2\cos x+1)\leq 0$ (do $\sin x>0,\forall x\in(0;\pi)$)

$\Leftrightarrow 1\leq 2\cos x+1\leq 2 \Leftrightarrow 0\leq \cos x\leq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{3}\leq x\leq \dfrac{\pi}{2}$.

VẤN ĐỀ 2
HÀM HỢP CHỨA THAM SỐ

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2\left(x^2+mx+9\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $g(x)=f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B.

Từ giả thiết suy ra $f'(3-x)=(3-x)(2-x)^2\left[(3-x)^2+m(3-x)+9\right]$.

Ta có $g'(x) = -f'(3-x)$.

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x) \ge 0,\ \forall x \in (3;+\infty)$

$\Leftrightarrow f'(3-x) \le 0,\ \forall x \in (3;+\infty)$

$\Leftrightarrow (3-x)(2-x)^2\left[(3-x)^2 + m(3-x) + 9\right] \le 0,\ \forall x \in (3;+\infty)$

$\Leftrightarrow m \le \dfrac{(x-3)^2+9}{x-3},\ \forall x \in (3;+\infty)$

$\Leftrightarrow m \le \min\limits_{(3;+\infty)} h(x)$ với $h(x) = \dfrac{(x-3)^2+9}{x-3}$.

Ta có $h(x) = \dfrac{(x-3)^2+9}{x-3} = (x-3) + \dfrac{9}{x-3} \ge 2\sqrt{(x-3).\dfrac{9}{x-3}} = 6$.

Vậy suy ra $m \le 6 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}^+} m \in \{1;2;3;4;5;6\}$.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(3x^4 + mx^3 + 1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B.

Từ giả thiết suy ra $f'(x^2) = x^2(x^2-1)^2(3x^8 + mx^6 + 1)$.

Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2)$.Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi

$g'(x) \ge 0,\ \forall x \in (0;+\infty) \Leftrightarrow 2xf'(x^2) \ge 0,\ \forall x \in (0;+\infty)$

$\Leftrightarrow 2x.x^2(x^2-1)^2(3x^8 + mx^6 + 1) \ge 0,\ \forall x \in (0;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^8 + mx^6 + 1 \ge 0,\ \forall x \in (0;+\infty)$

$\Leftrightarrow m \ge -\dfrac{3x^8+1}{x^6},\ \forall x \in (0;+\infty)$

$\Leftrightarrow m \ge \max\limits_{(0;+\infty)} h(x)$ với $h(x) = -\dfrac{3x^8+1}{x^6}$.

Khảo sát hàm $h(x) = -\dfrac{3x^8+1}{x^6}$ trên $(0;+\infty)$ ta được $\max\limits_{(0;+\infty)} h(x) = -4$.

Suy ra $m \ge -4 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}^-} m \in \{-4;-3;-2;-1\}$.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+2)(x^2 + mx + 5)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Số giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^2 + x - 2)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ là

A. 7. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $g'(x)=(2x+1)f'(x^2+x-2)$.

Hàm số $g(x)=f(x^2+x-2)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow g'(x)\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow(2x+1)f'(x^2+x-2)\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow f'(x^2+x-2)\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)$ (vì $2x+1>0,\forall x\in(1;+\infty)$)

$\Leftrightarrow(x^2+x-2)^2(x^2+x)\left[(x^2+x-2)^2+m(x^2+x-2)+5\right]\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)$

$\left[(x^2+x-2)^2+m(x^2+x-2)+5\right]\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)$ (*)(vì $(x^2+x-2)^2(x^2+x)\ge 0,(1;+\infty)$).

Đặt $t=x^2+x-2$. Khi đó $x>1\Rightarrow t>0$.

(*) trở thành $t^2+mt+5\ge 0,\forall t>0\Leftrightarrow m\ge -t-\dfrac{5}{t},\forall t>0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si ta có $t+\dfrac{5}{t}\ge 2\sqrt{5}\Leftrightarrow -t-\dfrac{5}{t}\le -2\sqrt{5}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}t=\dfrac{5}{t}\\t>0\end{cases}\Leftrightarrow t=\sqrt{5}$.

$\Rightarrow\max\limits_{(0;+\infty)}\left(-t-\dfrac{5}{t}\right)=-2\sqrt{5}\Rightarrow m\ge -2\sqrt{5}$.

Mà m nguyên âm nên $m\in\{-4;-3;-2;-1\}$. Vậy có 4 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x)=(x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;20]$ để hàm số $y=f(x^2+3x-m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 18 **B.** 17. **C.** 16. **D.** 20.

Lời giải

Chọn A.

Xét dấu $f'(x)$ ta được

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta có: $y'=(2x+3)f'(x^2+3x-m)$.

Vì $2x+3>0,\forall x\in(0;2)$. Do đó, để hàm số $y=f(x^2+3x-m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ thì $f'(x^2+3x-m)\ge 0,\forall x\in(0;2)$ (*).

Đặt $t=x^2+3x-m$. Vì $x\in(0;2)\Rightarrow t\in(-m;10-m)$.

(*) trở thành: $f'(t)\ge 0,\forall t\in(-m;10-m)$.

Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ ta có: $\left[\begin{array}{l}10-m\le -3\\1\le -m\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 13\\m\le -1\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}13\le m\le 20\\-10\le m\le -1\end{array}\right.\\m\in Z\end{array}\right.$

$\Rightarrow m\in\{-10;-9;..;-1;3;4;..;20\}$.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x)=(x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;20]$ để hàm số $y=f(x^2+3x-m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 20.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $y'=f'(x^2+3x-m)=(2x+3)f'(x^2+3x-m)$.

Theo đề bài ta có: $f'(x)=(x-1)(x+3)$

suy ra $f'(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-3\\x>1\end{array}\right.$ và $f'(x)<0\Leftrightarrow -3<x<1$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$ khi $y'\ge 0,\forall x\in(0;2)$

$\Leftrightarrow(2x+3)f'(x^2+3x-m)\ge 0,\forall x\in(0;2)$.

Do $x\in(0;2)$ nên $2x+3>0,\forall x\in(0;2)$. Do đó, ta có:

$y'\ge 0,\forall x\in(0;2)\Leftrightarrow f'(x^2+3x-m)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+3x-m\le -3\\x^2+3x-m\ge 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge x^2+3x+3\\m\le x^2+3x-1\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge\max\limits_{[0;2]}(x^2+3x+3)\\m\le\min\limits_{[0;2]}(x^2+3x-1)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 13\\m\le -1\end{array}\right.$.

Do $m\in[-10;20]$, $m\in\mathbb{Z}$ nên có 18 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-1)(x-4);\ \forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m<2021$ để hàm số $g(x)=f\left(\frac{2-x}{1+x}-m\right)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

A. 2022. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 2021

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $g'(x)=-\frac{3}{(x+1)^2}f'\left(\frac{2-x}{1+x}-m\right)$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow g'(x)\ge 0;\ \forall x\in(2;+\infty)$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{(x+1)^2}f'\left(\frac{2-x}{1+x}-m\right)\ge 0;\ \forall x\in(2;+\infty)\Leftrightarrow f'\left(\frac{2-x}{1+x}-m\right)\le 0;\ \forall x\in(2;+\infty)$$

Ta có: $f'(x)\le 0\Leftrightarrow (x+1)(x-1)(x-4)\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\le -1\\ 1\le x\le 4\end{array}\right.$

Do đó: $f'\left(\frac{2-x}{1+x}-m\right)\le 0;\ \forall x\in(2;+\infty)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\frac{2-x}{1+x}-m\le -1;\ \forall x\in(2;+\infty) & (1)\\ 1\le \frac{2-x}{1+x}-m\le 4;\ \forall x\in(2;+\infty) & (2)\end{array}\right.$

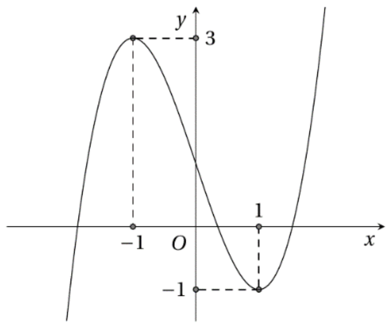
Hàm số $h(x)=\frac{2-x}{1+x}-m$; $x\in(2;+\infty)$ có bảng biến thiên:

x		2		$+\infty$
$h'(x)$		$\|$	$-$	
$h(x)$		$\|\ -m$	$\searrow$	$-\infty$

Căn cứ bảng biến thiên suy ra: Điều kiện (2) không có nghiệm m thỏa mãn.

Điều kiện $(1)\Leftrightarrow -m\le -1\Leftrightarrow m\ge 1$, kết hợp điều kiện $m<2021$ suy ra có 2020 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như bên.



Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(x^2+x+m\right)$ nghịch biến trên $(0;1)$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $y'=(2x+1)f'\left(x^2+x+m\right)$.

Hàm số $y=f\left(x^2+x+m\right)$ nghịch biến trên $(0;1)$ khi và chỉ khi $y'\le 0,\forall x\in(0;1)$.

Vì $2x+1>0,\forall x\in(0,1)$ nên điều này tương đương với

$$f'\left(x^2+x+m\right)\le 0,\forall x\in(0;1)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x+m\ge -1,\forall x\in(0;1)\\ x^2+x+m\le 1,\forall x\in(0;1).\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x\ge -1-m,\forall x\in(0;1)\\ x^2+x\le 1-m,\forall x\in(0;1).\end{cases}$$

Ta có hàm số $g(x)=x^2+x$ luôn đồng biến trên $[0;1]$; do đó, ràng buộc trên tương đương với

$$\begin{cases}-1-m\le g(0)=0\\1-m\ge g(1)=2\end{cases}\Leftrightarrow m=-1.$$

Vậy có duy nhất một giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f(x+m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A.

Từ giả thiết suy ra hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-1;1)$, $(1;3)$ và liên tục tại $x=1$ nên đồng biến trên $(-1;3)$.

Ta có $g'(x)=f'(x+m)$ và $x\in(0;2)\Leftrightarrow x+m\in(m;m+2)$.

$g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)\Leftrightarrow(m;2+m)\subset(-1;3)\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge-1\\2+m\le3\end{cases}\Leftrightarrow-1\le m\le1$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên m có 3 giá trị là $m=-1;m=0;m=1$.

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ là một hàm đa thức và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như hình bên dưới:

x	$-\infty$		1		3		$-\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f(\sqrt{x-2}+m)$ (1) nghịch biến trên khoảng $(11;25)$.

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A.

Đặt $t=\sqrt{x-2}+m$, với $x\in(11;25)$ thì $t\in(3+m;5+m)$, hàm số trở thành: $y=f(t)$ (2)

Dễ thấy x và t cùng chiều biến thiên nên hàm (1) nghịch biến trên $(11;25)$ thì hàm (2) nghịch biến trên $(3+m;5+m)$.

Dựa vào bảng xét dấu của hàm $f'(x)$ suy ra hàm $f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$. Do đó hàm $f(t)$ nghịch biến trên $(3+m;5+m)$ khi và chỉ khi $\begin{cases}m+3\ge1\\m+5\le3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge-2\\m\le-2\end{cases}\Leftrightarrow m=-2$

Vậy có duy nhất một giá trị nguyên của tham số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

DẠNG 2

XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM HỢP DẠNG $g(x)=f(x)+h(x)$

VẤN ĐỀ 1

HÀM HỢP KHÔNG CHỨA THAM SỐ

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)=x^2(x-1)(4-x)$. Hàm số $y=g(x)=f(x)+f(1-x)$ đồng biến trên khoảng

A. $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $g'(x)=f'(x)-f'(1-x)=x^2(x-1)(4-x)-(1-x)^2(-x)(x+3)$

$g'(x)=x(x-1)\left[x(4-x)+(x-1)(x+3)\right]=x(x-1)(6x-3)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\dfrac{1}{2}\\x=1\end{array}\right..$$

Ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Hàm số $y=g(x)=f(x)+f(1-x)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{1}{2}\right);(1;+\infty)$

Suy ra hàm số đồng biến $(1;2)$

Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ có $f'(x)=x^2(x-1)^2(x-3)$. Hàm số $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{3}x^3-5$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(0;\,2)$. **B.** $\left(2;\,\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2};\,2\right)$. **D.** $\left(0;\,\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $g'(x)=f'(x)+x^2$,

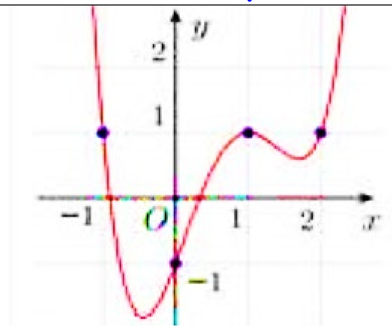
$$g'(x)=0\Leftrightarrow x^2(x-1)^2(x-3)=-x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\(x-1)^2(x-3)=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^3-5x^2+7x-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$$

Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$		0		$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		2		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $g'(x)$ ta thấy trên khoảng $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2};\,2\right)$ thì hàm số $y=g(x)$ đồng biến.

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên.



Đặt $g(x)=f(x)-x$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $g(-1)<g(1)<g(2)$.

B. $g(2)<g(1)<g(-1)$.

C. $g(2)<g(-1)<g(1)$.

D. $g(1)<g(-1)<g(2)$

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $g'(x)=f'(x)-1$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=1$. Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị hàm số $y=f'(x)$ tại 3 điểm là $x=-1; x=1$ và $x=2$.

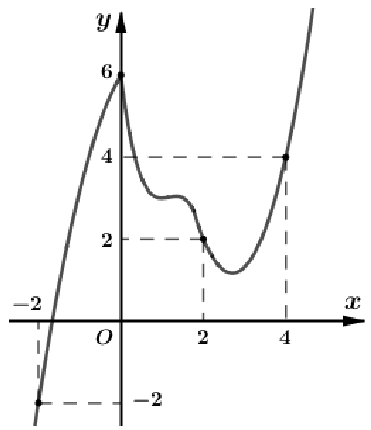
Vậy $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu của hàm số $g'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g(-1)$	$\searrow$	$g(1)$	$\searrow$	$g(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT ta thấy: $g(2)<g(1)<g(-1)$.

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới.



Hàm số $g(x)=2f(x)-x^2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

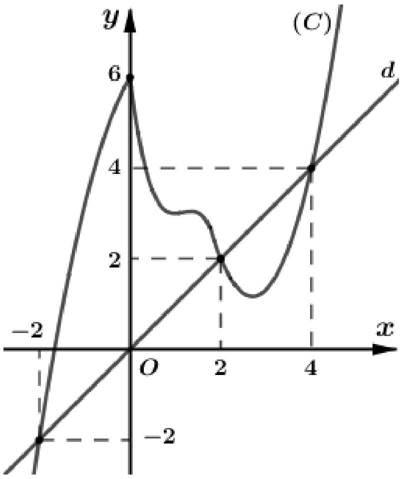
A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-2;2)$. **C.** $(2;4)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $g'(x)=2f'(x)-2x \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x.$

Số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $d: y=x$ (như hình vẽ bên dưới).



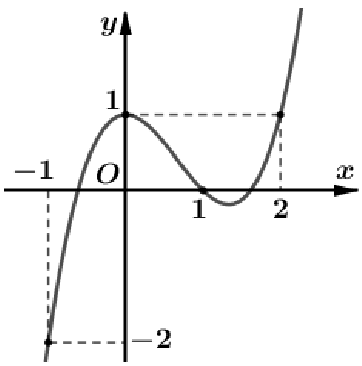
Dựa vào đồ thị, suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$.

Lập bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

$\Rightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-2;2)$ và $(4;+\infty)$. So sánh 4 đáp án **Chọn B**

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $g(x)=f(x)-\dfrac{x^3}{3}+x^2-x+2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

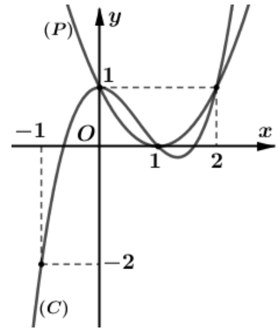
A. $(-1;0)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $g'(x)=f'(x)-x^2+2x-1$, $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=(x-1)^2$.

Suy ra số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ chính là số giao điểm giữa đồ thị hàm số $f'(x)$ và parabol $(P): y=(x-1)^2$.



Dựa vào đồ thị ta suy ra $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		↘		↗		↘		↗	

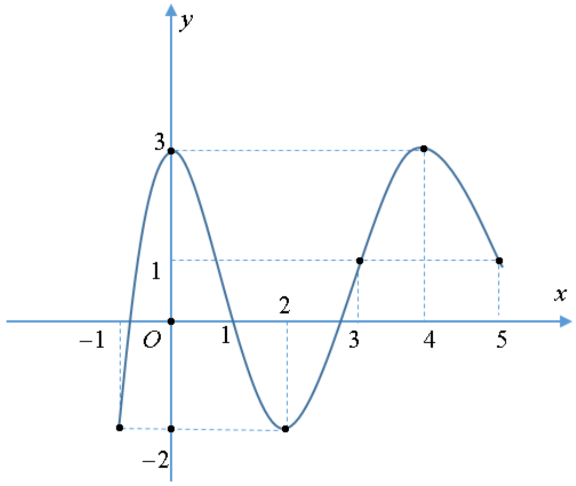
Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **Chọn D**

Lưu ý. Cách xét dấu bảng biến thiên như sau:

Ví dụ trên khoảng $(-\infty;0)$ ta thấy đồ thị hàm $f'(x)$ nằm phía trên đường $y=(x-1)^2$ nên $g'(x)$ mang dấu $-$.

Nhận thấy các nghiệm $x=0, x=1, x=2$ là các nghiệm đơn nên qua $g'(x)$ đổi dấu.

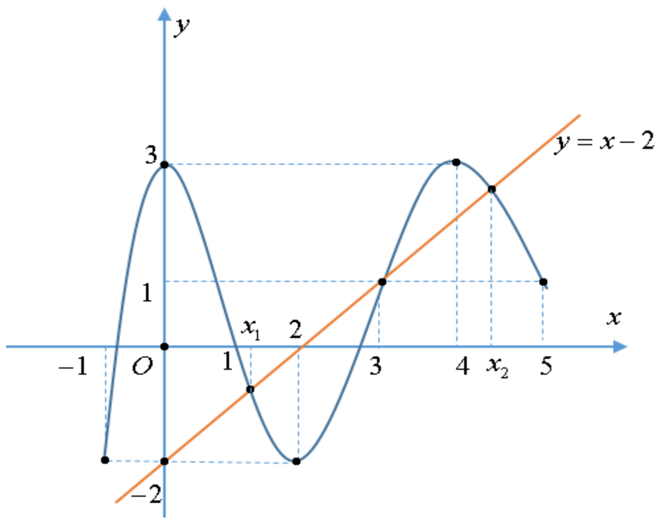
Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $[-1;5]$ có đồ thị của hàm $y=f'(x)$ được cho như hình bên dưới. Hàm số $g(x)=-2f(x)+x^2-4x+4$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?



A. $(-1;0)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(-2;-1)$.

Lời giải

Chọn C.



Xét hàm số $g(x) = -2f(x) + x^2 - 4x + 4$ trên $[-1;5]$ ta có:

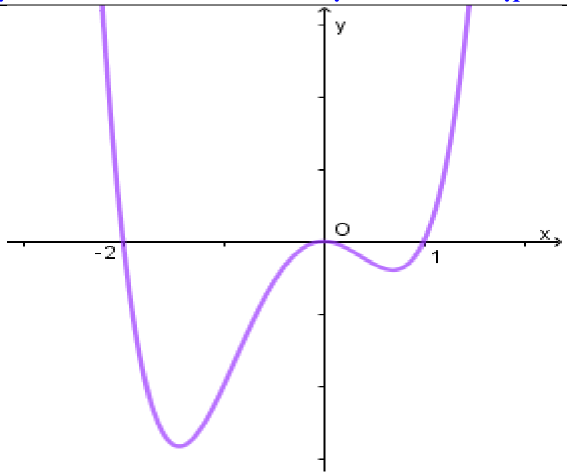
$$g'(x) = -2f'(x) + 2x - 4;\ g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x - 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \in (0;\ 2) \\ x = 3 \\ x = x_2 \in (4;\ 5) \end{array}\right..$$

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	-1	0	x_1	2	3	4	x_2	5
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên dưới.



Hỏi hàm số $g(x)=f(x+1)+f(2-x)-x^2+6x-3$ đồng biến trên khoảng nào cho dưới đây

A. $(-\infty;0)$ **B.** $(0;3)$ **C.** $(1;2)$ **D.** $(3;+\infty)$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $g'(x)=f'(x+1)-f'(-2-x)+6-2x\geq 0\forall x\in K$ ta chỉ cần chọn x sao cho

$$\begin{cases} f'(x+1)\geq 0 \\ f'(2-x)\leq 0 \\ 6-2x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+1\geq 1 \\ x+1\leq -2 \end{array}\right. \\ -2\leq 2-x\leq 1 \\ x\leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1\leq x\leq 3$$ đối chiếu đáp án ta tìm được đáp án C

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên của $y=f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	1	x	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$ ↗	3 ↘	-3 ↗	3 ↗	$+\infty$

Hàm số $g(x)=f(x)-3x$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(2;2019)$ **B.** $(-2019;-2)$ **C.** $(1;2)$ **D.** $(-1;1)$

Lời giải

Chọn A.

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

Ta có: $g'(x)=f'(x)-3$

Hàm số $y=g(x)$ đồng biến $\Leftrightarrow g'(x)\geq 0$

$\Leftrightarrow f'(x)-3\geq 0\Leftrightarrow f'(x)\geq 3\Leftrightarrow x\geq 2.$

VẤN ĐỀ 2

HÀM HỢP CHỨA THAM SỐ

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 + 6x + 1, \forall x \in R$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-50;50)$ của tham số m để hàm số $g(x) = f(x) - (m+1)x - 2$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 26. **B.** 25. **C.** 51. **D.** 50.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $g(x) = f(x) - (m+1)x - 2 \Rightarrow g'(x) = f'(x) - (m+1)$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;\ 2)$ khi

$g'(x) \le 0, \forall x \in (0;2)$ (dấu "$=$"chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm trên khoảng $(0;\ 2)$).

$\Leftrightarrow f'(x) - (m+1) \le 0, \forall x \in (0;2)$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x \le m, \forall x \in (0;2)$ (*)

Xét hàm số $h(x) = 3x^2 + 6x,\ x \in (0;2)$.

Ta có $h'(x) = 6x + 6 > 0, \forall x \in (0;2)$.

Bảng biến thiên:

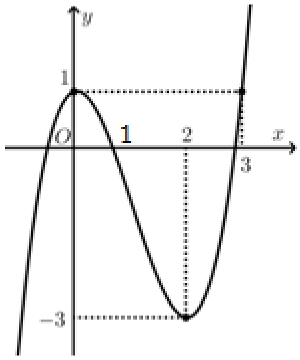
x	0		2
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	24

Nhìn bảng biến thiên suy ra điều kiện để $(*)$ xảy ra là: $m \geq 24$.

Do $m \in Z$, thuộc khoảng $(-50;50)$ nên $m \in [24;50)$ và $m \in Z$ hay $m \in \{24, 25, ..., 49\}$.

Vậy có 26 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Các giá trị của m để hàm số $y = f(x) + (m-1)x$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$ là



A. $m > 4$. **B.** $m \leq 4$. **C.** $m \geq 4$. **D.** $0 > m > 4$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $y = f(x) + (m-1)x \Rightarrow y' = f'(x) + m - 1$.

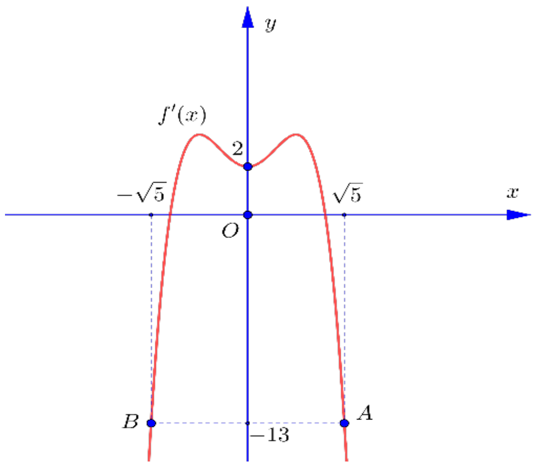
Hàm số $y = f(x) + (m-1)x$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$

$\Leftrightarrow y' \geq 0,\ \forall x \in (0;3) \Leftrightarrow f'(x) + m - 1 \geq 0, \forall x \in (0;3)$

$\Leftrightarrow -m + 1 \leq f'(x), \forall x \in (0;3)$

$\Leftrightarrow -m + 1 \leq \min\limits_{x \in (0;3)} f'(x) \Leftrightarrow -m + 1 \leq -3 \Leftrightarrow m \geq 4$.

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ:



Xét hàm số $g(x)=2f(x)+2x^3-4x-3m-6\sqrt{5}$ ($m\in\mathbb{R}$). Để $g(x)\le 0$ với $\forall x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$ thì điều kiện của m là

A. $m\ge\frac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$.

B. $m\le\frac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$.

C. $m\le\frac{2}{3}f(0)-2\sqrt{5}$.

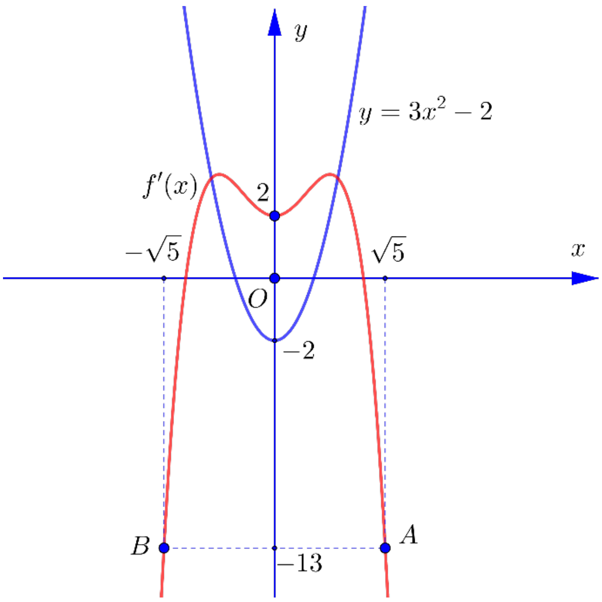
D. $m\ge\frac{2}{3}f\left(-\sqrt{5}\right)-4\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $g'(x)=2f'(x)+6x^2-4$; $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)+3x^2-2=0\Leftrightarrow f'(x)+3x^2-2=0$

Để $g(x)\le 0$ với $\forall x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$ thì $\max g(x)\le 0$ với $\forall x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$



Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và $y=3x^2-2$ ta thấy $f'(x)+3x^2-2\ge 0\ \forall x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$

$\Rightarrow g'(x)\ge 0\ \forall x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$ nên hàm số $g(x)$ luôn đồng biến trên $\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$.

