LỜI GIẢI VÀ BÌNH LUẬN ĐỀ THI VMO 2018

Trần Nam Dũng – Võ Quốc Bá Cẩn – Lê Phúc Lữ – Trần Quang Hùng

Nguyễn Lê Phước - Nguyễn Văn Huyện

1. Thông tin bản quyền

2. Đề thi

2.1. Ngày thi thứ nhất (11/01/2018)

Bài 1 (5.0 *điểm*). Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = 2$ và

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 8} - \sqrt{x_n + 3}, \quad \forall n \geq 1.$$

a) Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

b) Với mỗi số nguyên dương n, chứng minh rằng $n \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq n + 1$.

Bài 2 (5.0 *điểm*). Cho tam giác nhọn không cân ABC và D là một điểm trên cạnh BC. Lấy điểm E trên cạnh AB và lấy điểm F trên cạnh AC sao cho $\angle DEB = \angle DFC$. Các đường thẳng DF, DE lần lượt cắt AB, AC tại M, N. Gọi (I_1), (I_2) tương ứng là các đường tròn ngoại tiếp các tam giác DEM, DFN. Ký hiệu (J_1) là đường tròn tiếp xúc trong với (I_1) tại D và tiếp xúc với AB tại K, (J_2) là đường tròn tiếp xúc trong với (I_2) tại D và tiếp xúc với AC tại H, P là giao điểm của (I_1) và (I_2), Q là giao điểm của (J_1) và (J_2) (P, Q khác D).

a) Chứng minh rằng D, P, Q thẳng hàng.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AHK và đường thẳng AQ lần lượt tại G và L (G, L khác A). Chứng minh rằng tiếp tuyến tại D của đường tròn ngoại tiếp tam giác DQG cắt đường thẳng EF tại một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác DLG.

Bài 3 (5.0 *điểm*). Một nhà đầu tư có hai mảnh đất hình chữ nhật, các mảnh đất đều có kích thước là $120\,\text{m} \times 100\,\text{m}$.

a) Trên mảnh đất thứ nhất, nhà đầu tư muốn xây một ngôi nhà có nền hình chữ nhật kích thước 25 m $\times$ 35 m và xây bên ngoài 9 bồn hoa hình tròn đường kính 5 m. Chứng minh rằng dù xây trước 9 bồn hoa ở đâu thì trên phần đất còn lại vẫn đủ chỗ xây ngôi nhà đó.

b) Trên mảnh đất thứ hai, nhà đầu tư muốn xây một hồ cá hình một đa giác lồi sao cho từ một điểm bất kỳ trên phần đất còn lại có thể đi không quá 5 m thì đến bờ hồ. Chứng minh rằng chu vi của hồ không nhỏ hơn $440 - 20\sqrt{2}$ m.

Bài 4 (5.0 *điểm*). Trong mặt phẳng Oxy, cho $(\mathcal{C})$ là đồ thị của hàm số $y = \sqrt[3]{x^2}$. Một đường thẳng d thay đổi sao cho d cắt $(\mathcal{C})$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x_1,\ x_2,\ x_3$. Chứng minh rằng

a) Đại lượng $\sqrt[3]{\frac{x_2x_3}{x_1^2}} + \sqrt[3]{\frac{x_3x_1}{x_2^2}} + \sqrt[3]{\frac{x_1x_2}{x_3^2}}$ là một hằng số.

b) $\sqrt[3]{\frac{x_1^2}{x_2x_3}} + \sqrt[3]{\frac{x_2^2}{x_3x_1}} + \sqrt[3]{\frac{x_3^2}{x_1x_2}} < -\frac{15}{4}$.

2.2. Ngày thi thứ hai (12/01/2018)

Bài 5 (6.0 *điểm*). Cho các số nguyên dương n và d. Xét tập hợp $S_n(d)$ gồm tất cả các bộ số có thứ tự $(x_1, \ldots, x_d)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau

i) $x_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ với mọi chỉ số $1 \le i \le d$;

ii) $x_i \neq x_{i+1}$ với mọi chỉ số $1 \le i \le d - 1$;

iii) không tồn tại các chỉ số $1 \le i < j < k < l \le d$ sao cho $x_i = x_k$ và $x_j = x_l$.

a) Tính số phần tử của tập hợp $S_3(5)$.

b) Chứng minh rằng tập hợp $S_n(d)$ khác rỗng khi và chỉ khi $d \le 2n - 1$.

Bài 6 (7.0 *điểm*). Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_0 = 2,\ x_1 = 1$ và

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \quad \forall n \ge 0.$$

a) Với $n \ge 1$, chứng minh rằng nếu x_n là số nguyên tố thì n là số nguyên tố hoặc n không có ước nguyên tố lẻ.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên không âm (m, n) sao cho x_n chia hết cho x_m.