Suy ra $\text{Max}\, g(x)=g\left(\sqrt{5}\right)=2f\left(\sqrt{5}\right)-3m\Rightarrow 2f\left(\sqrt{5}\right)-3m\le 0\Leftrightarrow m\ge\frac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$.

DẠNG 3

XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM HỢP $g(x)=f(u(x))+h(x)$

VẤN ĐỀ 1

HÀM HỢP KHÔNG CHỨA THAM SỐ

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x)=(1-x)(x+2)g(x)+2021$ với $g(x)<0;\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(1-x)+2021x+2022$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có

$y'=-f'(1-x)+2021=-[1-(1-x)][(1-x)+2]g(1-x)-2021+2021=-x(3-x)g(1-x)$.

Hàm số nghịch biến khi $y'(x)<0\Leftrightarrow x(3-x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<0\\x>3\end{array}\right.$ (do $g(1-x)<0$, $\forall x\in\mathbb{R}$)

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn: $f'(x)=(1-x^2)(x-5)$

Hàm số $y=3f(x+3)-x^3+12x$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(1;5)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $f'(x)=(1-x^2)(x-5)$ suy ra $f'(x+3)=\left[1-(x+3)^2\right](x+3-5)=-(x+4)(x+2)(x-2)$.

Mặt khác: $y'=3.f'(x+3)-3x^2+12=-3\left[(x+4)(x+2)(x-2)+(x^2-4)\right]=-3(x-2)(x+2)(x+5)$.

Xét $y'<0\Leftrightarrow -3(x-2)(x+2)(x+5)<0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-5<x<-2\\ x>2\end{array}\right.$.

Vậy hàm số $y=3f(x+3)-x^3+12x$ nghịch biến trên các khoảng $(-5;-2)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 40. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x)=(1-x)(x+2)g(x)+1$ trong đó $g(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(1-x)+x+2$ nghịch biến trên các khoảng nào?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $f'(x)=(1-x)(x+2)g(x)+1\Rightarrow f'(1-x)=x(3-x)g(1-x)+1$

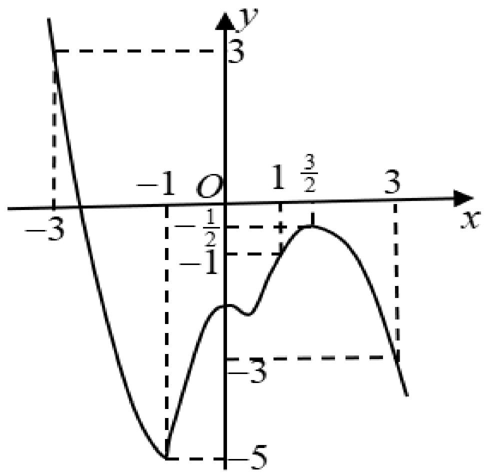
Mặt khác: $y'=\left(f(1-x)\right)'+1=-f'(1-x)+1=-\left[x.(3-x).g(1-x)+1\right]+1=-x.(3-x).g(1-x)$

Ta có: $y'<0\Leftrightarrow -x.(3-x).g(1-x)<0\ (*)$

Do $g(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow g(1-x)<0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow (*)\Leftrightarrow x.(3-x)<0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>3\\ x<0\end{array}\right.$.

Vậy hàm số $y=f(1-x)+x+2$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(3;+\infty)$.

Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



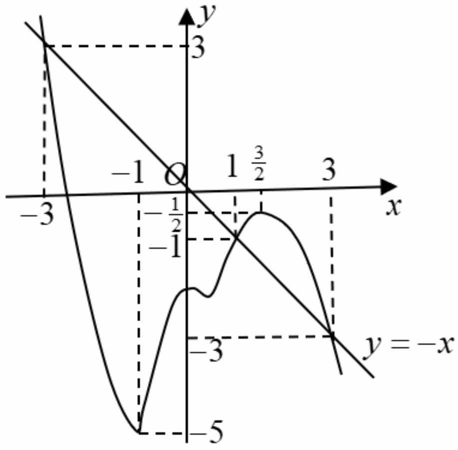
Hàm số $y=f(1-x)+\dfrac{x^2}{2}-x$ nghịch biến trên khoảng

A. $\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(-3;1)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải

Chọn B.

Cách 1:



Ta có $g'(x)=-f'(1-x)+x-1.$

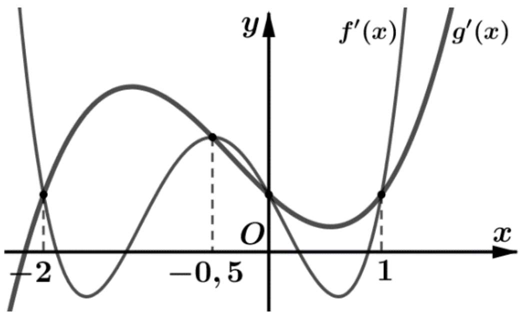
Để $g'(x)<0 \Leftrightarrow f'(1-x)>x-1.$ Đặt $t=1-x$, bất phương trình trở thành $f'(t)>-t.$

Kẻ đường thẳng $y=-x$ cắt đồ thị hàm số $f'(x)$ lần lượt tại ba điểm $x=-3;\ x=-1;\ x=3.$

Quan sát đồ thị ta thấy bất phương trình $f'(t)>-t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<-3 \\ 1<t<3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1-x<-3 \\ 1<1-x<3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>4 \\ -2<x<0 \end{array}\right..$

Đối chiếu đáp án ta **chọn B**

Câu 42. Cho hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị các đạo hàm (đồ thị $y=g'(x)$ là đường đậm hơn) như hình vẽ



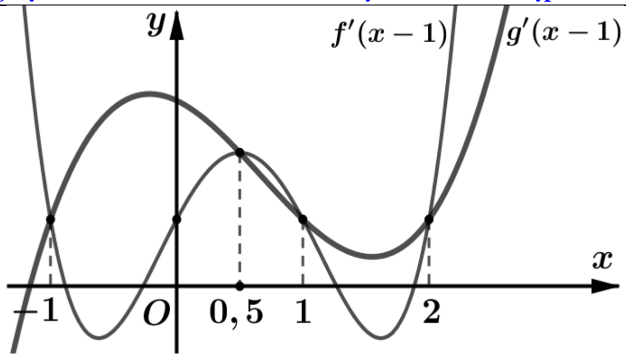
Hàm số $h(x)=f(x-1)-g(x-1)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{1}{2};1\right)$. **B.** $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B.

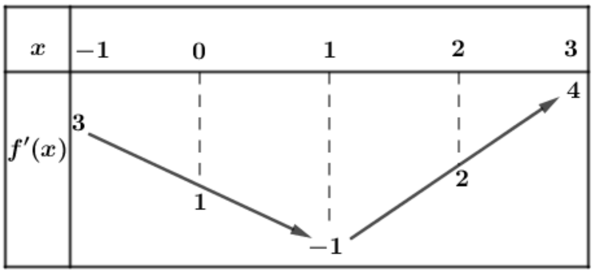
Hai đồ thị $f'(x-1)$, $g'(x-1)$ được suy ra bằng cách tịnh tiến hai đồ thị $f'(x)$, $g'(x)$ sang phải 1 đơn vị như hình vẽ bên dưới



Ta có $h'(x) = f'(x-1) - g'(x-1)$.

Hàm số $h(x)$ nghịch biến khi $h'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x-1) < g'(x-1) \Rightarrow x \in \left(-1;\frac{1}{2}\right) \cup (1;2)$.

Câu 43. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = f\left(1-\frac{x}{2}\right) + x$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(-4;-2)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;4)$.

Lời giải

Chọn A.

Xét $g(x) = f\left(1-\frac{x}{2}\right) + x$. Ta có $g'(x) = -\frac{1}{2}f'\left(1-\frac{x}{2}\right) + 1$

Xét $g'(x) \le 0 \Leftrightarrow f'\left(1-\frac{x}{2}\right) \ge 2$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ ta có:

+) TH1: $f'\left(1-\frac{x}{2}\right) > 2 \Leftrightarrow 2 < 1-\frac{x}{2} < 3 \Leftrightarrow -4 < x < -2$. Do đó hàm số nghịch biến trên $(-4;-2)$.

+) TH2: $f'\left(1-\frac{x}{2}\right) > 2 \Leftrightarrow -1 < 1-\frac{x}{2} < a \;\; < 0 \Leftrightarrow 2 < 2-2a < x < 4$ nên hàm số chỉ nghịch biến trên khoảng $(2-2a;4)$ chứ không nghịch biến trên toàn khoảng $(2;4)$.

Vậy hàm số $g(x) = f\left(1-\frac{x}{2}\right) + x$ nghịch biến trên $(-4;-2)$.

VẤN ĐỀ 2
HÀM HỢP CHỨA THAM SỐ

Câu 44. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-2)$. Tìm m để hàm số $y=g(x)=f(x+2)-mx$ đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

A. $m\le\frac{-9}{4}$. **B.** $-\frac{9}{4}\le m\le 10$. **C.** $m\ge\frac{-9}{4}$. **D.** $m\ge 10$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $y=g(x)=f(x+2)-mx$. Suy ra $g'(x)=f'(x+2)-m$.

Để hàm số $y=g(x)$ đồng biến $\forall x\in(-1;2)$ thì $g'(x)\ge 0\ \forall x\in(-1;2)$.

Hay $f'(x+2)\ge m\ \ \forall x\in(-1;2)\Leftrightarrow m\le f'(x+2)\ \ \forall x\in(-1;2)\Leftrightarrow m\le x(x+3)\ \forall x\in(-1;2)$.

$m\le \underset{x\in(-1;2)}{Min}\left(x^2+3x\right)$. Đặt $h(x)=x^2+3x$, $h'(x)=2x+3, h'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{-3}{2}$.

Ta có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	-1	$-\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
$h'(x)$	- 0 +				
$h(x)$		-2	$-\frac{9}{4}$	10	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $m \le -\dfrac{9}{4}$.

Câu 45. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên R và có $f'\left(x\right)=x.\left(x+1\right)^3.\left(x-1\right)^4.\left(x-4\right)^5$.

Giá trị của tham số m để hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(1-x\right)+\dfrac{1}{x^2+mx+m^2+1}$ chắc chắn luôn đồng biến trên $\left(-3;0\right)$.

A. $m\in\left(-2;-1\right)$. **B.** $m\in\left(-\infty;-2\right)$. **C.** $m\in\left[-1;0\right]$. **D.** $m\in\left[0;+\infty\right)$

Lời giải

Chọn D.

Điều kiện: $x^2+mx+m^2+1\ne 0$ (luôn đúng vì $x^2+mx+m^2+1=\left(x+\dfrac{m}{2}\right)^2+\dfrac{3m^2}{4}+1>0$)

$g'\left(x\right)=-f'\left(1-x\right)-\dfrac{2x+m}{\left(x^2+mx+m^2+1\right)^2}$

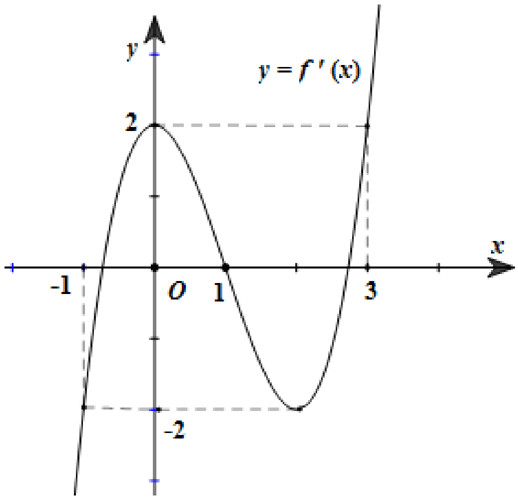
Đặt $t=1-x; x\in\left(-3;0\right)\Rightarrow t\in\left(1;4\right)\Rightarrow -f'\left(1-x\right),x\in\left(-3;0\right)$ chính là $-f'\left(t\right),t\in\left(1;4\right)$. Do đó

$-f'\left(t\right)>0,\forall t\in\left(1;4\right)\Leftrightarrow -f'\left(1-x\right)>0,\forall x\in\left(-3;0\right)$

Ycbt $\Leftrightarrow -\dfrac{2x+m}{\left(x^2+mx+m^2+1\right)^2}\ge 0,\forall x\in\left(-3;0\right)\Leftrightarrow 2x+m\le 0,\forall x\in\left(-3;0\right)$

$\Leftrightarrow m\le -2x,\forall x\in\left(-3;0\right)\Leftrightarrow m\le \min\limits_{\left[-3;0\right]}\left(-2x\right)\Leftrightarrow m\le 0$. Vậy $m\in\left[0;+\infty\right)$

Câu 46. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ.



Đặt $g\left(x\right)=f\left(x-m\right)-\dfrac{1}{2}\left(x-m-1\right)^2+2021$ với m là tham số thực. Gọi S là tập các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=g\left(x\right)$ đồng biến trên khoản $\left(5;6\right)$.

Tổng các phần tử của S bằng:

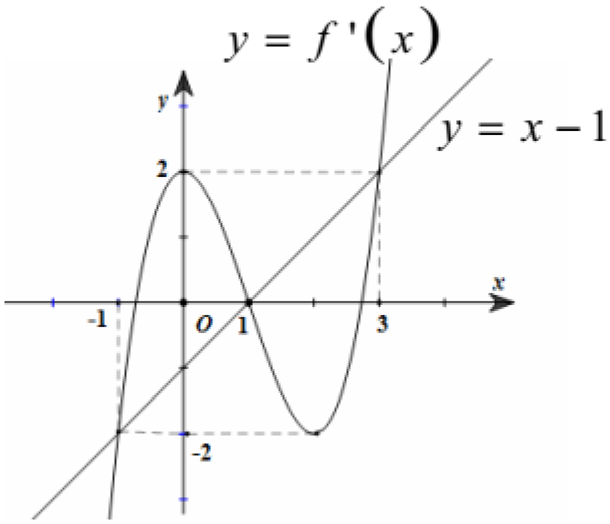
A. 4. **B.** 11. **C.** 14. **D.** 20.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $g'(x) = f'(x-m) - (x-m-1)$

Đặt $h(x) = f'(x) - (x-1)$. Từ đồ thị $y = f'(x)$ và đồ thị $y = x-1$ trên hình vẽ ta suy ra $h(x) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \leq x \leq 1 \\ x \geq 3 \end{array}\right.$



Ta có $g'(x) = h(x-m) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \leq x-m \leq 1 \\ x-m \geq 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-1 \leq x \leq m+1 \\ x \geq m+3 \end{array}\right.$

Do đó hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(m-1; m+1)$ và $(m+3; +\infty)$

Do vậy, hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m-1 \leq 5 \\ m+1 \geq 6 \end{cases} \\ m+3 \leq 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5 \leq m \leq 6 \\ m \leq 2 \end{array}\right.$

Do m nguyên dương nên $m \in \{1;2;5;6\}$, tức $S = \{1;2;5;6\}$

Tổng các phần tử của S bằng 14.

DẠNG 4

XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM HỢP $g(x)=\left[f\left(u(x)\right)\right]^k$

Câu 47. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm $f'(x)=(x+2)\left(x^2-9\right)\left(x^4-16\right)$ trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=g(x)=\left[f(2x-x^2)\right]^{2023}$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $\left(1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-1;3)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $f'(x)=(x+2)\left(x^2-9\right)\left(x^4-16\right)=(x-3)(x-2)(x+3)(x+2)^2\left(x^2+4\right)$.

$g'(x)=2023.\left[f(2x-x^2)\right]^{2022}\left[f(2x-x^2)\right]'$

$=2023.\left[f(2x-x^2)\right]^{2022}(2-2x)f'\left(2x-x^2\right)$

$=2023\left[f(2x-x^2)\right]^{2022}(2-2x)\left(2x-x^2-3\right)\left(2x-x^2-2\right)\left(2x-x^2+3\right)\left(2x-x^2+2\right)^2\left[\left(2x-x^2\right)^2+4\right]$

$=2019\left[f\left(2x-x^2\right)\right]^{2018}\left(2x-x^2+2\right)^2\left(x^2-2x+3\right)\left(x^2-2x+2\right)\left[\left(x^2-2x\right)^2+4\right](2-2x)\left(2x-x^2+3\right)$

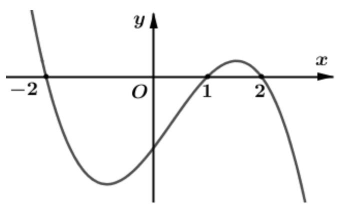
Ta có:

$2023\left[f\left(2x-x^2\right)\right]^{2022}\left(2x-x^2+2\right)^2\left(x^2-2x+3\right)\left(x^2-2x+2\right)\left[\left(x^2-2x\right)^2+4\right]\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Khi đó $g'(x)\geq 0\Rightarrow(2-2x)\left(2x-x^2+3\right)\geq 0\Leftrightarrow x\in[-1;1]\cup[3;+\infty)$

$\Rightarrow$ Hàm số $y=g(x)=\left[f(2x-x^2)\right]^{2023}$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-1;1)$ và $(3;+\infty)$.

Câu 48. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thoả $f(2)=f(-2)=0$ và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ có dạng như hình bên. Hàm số $y=\left(f(x)\right)^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?



A. $\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1; x=\pm 2$; $f(2)=f(-2)=0$. Ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘		↗	0	↘	$-\infty$

$\Rightarrow f(x)<0; \forall x \neq \pm 2.$

Xét $y=(f(x))^2 \Rightarrow y'=2f(x).f'(x)$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f'(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 2 \\ x=1; x=\pm 2 \end{array}\right.$

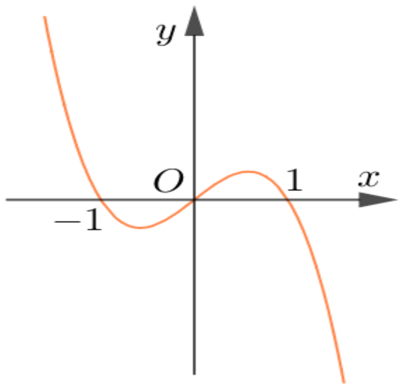
Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$f(x)$		-	0	-		-	0	-	
$y=\left[(f(x))^2\right]'$		-	0	+	0	-	0	+	

Hoặc Ta có $g'(x)=2f'(x).f(x)$. Xét $g'(x)<0 \Leftrightarrow f'(x).f(x)<0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x)>0 \\ f(x)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ 1<x<2 \end{array}\right.$.

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$, $(1;2)$.

Câu 49. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên dưới.



Hàm số $g(x)=\left[f(2x-1)\right]^3$ nghịch biến trên các khoảng nào trong các khoảng sau

A. $(-1;0)$ **B.** $(0;1)$ **C.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ **D.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$

Lời giải

Chọn C.

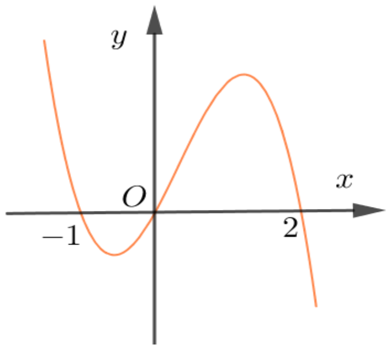
Ta có $g'(x)=6f^2(2x-1).f'(2x-1)$

Do $6f^2(2x-1)\geq 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ nên để hàm số nghịch biến thì $f'(2x-1)\leq 0$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có

Để $f'(2x-1)\le 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}2x-1\ge 1\\ -1\le 2x-1\le 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge 1\\ 0\le x\le \dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Câu 50. Cho hàm số $y=f(x)$.. Đồ thị $y=f'(x)$. như hình bên dưới và $f(1)=f(2)=0$



Hàm số $g(x)=\left[f\left(x^2-3\right)\right]^2$ đồng biến trên các khoảng nào trong các khoảng sau

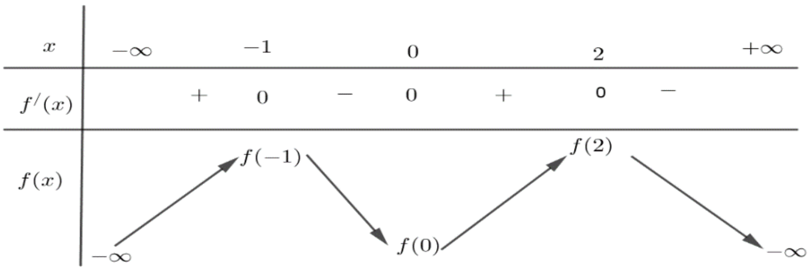
A. $(1;2)$ **B.** $(0;1)$ **C.** $(-1;0)$ **D.** $(-2;-1)$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $g'(x)=4xf\left(x^2-3\right).f'\left(x^2-3\right)$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$



Do $f(-1)=f(2)=0$ nên $f\left(x^2-3\right)\le 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ để hàm số đồng biến thì $x.f'\left(x^2-3\right)\le 0$

TH1: $x\ge 0$ thì $f'\left(x^3-3\right)\le 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}-1\le x^2-3\le 0\\ x^2-3\ge 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\sqrt{3}\le x\le -\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\le x\le\sqrt{3}\\ x\ge\sqrt{5}\\ x\le -\sqrt{5}\end{array}\right.$

Vì $x\ge 0$ nên $\left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\le x\le\sqrt{3}\\ x\ge\sqrt{5}\end{array}\right.$

TH2: $x\le 0$ thì $f'\left(x^3-3\right)\ge 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}0\le x^2-3\le 2\\ x^2-3\le -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\sqrt{5}\le x\le -\sqrt{3}\\ \sqrt{3}\le x\le\sqrt{5}\\ -\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}\end{array}\right.$

Vì $x\le 0$ nên $\left[\begin{array}{l}-\sqrt{5}\le x\le -\sqrt{3}\\ -\sqrt{2}\le x\le 0\end{array}\right.$

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $\left(-\sqrt{5};-\sqrt{3}\right)$, $\left(-\sqrt{2};0\right)$, $\left(\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$, $\left(\sqrt{5};+\infty\right)$.

Câu 51. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ, đồ thị $y=f'\left(x\right)$ cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $-3;1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $\left[-10;20\right]$ để hàm số $y=\left(f\left(x^2+3x-m\right)\right)^3$ đồng biến trên khoảng $\left(0;2\right)$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f'	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

A. 20. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 18.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $y'=3\left(2x+3\right)f'\left(x^2+3x-m\right).\left[f\left(x^2+3x-m\right)\right]^2$.

Theo đề bài ta có: $f'\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(x+3\right)$ suy ra $f'\left(x\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-3\\x>1\end{array}\right.$ và $f'\left(x\right)<0\Leftrightarrow-3<x<1$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;2\right)$ khi $y'\ge0,\forall x\in\left(0;2\right)$

$\Leftrightarrow y'=3\left(2x+3\right)f'\left(x^2+3x-m\right).\left[f\left(x^2+3x-m\right)\right]^2\ge0,\forall x\in\left(0;2\right)$.

Do $x\in\left(0;2\right)$ nên $2x+3>0,\forall x\in\left(0;2\right)$ và $\left[f\left(x^2+3x-m\right)\right]^2\ge0,\forall x\in\mathbb{R}$ Do đó, ta có:

$$y'\ge0\Leftrightarrow f'\left(x^2+3x-m\right)\ge0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+3x-m\le-3\\x^2+3x-m\ge1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge x^2+3x+3\\m\le x^2+3x-1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge\max\limits_{(0;2)}\left(x^2+3x+3\right)\\m\le\min\limits_{(0;2)}\left(x^2+3x-1\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge13\\m\le-1\end{array}\right..$$

Do $m\in\left[-10;20\right]$ nên có 18 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu đề bài.

DẠNG 5

XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM HỢP $y=g(x).f(x), y=\dfrac{g(x)}{f(x)}, y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Câu 52. Cho hàm số $y=f(x)$. Biết $f(0)=0$ và hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
y'	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Khi đó, hàm số $y=xf(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-2;2)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $y=xf(x)\Rightarrow y'=f(x)+xf'(x)$

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=a\end{array}\right.$ với $a<-3$.

Khi đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$.

x	$-\infty$		a		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ ta có $f(x)>0, \forall x\in(-2;0)$

Và $f'(x)<0, \forall x\in(-2;0)\Rightarrow xf'(x)>0, \forall x\in(-2;0)$

Từ đó suy ra $y'=f(x)+xf'(x)>0, \forall x\in(-2;0)$. Do đó hàm số $y=xf(x)$ đồng biến trên $(-2;0)$.

Trên khoảng $(-\infty;0)$ thì $f(x)$ và $xf'(x)$ có thể âm hoặc dương nên không thể kết luận hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;0)\Rightarrow$ đáp án **A** sai.

Trên $(0;2)$ thì $f(x)<0$ và $f'(x)<0\Rightarrow xf'(x)<0\Rightarrow f(x)+xf(x)<0$ nên hàm số nghịch biến trên $(0;2)\Rightarrow$ đáp án **C** sai.

Câu 53. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(-1) = 0$. Biết bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	↘	0	↗		↘	0	↘	$-\infty$

Hàm số $g(x) = (x^2 - x - 2) f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $(-1;1)$.

Lời giải

Chọn C.

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	0	↗		↗		↘	

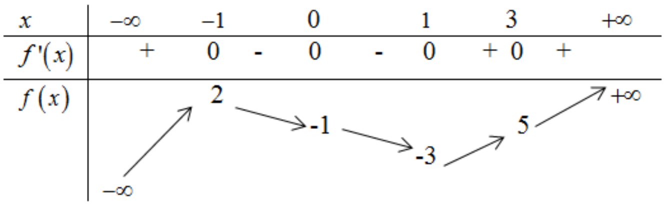
Ta có $g'(x) = (2x-1) f(x) + (x^2 - x - 2) f'(x)$.

Ta lập bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$2x-1$		$-$	|	$-$	0		$+$		|	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	|		$+$		0	Chưa xác định	
$(2x-1)f(x)$		$+$	0	$-$	|		$+$		0	Chưa xác định	
x^2-x-2		$+$	0	$-$	|		$-$		0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	|		$+$		0	$-$	
$(x^2-x-2)f'(x)$		$+$	0	$-$	|		$-$		0	$-$	
$g'(x)$		$+$	|	$-$	|		Chưa xác định		|	Chưa xác định	

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$.

Câu 54. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây



Với $m<0$, hàm số $y=\left(x^2-2x+m\right).f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây

A. $\left(-1;0\right)$. **B.** $\left(0;1\right)$. **C.** $\left(1;3\right)$. **D.** $\left(-\infty;-1\right)$.

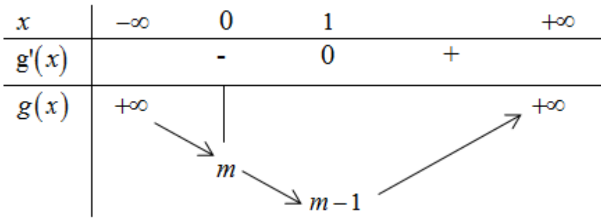
Lời giải

Chọn B.

$y'=\left(2x-2\right).f\left(x\right)+\left(x^2-2x+m\right).f'\left(x\right)$

+ Ta có $2x-2<0,\forall x\in\left(0;1\right)$ và $f\left(x\right)<0,\forall x\in\left(0;1\right)$ (1)

Bảng biến thiên của hàm $y=g\left(x\right)=x^2-2x+m$



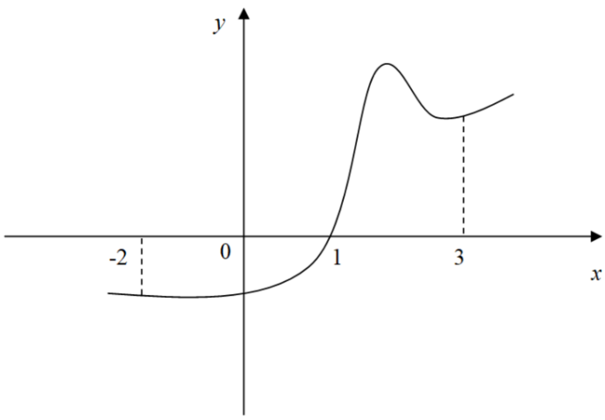
Từ hai BBT suy ra $g\left(x\right)=x^2-2x+m<0,\forall x\in\left(0;1\right)$ (do $m<0$) và $f'\left(x\right)<0,\forall x\in\left(0;1\right)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $y'=\left(2x-2\right).f\left(x\right)+\left(x^2-2x+m\right).f'\left(x\right)>0\quad\forall x\in\left(0;1\right)$.

Trong các khoảng $\left(-\infty;-1\right)$, $\left(-1;0\right)$, $\left(1;3\right)$ thì chưa thể xác định được dấu của

$y'=\left(2x-2\right).f\left(x\right)+\left(x^2-2x+m\right).f'\left(x\right)$ nên dựa vào các đáp án ta **Chọn B**

Câu 55. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ có như sau:



Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ không có giao điểm với trục hoành và $\underset{\mathbb{R}}{Max}\,f\left(x\right)=-1$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ có duy nhất 1 giao điểm với trục hoành.Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{\left(x-1\right)^2\left(\left(-2m^2+1\right)x+m\right)}{f\left(x\right)}$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\underset{\mathbb{R}}{Max}\, f(x)=-1\Rightarrow f(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$

$$g'(x)=\frac{(x-1)\left((-2m^2+1)(3x-1)+2m\right)f(x)-(x-1)^2\left((-2m^2+1)x+m\right)f'(x)}{\left(f(x)\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow g'(x)=\frac{(x-1)\left[\left((-2m^2+1)(3x-1)+2m\right)f(x)-(x-1)\left((-2m^2+1)x+m\right)f'(x)\right]}{\left(f(x)\right)^2}$$

Đặt $\left((-2m^2+1)(3x-1)+2m\right)f(x)-(x-1)\left((-2m^2+1)x+m\right)f'(x)=h(x)$

Vì $g'(x)$ có 1 nghiệm bội lẻ $x=1$ nên để $g'(x)\ge 0$ thì điều kiện cần là $h(x)$

cũng cónghiệm là $x=1$.

$$h(1)=2\left(-2m^2+m+1\right)f(1)=0\Leftrightarrow -2m^2+m+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=\dfrac{-1}{2}\end{array}\right.$$

Th1: Với $m=1$ ta có

$$g'(x)=\frac{-3(x-1)^2f(x)+(x-1)^3f'(x)}{\left(f(x)\right)^2}>0\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

TH2: Với $m=\dfrac{-1}{2}$ ta có

$$g'(x)=\frac{1}{2}.\frac{3(x-1)^2f(x)-(x-1)^3f'(x)}{\left(f(x)\right)^2}<0\ \forall x\in\mathbb{R}$$

Vậy có 1 giá trị m thỏa mãn đề bài yêu cầu.

DẠNG 6

XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM $y=f(x)$ KHI BIẾT HÀM $y=f'(u(x))$

Câu 56. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên R và có đạo hàm $f'\left(x\right)$ thỏa mãn $f'\left(x\right)=\left(1-x\right)\left(x+2\right)g\left(x\right)+2022$ với $g\left(x\right)<0,\forall x\in R$. Khi đó hàm số $y=f\left(1-x\right)+2022x+2023$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $\left(1;+\infty\right)$. **B.** $\left(0;3\right)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $\left(4;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn D.

Xét hàm số $y=h(x)=f(1-x)+2022x+2023$

Ta có $h'(x)=-f'(1-x)+2022=-x(3-x)g(1-x)$

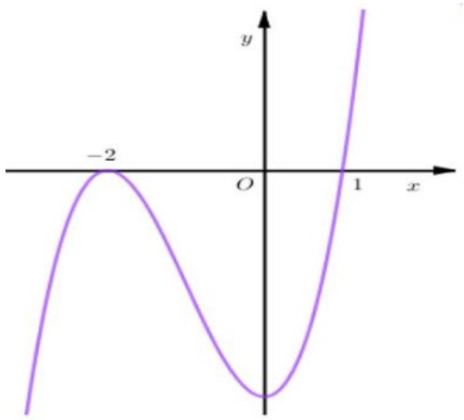
Vì $g(x)<0,\forall x\in R$ nên $h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y		↘		↗		↘	

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(4;+\infty\right)$.

Câu 57. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(3x+5\right)$ như hình vẽ. Hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch trên khoảng nào?



A. $(-\infty;8)$. **B.** $\left(-\dfrac{7}{3};+\infty\right)$. **C.** $\left(\dfrac{4}{3};+\infty\right)$. **D.** $(-\infty;10)$.

Lời giải

Chọn A.

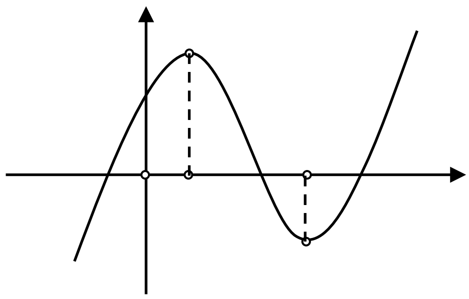
Đặt $x=3t+5$. Khi đó $g\left(t\right)=f\left(3t+5\right)\Rightarrow g'\left(t\right)=3f'\left(3t+5\right)$.

Ta có $g'\left(t\right)<0\Leftrightarrow f'\left(3t+5\right)<0\Leftrightarrow t<1$.

Khi đó $f'\left(x\right)<0\Leftrightarrow\dfrac{x-5}{3}<1\Leftrightarrow x<8$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;8)$.

Câu 58. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $f(3x-2)$ nghịch biến trên khoảng $(\alpha;\beta)$. Khi đó giá trị lớn nhất của $\beta-\alpha$ là:



A. 9. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D.

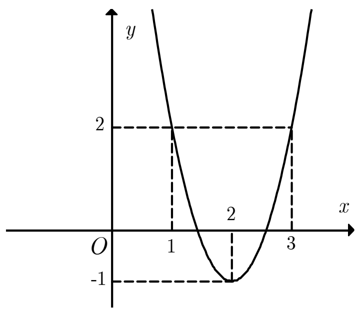
Ta có: $y=f(3x-2)\Rightarrow y'=3.f'(3x-2)$.

Hàm số $y=f(3x-2)$ nghịch biến $\Leftrightarrow y'\le 0\Leftrightarrow 3.f'(3x-2)\le 0\Leftrightarrow f'(3x-2)\le 0$.

$\Leftrightarrow 1\le 3x-2\le 4\Leftrightarrow 1\le x\le 2$.

Vậy khoảng $(\alpha;\beta)$ lớn nhất là $(1;2)$.

Câu 59. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x-2)+2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;2)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B.

Cách 1: Dựa vào đồ thị (C) ta có: $f'(x-2)+2<2,\forall x\in(1;3)\Leftrightarrow f'(x-2)<0,\forall x\in(1;3)$.

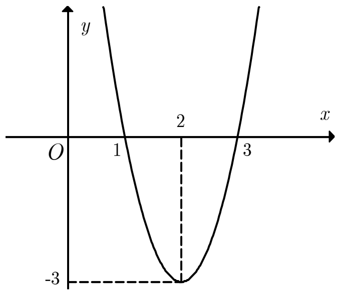
Đặt $x^*=x-2$ thì $f'(x^*)<0,\forall x^*\in(-1;1)$.

Vậy: Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

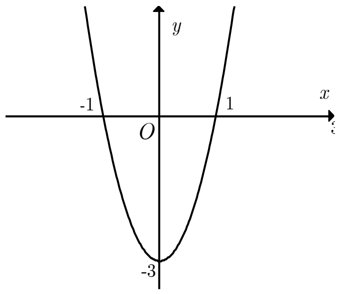
Phân tích: Cho biết đồ thị của hàm số $f'(x)$ sau khi đã tịnh tiến và dựa vào đó để xét sự đồng biến của hàm số $f(x)$.

Cách 2: Tịnh tiến đồ thị

Từ đồ thị hàm số $f'(x-2)+2$ tịnh tiến xuống dưới 2 đơn vị, ta được đồ thị hàm số $f'(x-2)$ (tham khảo hình vẽ bên dưới).

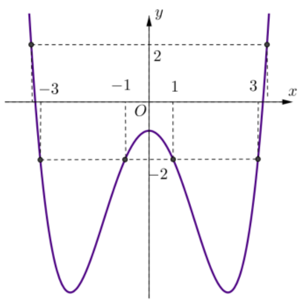


Tiếp tục tịnh tiến đồ thị hàm số $f'(x-2)$ sang trái 2 đơn vị, ta được đồ thị hàm số $f'(x)$ (tham khảo hình vẽ bên dưới).



Từ đồ thị hàm số $f'(x)$, ta thấy $f'(x)<0$ khi $x\in(-1;1)$.

Câu 60. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x+2)-2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?



A. $(-3;-1)$, $(1;3)$. **B.** $(-1;1)$, $(3;5)$. **C.** $(-\infty;-2)$, $(0;2)$. **D.** $(-5;-3)$, $(-1;1)$.

Lời giải

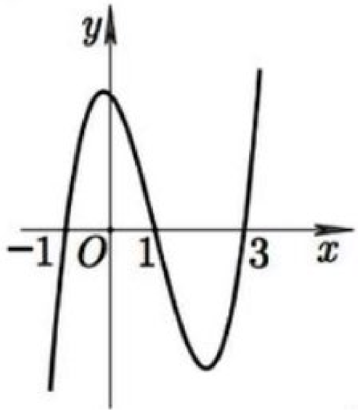
Chọn B.

Dựa vào đồ thị (C) ta có: $f'(x+2)-2<-2,\forall x\in(-3;-1)\cup(1;3)\Leftrightarrow f'(x+2)<0,\forall x\in(-3;-1)\cup(1;3)$.

Đặt $x^*=x+2$ suy ra: $f'(x^*)<0,\forall x^*\in(-1;1)\cup(3;5)$.

Vậy hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$, $(3;5)$.

Câu 61. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'\left(2x+\dfrac{3}{2}\right)$ như hình vẽ bên.



Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right)$. **B.** $\left(-\frac{5}{4};\frac{1}{4}\right)$. **C.** $\left(\frac{3}{4};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta cần giải bất phương trình $y'=f'(x)>0$.

Dựa vào đồ thị $y=f'\left(2x+\frac{3}{2}\right)$. Ta có $f'\left(2x+\frac{3}{2}\right)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1<x<1\\ x>3\end{array}\right.$ (*)

Đặt $t=2x+\frac{3}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}(2x-3)$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow f'(t)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1<\frac{2t-3}{4}<1\\ \frac{2t-3}{4}>3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\frac{1}{2}<t<\frac{7}{2}\\ t>\frac{15}{2}\end{array}\right.$.

Do đó hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right)$ và $\left(\frac{15}{2};+\infty\right)$.

Câu 62. Cho hàm số $y=f(x+2)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-4		-2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây

A. $(0;2)$ **B.** $(2;5)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-4;-2)$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\left[f(x+2)\right]'=(x+2)'.f'(x+2)=f'(x+2)$

Đặt $t = x + 2$ khi đó $y = f\left(x+2\right) = f\left(t\right)$ và $y' = \left[f\left(x+2\right)\right]' = f'\left(t\right)$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $y = f\left(x+2\right)$ ta có $f'\left(x+2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Suy ra $f'\left(t\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 0 \end{array}\right.$

Vậy ta có bảng biến thiên của hàm $y = f\left(x\right)$ như sau

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra hàm số $y = f\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left(-2;0\right)$

CHỦ ĐỀ 6

CỰC TRỊ CỦA HÀM HỢP LIÊN QUAN ĐẾN $f'(x), f'(u)$

DẠNG 1

XÉT CỰC TRỊ HÀM $g(x)=f(u(x))$

VẤN ĐỀ 1

XÉT CỰC TRỊ HÀM $g(x)=f(u(x))$ KHÔNG CHỨA THAM SỐ

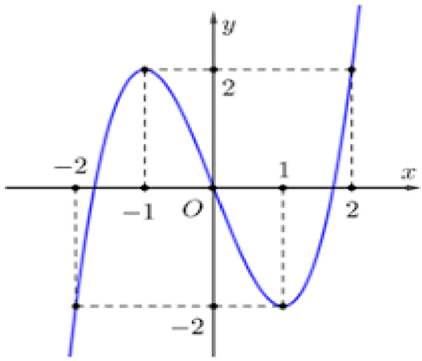
Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^2-1)(x-4)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(3-x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)=x^2(x-2028)(x-2023)^2$. Khi đó hàm số $y=g(x)=f(x^2+2019)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

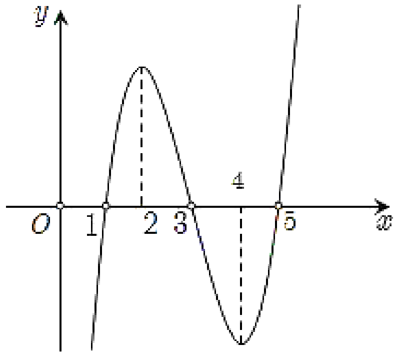
Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hàm số $y=f(x+2022)$ có mấy cực trị ?

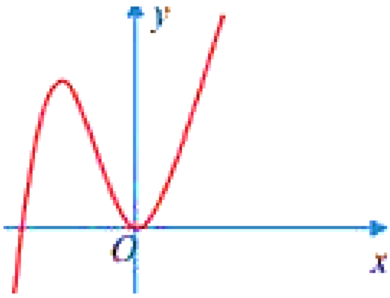
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$. Biết $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x-1)-2021$ đạt **cực đại** tại điểm nào dưới đây?



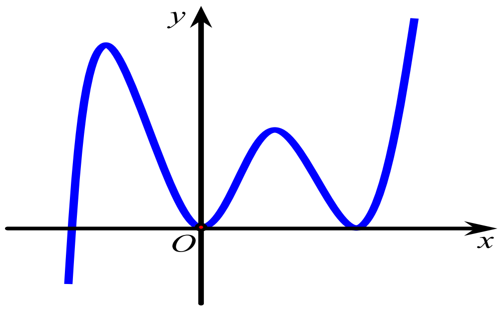
A. $x=2$ **B.** $x=4$ **C.** $x=1$ **D.** $x=3$

Câu 5. Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng K, biết đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên K như hình vẽ. Tìm số cực trị của hàm số $g(x)=f(x+1)$ trên K?



A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ của nó trên khoảng K như hình vẽ.



Khi đó trên K, hàm số $y=f(x-2021)+2021$ có bao nhiêu điểm cực trị?

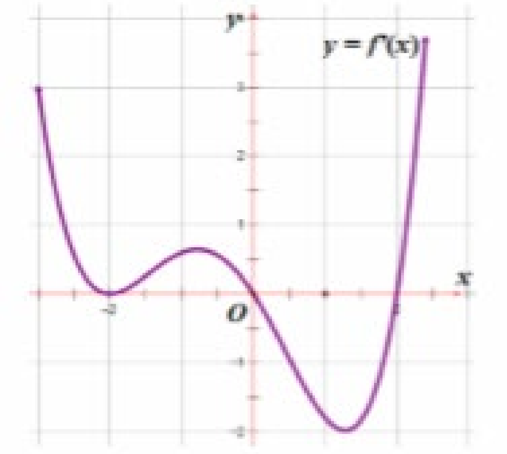
A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A.

Đồ thị hàm số $f'(x-2021)$ là phép tịnh tiến của đồ thị hàm số $f'(x)$ theo phương trục hoành nên đồ thị hàm số $f'(x-2021)$ vẫn cắt trục hoành 1 điểm.

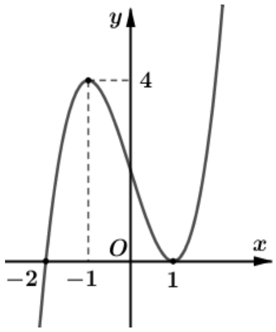
Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $y=f(1-x)-\dfrac{2022}{2021}$ là

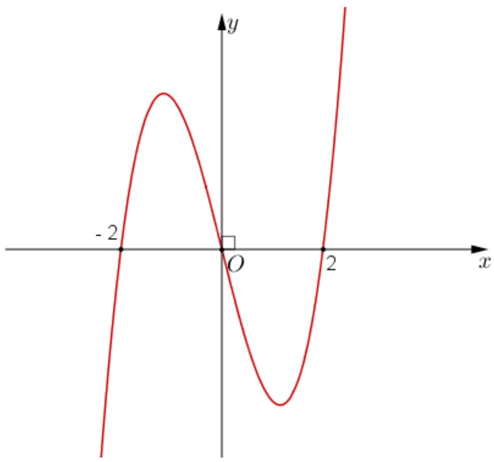
A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm $f'(x)$ như đồ thị hình bên dưới. Hỏi hàm số $g(x)=f(-x^2+3x)-3$ có bao nhiêu điểm **cực đại** ?



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

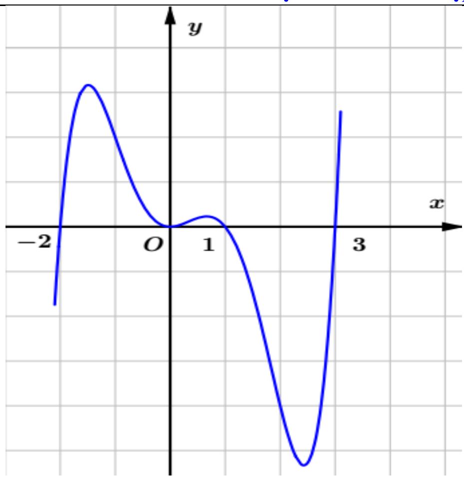
Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên tập $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình sau:



Hàm số $y=f(x^2-x)-5$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

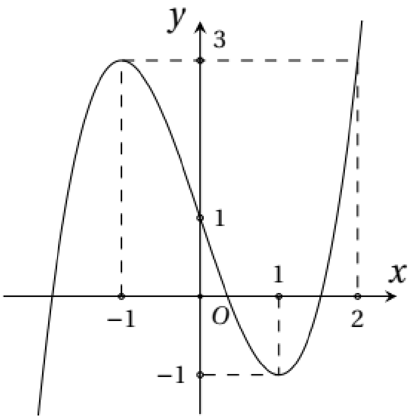
Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình bên.



Hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2\right)-\sqrt{2021}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

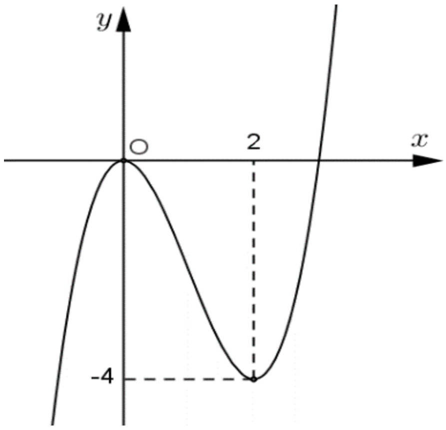
Câu 11. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đúng hai điểm cực trị $x=-1, x=1$, có đồ thị như hình vẽ sau:



Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-2x+1\right)+2021$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 12. Biết rằng hàm số $f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f\left[f\left(x\right)\right]$.



A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 13. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, bảng biến thiên của hàm số $f'\left(x\right)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(x^2 + 2x\right)$ là

A. 4. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 7.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biên thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có bảng xét dấu sau

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số $y = g(x) = f\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm như hình vẽ.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Đặt $g(x) = f\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = g(x)$.

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 8.

VẤN ĐỀ 2

XÉT CỰC TRỊ HÀM $g(x)=f(u(x))$ CÓ LIÊN QUAN THAM SỐ m

Câu 17. **(Đề tham khảo của BGD năm 2022)**

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x^2+10x, \forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(x^4-8x^2+m\right)$ có đúng 9 điểm cực trị?.

A. 16. **B.** 9. **C.** 15. **D.** 10.

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2\left(x^2-2x\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(x^2-8x+m\right)$ có 5 điểm cực trị?

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)\left(x^2+2mx+5\right)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có **đúng** một điểm cực trị?

A. 7. **B.** 0. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để $g(x)=f\left(x^2-2x-m\right)$ có 5 điểm cực trị?

A. 10. **B.** 15. **C.** 20. **D.** 21.

DẠNG 2

XÉT CỰC TRỊ HÀM SỐ $g(x)=f(x)+h(x)$

VẤN ĐỀ 1
CỰC TRỊ HÀM $g(x)=f(x)+h(x)$ KHÔNG CHỨA THAM SỐ

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\frac{2}{9}x^3-\frac{2}{9}x^2-x+3$. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)=2f(x)-(x+1)^2$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=(x+1)(2x^2-3x-9)$. Hỏi hàm số $g(x)=f(x)+x^3-3x^2-9x+6$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

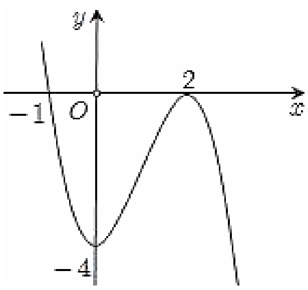
Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=3.(x^2-1)(x-2)$. Khi đó hàm số $g(x)=f(x)-x^3+3x$ đạt cực đại tại

A. $x=1$. **B.** $x=2$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=3$.

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x)=(1-x)(x+2)g(x)+2019$ với $g(x)<0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(1-x)+2019x+2020$ đạt cực đại tại

A. $x_0=1$. **B.** $x_0=2$. **C.** $x_0=0$. **D.** $x_0=3$.

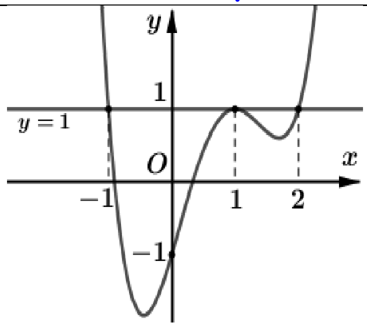
Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $y=g(x)=f(x)+4x$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

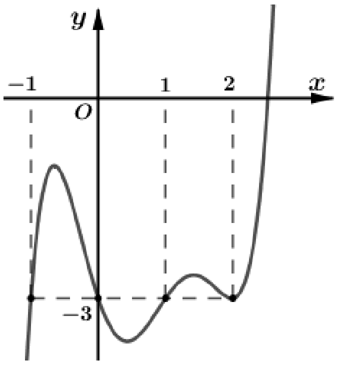
Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau.



Đặt $g(x)=f(x)+x$. Tìm số cực trị của hàm số $g(x)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

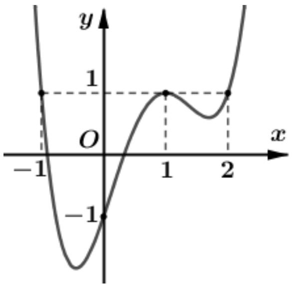
Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$.



Hỏi hàm số $g(x)=f(x)+3x$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 7.

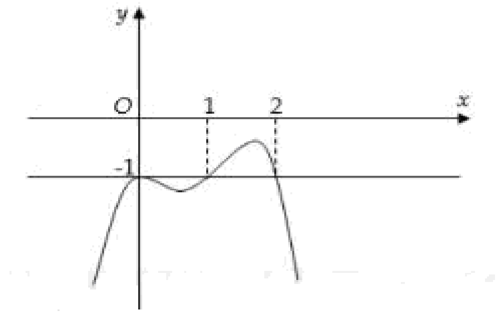
Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $g(x)=f(x)-x$ đạt cực đại tại

A. $x=-1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=1$. **D.** $x=2$.

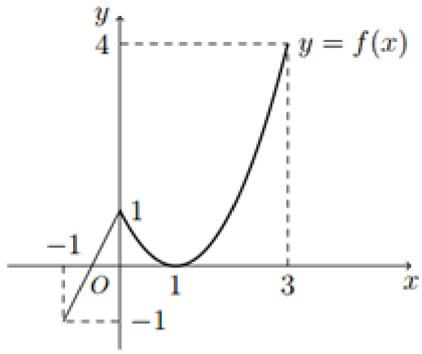
Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)$. Biết đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Xác định điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f(x)+x$.