Bài 7 (7.0 *điểm*). Cho tam giác nhọn không cân ABC có trọng tâm G nội tiếp đường tròn (O). Gọi $H_a,\ H_b,\ H_c$ lần lượt là chân các đường cao hạ từ các đỉnh $A,\ B,\ C$ của tam giác ABC và $D,\ E,\ F$ lần lượt là trung điểm các cạnh $BC,\ CA,\ AB$. Các tia $GH_a,\ GH_b,\ GH_c$ lần lượt cắt (O) tại các điểm $X,\ Y,\ Z$.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác XCE đi qua trung điểm đoạn thẳng BH_a.

b) Gọi $M,\ N,\ P$ tương ứng là trung điểm các đoạn thẳng $AX,\ BY,\ CZ$. Chứng minh rằng các đường thẳng $DM,\ EN,\ FP$ đồng quy.

3. Bình luận chung

Đề thi ngày thứ nhất nhìn chung là cơ bản, không có bài toán nào quá khó. Tuy nhiên nếu nhìn tổng thể thì đề khá dài, với nhiều ý.

- **Bài 1** là một bài toán dãy số cơ bản dạng $x_{n+1} = f(x_n)$. Có hai cách tiếp cận chính cho bài này là dùng ánh xạ co (xét dãy $|x_n - 1|$) hoặc dùng tính giảm của hàm f để xét hai dãy chỉ số chẵn và chỉ số lẻ. Câu b) có thể sẽ tạo ra những khó khăn nhất định nhưng cũng có nhiều hướng xử lý, trong đó hướng tự nhiên và đơn giản nhất là dùng quy nạp, sử dụng tính chất: *Nếu $x_n > 1$ thì $x_{n+1} < 1$ và $x_n + x_{n+1} > 2$, nếu $x_n < 1$ thì $x_{n+1} > 1$ và $x_n + x_{n+1} < 2$.*

- **Bài 2** là một bài toán hình học phẳng với cấu hình khá rối rắm. Lời giải ý a) chủ yếu sử dụng phương tích và trục đẳng phương trong khi đó lời giải ý b) b) có phần phức tạp hơn, nếu chúng ta biết nhiều kiến thức về phép vị tự quay (phép đồng dạng) và các tính chất về hàng điểm điều hòa thì cũng có thể giải quyết được bài toán nhưng nếu nghĩ một cách đơn giản thì chúng ta hoàn toàn có thể giải bài toán này chỉ bằng tính toán góc.

- **Bài 3** là một bài toán hình học tổ hợp ở mức độ khá đơn giản với hai ý riêng biệt. Ý a) đã xuất hiện trong nhiều tài liệu về hình học tổ hợp, chẳng hạn cuốn Hình học tổ hợp của nhà giáo Vũ Hữu Bình mà Sputnik Education vừa phát hành trong năm 2017 vừa qua. Ý b) có thể coi là phiên bản đơn giản của bài toán con giun do thầy Văn Như Cương đề xuất cho IMO 1982 (điều kiện đa giác lồi sẽ giúp học sinh hình dung cấu hình và lý luận đơn giản hơn). Tuy không phức tạp cả về ý tưởng lẫn kỹ thuật nhưng đây là một dịp hiếm hoi mà hình học tổ hợp xuất hiện trong các đề thi VMO và TST, do đó có thể sẽ gây khó khăn cho các thí sinh.

- **Bài 4** là một bài toán cơ bản sử dụng định lý Vieta và khảo sát hàm số. Nếu biết cách đặt ẩn số phù hợp thì ta có thể khử các căn thức một cách dễ dàng. Có thể nói rằng bài 4 còn dễ xử lý hơn bài 1. Tuy nhiên vì bài này đặt ở vị trí bài 4 nên cả về mặt tự nhiên lẫn tâm lý, nhiều học sinh có thể sẽ bỏ qua món quà này của ban đề thi.

Nhìn chung đề thi ngày thứ nhất có nhiều đất diễn, nặng về kỹ thuật do đó bạn nào có kỹ năng xử lý vấn đề nhanh gọn sẽ có lợi thế. Tất cả các bài toán đều có ý a), b) nên điểm thi chắc sẽ mịn hơn.

Ở ngày thi thứ hai:

- **Bài 5** là một bài toán tổ hợp khá đẹp mà chứng minh sử dụng phép quy nạp toán học. Đáng tiếc đây chỉ là phát biểu lại của một bài toán thi Olympic Iran năm 2011, có cho thêm ý a) để cho điểm và gợi ý. Nguyên văn bài toán của Iran như sau: *Cầu vồng là tên của một loài chim. Con chim này có n màu và màu của nó trong hai ngày liên tiếp không giống nhau. Không tồn tại 4 ngày trong cuộc đời của con chim này là $i < j < k < l$ sao cho chim có cùng màu trong hai ngày i và k và cùng màu trong hai ngày j và l (và khác màu với màu mà nó có trong các ngày i và k). Hỏi chim cầu vồng có thể sống tối đa bao nhiêu ngày (tính theo n)?*

- **Bài 6** là một kết quả kinh điển về số Lucas: *L_m chia hết cho L_n khi và chỉ khi m là bội số lẻ của n.* Kết quả này suy ra một cách khá dễ dàng từ công thức

$$L_{m+2n} = L_m L_{2n} - L_{m-2n},$$

trong đó $L_{-n} = (-1)^n L_n$. Công thức này lại có thể suy ra dễ dàng từ công thức tổng quát cho dãy số Lucas: $L_n = \alpha^n + \beta^n$ với α, β là hai nghiệm của phương trình $x^2 - x - 1 = 0$. Do đó trong bài toán này, ngoài các thuật ngữ mang tính số học như chia hết, số nguyên tố thì bản chất hoàn toàn là đại số.