A. Không có cực tiểu. **B.** $x=0$. **C.** $x=1$. **D.** $x=2$.

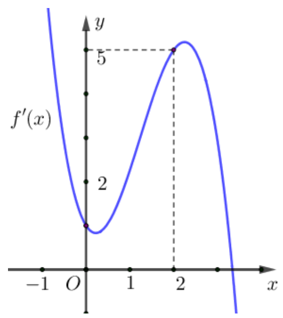
Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hàm số $y=f(x)-\dfrac{2020x-1}{2021}$ có mấy cực trị ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

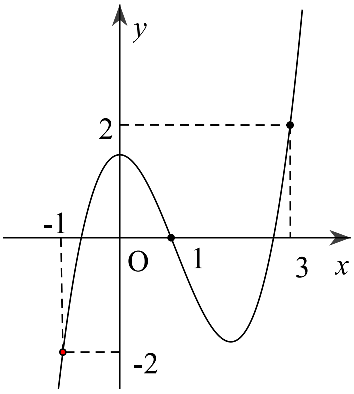
A. Hàm số $y=f(x)-x^2-x+2021$ đạt cực đại tại $x=0$.

B. Hàm số $y=f(x)-x^2-x+2021$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

C. Hàm số $y=f(x)-x^2-x+2021$ không có cực trị.

D. Hàm số $y=f(x)-x^2-x+2021$ không đạt cực trị tại $x=0$.

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $g(x)=2f(x)-x^2+2x+2021$.



Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(1;3)$.

B. Hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị đại.

C. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-1;1)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(3;+\infty)$.

Câu 33. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

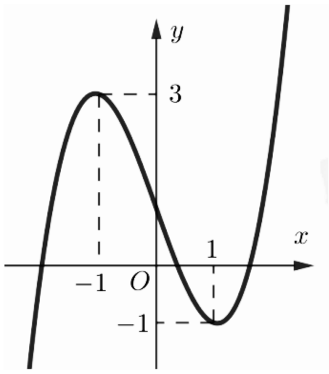
Hỏi hàm số $g(x)=f(x)+x^3+3x^2-9x-5$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

VẤN ĐỀ 2

XÉT CỰC TRỊ HÀM $g(x)=f(x)+h(x)$ CÓ LIÊN QUAN THAM SỐ m

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-12\ ;12)$ sao cho hàm số $y=f(x)+mx+12$ có đúng một điểm cực trị?



A. 5. **B.** 18. **C.** 20. **D.** 12.

Câu 35. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^2-3)(x^2+1)$ với $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=f(x)-mx$ có 4 điểm cực trị?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

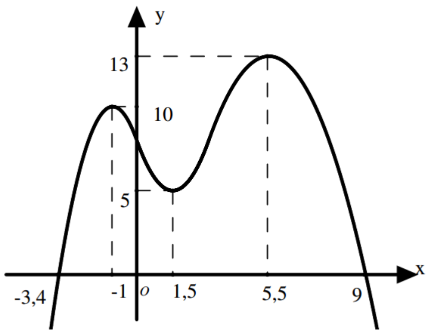
Câu 36. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=-x^3-2x^2,\forall x\in\mathbb{R}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f(x)+mx+3$ có 3 điểm cực trị.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 37. Cho hàm số $y=f(x)$ có biểu thức đạo hàm $f'(x)=(x+3)(x-1)(x-2)$ và hàm số $y=g(x)=6f(x)+2x^3+3(m+1)x^2-6(m+2)x+2021$. Gọi $S=(-\infty;a)\cup(b;c)$ là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=g(x)$ có ba cực trị. Giá trị của $a+2b+3c$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 38. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên R và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới và $f'(x)<0$ với mọi $x\in(-\infty;-3,4)\cup(9;+\infty)$.



Đặt $g(x)=f(x)-mx+5$. Có bao nhiêu giá trị dương của tham số m để hàm số $g(x)$ có **đúng** hai điểm cực trị?

A. 4. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

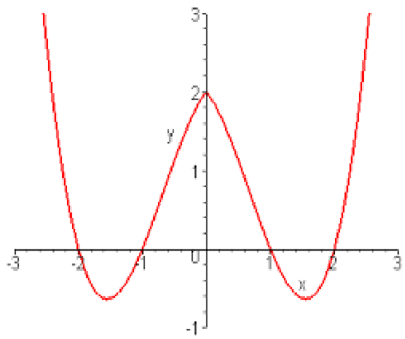
DẠNG 3

XÉT CỰC TRỊ HÀM SỐ $g(x)=f\left(u(x)\right)+h(x)$

VẤN ĐỀ 1

CỰC TRỊ HÀM $g(x)=f(u(x))+h(x)$ KHÔNG CHỨA THAM SỐ

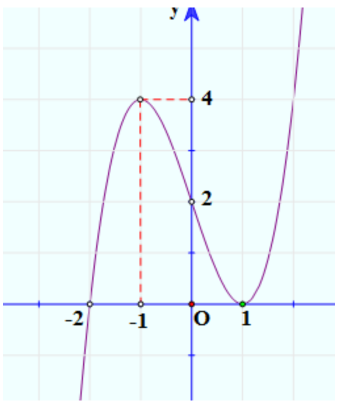
Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên R. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hàm số $y=f(x+1)-x$ có mấy cực đại ?

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 40. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên R, có đồ thị hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ sau:



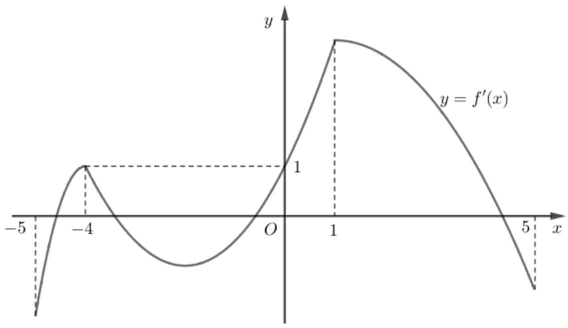
Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)=f(x-2019)+2017x-2018$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(2-x)(x^2-8)^{2019}, \forall x\in R$. Hàm số $y=f(x^2-2)+\frac{1}{2}x^4-4x^2+2021$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

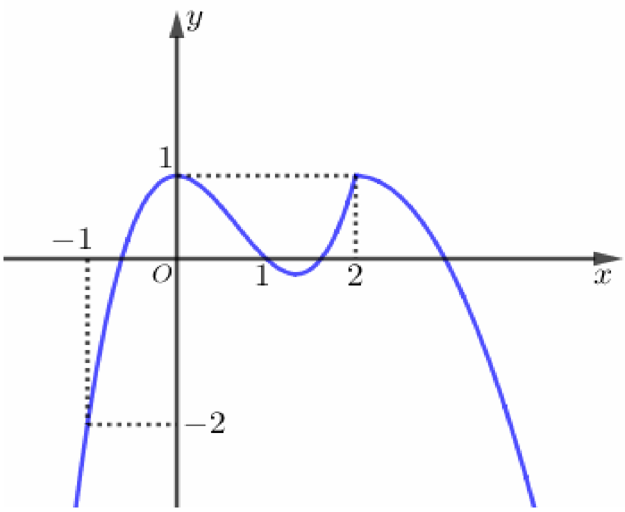
A. 4. **B.** 2021. **C.** 5. **D.** 2020.

Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(x^2+4x)-x^2-4x$ có bao nhiêu điểm cực trị thuộc khoảng $(-5;1)$?



A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Câu 43. Cho hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=f(x^2)-\frac{x^6}{3}+x^4-x^2$ đạt cực tiểu tại bao nhiêu điểm?

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Đặt $g(x)=f(x+2)+\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+2021$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y=g(x)$ đạt cực đại tại $x=1$.

B. Hàm số $y=g(x)$ có 1 điểm cực trị.

C. Hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;4)$.

D. $g(5)>g(6)$ và $g(0)>g(1)$.

DẠNG 4

XÉT CỰC TRỊ HÀM SỐ $g(x)=\left[f(u(x))\right]^k$

Lý thuyết:

Bước 1:

Tính $y'=g'(x)=k.u'(x).\left[f(u(x))\right]^{k-1}.f'(u(x))$

+ Nếu: k chẵn: $y'=g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u'(x)=0 \\ f(u(x))=0 \\ f'(u(x))=0 \end{array}\right.$.

+ Nếu k lẻ: $y'=g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u'(x)=0 \\ f'(u(x))=0 \end{array}\right.$

Bước 2: Giải tìm nghiệm:

$u'(x)=0$ ta giải bình thường.

$f'(u(x))=0$ thì ta cho $u(x)$ bằng các điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$

$f(u(x))=0$ thì ta cho $u(x)$ bằng các các nghiệm x_0 của phương trình $f(x)=0$ hoặc điều kiện của x_0 để chứng minh được phương trình có bao nhiêu nghiệm cụ thể.

Kiểm chứng các nghiệm trên có nghiệm nào bội chẵn không

Bước 3: Kết luận

VẤN ĐỀ 1

CỰC TRỊ HÀM $g(x)=\left[f(u(x))\right]^k$ KHÔNG CHỨA THAM SỐ

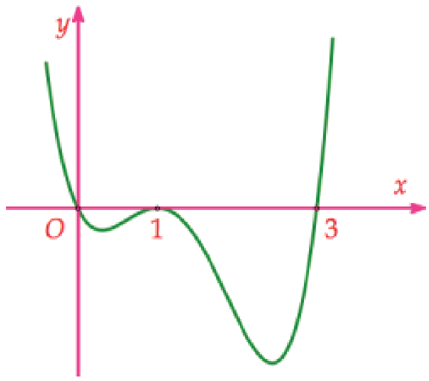
Câu 45. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=3x^2-3$ và $f(2)=4$. Hàm số $g(x)=\left[f(1-2x)\right]^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 46. Cho hàm số bậc bốn trùng phương $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=4x^3-4x$ và $f(0)=-1, f(-1)=-2$. Hàm số $g(x)=2f^3(x)+4f^2(x)+1$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 4. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 47. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ

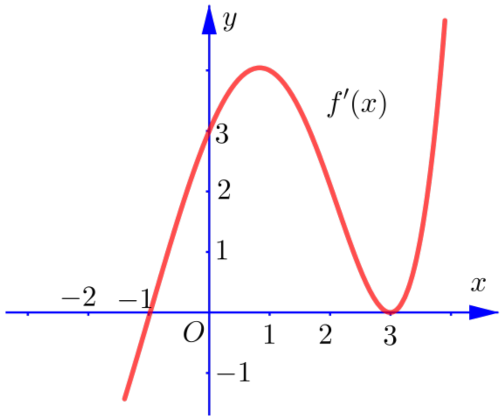


Đồ thị hàm số $y=(f(x))^2$ có bao nhiêu điểm cực đại, cực tiểu?

A. 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu. **B.** 2 điểm cực tiểu, 3 điểm cực đại.

C. 2 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu. **D.** 1 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

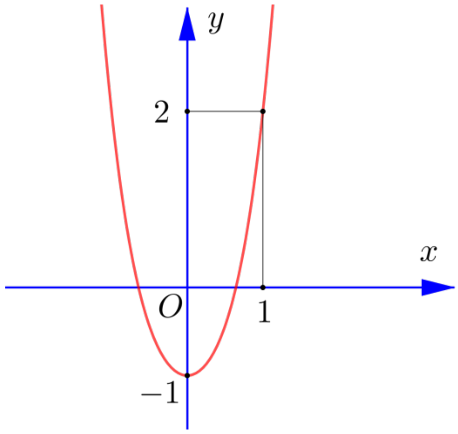
Câu 48. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn có $f(-1)=0$, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left[f(x)\right]^2$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

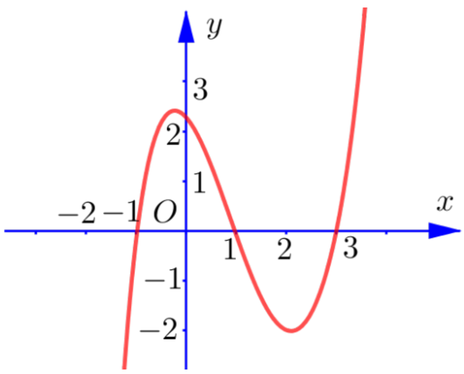
Câu 49. Cho hàm số $y=f(x)=mx^5+nx^3+px$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ:



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left[f(x+2)\right]^5$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

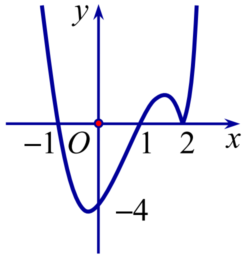
Câu 50. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn có $f(1)=0$ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left[f\left(x^2-2x\right)\right]^4$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 51. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên tập $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y=f^{2019}\left(x^3-1\right)$ là



A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 52. Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^4\left[f(x+1)\right]^2$ là

A. 11. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 5.

Câu 53. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	0	-	
f(x)	$-\infty$	↘	2	↗	5	↘	$+\infty$

Số cực trị của hàm số $g(x)=f^2(2x^2+x)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 54. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	2	↗	7	↘	$-\infty$

Hỏi hàm số $y=\left[f(2-x)\right]^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 55. Cho hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y=\left[f\left(4-x^2\right)\right]^3$ có bao nhiêu cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 56. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Biết rằng hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

Hỏi hàm số $y=f^2\left(x^2-2x\right)$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 57. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

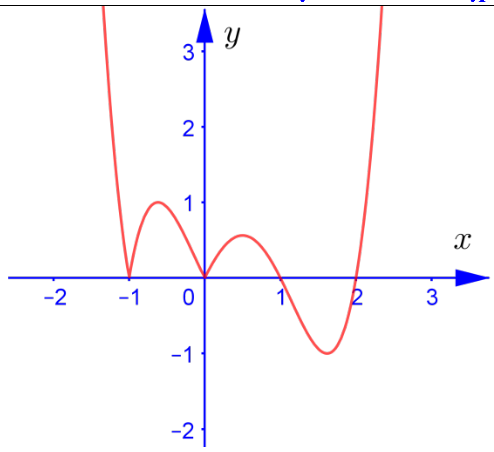
Hàm số $g(x)=\left(f\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)\right)^{2022}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 7 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 6

VẤN ĐỀ 2

XÉT CỰC TRỊ HÀM $g(x)=\left[f\left(u(x)\right)\right]^k$ LIÊN QUAN ĐẾN THAM SỐ m

Câu 58. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc 6 có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=\left[f(x+1)^3+m\right]^7$ có 2 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** Vô số.

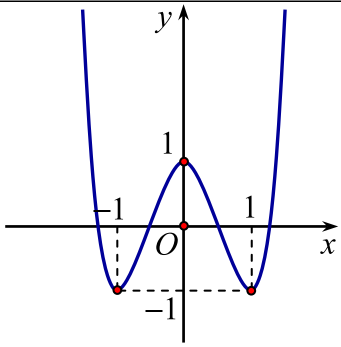
Câu 59. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 2, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\left[f'(x)\right]^2+f(x)f''(x)=15x^4+12x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(x).f'(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

DẠNG 5

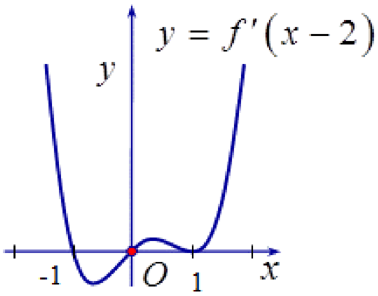
BIẾT HÀM $y=f'(u(x))$ TÌM CỰC TRỊ HÀM $y=f(x)$

Câu 60. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R, biết rằng hàm số $y=f'(x-2)+2$ có đồ thị như hình vẽ sau. Hỏi hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực trị?



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 61. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x-2)$ có đồ thị như hình dưới. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là:



A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 62. Cho $y = f(x)$ là hàm số xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết bảng xác dấu của $y = f'(3-2x)$ như sau:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{5}{2}$		3		4		$+\infty$
$f'(3-2x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 63. Cho $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết bảng xét dấu của $y = f'\left(\sqrt[3]{x}\right)$ như sau

x	$-\infty$		-1		8		27		$+\infty$
$f'\left(\sqrt[3]{x}\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

DẠNG 6
CỰC TRỊ LIÊN QUAN ĐẾN HÀM CHỨA TRỊ TUYỆT ĐỐI

- Hàm số $y = f(x)$ có n số điểm cực trị dương thì hàm số $y = f(|x|)$ có $2n+1$ số điểm cực trị.

• Hàm số $y=f(x)$ có n số điểm cực trị và phương trình $f(x)=0$ có m số nghiệm đơn và bội lẻ thì hàm số $y=|f(x)|$ có $n+m$ số điểm cực trị.

• Hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị x_1,x_2. Khi đó hàm số $y=|f(x)|$ có:

+ 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow f(x_1).f(x_2)\geq 0$

+ 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow f(x_1).f(x_2)<0$

VẤN ĐỀ 1

CỰC TRỊ LIÊN QUAN ĐẾN HÀM CHỨA TRỊ TUYỆT ĐỐI KHÔNG CHỨA THAM SỐ m

Câu 64. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^3-2x^2)(x^3-2x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=|f(1-2018x)|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 9. **B.** 2018. **C.** 2022. **D.** 11.

Câu 65. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu $f'(x)$. Hàm số $y=f(|x-3|)$ có bao nhiêu điểm cực trị

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 66. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như hình vẽ bên

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hỏi hàm số $y=f(x^2-2|x|)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị

A. 4. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 11.

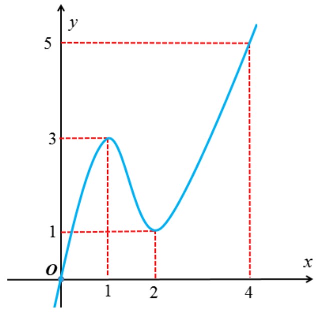
Câu 67. Cho hàm số $y=f(x)$ là một hàm đa thức có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x^2-|x|)$

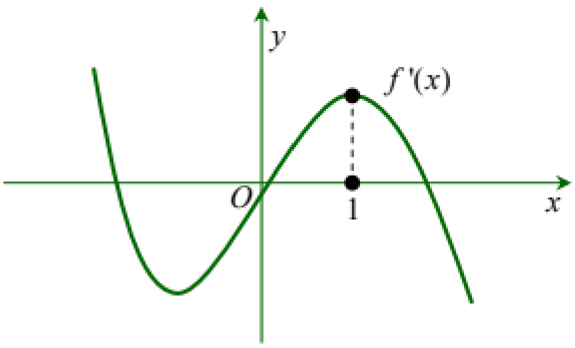
A. 5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 7.

Câu 68. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0)=0; f(4)>4$. Biết hàm $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f(x^2)-2x\right|$.



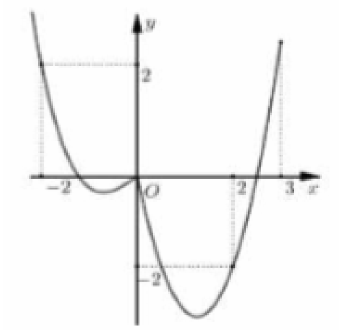
A. 5. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 69. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ có đồ thị đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y=f(|x|+|x-1|)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

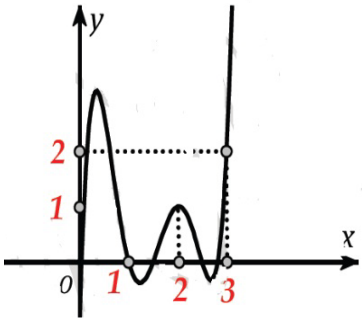
Câu 70. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên.



Hàm số $y=\left|f(x)+\frac{1}{2}x^2-f(0)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị trong khoảng (-2;3)

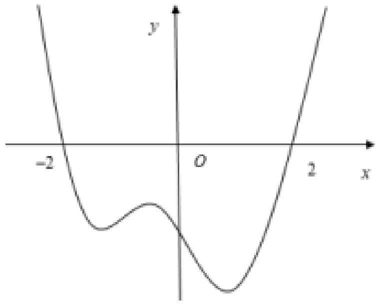
A. 6 **B.** 2 **C.** 5 **D.** 3

Câu 71. Cho hàm số $y=f(x)$ và đồ thị hình bên là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hỏi đồ thị của hàm số $g(x)=\left|2f(x)-(x-1)^2\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 9. **B.** 11. **C.** 8. **D.** 7.

Câu 72. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f(-2)<0$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai** ?



A. Hàm số $y=\left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số $y=\left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$ có hai cực tiểu.

C. Hàm số $y=\left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$ có hai cực đại và một cực tiểu.

D. Hàm số $y=\left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

VẤN ĐỀ 2

HÀM CHỨA THAM SỐ

Câu 73. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m>-10$ để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 74. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có **đúng** 1 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 75. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2(x^2+m^2-3m-4)^3(x+3)^5$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 3 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

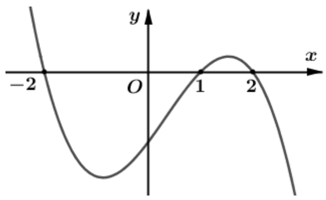
Câu 76. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^4(x-m)^5(x+3)^3$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-5;5]$ để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 3 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 77. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^3-2x^2)(x^3-2x)$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=|f(1-2018x)|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

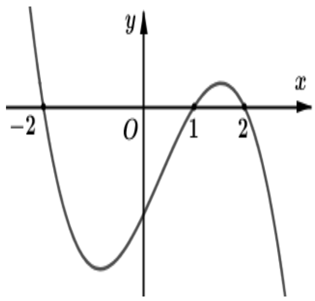
A. 9. **B.** 2022. **C.** 11. **D.** 2018.

Câu 78. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên R và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đặt $g(x)=f(|x+m|)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị?



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** Vô số.

Câu 79. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên R và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Đặt $g(x)=f(|x|+m)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)$ có **đúng** 5 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** Vô số.

CHỦ ĐỀ 6
CỰC TRỊ CỦA HÀM HỢP LIÊN QUAN ĐẾN $f'(x), f'(u)$

DẠNG 1
XÉT CỰC TRỊ HÀM $g(x)=f(u(x))$

VẤN ĐỀ 1
XÉT CỰC TRỊ HÀM $g(x)=f(u(x))$ KHÔNG CHỨA THAM SỐ

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^2-1)(x-4)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(3-x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết, ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Ta có $g(x)=f(3-x)\Rightarrow g'(x)=-f'(3-x)$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta có

$$g'(x)\ge 0\Leftrightarrow f'(3-x)\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3-x\le -1\\ 1\le 3-x\le 4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 4\\ -1\le x\le 2\end{array}\right..$$

Như thế ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy hàm số $g(x)$ có một điểm cực đại.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)=x^2(x-2028)(x-2023)^2$. Khi đó hàm số $y=g(x)=f(x^2+2019)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=g(x)=f\left(x^2+2019\right)\Rightarrow y'=g'(x)=\left(x^2+2019\right)'f'\left(x^2+2019\right)=2x.f'\left(x^2+2019\right)$.

Mặt khác $f'(x)=x^2(x-2028)(x-2023)^2$. Nên suy ra:

$$y'=g'(x)=2x.f'\left(x^2+2019\right)=2x.\left(x^2+2019\right)^2\left(x^2+2019-2028\right)\left(x^2+2019-2023\right)^2$$
$$=2x.\left(x^2+2019\right)^2\left(x^2-9\right)\left(x^2-4\right)^2=2x.\left(x^2+2019\right)^2(x-3)(x+3)(x-2)^2(x+2)^2.$$

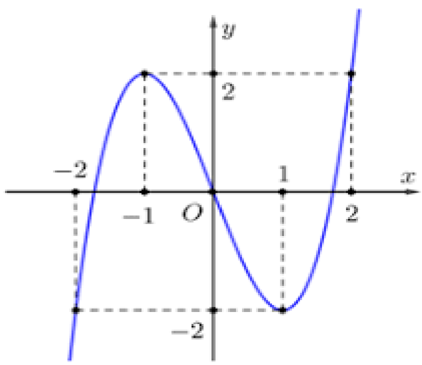
$$y'=2x.\left(x^2+2019\right)^2(x-3)(x+3)(x-2)^2(x+2)^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\ (nghiem\ don)\\x=3\ (nghiem\ don)\\x=-3\ (nghiem\ don)\\x=2\ (nghiem\ boi\ 2)\\x=-2\ (nghiem\ boi\ 2)\end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-3		-2		0		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↗		↘		↘		↗	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y=g(x)=f\left(x^2+2019\right)$ có tất cả 3 điểm cực trị.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hàm số $y=f(x+2022)$ có mấy cực trị ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

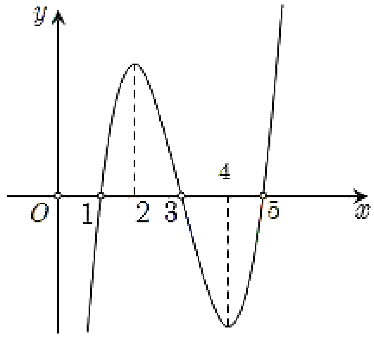
Chọn C.

$y'=\left[f(x+2022)\right]'=(x+2022)'f'(x+2022)=f'(x+2022)$

Đồ thị $f'(x+2022)$ là phép tịnh tiến của đồ thị $f'(x)$ theo phương trục Ox qua bên trái 2022 đơn vị nên đồ thị $f'(x+2022)$ vẫn cắt trục Ox 3 điểm bằng số giao điểm mà đồ thị $f'(x)$ cắt trục Ox

$\Rightarrow$ 3 cực trị

Câu 4. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Biết $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$ và hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g\left(x\right)=f\left(x-1\right)-2021$ đạt **cực đại** tại điểm nào dưới đây?



A. $x=2$ **B.** $x=4$ **C.** $x=1$ **D.** $x=3$

Lời giải

Chọn B.

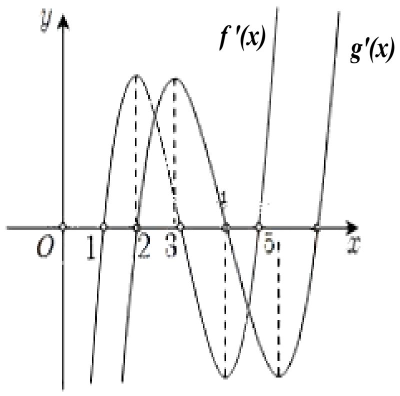
Cách 1 :

$$g'\left(x\right)=f'\left(x-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=1\\x-1=3\\x-1=5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=4\\x=6\end{array}\right.$$

$$g'\left(x\right)=f'\left(x-1\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1<x-1<3\\x-1>5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2<x<4\\x>6\end{array}\right.$$

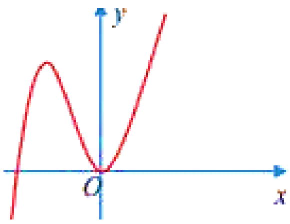
x	$-\infty$		2		4		6		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y		↘		↗		↘		↗	

Cách 2 : đồ thị hàm số $g'\left(x\right)=f'\left(x-1\right)$ là phép tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ theo phương trục hoành sang phải 1 đơn vị.



Đồ thị hàm số $g'\left(x\right)=f'\left(x-1\right)$ cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ $x=2;x=4;x=6$ và giá trị hàm số $g'\left(x\right)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua điểm $x=4$.

Câu 5. Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng K, biết đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên K như hình vẽ. Tìm số cực trị của hàm số $g(x)=f(x+1)$ trên K?



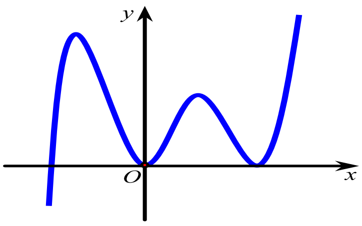
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $g'(x)=f'(x+1)$ có đồ thị là phép tịnh tiến của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ theo phương trục hoành sang trái 1 đơn vị. Khi đó đồ thị hàm số $g'(x)=f'(x+1)$ vẫn cắt trục hoành tại 1 điểm.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ của nó trên khoảng K như hình vẽ.



Khi đó trên K, hàm số $y=f(x-2021)+2021$ có bao nhiêu điểm cực trị?

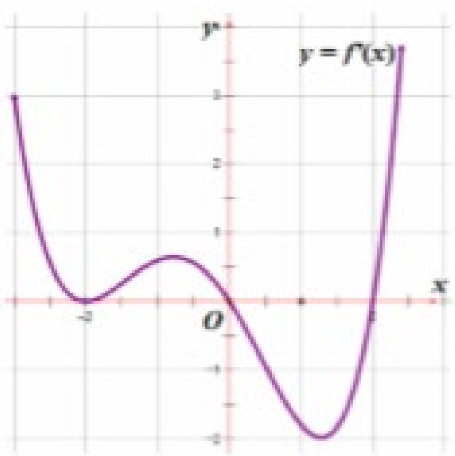
A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A.

Đồ thị hàm số $f'(x-2021)$ là phép tịnh tiến của đồ thị hàm số $f'(x)$ theo phương trục hoành nên đồ thị hàm số $f'(x-2021)$ vẫn cắt trục hoành 1 điểm.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $y=f(1-x)-\dfrac{2022}{2021}$ là

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

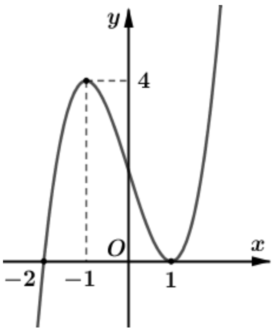
Lời giải

Chọn D.

Từ hình vẽ ta thấy đồ thị $f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt hay $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$ nhưng chỉ có 2 nghiệm $x=0, x=2$ là $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm hoặc từ âm sang dương, như vậy hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.

Nhận thấy $(f(1-x))'=-f'(1-x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-x=-2 \\ 1-x=0 \\ 1-x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$ nhưng chỉ có hai nghiệm $x=1; x=-1$ là $f'(x)$ đổi dấu, như vậy hàm số $f(x)$ chỉ có hai điểm cực trị.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm $f'(x)$ như đồ thị hình bên dưới. Hỏi hàm số $g(x)=f\left(-x^2+3x\right)-3$ có bao nhiêu điểm **cực đại** ?



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $g'(x)=(-2x+3).f'\left(-x^2+3x\right)$;

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2x+3=0 \\ f'\left(-x^2+3x\right)=0 \end{array}\right. \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f(x)} \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2} \\ -x^2+3x=-2 \\ -x^2+3x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2} \\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2} \\ x=0 \\ x=3 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{17}}{2}$		0		$1,5$		3		$\frac{3+\sqrt{17}}{2}$		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
g		↗		↘		↗		↘		↗		↘	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta chọn A

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau:

Ví dụ chọn $x=4\in\left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{2};+\infty\right)$

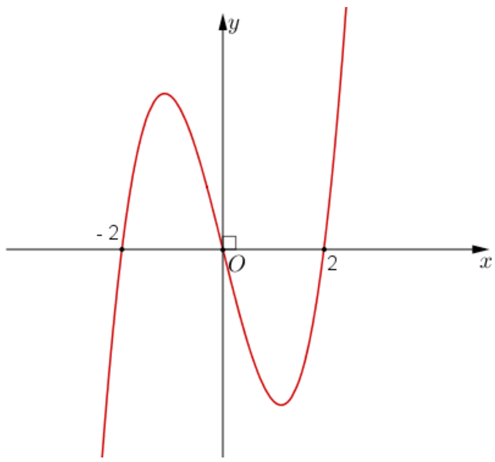
$-2x+3=-5<0.\quad(1)$

$-x^2+3x=-4\xrightarrow{\text{theo do thi } f(x)} f'(-4)>0$ (vì f đang tăng). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $g'(x)=(-2x+3)f'(-x^2+3x)<0$ trên khoảng $\left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{2};+\infty\right)$.

Nhận thấy các nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ là các nghiệm bội lẻ nên $g'(x)$ qua nghiệm đổi dấu.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên tập $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình sau:



Hàm số $y=f\left(x^2-x\right)-5$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C.

Xét hàm số $y=f\left(x^2-x\right)$.

Ta có $y'=(2x-1)f'\left(x^2-x\right)$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-1=0\\ f'\left(x^2-x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ x^2-x=-2\\ x^2-x=0\\ x^2-x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ x=0\\ x=1\\ x=-1\\ x=2\end{array}\right..$$

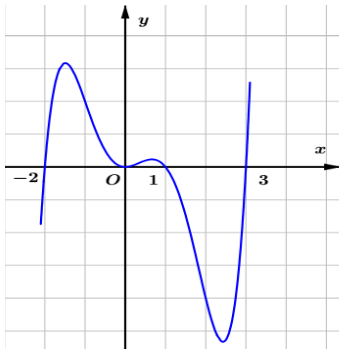
$$f'\left(x^2-x\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<x^2-x<0\\ x^2-x>2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<1\\ x>2\\ x<-1\end{array}\right..$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f\left(x^2 - x\right)$ là:

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$2x-1$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f'(x^2-x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Vậy hàm số $y = f\left(x^2 - x\right) - 5$ có 3 điểm cực tiểu.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình bên.



Hàm số $g(x) = f\left(x^2\right) - \sqrt{2021}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C.

Từ đồ thị $y = f'(x)$ ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$;

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ -2 < x < 1 \end{array}\right.$; $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ 1 < x < 3 \end{array}\right.$.

Ta có $g'(x) = 2xf'\left(x^2\right)$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'\left(x^2\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 1 \\ x^2 = 3 \\ x^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{array}\right.$.

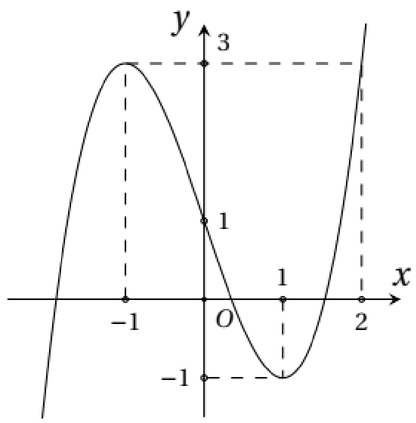
Ta có $f'\left(x^2\right) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x^2 < 1 \\ x^2 > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} x > \sqrt{3} \\ x < -\sqrt{3} \end{array}\right. \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'\left(x^2\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $g(x)=f\left(x^2\right)-\sqrt{2021}$ có 5 điểm cực trị.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đúng hai điểm cực trị $x=-1, x=1$, có đồ thị như hình vẽ sau:



Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-2x+1\right)+2021$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B.

Do hàm số $y=f(x)$ có đúng hai điểm cực trị $x=-1, x=1$ nên phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm bội lẻ phân biệt $x=-1, x=1$.

Ta có $y'=(2x-2)f'\left(x^2-2x+1\right)$.

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-2=0 \\ x^2-2x+1=-1 \\ x^2-2x+1=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \\ x=2 \end{array}\right..$$

Ta có

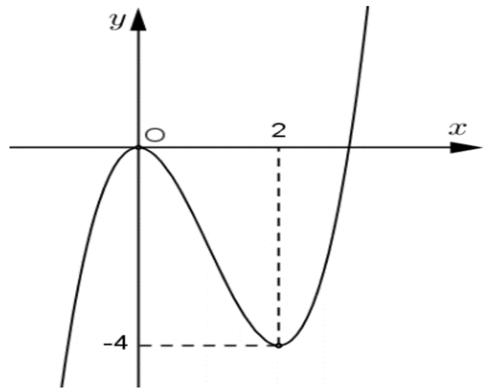
$$y'>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-2>0\\ f'(x^2-2x+1)>0\end{cases}\\ \begin{cases}2x-2<0\\ f'(x^2-2x+1)<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>1\\ \left[\begin{array}{l}x^2-2x+1>1\\ x^2-2x+1<-1\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x<1\\ -1<x^2-2x+1<1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>1\\ \left[\begin{array}{l}x>2\\ x<0\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x<1\\ 0<x<2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>2\\ 0<x<1\end{array}\right.$$

Do đó ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên ta suy ra hàm số $y=f\left(x^2-2x+1\right)+2021$ có 3 cực trị. Chọn phương án B.

Câu 12. Biết rằng hàm số $f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f\left[f\left(x\right)\right]$.



A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C.

Xét hàm số $y=f\left[f\left(x\right)\right]$, $y'=f'\left(x\right).f'\left[f\left(x\right)\right]$;

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f'\left(x\right)=0\\ f'\left[f\left(x\right)\right]=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\\ f\left(x\right)=0\\ f\left(x\right)=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\\ x=a\in\left(2;+\infty\right)\\ x=b\in\left(a;+\infty\right)\end{array}\right..$$

Với $x\in\left(-\infty;0\right)\Rightarrow\begin{cases}f'\left(x\right)>0\\ f\left(x\right)<0\Rightarrow f'\left[f\left(x\right)\right]>0\end{cases}\Rightarrow y'>0$.

Với $x\in\left(0;2\right)\Rightarrow\begin{cases}f'\left(x\right)<0\\ f\left(x\right)<0\Rightarrow f'\left[f\left(x\right)\right]>0\end{cases}\Rightarrow y'<0$.

Với $x\in\left(2;a\right)\Rightarrow\begin{cases}f'\left(x\right)>0\\ f\left(x\right)<0\Rightarrow f'\left[f\left(x\right)\right]>0\end{cases}\Rightarrow y'>0$.

Với $x \in (a;b) \Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 \\ 0 < f(x) < 2 \Rightarrow f'[f(x)] < 0 \end{cases} \Rightarrow y' < 0$.

Với $x \in (b;+\infty) \Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 \\ f(x) > 2 \Rightarrow f'[f(x)] > 0 \end{cases} \Rightarrow y' > 0$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		a		b		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào BBT suy ra hàm số $y = f\left[f(x)\right]$ có bốn điểm cực trị.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(x^2 + 2x\right)$ là

A. 4. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 7.

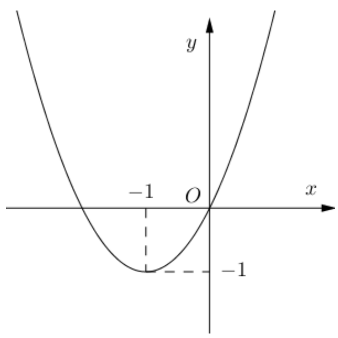
Lời giải

Chọn B.

Ta có $y' = (2x+2)f'\left(x^2+2x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ f'\left(x^2+2x\right) = 0 \quad (1) \end{array}\right.$.

Từ BBT ta thấy phương trình $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2 + 2x = a < -1 & (2) \\ x^2 + 2x = b \in (-1;1) & (3) \\ x^2 + 2x = c > 1 & (4) \end{array}\right.$.

Đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x$ có dạng



Từ đồ thị hàm số $y=x^2+2x$ ta thấy phương trình (2) vô nghiệm; phương trình (3) ; phương trình (4) đều có 2 nghiệm phân biệt.

Do đó $y'=0$ có 5 nghiệm đơn phân biệt. Vậy hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 14. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biên thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=f\left(2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)$ là

A. 3. **B.**4. **C.** 5. **D.**6.

Lời giải

Chọn C.

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $f'\left(x\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-2\\x>3\end{array}\right.$ và $f'\left(x\right)<0\Leftrightarrow-2<x<3$.

Ta có $g'\left(x\right)=\left(4x-\frac{5}{2}\right)f'\left(2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)$.

Xét $g'\left(x\right)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4x-\frac{5}{2}>0\\f'\left(2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)<0\end{cases}\\\begin{cases}4x-\frac{5}{2}<0\\f'\left(2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)>0\end{cases}\end{array}\right.$.

$$\begin{cases}4x-\frac{5}{2}>0\\f'\left(2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{5}{8}\\-2<2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}<3\end{cases}\Leftrightarrow1<x<\frac{9}{4}.$$

$$\begin{cases}4x-\dfrac{5}{2}<0\\ f'\left(2x^2-\dfrac{5}{2}x-\dfrac{3}{2}\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<\dfrac{5}{8}\\ 2x^2-\dfrac{5}{2}x-\dfrac{3}{2}>3\end{cases}\\ \\ \begin{cases}x<\dfrac{5}{8}\\ 2x^2-\dfrac{5}{2}x-\dfrac{3}{2}<-2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1\\ \\ \dfrac{1}{4}<x<\dfrac{5}{8}\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{4}$		$\frac{5}{8}$		1		$\frac{9}{4}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng xét dấu của hàm số $g(x)=f\left(2x^2-\dfrac{5}{2}x-\dfrac{3}{2}\right)$ ta được hàm số có 5 cực trị.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có bảng xét dấu sau

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)=f\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $g'(x)=\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}.f'\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. Do $\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}>\dfrac{x+|x|}{\sqrt{x^2+1}}\geq 0$

nên $g'(x)=0\Leftrightarrow f'\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\sqrt{x^2+1}=1\\ x+\sqrt{x^2+1}=3\\ x+\sqrt{x^2+1}=5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\dfrac{4}{3}\\ x=\dfrac{12}{5}\end{array}\right..$

Bảng biến thiên $y=g(x)$.

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		$\frac{12}{5}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↘	

Vậy số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)=f\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ là 2.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm như hình vẽ.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Đặt $g(x)=f\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)$.

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

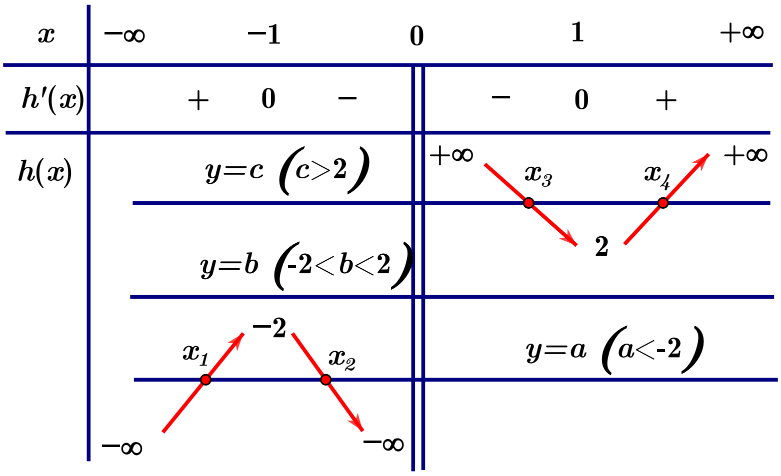
Chọn C.

+ Đặt $g'(x)=\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)f'\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)$

+ $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)=0\\ f'\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm 1\\ \dfrac{x^2+1}{x}=a\ (a<-2)\\ \dfrac{x^2+1}{x}=b\ (-2<b<2)\\ \dfrac{x^2+1}{x}=c\ (c>2)\end{array}\right.$

+ Xét hàm số $h(x)=\dfrac{x^2+1}{x}, h'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}, h'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$

+ Bảng biến thiên của hàm số $h(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$



+ Dựa vào bảng biến thiên trên ta thấy phương trình $h(x)=a, h(x)=c$, mỗi phương trình có hai nghiệm phân biệt khác ± 1, mà $a \neq c \Rightarrow f'\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)=0$ có 4 nghiệm đơn phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 khác ± 1 và phương trình $h(x)=b$ vô nghiệm.

Do đó phương trình $g'(x)=0$ có 6 nghiệm đơn phân biệt lần lượt theo thứ tự từ nhỏ đến lớn là $x_1, -1, x_2, x_3, 1, x_4$.

Vậy hàm số $g(x)=f\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)$ có 6 cực trị.

VẤN ĐỀ 2
XÉT CỰC TRỊ HÀM $g(x)=f(u(x))$ CÓ LIÊN QUAN THAM SỐ m

Câu 17. **(Đề tham khảo của BGD năm 2022)**

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x^2+10x, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(x^4-8x^2+m\right)$ có đúng 9 điểm cực trị?.

A. 16. **B.** 9. **C.** 15. **D.** 10.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $f'(x)=x^2+10x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-10 \end{array}\right.$.

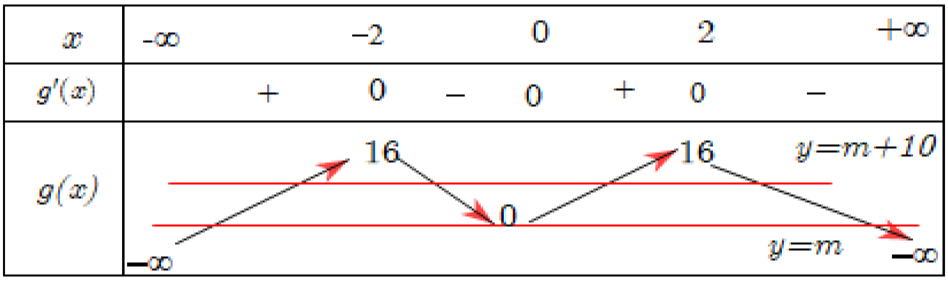
Khi đó $y'=\left(4x^3-16x\right)f'\left(x^4-8x^2+m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^3-16x=0 \\ f'\left(x^4-8x^2+m\right)=0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 2 \\ x^4-8x^2+m=0 \\ x^4-8x^2+m=-10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=0 & \\ x=\pm 2 & \\ m=-x^4+8x^2 & (1) \\ m+10=-x^4+8x^2 & (2) \end{array}\right.$$

Xét hàm số $g(x)=-x^4+8x^2$.

Ta có $g'(x)=-4x^3+16x \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:



Hàm số $y=f\left(x^4-8x^2+m\right)$ có đúng 9 điểm cực trị khi (1) có hai nghiệm hoặc ba nghiệm trong đó có 1 nghiệm bằng 0 và (2) có 4 nghiệm phân biệt. Do đó dựa vào bảng biến thiên của hàm số $g(x)=-x^4+8x^2$ ta có

$\begin{cases} 0<m+10<16 \\ m\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10<m<6 \\ m\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -10<m\le 0$. Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-9;-8;\cdots;-1;0\}$.

Vậy có 10 giá trị nguyên m.

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2\left(x^2-2x\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(x^2-8x+m\right)$ có 5 điểm cực trị?

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Chọn A.

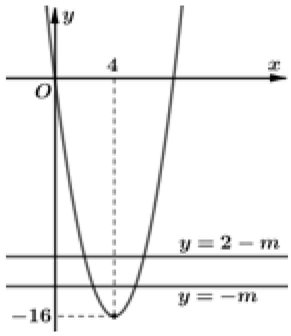
Xét $f'(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)^2\left(x^2-2x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\ (\text{nghiem boi } 2) \\ x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Ta có $g'(x)=2(x-4)f'\left(x^2-8x+m\right)$;

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow 2(x-4)f'\left(x^2-8x+m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x^2-8x+m=1 \ (\text{nghiem boi } 2) \\ x^2-8x+m=0 \quad (1) \\ x^2-8x+m=2 \quad (2) \end{array}\right..$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow g'(x)=0$ có 5 nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow$ mỗi phương trình (1), (2) đều có hai nghiệm phân biệt khác 4. $(*)$

Xét đồ thị (C) của hàm số $y=x^2-8x$ và hai đường thẳng $d_1: y=-m$, $d_2: y=-m+2$ (như hình vẽ).



Khi đó $(*)$ $\Leftrightarrow$ d_1, d_2 cắt (C) tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow -m>-16 \Leftrightarrow m<16$.

Vậy có 15 giá trị m nguyên dương thỏa.

Cách 2: Đặt $g(x)=f\left(x^2-8x+m\right)$. Ta có $f'(x)=(x-1)^2\left(x^2-2x\right)$

$$\Rightarrow g'(x)=(2x-8)\left(x^2-8x+m-1\right)^2\left(x^2-8x+m\right)\left(x^2-8x+m-2\right)$$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=4 & \\ x^2-8x+m-1 & (1) \\ x^2-8x+m=0 & (2) \\ x^2-8x+m-2=0 & (3) \end{array}\right.$. Các phương trình (1), (2), (3) không có nghiệm chung từng đôi một và $\left(x^2-8x+m-2\right)^2 \geq 0$ với $\forall m \in \mathbb{R}$ nên $g(x)$ có 5 cực trị khi và chỉ khi (1) và (2) có hai nghiệm phân biệt và khác 4 $\Leftrightarrow \begin{cases} 16-m>0 \\ 16-m-2>0 \\ 16-32+m \neq 0 \\ 16-32+m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<16 \\ m<18 \\ m \neq 16 \\ m \neq 18 \end{cases} \Leftrightarrow m<16.$

Vậy m nguyên dương và $m<16$ nên có 15 giá trị m cần tìm.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)\left(x^2+2mx+5\right)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có **đúng** một điểm cực trị?

A. 7. **B.** 0. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2(x+1)\left(x^2+2mx+5\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0; x=-1 \\ x^2+2mx+5=0(*) \end{array}\right..$

Vì $f'(x)$ không đổi dấu qua nghiệm x = 0 nên hàm số không đạt cực trị tại $x=0$.

Do đó, hàm số $y=f(x)$ có đúng một cực trị trong các trường hợp sau:

1. Phương trình (*) vô nghiệm. Khi đó $\Delta'=m^2-5<0 \Leftrightarrow -\sqrt{5}<m<\sqrt{5}$.

2. Phương trình (*) có nghiệm kép bằng -1. Khi đó $\begin{cases}\Delta'=m^2-5=0\\1^2-2m+5=0\end{cases}$ (hệ vô nghiệm).

3. Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm bằng -1.

Khi đó $\begin{cases}\Delta'=m^2-5>0\\1^2-2m+5=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2-5>0\\m=3\end{cases} \Leftrightarrow m=3$.

Vậy giá trị nguyên $m\in\{-2;-1;0;1;2;3\}$.

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để $g(x)=f(x^2-2x-m)$ có 5 điểm cực trị?

A. 10. **B.** 15. **C.** 20. **D.** 21.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $g'(x)=2(x-1)f'(x^2-2x-m)$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2x-m=-1\\x^2-2x-m=1\\x^2-2x-m=4\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll}x=1\\x^2-2x-m+1=0 & (1)\\x^2-2x-m-1=0 & (2)\\x^2-2x-m-4=0 & (3)\end{array}\right.$$

Nhận xét: Phương trình (2) nếu có nghiệm là nghiệm bội chẵn; phương trình (1) và (3) nếu có nghiệm thì nghiệm không chung nhau.

Hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $g'(x)=0$ có 5 nghiệm bội lẻ

$\Leftrightarrow$ Phương trình (1) và (3) có hai nghiệm phân biệt, khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'_{(1)}>0\\\Delta'_{(3)}>0\\VT_{(1)}\neq 0\\VT_{(3)}\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>0\\m+5>0\\-m\neq 0\\-m-5\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow m>0$$

Vì $\begin{cases}m\in\mathbb{Z}\\m\in[-10;10]\end{cases} \Rightarrow m\in\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$

Vậy có 10 giá trị của tham số *m*.

DẠNG 2

XÉT CỰC TRỊ HÀM SỐ $g(x)=f(x)+h(x)$

VẤN ĐỀ 1

CỰC TRỊ HÀM $g(x)=f(x)+h(x)$ KHÔNG CHỨA THAM SỐ

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\frac{2}{9}x^3-\frac{2}{9}x^2-x+3$. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)=2f(x)-(x+1)^2$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $y=g(x)=2f(x)-(x+1)^2$

$$\Rightarrow g'(x)=2f'(x)-2(x+1)=2\left[f'(x)-(x+1)\right]$$

$$=2\left[\frac{2}{9}x^3-\frac{2}{9}x^2-x+3-(x+1)\right]$$

$$=2\left(\frac{2}{9}x^3-\frac{2}{9}x^2-2x+2\right)$$

ta có: $g'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2}{9}x^3-\frac{2}{9}x^2-2x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu của hàm $g'(x)$:

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta có đáp án đúng là hàm số $y=g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=(x+1)(2x^2-3x-9)$. Hỏi hàm số $g(x)=f(x)+x^3-3x^2-9x+6$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D.