- **Bài 7** là một bài toán hình có cấu hình khá đẹp và gọn. Ý a) của bài toán có thể giải bằng kiến thức cấp hai nhưng ý b) là một ý khó, cần sử dụng đến các kiến thức ít phổ biến hơn như định lý Ceva, định lý Desargues.

Tổng thể về cấu trúc, đề thi có hai bài đại số và giải tích (bài 1 và bài 4 có thể tính là giải tích hay đại số đều được), hai bài hình (bài 2 và bài 7), một bài hình tổ hợp (bài 3), một bài tổ hợp (bài 5) và một bài số học có bản chất đại số. Về tính mới, có lẽ chỉ có câu 1b), câu 4a) và các bài hình là có ý mới, còn lại các bài 3, 4b), 5, 6 đều là các bài khai thác các ý cũ. Về độ khó thì 4 bài ngày đầu khá đều nhau, bài nào học sinh cũng có thể làm được. Ở ngày 2 thì bài 7b được coi là khó nhằn nhất, còn lại các bài khác đều nhau, khó dễ tùy theo sở trường.

Về mặt phương pháp giải toán, có thể thấy trong đề thi này, phương pháp quy nạp toán học được vận dụng khá nhiều trong các vấn đề khác nhau: ở bài 1, bài 5 và bài 6. Hai bài hình thuần túy đều có chất từa tựa nhau, ngày càng sử dụng nhiều các tính chất và định lý mạnh liên quan đến đường tròn.

Qua phân tích đề thi một cách chủ quan, chúng tôi cho rằng điểm thi năm nay sẽ khá mịn. Dự đoán để lọt vào vòng 2, thí sinh sẽ phải hoàn chỉnh 4.5 bài toán, tương ứng khoảng 25-26 điểm. Điểm đạt giải ba sẽ vào khoảng 20, tương ứng 3.5 bài. Điểm đạt giải khuyến khích vào khoảng 15, tương ứng 2.5 bài.

4. Lời giải và bình luận các bài toán

Bài 1 (5.0 *điểm*). Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = 2$ và

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 8} - \sqrt{x_n + 3}, \quad \forall n \geq 1.$$

a) Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

b) Với mỗi số nguyên dương n, chứng minh rằng $n \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq n + 1$.

Lời giải. a) Dễ thấy $x_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Với mỗi số nguyên dương n, ta có

$$\begin{aligned}
|x_{n+1} - 1| &= \left|\sqrt{x_n + 8} - 3 + 2 - \sqrt{x_n + 3}\right| \\
&= \left|(x_n - 1)\left(\frac{1}{\sqrt{x_n + 8} + 3} - \frac{1}{\sqrt{x_n + 3} + 2}\right)\right| \\
&\leq |x_n - 1|\left(\frac{1}{\sqrt{x_n + 8} + 3} + \frac{1}{\sqrt{x_n + 3} + 2}\right) \\
&\leq |x_n - 1|\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{5}{6}|x_n - 1|.
\end{aligned}$$

Do đó

$$|x_n - 1| \le \frac{5}{6}|x_{n-1} - 1| \le \cdots \le \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}|x_1 - 1| = \left(\frac{5}{6}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Đến đây, với chú ý rằng $\lim \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$, ta suy ra $\lim x_n = 1$.

b) Xét hàm số

$$f(x) = \sqrt{x+8} - \sqrt{x+3} = \frac{5}{\sqrt{x+8} + \sqrt{x+3}}$$

với $x > 0$, ta thấy $f(x)$ là hàm liên tục và nghịch biến trên $(0, +\infty)$. Do $x_1 > 1$ nên $x_2 = f(x_1) < f(1) = 1$, suy ra $x_3 = f(x_2) > f(1) = 1, \ldots$ Một cách tổng quát, ta chứng minh được $x_{2k} < 1 < x_{2k-1}$ với mọi $k \in \mathbb{N}^*$.

Bây giờ, xét hàm số $g(x) = x + f(x) = x + \sqrt{x+8} - \sqrt{x+3}$ với $x > 0$, ta có $g(x)$ là hàm liên tục và

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x+8}} - \frac{1}{2\sqrt{x+3}} > 1 - \frac{1}{2\sqrt{3}} > 0, \quad \forall x > 0$$

nên $g(x)$ là hàm đồng biến trên $(0, \infty)$. Từ đây, ta có nhận xét sau

- Nếu $x > 1$ thì $g(x) > g(1) = 2$.
- Nếu $0 < x < 1$ thì $g(x) < g(1) = 2$.