Vì hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $g(x)=f(x)+x^3-3x^2-9x+6$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$.

Có $g'(x)=f'(x)+3x^2-6x-9=(x+1)(2x^2-3x-9)+3(x+1)(x-3)=(x+1)(x-3)(2x+6)$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \\ x=-3 \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=3.(x^2-1)(x-2)$. Khi đó hàm số $g(x)=f(x)-x^3+3x$ đạt cực đại tại

A. $x=1$. **B.** $x=2$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=3$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có:

$g(x)=f'(x)-3x^2+3=3.(x^2-1).(x-2)-3(x^2-1)=3(x^2-1).(x-3)$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-1=0 \\ x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số $y=g(x)$ đạt cực đại tại $x=1$.

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x)=(1-x)(x+2)g(x)+2019$ với $g(x)<0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(1-x)+2019x+2020$ đạt cực đại tại

A. $x_0=1$. **B.** $x_0=2$. **C.** $x_0=0$. **D.** $x_0=3$.

Lời giải

Chọn D.

Đặt $h(x)=f(1-x)+2019x+2020$

Ta có: $h'(x)=-f'(1-x)+2019=-[1-(1-x)][(1-x)+2]g(1-x)-2019+2019$

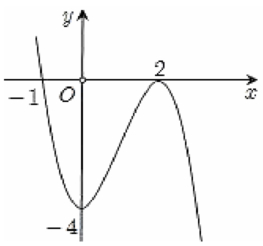
$=-x(3-x)g(1-x)$; $h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $h(x)$.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$		↘		↗		↘	

Vậy hàm số đạt cực đại $x_0=3$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



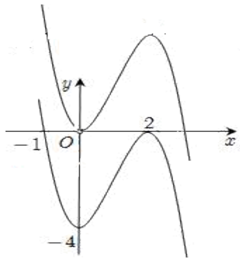
Hàm số $y = g(x) = f(x) + 4x$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A.

Cách 1: $y' = g'(x) = f'(x) + 4$ có đồ thị là phép tịnh tiến đồ thị hàm số $f'(x)$ theo phương Oy lên trên 4 đơn vị.



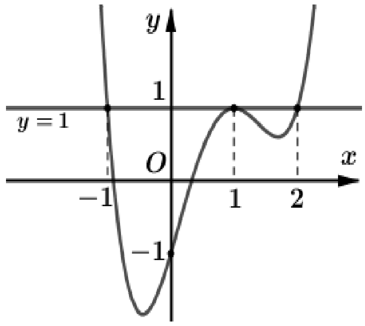
Khi đó đồ thị hàm số $g'(x)$ cắt trục hoành tại 1 điểm, ta chọn đáp án A

Cách 2: Số cực trị của hàm $g(x)$ bằng số nghiệm bội lẻ của phương trình

$g'(x) = f'(x) + 4 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -4$

Dựa vào đồ thị của hàm $f'(x)$ ta thấy phương trình trên có một nghiệm đơn.

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau.



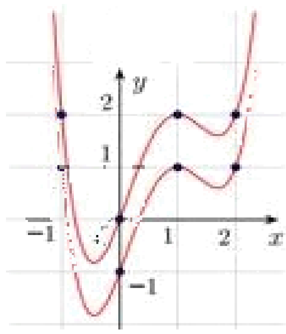
Đặt $g(x) = f(x) + x$. Tìm số cực trị của hàm số $g(x)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

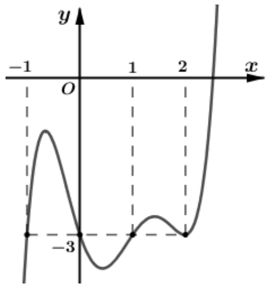
Lời giải

Chọn B.

Ta có $g'(x) = f'(x) + 1$. Đồ thị của hàm số $g'(x)$ là phép tịnh tiến đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ theo phương Oy lên trên 1 đơn vị, khi đó đồ thị hàm số $g'(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.



Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$.



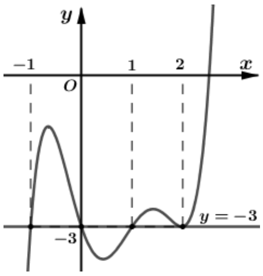
Hỏi hàm số $g(x) = f(x) + 3x$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B.

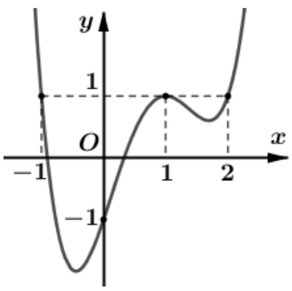
Ta có $g'(x) = f'(x) + 3;\ \ g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -3$. Suy ra số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ chính là số giao điểm giữa đồ thị của hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $y = -3$.



Dựa vào đồ thị ta suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array} \right.$.

Ta thấy $x = -1,\ x = 0,\ x = 1$ là các nghiệm đơn và $x = 2$ là nghiệm kép nên đồ thị hàm số $g(x) = f(x) + 3x$ có 3 điểm cực trị.

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



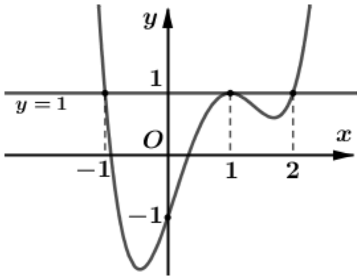
Hàm số $g(x) = f(x) - x$ đạt cực đại tại

A. $x = -1$. **B.** $x = 0$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = 2$.

Lời giải

Chọn A.

Cách 1 Ta có $g'(x) = f'(x) - 1$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1$. Suy ra số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ chính là số giao điểm giữa đồ thị của hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $y = 1$.



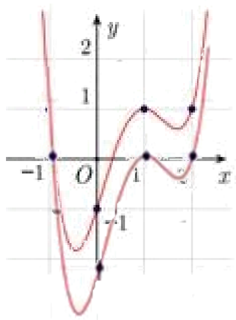
x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
g		↗		↘		↘		↗	

Dựa vào đồ thị ta suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$. Bảng biến thiên

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $g(x)$ đạt cực đại tại $x = -1$. Chọn A

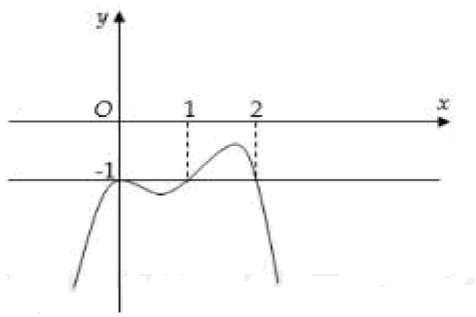
Chú ý. Cách xét dấu bảng biến thiên như sau: Ví dụ trên khoảng $(-\infty; -1)$ ta thấy đồ thị hàm $f'(x)$ nằm phía trên đường $y = 1$ nên $g'(x)$ mang dấu $+$.

Cách 2 : Ta có $g'(x) = f'(x) - 1$. Đồ thị của hàm số $g'(x)$ là phép tịnh tiến đồ thị của hàm số $f'(x)$ theo phương Oy xuống dưới 1 đơn vị.



Ta thấy giá trị hàm số $g'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua điểm $x = -1$.

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)$. Biết đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Xác định điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(x) + x$.

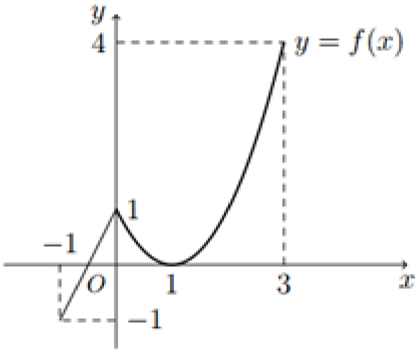
A. Không có cực tiểu. **B.** $x = 0$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = 2$.

Lời giải

Chọn C.

$g'(x)=f'(x)+1$. Dựa vào đồ thị thấy $g'(x)$ đổi dấu từ "-" sang "+" qua điểm $x=1$ nên hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hàm số $y=f(x)-\dfrac{2020x-1}{2021}$ có mấy cực trị ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

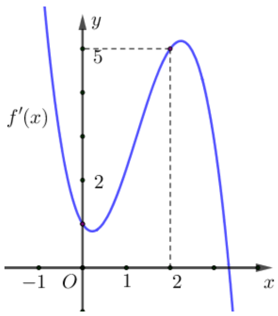
Lời giải

Chọn C.

$y'=\left[f(x)-\dfrac{2020x-1}{2021}\right]'=f'(x)-\dfrac{2020}{2021}$

Đồ thị $y'=f'(x)-\dfrac{2020}{2021}$ là phép tịnh tiến của đồ thị $f'(x)$ theo phương trục Oy xuống dưới $\dfrac{2020}{2021}$ đơn vị. Đồ thị $y'=f'(x)-\dfrac{2020}{2021}$ cắt trục Ox 3 điểm $\Rightarrow$ 3 cực trị

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số $y=f(x)-x^2-x+2021$ đạt cực đại tại $x=0$.

B. Hàm số $y=f(x)-x^2-x+2021$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

C. Hàm số $y=f(x)-x^2-x+2021$ không có cực trị.

D. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x + 2021$ không đạt cực trị tại $x = 0$.

Lời giải

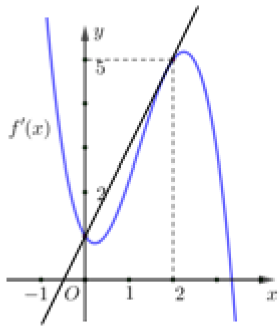
Chọn A.

Ta có:

$y' = f'(x) - 2x - 1$

$y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2x + 1$ (1)

Nghiệm của phương trình (1) là hoành độ giao điểm của 2 đồ thị $y = f'(x)$ và $y = 2x + 1$



Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = 2x + 1$ có $x \in \{0, 2\}$ là các nghiệm của phương trình (1)

$y'(-1) = f'(-1) + 2 - 1 > 0$

$y'(1) = f'(1) - 2 - 1 < 0$

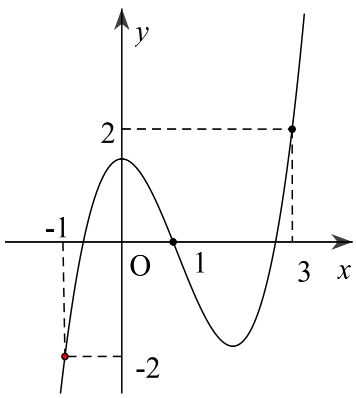
$y'(3) = f'(3) - 6 - 1 < 0$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	-	

$\Rightarrow$ Hàm số $y = f(x) - x^2 - x + 2021$ đạt cực đại tại $x = 0$.

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $g(x) = 2f(x) - x^2 + 2x + 2021$.



Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(1;3)$. **B.** Hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị đại.

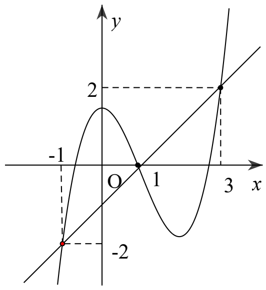
C. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-1;1)$. **D.** Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $g'(x)=2f'(x)-2x+2=2\left[f'(x)-(x-1)\right]$.

Dựa vào hình vẽ ta thấy đường thẳng $y=x-1$ cắt đồ thị hàm số $y=f'(x)$ tại 3 điểm: $(-1;-2)$, $(1;0)$, $(3;2)$.



Dựa vào đồ thị ta có

$g'(x)=0\Leftrightarrow 2\left[f'(x)-(x-1)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=3\end{array}\right.$. $g'(x)>0\Leftrightarrow 2\left[f'(x)-(x-1)\right]>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-<x<1\\3<x\end{array}\right.$

$g'(x)<0\Leftrightarrow 2\left[f'(x)-(x-1)\right]<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1\\1<x<3\end{array}\right.$

Vậy hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-1;1)$

Câu 33. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

Hỏi hàm số $g(x)=f(x)+x^3+3x^2-9x-5$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A.

Từ bảng xét dấu của $f'(x)$ ta nhận thấy $f'(x)=A(x)(x+3)^{2n+1}(x-1)^{2m+1}$ với $m,n\in\mathbb{N}$ và $A(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$..

Ta có: $g'(x)=f'(x)+3x^2+6x-9=A(x)(x+3)^{2n+1}(x-1)^{2m+1}+3(x+3)(x-1)$

$g'(x)=(x+3)(x-1)\left[A(x)(x+3)^{2n}(x-1)^{2m}+3\right]$

Do $A(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $A(x)(x+3)^{2n}(x-1)^{2m}+3>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

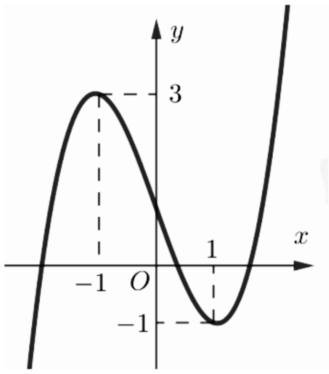
Từ đó ta có $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=1\end{array}\right.$.

Do $g'(x)=0$ tại $x=-3$ và $x=1$, đồng thời $g'(x)$ đổi dấu khi đi qua hai điểm đó nên hàm số $y=g(x)$ có hai điểm cực trị.

VẤN ĐỀ 2

XÉT CỰC TRỊ HÀM $g(x)=f(x)+h(x)$ CÓ LIÊN QUAN THAM SỐ m

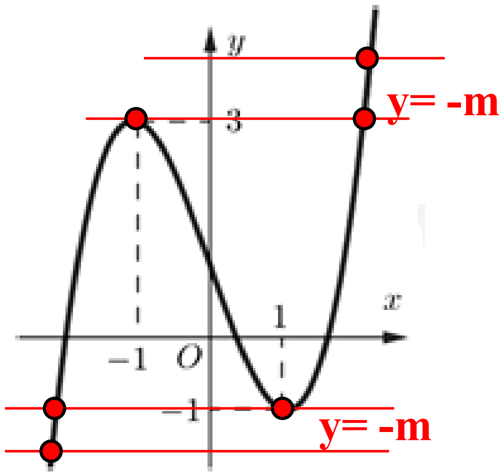
Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-12\,;12)$ sao cho hàm số $y=f(x)+mx+12$ có đúng một điểm cực trị?



A. 5. **B.** 18. **C.** 20. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C.



Đạo hàm $y'=f'(x)+m$; $y'=0 \Leftrightarrow f'(x)=-m$

YCBT $\Leftrightarrow$ Phương trình $y'=0$ (có 1 nghiệm đơn)

hoặc (có 1 nghiện đơn và nghiệm kép)

$\Leftrightarrow$ đường thẳng $y=-m$ cắt đồ thị đạo hàm $y=f'(x)$ tại 1 điểm có có hoành **độ** là nghiệm **đơn** (bội lẻ) hoặc tại haiđiểm trong đó có điểm có hoành độ bội chẵn $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -m\ge 3 \\ -m\le -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge 1 \\ m\le -3 \end{array}\right.$

Kết hợp với $m\in(-12\,;\,12)$ ta được $m\in(-12\,;\,-3]\cup[1\,;\,12)$ và m là số nguyên nên

có tất cả $9+11=20$ giá trị nguyên.

Câu 35. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^2-3)(x^2+1)$ với $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=f(x)-mx$ có 4 điểm cực trị?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A.

Xét đạo hàm $y'=f'(x)-m=(x^2-3)(x^2+1)-m$; $y'=0\Leftrightarrow(x^2-3)(x^2+1)=m$

YCBT $\Leftrightarrow y'=0$ có 4 nghiệm phân biệt

Đặt $g(x)=(x^2-3)(x^2+1)=x^4-2x^2-3$; $g'(x)=4x^3-4x=4x(x^2-1)$; BBT

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $-4<m<-3$, mà m nguyên nên không có m nào.

Câu 36. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=-x^3-2x^2, \forall x\in\mathbb{R}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f(x)+mx+3$ có 3 điểm cực trị.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A.

Hàm số $g(x)=f(x)+mx+3$ xác định trên $\mathbb{R}$.

$g'(x)=f'(x)+m=-x^3-2x^2+m$

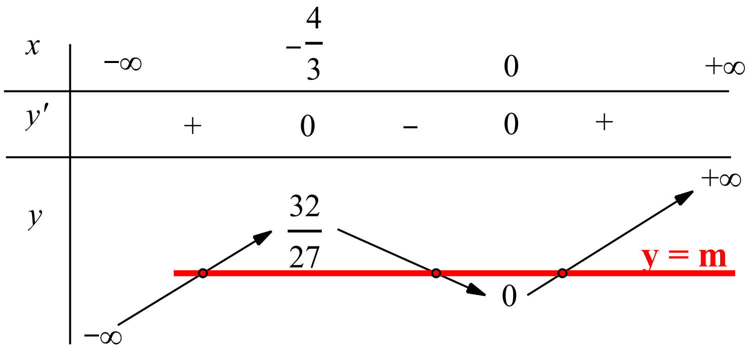
Hàm số $g(x)=f(x)+mx+3$ có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow g'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow -x^3-2x^2+m=0$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow x^3+2x^2=m$ có 3 nghiệm phân biệt

Đặt $g(x)=x^3+2x^2$; $g'(x)=3x^2+4x$; $g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\dfrac{4}{3} \end{array}\right.$;

BBT:



Vậy $0 < m < \frac{32}{27}$, mà m nguyên dương nên $m = 1$.

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ có biểu thức đạo hàm $f'(x) = (x+3)(x-1)(x-2)$ và hàm số $y = g(x) = 6f(x) + 2x^3 + 3(m+1)x^2 - 6(m+2)x + 2021$. Gọi $S = (-\infty; a) \cup (b; c)$ là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = g(x)$ có ba cực trị. Giá trị của $a + 2b + 3c$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D.

Từ yêu cầu bài toán ta có: $g'(x) = 6f'(x) + 6x^2 + 6(m+1)x - 6(m+2)$

$\Leftrightarrow g'(x) = 6(x+3)(x-1)(x-2) + 6x^2 + 6(m+1)x - 6(m+2)$

$\Leftrightarrow g'(x) = 6(x-1)(x^2 + 2x + m - 4)$.

Suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 + 2x + m - 4 = 0 \end{array}\right.$.

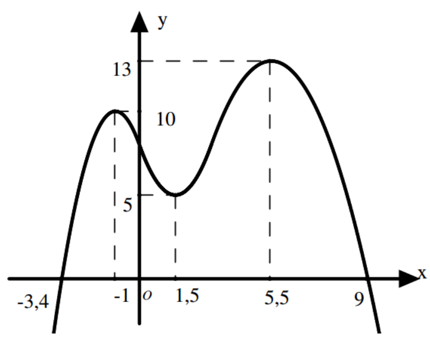
Để hàm số $y = g(x)$ có ba cực trị thì $g'(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình $x^2 + 2x + m - 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

Hay $\begin{cases} \Delta' = 5 - m > 0 \\ m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ m \neq 1 \end{cases}$. Suy ra $S = (-\infty; 1) \cup (1; 5)$.

Như vậy $a = 1$, $b = 1$, $c = 5$ và $a + 2b + 3c = 8$.

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên R và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (-\infty; -3,4) \cup (9; +\infty)$.



Đặt $g(x)=f(x)-mx+5$. Có bao nhiêu giá trị dương của tham số m để hàm số $g(x)$ có **đúng** hai điểm cực trị?

A. 4. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $g'(x)=f'(x)-m$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)-m=0 \Leftrightarrow f'(x)=m$. Để hàm số $y=g(x)$ có đúng hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $g'(x)=0$ có hai nghiệm bội lẻ phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le 5 \\ 10\le m<13 \end{array}\right.$. Khi đó $m\in\{0;1;2;3;4;5;10;11;12\}$. Vậy có 9 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

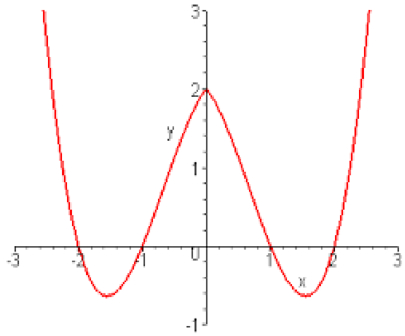
DẠNG 3

XÉT CỰC TRỊ HÀM SỐ $g(x)=f(u(x))+h(x)$

VẤN ĐỀ 1

CỰC TRỊ HÀM $g(x)=f(u(x))+h(x)$ KHÔNG CHỨA THAM SỐ

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên R. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hàm số $y=f(x+1)-x$ có mấy cực đại ?

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

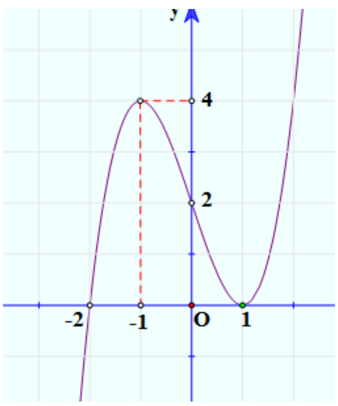
Chọn D.

$y'=\left[f(x+1)-x\right]'=f'(x+1)-1$

Đồ thị $y'=f'(x+1)-1$ là phép tịnh tiến của đồ thị $f'(x)$ theo phương trục Ox qua bên trái 1 đơn vị và tịnh tiến theo phương trục Oy xuống dưới 1 đơn vị nên đồ thị $y'=f'(x+1)-1$ vẫn cắt trục Ox 4 điểm bằng số giao điểm mà đồ thị $f'(x)$ cắt trục Ox

mà đồ thị $y=f'(x)$ cắt trục Ox tại 2 điểm $(x=-2;x=1)$ nhưng qua 2 điểm đó hàm số đổi dấu từ dương sang âm $\Rightarrow$ 2 cực đại

Câu 40. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên R, có đồ thị hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ sau:



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)=f(x-2019)+2017x-2018$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lờigiải

ChọnA

Ta có: $y'=g'(x)=f'(x-2019)+2017$

Tịnh tiến sang phải 2019 đơn vị rồi tịnh tiến lên trên 2017 đơn vị ta thấy đồ thị hàm số $y'=g'(x)=f'(x-2019)+2017$ cắt trục Ox tại 1 điểm.

Do đó hàm số có 1 cực trị.

Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(2-x)(x^2-8)^{2019}$, $\forall x\in R$. Hàm số $y=f(x^2-2)+\frac{1}{2}x^4-4x^2+2021$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 4. **B.** 2021. **C.** 5. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn C.

Xét hàm số $g(x)=f(x^2-2)+\frac{1}{2}x^4-4x^2+2020$.

+ $g'(x)=2x.f'(x^2-2)+2x^3-8x$.

+ $g'(x)=0\Leftrightarrow 2x.f'(x^2-2)+2x^3-8x=0\Leftrightarrow 2x\left[f'(x^2-2)+x^2-4\right]=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'(x^2-2)+x^2-4=0\ (*)\end{array}\right.$.

Giải phương trình $(*)$: Đặt $t=x^2-2$.

$(*)\Leftrightarrow f'(t)+t-2=0\Leftrightarrow(2-t)(t^2-8)^{2019}+(t-2)=0\Leftrightarrow(2-t)\left[(t^2-8)^{2019}-1\right]=0$

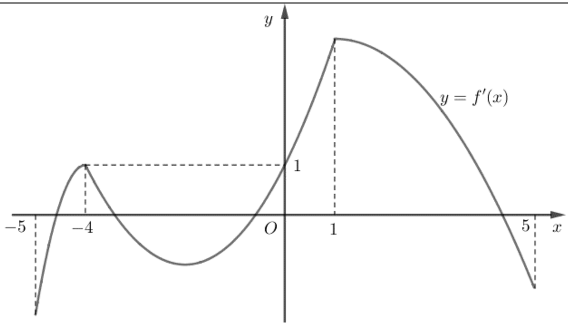
$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-t=0\\ (t^2-8)^{2019}-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\ t^2-8=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\ t=\pm3\end{array}\right.$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l}x^2-2=2\\ x^2-2=3\\ x^2-2=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=4\\ x^2=5\\ x^2=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm2\\ x=\pm\sqrt{5}\end{array}\right.$.

$\Rightarrow g'(x)=0$ có 5 nghiệm (không có nghiệm bội chẵn).

Vậy hàm số có 5 cực trị.

Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(x^2+4x)-x^2-4x$ có bao nhiêu điểm cực trị thuộc khoảng $(-5;1)$?



A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A.

Đặt $g(x)=f(x^2+4x)-x^2-4x$

$\Rightarrow g'(x)=(2x+4)f'(x^2+4x)-(2x+4)=(2x+4)\left[f'(x^2+4x)-1\right]$.

Ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x+4=0 & \\ x^2+4x=-4 & (1) \\ x^2+4x=0 & (2) \\ x^2+4x=a\in(1;5) & (3) \end{array}\right.$.

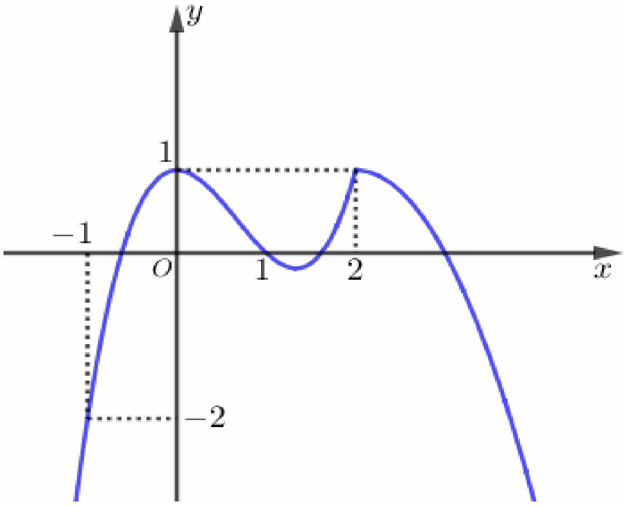
Xét phương trình $x^2+4x=a\in(1;5)$, ta có BBT của hàm số $y=x^2+4x$ trên $(-5;1)$ như sau:

x	-5	-4	-2	0	1
y'		$-$	0	$+$	
y	$5 \searrow$	$0 \searrow$	-4	$\nearrow 0$	$\nearrow 5$

Suy ra (1) có nghiệm kép $x=-2$, (2) có 2 nghiệm phân biệt $x=-4;x=0$, (3) có 2 nghiệm phân biệt $x=x_1;x=x_2$ khác $-2;\ 0;\ -4$. Do đó phương trình $g'(x)=0$ có 5 nghiệm trong đó có $x=-2$ là nghiệm bội ba, các nghiệm $x=-4;x=0$; $x=x_1;x=x_2$ là các nghiệm đơn.