Từ nhận xét trên suy ra

$$x_{2k-1} + x_{2k} > 2 > x_{2k} + x_{2k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Bây giờ, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đã cho. Xét hai trường hợp:

- **Trường hợp 1: $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}^*$).** Dễ thấy $2 < x_1 + x_2 < 3$ nên bất đẳng thức đã cho đúng khi $k = 1$. Xét $k > 1$, ta có

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) + \cdots + (x_{2k-1} + x_{2k}) \\ &> 2 + 2 + \cdots + 2 \\ &= 2k \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= x_1 + (x_2 + x_3) + \cdots + (x_{2k-2} + x_{2k-1}) + x_{2k} \\ &< 2 + 2 + \cdots + 2 + 1 \\ &= 2k + 1. \end{aligned}$$

- **Trường hợp 2: $n = 2k - 1$ ($k \in \mathbb{N}^*$).** Do giả thiết $x_1 = 2$ nên bất đẳng thức đã cho đúng khi $k = 1$. Xét $k > 1$, ta có

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) + \cdots + (x_{2k-3} + x_{2k-2}) + x_{2k-1} \\ &> 2 + 2 + \cdots + 2 + 1 \\ &= 2k - 1 \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= x_1 + (x_2 + x_3) + \cdots + (x_{2k-2} + x_{2k-1}) \\ &< 2 + 2 + \cdots + 2 \\ &= 2k. \end{aligned}$$

Tóm lại, ta có $n \le x_1 + x_2 + \cdots + x_n \le n + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Bài toán được giải quyết xong. □

Bình luận. Đây là một bài toán dãy số cơ bản dạng $x_{n+1} = f(x_n)$ với $f(x)$ là hàm nghịch biến. Đối với ý a), ngoài cách giải sử dụng ánh xạ co như trên, một cách chuẩn mực để xử lý kiểu bài toán này là chia (x_n) thành hai dãy con (dãy chỉ số chẵn và chỉ số lẻ) rồi chứng minh hai dãy con đó đơn điệu, bị chặn và hội tụ, cuối cùng ta chỉ việc chứng minh giới hạn của hai dãy con bằng nhau nữa là được.

Điều "thú vị" là bài toán này có cùng dạng với bài dãy số trong đề chọn đội tuyển chuyên ĐHSP Hà Nội, 2014: *Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $x_1 = 1$ và*

$$x_{n+1} = 5\left(\sqrt{x_n + 11} - \sqrt{x_n + 4}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Ý b) của bài toán có nhiều nét mới. Ý tưởng chủ đạo để giải phần này là sử dụng nhận xét:

$$x_{2k-1} + x_{2k} > 2 > x_{2k} + x_{2k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Ngoài cách tiếp cận như trên, ta cũng có thể sử dụng phương pháp quy nạp toán học.

Một số bài toán với dạng phát biểu tương tự:

1. (IMO Shortlist, 2015) Cho dãy các số dương $a_1, a_2, \ldots$ thỏa mãn

$$a_{k+1} \ge \frac{ka_k}{a_k^2 + k - 1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng, với mọi số tự nhiên $n \ge 2$, ta có $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \ge n$.

2. (IMO Shortlist, 2013) Cho số nguyên dương n và dãy các số nguyên dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Người ta mở rộng dãy trên thành dãy tuần hoàn gồm vô hạn số hạng theo quy tắc $a_{n+i} = a_i$ với mọi $i \in \mathbb{N}^*$. Biết rằng $1 \le a_1 \le a_2 \le \cdots a_n \le a_1 + n$ và

$$a_{a_i} \le n + i - 1, \quad \forall i \in \mathbb{N}^*,$$

chứng minh bất đẳng thức sau

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \le n^2.$$

3. (BMO, 2008) Tồn tại không dãy các số dương $a_1, a_2, \ldots$ sao cho các bất đẳng thức sau được thỏa mãn đồng thời với mọi n nguyên dương:

   a) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \le n^2$;

   b) $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \le 2008$?

4. (SMO, 2010) Cho dãy số (a_n) thỏa mãn $a_1 \ge 1$ và $a_{k+1} \ge a_k + 1$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương, ta có

$$a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3 \ge (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2.$$

Bài 2 (5.0 *điểm*). Cho tam giác nhọn không cân ABC và D là một điểm trên cạnh BC. Lấy điểm E trên cạnh AB và lấy điểm F trên cạnh AC sao cho $\angle DEB = \angle DFC$. Các đường thẳng DF, DE lần lượt cắt AB, AC tại M, N. Gọi (I_1), (I_2) tương ứng là các đường tròn ngoại tiếp các tam giác DEM, DFN. Ký hiệu (J_1) là đường tròn tiếp xúc trong với (I_1) tại D và tiếp xúc với AB tại K, (J_2) là đường tròn tiếp xúc trong với (I_2) tại D và tiếp xúc với AC tại H, P là giao điểm của (I_1) và (I_2), Q là giao điểm của (J_1) và (J_2) (P, Q khác D).

a) Chứng minh rằng D, P, Q thẳng hàng.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AHK và đường thẳng AQ lần lượt tại G và L (G, L khác A). Chứng minh rằng tiếp tuyến tại D của đường tròn ngoại tiếp tam giác DQG cắt đường thẳng EF tại một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác DLG.

Lời giải. (Hình vẽ xem ở trang sau.)

a) Do $\angle DEB = \angle DFC$ nên $\angle DEA = \angle DFA$, suy ra tứ giác $MNEF$ nội tiếp.