Vậy $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 43. Cho hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=f(x^2)-\dfrac{x^6}{3}+x^4-x^2$ đạt cực tiểu tại bao nhiêu điểm?

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

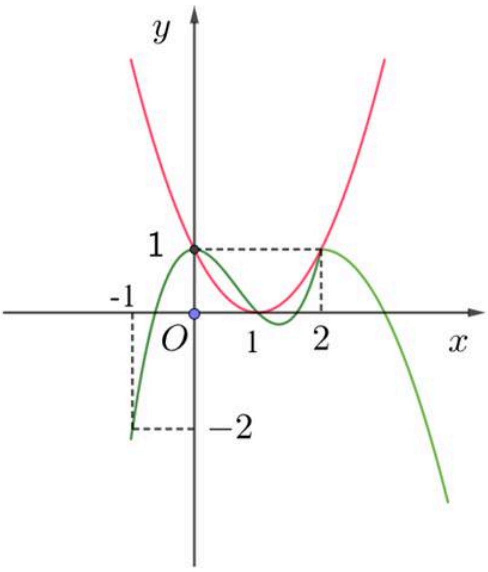
Chọn D

Ta có: $g(x)=f(x^2)-\dfrac{x^6}{3}+x^4-x^2 \Rightarrow g'(x)=2x\left[f'(x^2)-(x^4-2x^2+1)\right]$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \underbrace{f'(x^2)-(x^4-2x^2+1)}_{k(x)}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2)=(x^2)^2-2x^2+1(*) \end{array}\right.$$

Đặt $t=x^2\,(t\ge 0)$,phương trình $(*)$ trở thành $f'(t)=t^2-2t^2+1(**)$.

Vẽ thêm đồ thị hàm số x^2-2x+1 (màu đỏ) trên đồ thị $f'(x)$ đề cho.



Dựa vào đồ thị, $(**) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=1 \\ t=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ x^2=1 \\ x^2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\text{(bội chẵn)}. \\ x=\pm 1. \\ x=\pm\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Theo đó ta lập bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$2x$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$k(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	
$g'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$	

Vậy $g(x)$ đạt cực tiểu tại 1 điểm $x=0$.

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	$+$	0	-	0	$+$	

Đặt $g(x)=f(x+2)+\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+2021$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y=g(x)$ đạt cực đại tại $x=1$.

B. Hàm số $y=g(x)$ có 1 điểm cực trị.

C. Hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;4)$.

D. $g(5)>g(6)$ và $g(0)>g(1)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $y'=f'(x+2)+x^2-4x+3$

$f'(x+2)=0 \Leftrightarrow x\in\{-1;1;3\}$

$x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=3$.

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
x^2-4x+3			$+$		0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		kxđ	|	$+$	0	$-$	0	$+$	

(kxđ: không xác định)

Dựa vào bảng xét dấu, ta suy ra $g(x)$ đạt cực đại tại $x=1$.

DẠNG 4

XÉT CỰC TRỊ HÀM SỐ $g(x)=\left[f\left(u(x)\right)\right]^k$

Lý thuyết:

Bước 1:

Tính $y' = g'(x) = k.u'(x).\left[f(u(x))\right]^{k-1}.f'(\text{u(x)})$

+ Nếu: k chẵn: $y' = g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u'(x) = 0 \\ f(u(x)) = 0 \\ f'(u(x)) = 0 \end{array}\right.$.

+ Nếu k lẻ: $y' = g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u'(x) = 0 \\ f'(u(x)) = 0 \end{array}\right.$

Bước 2: Giải tìm nghiệm:

$u'(x) = 0$ ta giải bình thường.

$f'(u(x)) = 0$ thì ta cho $u(x)$ bằng các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$

$f(u(x)) = 0$ thì ta cho $u(x)$ bằng các các nghiệm x_0 của phương trình $f(x) = 0$ hoặc điều kiện của x_0 để chứng minh được phương trình có bao nhiêu nghiệm cụ thể.

Kiểm chứng các nghiệm trên có nghiệm nào bội chẵn không

Bước 3: Kết luận

VẤN ĐỀ 1

CỰC TRỊ HÀM $g(x) = \left[f(u(x))\right]^k$ KHÔNG CHỨA THAM SỐ

Câu 45. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 - 3$ và $f(2) = 4$. Hàm số $g(x) = \left[f(1-2x)\right]^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A.

+ Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 - 3$.

$\Rightarrow y = f(x) = \int f'(x)\text{d}x = \int (3x^2 - 3)\text{d}x = x^3 - 3x + C$.

Mà $f(2) = 4 \Rightarrow 2^3 - 3.2 + C = 4 \Leftrightarrow C = 2$.

$\Rightarrow f(x) = x^3 - 3x + 2$.

+ $g(x) = \left[f(1-2x)\right]^2$

$\Rightarrow g'(x) = 2f(1-2x).\left[f(1-2x)\right]' = -4f(1-2x).f'(1-2x)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1-2x)=0 \\ f'(1-2x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (1-2x)^3-3(1-2x)+2=0 \\ 1-2x=1 \\ 1-2x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-2x=1\,(nghiem\ kep) \\ 1-2x=-2 \\ 1-2x=1 \\ 1-2x=-1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\,(nghiem\ boi\ ba) \\ x=1 \\ x=\dfrac{3}{2} \end{array}\right. .$$

$\Rightarrow$ phương trình $g'(x)=0$ có 2 nghiệm đơnlà $x=1, x=\dfrac{3}{2}$ và một nghiệm bội ba $x=0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$3/2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	16	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $g(x)=\left[f(1-2x)\right]^2$ có 3 điểm cực trị.

Câu 46. Cho hàm số bậc bốn trùng phương $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=4x^3-4x$ và $f(0)=-1, f(-1)=-2$. Hàm số $g(x)=2f^3(x)+4f^2(x)+1$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 4. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B.

$$+\ f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \end{array}\right. .$$

Bảng biến thiên của hàm số bậc bốn trùng phương $y=f(x)$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

$$+\ g'(x)=6f^2(x).f'(x)+8f(x).f'(x)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f'(x)=0 \\ f(x)=-\dfrac{4}{3} \end{array}\right. .$$

Dựa vào bảng biến thiên trên ta có:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right., f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=x_2 \end{array}\right.,$

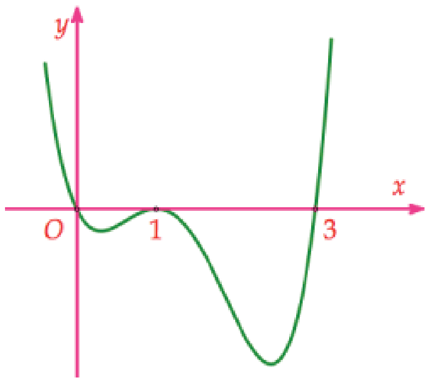
$f(x)=-\dfrac{4}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ x=b \\ x=c \\ x=d \end{array}\right.$ thỏa mãn: $x_1<a<-1<b<0<c<1<d<x_2$.

Khi đó để có nhiều điểm cực tiểu nhất thì bảng xét dấu của $g'(x)$ có dạng:

x	$-\infty$		x_1		a		-1		b		0		c		1		d		x_2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $g(x)=2f^3(x)+4f^2(x)+1$ có nhiều nhất 5 điểm cực tiểu.

Câu 47. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ



Đồ thị hàm số $y=(f(x))^2$ có bao nhiêu điểm cực đại, cực tiểu?

A. 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

B. 2 điểm cực tiểu, 3 điểm cực đại.

C. 2 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.

D. 1 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

Lời giải

Chọn A.

Từ đồ thị ta có: $f(x)=0$ có nghiệm đơn là $x=0; x=3$ và nghiệm kép $x=1$.

Và $f'(x)=0$ có 3 nghiệm đơn $x=x_1\in(0;1)$; $x=x_2\in(1;3)$ và $x=1$.

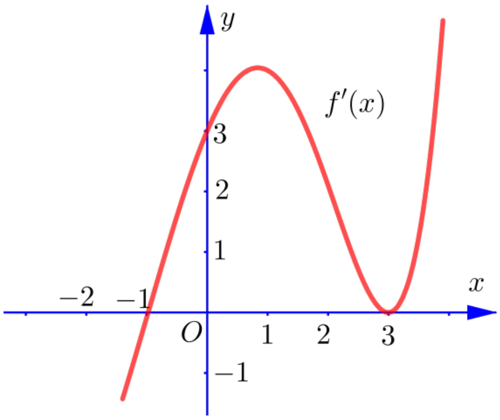
Ta có: $y=(f(x))^2 \Rightarrow y'=2f'(x).f(x)$ có các nghiệm đơn là $x=0; x=3; x_1; x_2$ và nghiệm bội 3 là $x=1$.

Ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$		0		x_1		1		x_2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	|	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$y'=2f'(x).f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
			CT		CĐ		CT		CĐ		CT		

Vậy đồ thị hàm số có 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

Câu 48. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn có $f(-1)=0$, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=[f(x)]^2$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A.

Từ hình vẽ ta có bảng biến thiên hàm số $y=f(x)$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Ta có $g'(x)=2f'(x)f(x)$.

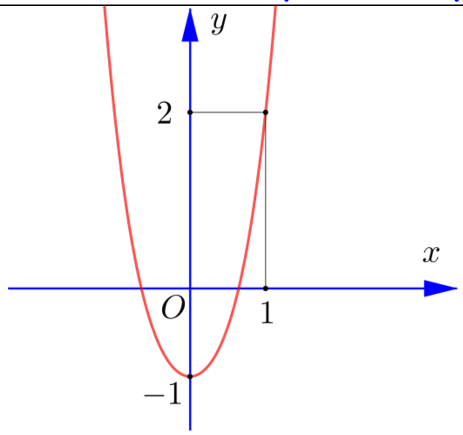
Xét $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f(x)=0 \end{array}\right.$.

Do $f(-1)=0$ nên $f(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$

Dựa vào đồ thị, ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3\ (\textit{nghiệm kép}) \end{array}\right.$.

Do vậy hàm số $g(x)$ chỉ có 1 điểm cực trị.

Câu 49. Cho hàm số $y=f(x)=mx^5+nx^3+px$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ:



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left[f(x+2)\right]^5$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $g(x)=\left[f(x+2)\right]^5 \Rightarrow g'(x)=5f'(x+2)\left[f(x+2)\right]^4$.

Do $\left[f(x+2)\right]^4\geq 0$ nên dấu $g'(x)$ chỉ phụ thuộc dấu của $5f'(x+2)$.

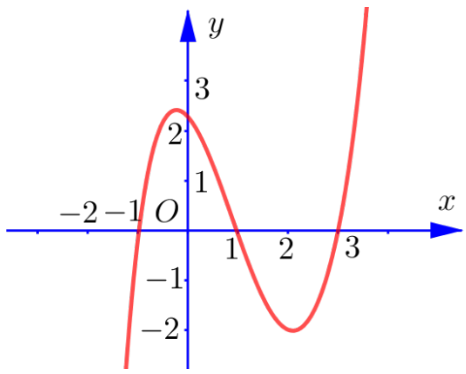
Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt nên

$f'(x)=a(x-x_1)(x-x_2),\ a>0$ $f'(x)=a(x+2-x_1)(x+2-x_2)$,

Suy ra $g'(x)$ đổi dấu từ + sang - khi qua $x=x_1-2$, từ - sang + khi qua $x=x_2-2$.

Hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị.

Câu 50. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn có $f(1)=0$ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left[f(x^2-2x)\right]^4$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $g(x)=\left[f(x^2-2x)\right]^4 \Rightarrow g'(x)=-8f'(x^2-2x)\left[f(x^2-2x)\right]^3$.

Từ hình vẽ ta có bảng biến thiên hàm số $y=f(x)$

x	$-\infty$	x_1	-1	1	3	x_2	$+\infty$

$f'(x)$	$--$		0	$+$	0	$-$		$+$		$+$
$f(x)$	$+\infty$		$f(-1)$		0		$f(3)$	$y=0$		$+\infty$

Ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x^2-2x)=0\ (1) \\ f(x^2-2x)=0\ (2) \end{array}\right.$.

Xét (1). Dựa vào đồ thị ta có $f'(x)=a(x-1)(x+1)(x+3),\ a>0$

$f'(x^2-2x)=0 \Rightarrow a(x^2-2x-1)(x^2-2x+1)(x^2-2x+3)=0$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{2} \\ x=1-\sqrt{2} \\ x=1\ (nghiệm\ kép) \end{array}\right. .$$

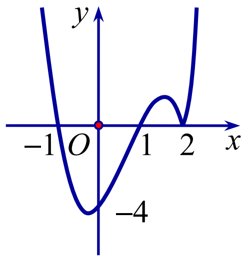
Xét (2): Do $f(1)=0$ nên $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt nghiệm phân biệt $x_1\in(-\infty;-1)$ và $x_2\in(3;+\infty)$

Với nghiệm $x_1\in(-\infty;-1)$ thì $f(x^2-2x)=0 \Rightarrow x^2-2x=x_1$ vô nghiệm do $x^2-2x\ge -1$

Với nghiệm $x_2\in(3;+\infty)$ thì $f(x^2-2x)=0 \Rightarrow x^2-2x=x_2$ có 2 nghiệm phân biệt.

Ta có $g'(x)=0$ có 4 nghiệm đơn phân biệt nên hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực trị.

Câu 51. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên tập $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y=f^{2019}(x^3-1)$ là



A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $y'=2019.f^{2018}(x^3-1).f'(x^3-1).3x^2$,

Ta có $y'=f^{2018}(x^3-1)\ge 0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ và $3x^2\ge 0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ nên dấu của y' cũng chính là dấu của biểu thức $f'(x^3-1)$.

Ta có $f'\left(x^3-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-1=-1 \\ x^3-1=1 \\ x^3-1=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt[3]{2} \\ x=\sqrt[3]{3} \end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta thấy $f'\left(x^3-1\right)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-1<-1 \\ \begin{cases} x^3-1>1 \\ x^3-1\neq 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ \begin{cases} x>\sqrt[3]{2} \\ x\neq\sqrt[3]{3} \end{cases} \end{array}\right.$.

Tương tự $f'\left(x^3-1\right)<0 \Leftrightarrow -1<x^3-1<1 \Leftrightarrow 0<x<\sqrt[3]{2}$.

Vì vậy suy ra hàm số $y=f^{2019}\left(x^3-1\right)$ có hai điểm cực trị.

Câu 52. Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^4\left[f(x+1)\right]^2$ là

A. 11. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B.

Ta chọn hàm $f(x)=5x^4-10x^2+3$.

Đạo hàm

$g'(x)=4x^3\left[f(x+1)\right]^2+2x^4f(x+1)f'(x+1)=2x^3f(x+1)\left[2f(x+1)+xf'(x+1)\right]$.

Ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^3f(x+1)=0 \\ 2f(x+1)+xf'(x+1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x+1)=0 \\ 2f(x+1)+xf'(x+1)=0 \end{array}\right.$.

+) $f(x+1)=0\ (*) \Leftrightarrow 5(x+1)^4-10(x+1)+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1\approx 1,278 \\ x+1\approx 0,606 \\ x+1\approx -0,606 \\ x+1\approx -1,278 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Phương trình có bốn nghiệm phân biệt khác 0.

+) $2f(x+1)+xf'(x+1)=0 \overset{t=x+1}{\Rightarrow} 2\left(5t^4-10t^2+3\right)+(t-1)\left(20t^3-20t\right)=0$

$\Leftrightarrow 30t^4-20t^3-40t^2+20t+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\approx 1,199 \\ t\approx 0,731 \\ t\approx -0,218 \\ t\approx -1,045 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Phương trình có bốn nghiệm phân biệt khác 0 và khác các nghiệm của phương trình $(*)$.

Vậy số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là 9.

Câu 53. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	0	-	
f(x)	$-\infty$	↘	2	↗	5	↘	$+\infty$

Số cực trị của hàm số $g(x) = f^2(2x^2 + x)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $g'(x) = 2(2x^2 + x)'.f'(2x^2 + x).f(2x^2 + x) = 2(4x+1).f'(2x^2 + x).f(2x^2 + x) = 0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x+1=0 \\ f'(2x^2+x)=0 \\ f(2x^2+x)=0 \end{array}\right..$$

$$4x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{4}$$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f'(2x^2+x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2+x=-2(VN) \\ 2x^2+x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Dựa vào bảng biến thiên phương trình $f(x)=0$ chỉ có 1 nghiệm $x_0 > 1$ (vì đồ thị $y=f(x)$ cắt trục Ox tại một điểm có hoành độ lớp hơn 1). Khi đó $f(2x^2+x)=0 \Leftrightarrow 2x^2+x=x_0 \Leftrightarrow 2x^2+x-x_0=0$ (*) phương trình có hai nghiệm vì a, c trái dấu.

Mặt khác, thay các nghiệm $x=-\frac{1}{4};-1;\frac{1}{2}$ vào (*) ta được $x_0 \le 1$ không thỏa mãn điều kiện của x_0 nên $x=-\frac{1}{4};-1;\frac{1}{2}$ không là nghiệm của (*).

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 5 nghiệm đơn. Suy ra hàm số $y=g(x)$ có 5 cực trị

Câu 54. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	||	+	0	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	2	↗	7	↘	$-\infty$

Hỏi hàm số $y=\left[f\left(2-x\right)\right]^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C.

$y'=-2.f\left(2-x\right).f'\left(2-x\right)$.

$$y'=0\Leftrightarrow -2.f\left(2-x\right).f'\left(2-x\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(2-x\right)=0\\ f'\left(2-x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-x=a<-2\\ 2-x=b>1\\ 2-x=-2\\ 2-x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2-a>4\\ x=2-b<1\\ x=4\\ x=1\end{array}\right.$$

y' không xác định $\Leftrightarrow f'\left(2-x\right)$ không xác định $\Leftrightarrow 2-x=0\Leftrightarrow x=2$

Dựa vào đồ thị $f\left(x\right)$ ta thấy $f\left(2-x\right)>0\Leftrightarrow a<2-x<b\Leftrightarrow 2-b<x<2-a$

$$f'\left(2-x\right)>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-x<-2\\ 0<2-x<1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>4\\ 1<x<2\end{array}\right.$$

Ta có bảng xét dấu y'

x	$-\infty$		$2-b$		1		2		4		$2-a$		$+\infty$
$f'(2-x)$		$-$	|	$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(2-x)$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $y=\left[f\left(2-x\right)\right]^2$ có 5 điểm cực trị.

Câu 55. Cho hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng xét dấu của $f'\left(x\right)$ như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y=\left[f\left(4-x^2\right)\right]^3$ có bao nhiêu cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D.

TH1. Ta có $y'=-6x.\left[f\left(4-x^2\right)\right]^2.f'\left(4-x^2\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=0 & \\ \left[f\left(4-x^2\right)\right]^2=0 & (1)\\ f'\left(4-x^2\right)=0 & (2)\end{array}\right.$

+) Dựa vào bảng xét dấu y' ta có pt(1) có nghiệm nhưng đều là nghiệm bội chẵn nên tại đó không phải là điểm cực trị.

+) Từ (2) ta có $4-x^2=0 \Rightarrow x=2, x=-2$

TH2. Điểm làm cho y' không xác định: $4-x^2=3 \Rightarrow x=1, x=-1$

Vậy ta có 5 điểm cực trị

Câu 56. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Biết rằng hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

Hỏi hàm số $y=f^2(x^2-2x)$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D.

+) Ta có $y=f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị cắt trục hoành tại một điểm duy nhất nên

$$f(x)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=a<-2 \\ x=b>3 \end{array}\right.$$

Đặt $g(x)=f^2(x^2-2x)$. Ta có $g'(x)=(2x-2)f'(x^2-2x)f(x^2-2x)$.

Để hàm số $y=f^2(x^2-2x)$ có nhiều điểm cực tiểu nhất thì phương trình $f(x^2-2x)=0$ có nhiều nghiệm nhất $\Rightarrow x^2-2x=b>3$ (vì $x^2-2x\geq -1, \forall x$)

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x=-2 \\ x^2-2x=1 \\ x^2-2x=3 \\ x^2-2x=b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x+2=0 \\ x^2-2x-1=0 \\ x^2-2x-3=0 \\ x=x_1<-1 \\ x=x_2>3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1\pm\sqrt{2} \\ x=-1 \\ x=3 \\ x=x_1<-1 \\ x=x_2>3 \end{array}\right. .$$

Trong đó các nghiệm -1, 1, 3 $x_1; x_2$ là nghiệm bội lẻ và $1\pm\sqrt{2}$ là nghiệm bội chẵn. Vì vậy hàm số $g'(x)$ chỉ đổi dấu khi đi qua các nghiệm -1, 1, 3; $x_1; x_2$.

Ta có $g'(0)=-2f'(0)<0$ (do $f'(0)>0$).

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		x_1		-1		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		3		x_2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $y=f^2\left(x^2-2x\right)$ có đúng 3 điểm cực tiểu.

Câu 57. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	2	↘	$-\infty$

Hàm số $g\left(x\right)=\left(f\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)\right)^{2022}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 7 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 6

Lời giải

Chọn D.

Ta có $g'\left(x\right)=2022.\dfrac{3}{\left(x+2\right)^2}.\left(f\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)\right)^{2021}.f'\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)$

$$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} f\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)=0 & (1)\\ f'\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)=0 & (2)\end{array}\right.$$

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

$$f\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{x-1}{x+2}=a;\ (a<0)\\ \dfrac{x-1}{x+2}=b;\ (0<b<1)\\ \dfrac{x-1}{x+2}=c;\ (1<c<2)\\ \dfrac{x-1}{x+2}=d;\ (d>2)\end{array}\right.$$

$$f'\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{x-1}{x+2}=0\\ \dfrac{x-1}{x+2}=2\end{array}\right.$$

Nhận xét: hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+2}$ là hàm số đơn điệu trên tập xác định nên phương trình (1) có 4 nghiệm đơn, phương trình (2) có 2 nghiệm đơn và nghiệm của phương trình (1) và phương trình (2) không trùng nhau.

$$g'\left(x\right)\text{ không xác định }\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{x-1}{x+2}=1\quad (VN)\\ x=-2\end{array}\right.$$

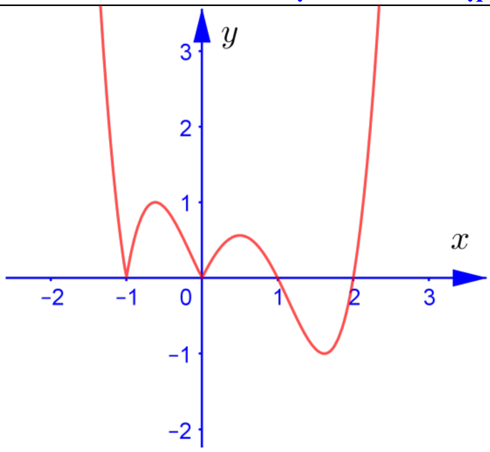
Nhận xét: $x=-2$ không thuộc tập xác định của $y=g(x)$

Vậy $g'(x)=0$ có 6 nghiệm đơn khác -2 nên hàm số $y=g(x)$ có 6 điểm cực trị.

VẤN ĐỀ 2

XÉT CỰC TRỊ HÀM $g(x)=\left[f\left(u(x)\right)\right]^k$ LIÊN QUAN ĐẾN THAM SỐ m

Câu 58. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc 6 có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=\left[f(x+1)^3+m\right]^7$ có 2 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $g(x)=\left[f(x+1)^3+m\right]^7 \Rightarrow g'(x)=21.\left[f(x+1)^3+m\right]^6.f(x+1)^2.f'(x+1)$

Ta có $\left[f(x+1)^3+m\right]^6.f(x+1)^2$ nên dấu của $g'(x)$ phụ thuộc vào dấu $f'(x+1)$.

Hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt nên có 2 điểm cực trị, số điểm cực trị hàm $f(x+1)$ bằng số điểm cực trị hàm $f(x)$ nên $g(x)$ có 2 điểm cực trị với mọi m.

Vậy với mọi m hàm số $g(x)$ đều có 2 điểm cực trị.

Câu 59. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 2, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\left[f'(x)\right]^2+f(x)f''(x)=15x^4+12x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(x).f'(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B.

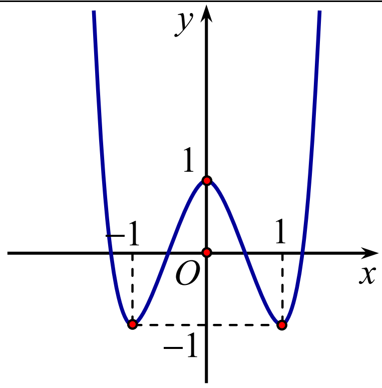
Ta có $g'(x)=\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x.$; $g'(x)=0\Leftrightarrow 15x^4+12x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\sqrt[3]{-\frac{4}{5}}\end{array}\right.$.

Nhận thấy y $x=0$ và y $x=\sqrt[3]{-\frac{4}{5}}$ là các nghiệm bội lẻ $\longrightarrow$ hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị.

DẠNG 5

BIẾT HÀM $y=f'(u(x))$ TÌM CỰC TRỊ HÀM $y=f(x)$

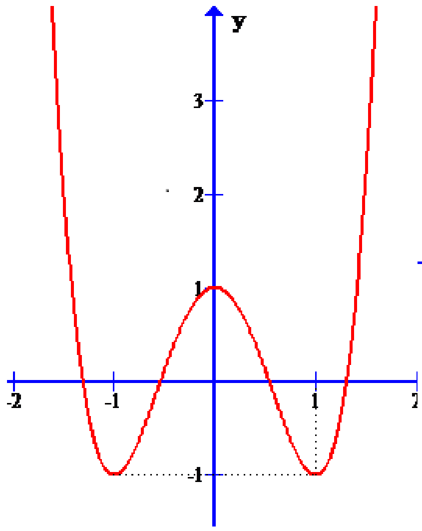
Câu 60. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R, biết rằng hàm số $y=f'(x-2)+2$ có đồ thị như hình vẽ sau. Hỏi hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực trị?