Ta có $\angle DI_2F = 2\angle DNF = 2\angle EMF$ và $\angle I_2DF = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle DI_2F$ nên $I_2D \perp ME$. Mà $J_1K \perp ME$ nên $I_2D \parallel J_1K$.

Chứng minh tương tự, ta cũng có $I_1D \parallel J_2H$.

Từ đó suy ra $\angle I_2DK = \angle DKJ_1 = \angle KDJ_1$ hay DK là phân giác góc I_2DI_1. Tương tự, ta cũng có DH là phân giác góc I_2DI_1. Do đó, ba điểm D, H, K thẳng hàng.

Do tứ giác $MNEF$ nội tiếp nên $AE \cdot AM = AF \cdot AN$ nên A thuộc trục đẳng phương của (I_1) và (I_2). Suy ra ba điểm A, D, P thẳng hàng. (1)

Lại có $\angle AKH = 90^\circ - \angle DKJ_1 = 90^\circ - \angle DHJ_2 = \angle DHF = \angle AHK$ nên $AH = AK$. Suy ra A có cùng phương tích với (J_1) và (J_2), hay A thuộc trục đẳng phương của (J_1) và (J_2). Do đó, ba điểm A, D, Q thẳng hàng. (2)

Từ (1) và (2), ta có bốn điểm A, D, P, Q thẳng hàng (đpcm).

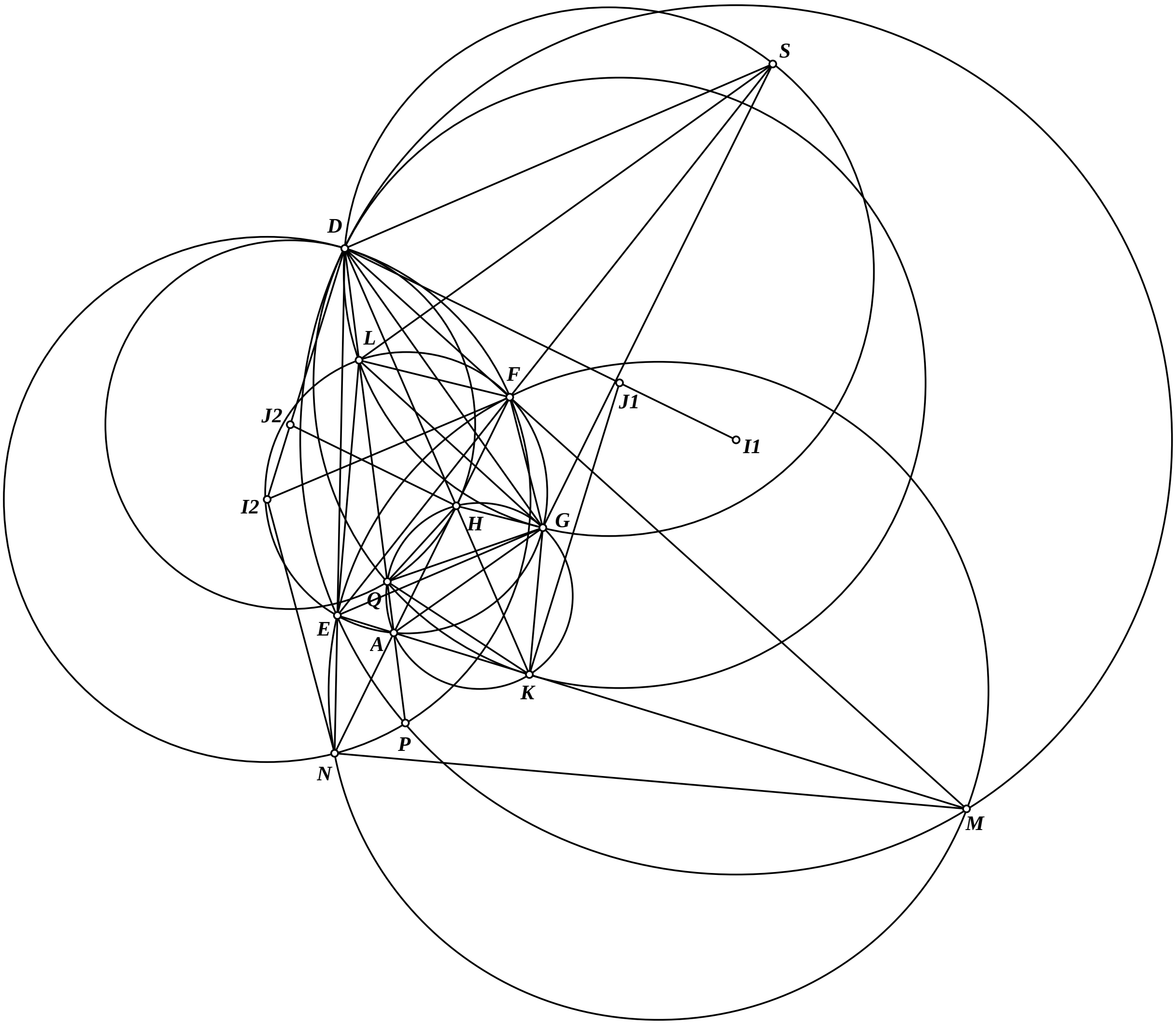
b) Do AK là tiếp tuyến của (J_1) nên $\angle AQK = \angle AKD = \angle AHK$, suy ra tứ giác $AQHK$ nội tiếp. Ta có $\angle GEF = \angle GAF = \angle GKH$, $\angle GHK = \angle GAK = \angle GFE$ nên

$$\triangle GEF \sim \triangle GKH \text{ (g-g)}.$$

Lấy điểm S thuộc EF sao cho $\frac{\overline{SE}}{\overline{SF}} = \frac{\overline{DK}}{\overline{DH}}$, khi đó ta có $\triangle GES \sim \triangle GKD$ (c-g-c). Suy ra $\triangle GEK \sim \triangle GSD$ (c-g-c). Từ đây, ta có $\angle GDS = \angle GKE = \angle GQD$ nên DS là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác GDQ. (3)

Lại có $\triangle LEF \sim \triangle QKH$ (g-g) nên $\triangle LES \sim \triangle QKD$ (c-g-c). Từ đó $\angle KQD = \angle ELS$, mà $\angle KQG = \angle KHG = \angle EFG = \angle ELG$ nên $\angle SLG = \angle DQG = \angle GDS$. Kết quả này chứng tỏ tứ giác $DLGS$ nội tiếp. (4)

Từ (3) và (4), ta có điều phải chứng minh. □



Bình luận. Hai ý bài toán này khá độc lập. Ý a) thể hiện rõ tinh thần dùng trục đẳng phương. Ý b) được giải đơn giản nhờ tính toán góc. Ý b) có nhiều tổng quát nhưng hai bài toán sau đây có thể coi là một mô hình tổng quát mạnh nhất cho ý b) khi ta thay tiếp tuyến thành cát tuyến (ta có thể giải hai bài toán này bằng góc định hướng khá đơn giản):

1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). E, F là hai điểm bất kỳ nằm trên các đường thẳng CA và AB. Đường tròn (AEF) cắt lại đường tròn (O) tại G. Lấy điểm P bất kỳ nằm trên EF và lấy điểm Q bất kỳ nằm trên đường tròn (AEF). Đường thẳng AQ cắt đường tròn (GPQ) tại R khác Q. Đường thẳng PR cắt đường thẳng BC tại D. Chứng minh rằng AQ đi qua giao điểm khác G của (O) và (GRD).

2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). E, F là hai điểm bất kỳ nằm trên các đường thẳng CA và AB. EF cắt BC tại G. Lấy điểm P bất kỳ nằm trên EF và lấy điểm Q bất kỳ nằm trên đường tròn (AEF). Đường thẳng AQ cắt đường tròn (GPQ) tại R khác Q. Đường tròn (APR) cắt lại (O) tại D. Chứng minh rằng các đường thẳng AQ và BC cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn (GRD).

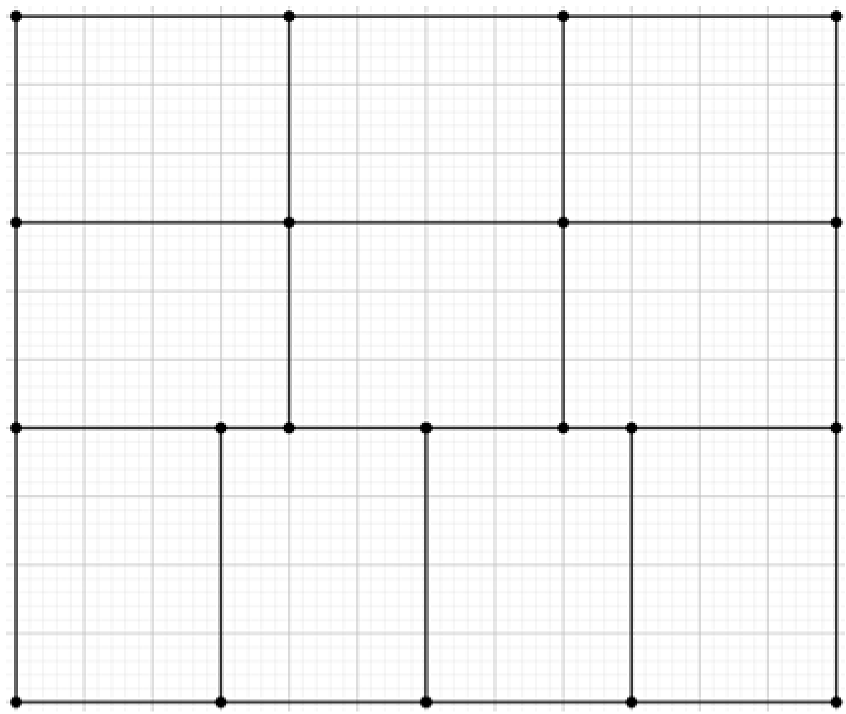
Bài 3 (5.0 *điểm*). Một nhà đầu tư có hai mảnh đất hình chữ nhật, các mảnh đất đều có kích thước là $120\,\text{m} \times 100\,\text{m}$.

a) Trên mảnh đất thứ nhất, nhà đầu tư muốn xây một ngôi nhà có nền hình chữ nhật kích thước $25\,\text{m} \times 35\,\text{m}$ và xây bên ngoài 9 bồn hoa hình tròn đường kính $5\,\text{m}$. Chứng minh rằng dù xây trước 9 bồn hoa ở đâu thì trên phần đất còn lại vẫn đủ chỗ xây ngôi nhà đó.

b) Trên mảnh đất thứ hai, nhà đầu tư muốn xây một hồ cá hình một đa giác lồi sao cho từ một điểm bất kỳ trên phần đất còn lại có thể đi không quá 5 m thì đến bờ hồ. Chứng minh rằng chu vi của hồ không nhỏ hơn $440 - 20\sqrt{2}\,\text{m}$.