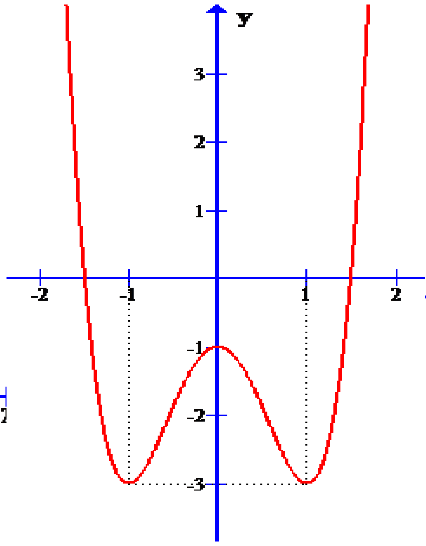


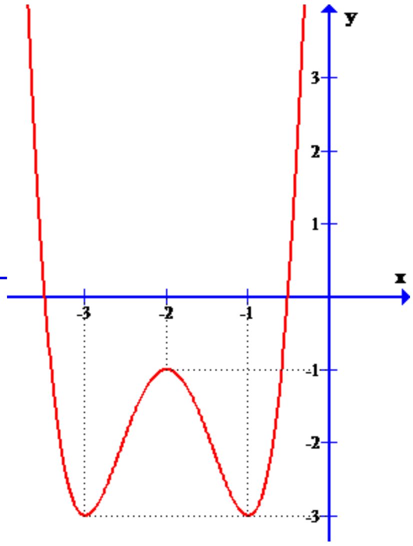
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B.







Đồ thị các hàm số lần lượt theo thứ tự: $y = f'(x-2)+2$, $y = f'(x-2)$, $y = f'(x)$

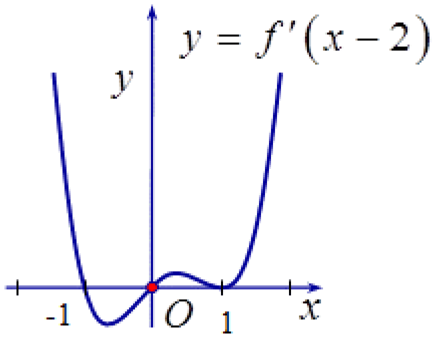
Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên sau: (với x_1, x_2 là hoành độ giao điểm của đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ với Ox)

BBT:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	y_{cd}	↘	y_{ct}	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $y = f(x)$ có 2 cực trị.

Câu 61. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x-2)$ có đồ thị như hình dưới. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là:



A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: đồ thị hàm số $y = f'(x-2)$ là phép tịnh tiến của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ sang phải 2 đơn vị.

Khi đó hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(-3)$	$\searrow$	$f(-2)$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là 2.

Câu 62. Cho $y = f(x)$ là hàm số xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết bảng xác dấu của $y = f'(3-2x)$ như sau:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{5}{2}$		3		4		$+\infty$
$f'(3-2x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C.

Đặt $u = 3 - 2x \Rightarrow x = \dfrac{3-u}{2}$

Ta có $f'(3-2x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{5}{2} \\ x = 3 \\ x = 4 \end{array}\right.$

$$\Rightarrow f'(u)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u=4 \\ u=-2 \\ u=-3 \\ u=-5 \end{array}\right.$$

Hơn nữa $f'(u)>0 \Leftrightarrow f'(3-2x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{5}{2} \\ x>4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2<u<4 \\ u<-5 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-5		-3		-2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗			↘			↗		↘	

Câu 63. Cho $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết bảng xét dấu của $y=f'\left(\sqrt[3]{x}\right)$ như sau

x	$-\infty$		-1		8		27		$+\infty$
$f'\left(\sqrt[3]{x}\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D.

Đặt $u=\sqrt[3]{x} \Rightarrow x=u^3$

$$f'\left(\sqrt[3]{x}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=8 \\ x=27 \end{array}\right.$$

Suy ra $f'(u)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u=-1 \\ u=2 \\ u=3 \end{array}\right.$

$$f'(u)>0 \Rightarrow f'\left(\sqrt[3]{x}\right)>0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x<8 \\ 27<x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1<u^3<8 \\ 27<u^3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<u<2 \\ 3<u \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

DẠNG 6
CỰC TRỊ LIÊN QUAN ĐẾN HÀM CHỨA TRỊ TUYỆT ĐỐI

- Hàm số $y = f(x)$ có n số điểm cực trị dương thì hàm số $y = f(|x|)$ có $2n+1$ số điểm cực trị.
- Hàm số $y = f(x)$ có n số điểm cực trị và phương trình $f(x) = 0$ có m số nghiệm đơn và bội lẻ thì hàm số $y = |f(x)|$ có $n+m$ số điểm cực trị.

• Hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị x_1,x_2. Khi đó hàm số $y=|f(x)|$ có:

+ 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow f(x_1).f(x_2)\ge 0$

+ 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow f(x_1).f(x_2)<0$

VẤN ĐỀ 1
CỰC TRỊ LIÊN QUAN ĐẾN HÀM CHỨA TRỊ TUYỆT ĐỐI KHÔNG CHỨA THAM SỐ m

Câu 64. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^3-2x^2)(x^3-2x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=|f(1-2018x)|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 9. **B.** 2018. **C.** 2022. **D.** 11.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $f'(x)=x^3(x-2)(x^2-2)=0$ có 4 nghiệm và đổi dấu 4 lần nên hàm số $y=f(x)$ có 4 cực trị.

Suy ra $f(x)=0$ có tối đa 5 điểm phân biệt.

Do đó $g(x)=|f(1-2018x)|$ có tối đa 9 cực trị.

Câu 65. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu $f'(x)$. Hàm số $y=f(|x-3|)$ có bao nhiêu điểm cực trị

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C.

$y=f(|x-3|)\,(1)$, Đặt $t=|x-3|$, $t\ge 0$. Thì (1) trở thành: $y=f(t)\ (t\ge 0)$.

Có $t=\sqrt{(x-3)^2}\Rightarrow t'_x=\dfrac{x-3}{\sqrt{(x-3)^2}}$

Có $y'_x=t'_x f'(t)$

$$y'_x=0\Leftrightarrow t'_x f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t'_x=0\\ f'(t)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ t=-2\,(L)\\ t=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=7\\ x=-1\end{array}\right.$$

Lấy $x=8$ có $t'(8)f'(5)>0$, đạo hàm đổi dấu qua các nghiệm đơn nên ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		3		7		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	CT	$\nearrow$	CĐ	$\searrow$	CT	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT thì hàm số $y=f\left(\left|x-3\right|\right)$ có 3 cực trị.

Câu 66. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như hình vẽ bên

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-2\left|x\right|\right)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị

A. 4. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C.

Tập xác định của hàm số: $D=\mathbb{R}$.

$*$ $y=h\left(x\right)=f\left(\left|x\right|^2-2\left|x\right|\right)$

$$y'=h'\left(x\right)=f'\left(\left|x\right|^2-2\left|x\right|\right).\frac{x}{\left|x\right|}.\left(2\left|x\right|-2\right).$$

$$h'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\\\left|x\right|^2-2\left|x\right|=0\\\left|x\right|^2-2\left|x\right|=1\\\left|x\right|^2-2\left|x\right|=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\\x=2\\x=-2\\x=1+\sqrt{2}\\x=-1-\sqrt{2}\\x=1+\sqrt{3}\\x=-1-\sqrt{3}\end{array}\right..$$

Ta thấy phương trình $h'\left(x\right)=0$ có 8 nghiệm đơn $\left(1\right)$.

$h'\left(x\right)$ không tồn tại tại $x=0$ mà $x=0$ thuộc tập xác định đồng thời qua đó $h'\left(x\right)$ đổi dấu $\left(2\right)$.

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ suy ra hàm số đã cho có 9 điểm cực trị.

Câu 67. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là một hàm đa thức có bảng xét dấu $f'\left(x\right)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^2-|x|\right)$

A. 5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $g(x)=f\left(x^2-|x|\right)=f\left(|x|^2-|x|\right)$. Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ bằng hai lần số điểm cực trị dương của hàm số $f(x)$ cộng thêm 1.

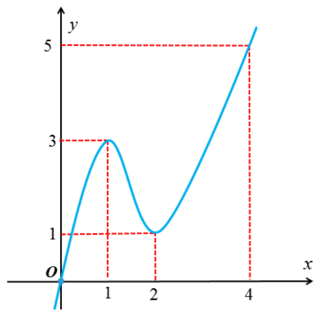
Xét hàm số $h(x)=f\left(x^2-x\right)\Rightarrow h'(x)=(2x-1)f'\left(x^2-x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\x^2-x=-1\\x^2-x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu hàm số $h(x)=f\left(x^2-x\right)$

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $h(x)=f\left(x^2-x\right)$ có 2 điểm cực trị dương, vậy hàm số $g(x)=f\left(x^2-|x|\right)=f\left(|x|^2-|x|\right)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 68. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0)=0; f(4)>4$. Biết hàm $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f\left(x^2\right)-2x\right|$.



A. 5. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

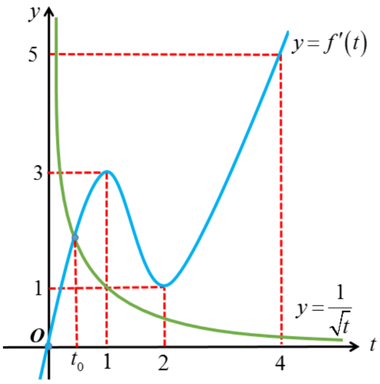
Chọn CA.

Đặt $h(x)=f\left(x^2\right)-2x$. Ta có $h'(x)=2x.f'\left(x^2\right)-2$.

Từ đồ thị ta thấy $f'\left(x^2\right)\geq 0,\forall x$. Do đó $h'(x)<0,\forall x<0$.

Với $x>0$, ta có $h'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x^2)=\dfrac{1}{x}$.

Đặt $t=x^2$, phương trình trở thành $f'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}} \Leftrightarrow t=t_0 \in (0;1)$. Khi đó $h'(x)=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{t_0}$.



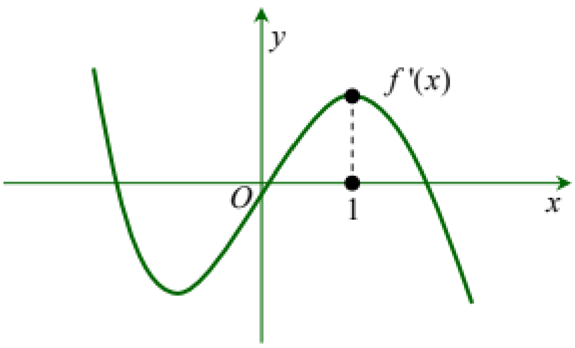
Ta có $h(0)=f(0)=0$ và $h(2)=f(4)-4>0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$\sqrt{t_0}$	2	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$ ↘	0 ↘	$h\left(\sqrt{t_0}\right)$ ↗	$h(2)$ ↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $y=h(x)$ có 1 điểm cực trị và đồ thị hàm số $y=h(x)$ cắt Ox tại 2 điểm phân biệt $\Rightarrow$ Hàm số $y=g(x)=|h(x)|$ có ba điểm cực trị.

Câu 69. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ có đồ thị đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y=f(|x|+|x-1|)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C.

Đặt $y=g\left(x\right)=\begin{cases} f\left(1-2x\right), & \left(x\in\left(-\infty;0\right)\right) \\ f\left(1\right), & \left(x\in\left[0;1\right)\right) \\ f\left(2x-1\right) & \left(x\in\left[1;+\infty\right)\right) \end{cases} \Rightarrow g'\left(x\right)=\begin{cases} -2f'\left(1-2x\right), & \left(x\in\left(-\infty;0\right)\right) \\ 0, & \left(x\in\left[0;1\right)\right) \\ 2f'\left(2x-1\right), & \left(x\in\left[1;+\infty\right)\right) \end{cases}$

Xét $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\Rightarrow g'\left(x\right)=\begin{cases} -2f'\left(1-2x\right)=0 & khi\ \ x\in\left(-\infty;0\right)\ (1) \\ 0 & khi\ \ x\in\left[0;1\right)\ \ (2) \\ 2f'\left(2x-1\right)=0 & khi\ \ x\in\left[1;+\infty\right)\ (3) \end{cases}$

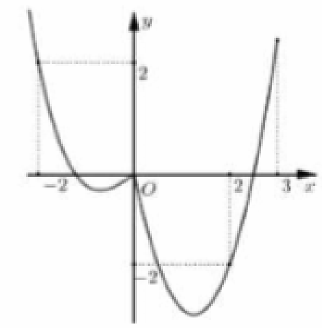
Xét phương trình (1) $g'\left(x\right)=-2f'\left(1-2x\right)=0$ với $\left(x\in\left(-\infty;0\right)\right)$ thì $1-2x\in\left(1;+\infty\right)$. Dựa vào đồ thị hàm số ta thầy phương trình $g'\left(x\right)=-2f'\left(1-2x\right)=0$ có 1 nghiệm duy nhất và $f'\left(1-2x\right)$đổi dấu tạ nghiệm đó.

Xét phương trình (2), phương trình này có vố số nghiệm bằng 0 trên nửa đoạn $\left[0;1\right)$, do đó hàm số không có cực trị.

Xét phương trình (3), $g'\left(x\right)=2f'\left(2x-1\right)=0$ với $\left(x\in\left[1;+\infty\right)\right)$ thì $2x-1\in\left(1;+\infty\right)$. Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trìn $g'\left(x\right)=2f'\left(2x-1\right)=0$ có 1 nghiệm duy nhất và $f'\left(2x-1\right)$đổi dấu tại nghiệm đó.

Do đó hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(\left|x\right|+\left|x-1\right|\right)$ có 2 điểm cực trị.

Câu 70. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ được cho như hình vẽ bên.



Hàm số $y=\left|f\left(x\right)+\frac{1}{2}x^2-f\left(0\right)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị trong khoảng (-2;3)

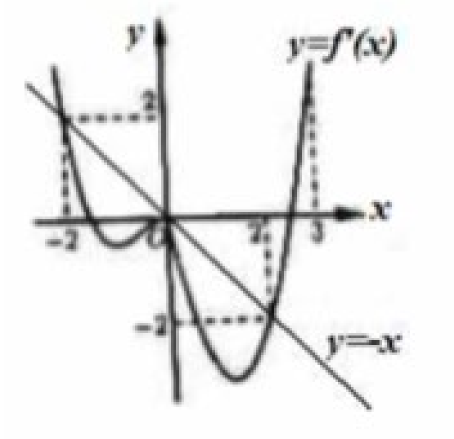
A. 6 **B.** 2 **C.** 5 **D.** 3

Lời giải

Chọn B.

Xét hàm số có $g\left(x\right)=f\left(x\right)+\frac{1}{2}x^2-f\left(0\right)$ có $g'\left(x\right)=f'\left(x\right)+x=0\Leftrightarrow f'\left(x\right)=-x.$

Vẽ đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ và đường thẳng y = -x trên cùng mặt phẳng tọa độ ta có:



Khi đó ta có $(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Phương trình $g'(x)=0$ có 1 nghiệm đơn $x=2 \in (-2;3) \Rightarrow$ Hàm số $y=g(x)$ có 1 cực trị thuộc $(-2;3)$

Xét $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=-\frac{1}{2}x^2+f(0)$

Ta có $-\frac{x^2}{2}+f(0) \le f(0)\ \forall x \in (-2;3)$

BBT hàm số $y=f(x)$

x	$-\infty$	-2	a		0		b		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	-	0	+		+	
$f(x)$		$f(-2)$	$f(a)$		$f(0)$		$f(b)$		$f(3)$		

Ta so sánh $f(0)$ và $f(3)$

Ta có $\int_0^b -f'(x)dx > \int_b^3 f'(x)dx \Leftrightarrow f(0)-f(b) > f(3)-f(b) \Leftrightarrow f(0) > f(3)$

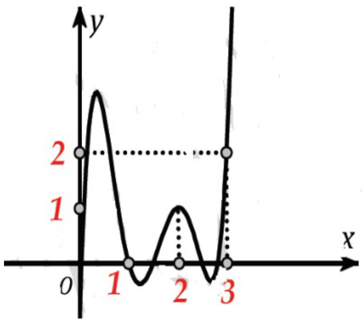
So sánh $f(0)$ và $f(-2)$. Ta có:

$\int_{-2}^a f'(x)dx < \int_a^0 -f'(x)dx \Leftrightarrow f(a)-f(-2) < f(a)-f(0) \Leftrightarrow f(-2) > f(0)$

$\Rightarrow$ Phương trình $f(x)=\frac{-x^2}{2}+f(0)$ có tối đa nghiệm thuộc $(-2;3)$

$\Rightarrow$ Phương trình $g(x)=0$ có tối đa 2 nghiệm $\Rightarrow$ Hàm số $y=|g(x)|$ có tối đa 1+2=3 cực trị

Câu 71. Cho hàm số $y=f(x)$ và đồ thị hình bên là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hỏi đồ thị của hàm số $g(x)=\left|2f(x)-(x-1)^2\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị ?

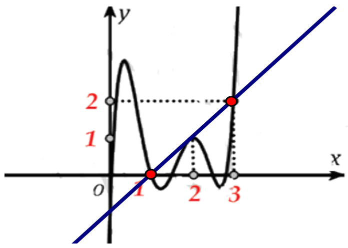


A. 9. **B.** 11. **C.** 8. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B.

Đặt $h(x)=2f(x)-(x-1)^2 \Rightarrow h'(x)=2f'(x)-2(x-1)$. Ta vẽ thêm đường thẳng $y=x-1$.



Ta có $h'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x-1 \Leftrightarrow x=0; x=1; x=2; x=3; x=a\left(a\in(1;2)\right)$

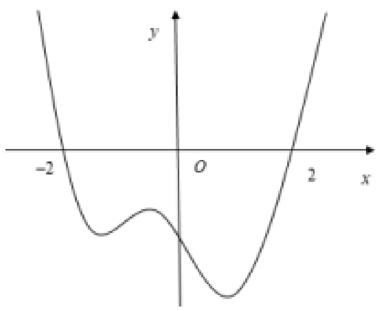
Theo đồ thị $h'(x)>0 \Leftrightarrow f'(x)>x-1 \Leftrightarrow x\in(0;1)\cup(a;2)\cup(3;+\infty)$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $h(x)$.

x	$-\infty$		0		1		a		2		3		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Đồ thị hàm số $g(x)$ có nhiều điểm cực trị nhất khi $h(x)$ có nhiều giao điểm với trục hoành nhất, vậy đồ thị hàm số $h(x)$ cắt trục hoành tại nhiều nhất 6 điểm, suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có tối đa 11 điểm cực trị.

Câu 72. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f(-2)<0$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai** ?



A. Hàm số $y=\left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số $y=\left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$ có hai cực tiểu.

C. Hàm số $y=\left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$ có hai cực đại và một cực tiểu.

D. Hàm số $y=\left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C.

Từ đồ thị của $f'(x)$ ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-			0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(-2)$	↘			$f(2)$	↗	$+\infty$

Từ giả thiết $f(-2)<0$ và $1-x^{2018}\le 1 \Rightarrow f\left(1-x^{2018}\right)<0$ với mọi x.

Đặt $t=1-x^{2018}$, ta có $\begin{cases} f_t'(t)<0 \text{ khi } t\in(-2;1)\Leftrightarrow x\in\left(-\sqrt[2018]{3};\ \sqrt[2018]{3}\right) \\ f'(t)>0 \text{ khi } t\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\sqrt[2018]{3}\right)\cup\left(\sqrt[2018]{3};+\infty\right) \end{cases}$

Đặt $g(x)=\left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$, ta có $g'(x)=-\dfrac{2018.x^{2017}.f_t'(t).f(t)}{2\sqrt{f^2(t)}}$

Do đó , ta có bảng biến thiên của $y=g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$-\sqrt[2018]{3}$		0		$-\sqrt[2018]{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘		↗		↘		↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên chọn C

VẤN ĐỀ 2

HÀM CHỨA THAM SỐ

Câu 73. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m>-10$ để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B.

Do tính chất đối xứng qua trục Oy của đồ thị hàm thị hàm số $f(|x|)$ nên yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(x)$ có 2 điểm cực trị dương. $(*)$

Xét $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ x+1=0 \\ x^2+2mx+5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x^2+2mx+5=0 \;\; (1) \end{array}\right.$. Do đó $(*) \Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=m^2-5>0 \\ S=-2m>0 \\ P=5>0 \end{cases} \Leftrightarrow m<-\sqrt{5}$. $\xrightarrow[m\in\mathbb{Z}]{m>-10} m\in\{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3\}$.

Câu 74. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có **đúng** 1 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn A Xét $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ x+1=0 \\ x^2+2mx+5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x^2+2mx+5=0 \;\; (1) \end{array}\right.$. Theo yêu cầu bài toán ta suy ra

Trường hợp 1. Phương trình (1) có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=m^2-5>0 \\ S=-2m<0 \\ P=5>0 \end{cases} \Leftrightarrow m>\sqrt{5}.$

Trường hợp này không có giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2. Phương trình (1) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta'=m^2-5\le 0$

$\Leftrightarrow -\sqrt{5}\le m\le\sqrt{5} \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}^-} m\in\{-2;-1\}$. Chọn A.

Câu 75. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2(x^2+m^2-3m-4)^3(x+3)^5$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 3 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Chọn B Xét $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ x^2+m^2-3m-4=0 \\ x+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-3 \\ x^2+m^2-3m-4=0 \;\; (1) \end{array}\right.$. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow m^2-3m-4<0 \Leftrightarrow -1<m<4 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{0;1;2;3\}$.

Câu 76. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^4(x-m)^5(x+3)^3$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-5;5]$ để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 3 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C.

Xét $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ x-m=0 \\ x+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \text{ (nghiem boi 4)} \\ x=m \text{ (nghiem boi 5)} \\ x=-3 \text{ (nghiem boi 3)} \end{array}\right.$.

Nếu $m=-1$ thì hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị âm ($x=-3;\ x=-1$). Khi đó, hàm số $f(|x|)$ chỉ có 1 cực trị là $x=0$. Do đó, $m=-1$ không thỏa yêu cầu đề bài.

Nếu $m=-3$ thì hàm số $f(x)$ không có cực trị. Khi đó, hàm số $f(|x|)$ chỉ có 1 cực trị là $x=0$. Do đó, $m=-3$ không thỏa yêu cầu đề bài.

Khi $\begin{cases} m\neq -1 \\ m\neq -3 \end{cases}$ thì hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị là $x=m$ và $x=-3<0$.

Để hàm số $f(|x|)$ có 3 điểm cực trị thì hàm số $f(x)$ phải có hai điểm cực trị trái dấu $\Leftrightarrow m>0 \xrightarrow[m\in[-5;5]]{m\in\mathbb{Z}} m\in\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$.

Câu 77. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\left(x^3-2x^2\right)\left(x^3-2x\right)$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=\left|f(1-2018x)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 9. **B.** 2022. **C.** 11. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn A.

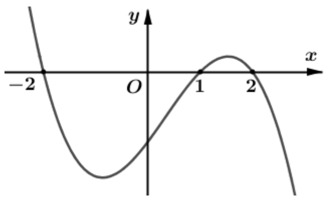
Ta có $f'(x)=\left(x^3-2x^2\right)\left(x^3-2x\right)=x^3(x-2)\left(x^2-2\right); \forall x\in\mathbb{R}$.

Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|g(x)\right|=\left|f(1-2018x)\right|$ là tổng

Số nghiệm phương trình $g'(x)=0 \Leftrightarrow -2018.f'(1-2-18x)=0 \longrightarrow$ có 4 điểm. Số nghiệm của phương trình $f(1-2018x)=0 \longrightarrow$ có tối đa 5 nghiệm vì đạo hàm có 4 nghiệm.

Vậy hàm số đã cho có 9 điểm cực trị.

Câu 78. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên R và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đặt $g(x)=f(|x+m|)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị?



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn D.

Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta thấy $f'(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm có hoành độ dương (và 1 điểm có hoành độ âm)

$\longrightarrow f(x)$ có 2 điểm cực trị dương

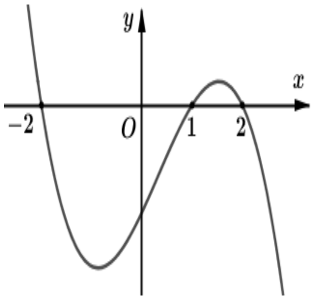
$\longrightarrow f(|x|)$ có 5 điểm cực trị

$\longrightarrow f(|x+m|)$ có 5 điểm cực trị với mọi m (vì tịnh tiến sang trái hay sang phải không ảnh hưởng đến số điểm cực trị của hàm số). Chọn D

Chú ý: Đồ thị hàm số $f(|x+m|)$ có được bằng cách lấy đối xứng trước rồi mới tịnh tiến.

Đồ thị hàm số $f(|x|+m)$ có được bằng cách tịnh tiến trước rồi mới lấy đối xứng.

Câu 79. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên R và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Đặt $g(x)=f(|x|+m)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)$ có **đúng** 5 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B.

Từ đồ thị $f'(x)$ ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$. Suy ra bảng biến thiên của $f(x)$

x	$-\infty$	-2		1		2	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
f	↗		↘		↗		↘

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ hàm số $f(x+m)$ có 2 điểm cực trị dương (vì khi đó lấy đối xứng qua Oy ta được đồ thị hàm số $f(|x|+m)$ có đúng 5 điểm cực trị).

Từ bảng biến thiên của $f(x)$, suy ra $f(x+m)$ luôn có 2 điểm cực trị dương $\Leftrightarrow$ tịnh tiến $f(x)$ (sang trái hoặc sang phải) phải thỏa mãn

+ Tịnh tiến sang trái nhỏ hơn 1 đơn vị $\longrightarrow m<1$.

+ Tịnh tiến sang phải không vượt quá 2 đơn vị $\longrightarrow m\geq -2$.

Suy ra $-2\leq m<1 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-2;-1;0\}$. Chọn B.