Lời giải. Để tiện lợi cho trình bày, ta sẽ không viết đơn vị độ dài, mặc định đơn vị là mét.

a) Xét hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = CD = 120$ và $AD = BC = 100$. Chia hình chữ nhật thành 10 hình chữ nhật "con" kích thước 30×40 như hình vẽ.



Xét 9 điểm là tâm của các giếng nước. Theo nguyên lý Dirichlet (ngược), tồn tại một hình chữ nhật con không chứa điểm nào trong 9 tâm nói trên. Xét hình chữ nhật tương ứng, chẳng hạn là hình chữ nhật $XYZT$ có $XY = ZT = 40$, $XT = YZ = 30$. Ta xét hình chữ nhật $X'Y'Z'T'$ nằm bên trong $XYZT$ và có các cạnh song song và cách cạnh của hình chữ nhật $XYZT$ một khoảng cách bằng 2.5 thì $X'Y'Z'T'$ có kích thước 25×35 và rõ ràng là hình chữ nhật này không chạm vào bất cứ một giếng nước nào. Ta có điều phải chứng minh.

b) Xét hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = CD = 120$ và $AD = BC = 100$. Gọi L là chu vi của hồ. Theo đề bài, tồn tại các điểm A', B', C', D' thuộc L sao cho

$$AA',\ BB',\ CC',\ DD' \leq 5.$$

Vì chu vi hồ là một đa giác lồi nên các đường gấp khúc nối $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$ không chườm lên nhau. Do đó

$$|L| \geq A'B' + B'C' + C'D' + D'A'. \tag{1}$$

Hạ $A'A_1$ vuông góc với AD, $A'A_2$ vuông góc với AB, $B'B_1$ vuông góc với BC, $B'B_2$ vuông góc với AB, $C'C_1$ vuông góc với BC, $C'C_2$ vuông góc với CD, $D'D_1$ vuông góc với AD, $D'D_2$ vuông góc với CD. Ta có

$$A_1A' + A'B' + B'B_1 \geq A_1B_1 \geq AB = 120.$$

Tương tự, ta cũng có

$$\begin{aligned}
B_2B' + B'C' + C'C_2 &\geq 100,\\
C_1C' + C'D' + D'D_1 &\geq 120,\\
D_2D' + D'A' + A'A_2 &\geq 100.
\end{aligned}$$

Từ đây ta suy ra

$$\begin{aligned}
A'B' + B'C' + C'D' + D'A' + (A'A_1 + A'A_2 + B'B_1 + B'B_2&\\
+ C'C_1 + C'C_2 + D'D_1 + D'D_2) \geq 440.&
\end{aligned} \tag{2}$$

Cuối cùng, áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$A'A_1 + A'A_2 \leq \sqrt{2(A'A_1^2 + A'A_2^2)} = \sqrt{2A'A^2} \leq 5\sqrt{2}.$$

Tương tự, ta cũng có

$$B'B_1 + B'B_2 \leq 5\sqrt{2}, \quad C'C_1 + C'C_2 \leq 5\sqrt{2}, \quad D'D_1 + D'D_2 \leq 5\sqrt{2}.$$

Từ (1), (2) và các bất đẳng thức ở trên, ta suy ra $|L| \geq 440 - 20\sqrt{2}$ (đpcm). □

Bình luận. Ở câu a), bài toán cho hình chữ nhật (có sự bất đối xứng về hai chiều) thay vì hình vuông nên việc sử dụng các kỹ thuật về lân cận không dễ (lân cận bán kính d của một đa giác lồi có diện tích S, chu vi p có diện tích là $S + pd + \pi d^2$).

Chú ý rằng kết luận của bài toán là tồn tại hình chữ nhật kích thước 25×35 không tương đương với việc tồn tại một phần diện tích 875 không nằm trong các hình tròn. Việc chia mô hình thành các đối tượng nhỏ hơn để sử dụng nguyên lý Dirichlet là rất phổ biến trong hình tổ hợp, bên dưới ta xét một số bài tương tự như sau:

1. Cho 6 điểm nằm bên trong một hình chữ nhật kích thước 3×4. Chứng minh rằng có hai điểm có khoảng cách không vượt quá $\sqrt{5}$.

2. (EGMO, 2012) Một hình vuông đơn vị được chia thành các đa giác, sao cho mỗi cạnh của đa giác đều song song với cạnh của hình vuông cho trước. Nếu tổng độ dài các đoạn thẳng nằm bên trong hình vuông (không tính hình vuông) là $2n$ (với n là một số thực dương), chứng minh rằng tồn tại một đa giác có diện tích lớn hơn $\frac{1}{(n+1)^2}$.

3. Trong hình vuông cạnh 200 cm có 2010 đa giác lồi mà mỗi đa giác có diện tích không quá 2π cm^2 và chu vi không quá 3π cm. Chứng minh trong hình vuông luôn tồn tại một hình tròn có bán kính bằng 1 cm không cắt bất cứ đa giác nào.

Ở ý b), mấu chốt là xem xét khoảng cách từ đỉnh hình vuông (là các điểm đặc biệt) cho đến biên của đa giác để đưa đa giác bất kỳ của đề bài về tứ giác và việc đánh giá sẽ dễ dàng hơn nhiều. Có thể thấy phát biểu của bài toán rất gần với bài toán trong đề IMO 1982 của thầy Văn Như Cương, nhưng ở mức độ nhẹ nhàng hơn: *Ngày xưa (ở xứ Nghệ) có một ngôi làng hình vuông mỗi cạnh* 100 km*. Có một con sông chạy ngang quanh làng. Bất cứ điểm nào trong làng cũng cách con sông không quá* 0.5 km*. Chứng minh rằng có hai điểm trên sông có khoảng cách đường chim bay không quá* 1 km*, nhưng khoảng cách dọc theo dòng sông không ít hơn* 198 km*.*

Để ý rằng con số 198 ở đây có thể tính toán ra theo cách tương tự như câu b) ở trên nhưng phải chia đôi $\frac{100\cdot 4-4\cdot 0.5\cdot\sqrt{2}}{2}\approx 198$ để thể hiện cho nửa chu vi. Và dĩ nhiên, nếu có nắm ý tưởng giải của bài IMO này thì việc xử lý câu 3b sẽ trở nên nhẹ nhàng, sáng sủa hơn nhiều.

Bài 4 (5.0 *điểm*)**.** Trong mặt phẳng Oxy, cho $(\mathcal{C})$ là đồ thị của hàm số $y=\sqrt[3]{x^2}$. Một đường thẳng d thay đổi sao cho d cắt $(\mathcal{C})$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x_1,\ x_2,\ x_3$. Chứng minh rằng

a) Đại lượng $\sqrt[3]{\frac{x_2x_3}{x_1^2}}+\sqrt[3]{\frac{x_3x_1}{x_2^2}}+\sqrt[3]{\frac{x_1x_2}{x_3^2}}$ là một hằng số.

b) $\sqrt[3]{\frac{x_1^2}{x_2x_3}}+\sqrt[3]{\frac{x_2^2}{x_3x_1}}+\sqrt[3]{\frac{x_3^2}{x_1x_2}}<-\frac{15}{4}$.

Lời giải. a) Dễ thấy d không thể là đường thẳng cùng phương với trục tung (vì nếu không d chỉ cắt $(\mathcal{C})$ tại tối đa một điểm) nên phương trình của d có dạng $y=ax+b$ với $a,\ b\in\mathbb{R}$. Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và $(\mathcal{C})$:

$$\sqrt[3]{x^2}=ax+b.$$

Rõ ràng $a,\ b\neq 0$ vì nếu không d chỉ có thể cắt $(\mathcal{C})$ tại tối đa hai điểm, mâu thuẫn với giả thiết. Đặt $t=\sqrt[3]{x}$, khi đó theo giả thiết, phương trình

$$at^3-t^2+b=0$$

có ba nghiệm phân biệt $t_1,\ t_2,\ t_3$ và $t_1t_2t_3\neq 0$ (do $b\neq 0$). Áp dụng định lý Vieta cho phương trình bậc ba, ta có $t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1=0$, suy ra

$$(t_1t_2)^3+(t_2t_3)^3+(t_3t_1)^3=3(t_1t_2)(t_2t_3)(t_3t_1)=3t_1^2t_2^2t_3^2.$$

Một cách tương đương, ta có

$$\frac{t_2t_3}{t_1^2}+\frac{t_3t_1}{t_2^2}+\frac{t_1t_2}{t_3^2}=3,$$

hay

$$\sqrt[3]{\frac{x_2x_3}{x_1^2}}+\sqrt[3]{\frac{x_3x_1}{x_2^2}}+\sqrt[3]{\frac{x_1x_2}{x_3^2}}=3.$$

Vậy $\sqrt[3]{\frac{x_2x_3}{x_1^2}}+\sqrt[3]{\frac{x_3x_1}{x_2^2}}+\sqrt[3]{\frac{x_1x_2}{x_3^2}}=3$ là một hằng số không đổi.

b) Trong ba số $t_1,\ t_2,\ t_3$ luôn có hai số cùng dấu, không mất tính tổng quát, ta giả sử hai số đó là t_1 và t_2. Từ $t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = 0$, ta có $t_3 = -\frac{t_1t_2}{t_1+t_2}$. Do đó

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\frac{x_1^2}{x_2x_3}} + \sqrt[3]{\frac{x_2^2}{x_3x_1}} + \sqrt[3]{\frac{x_3^2}{x_1x_2}} &= \frac{t_1^2}{t_2t_3} + \frac{t_2^2}{t_3t_1} + \frac{t_3^2}{t_1t_2} \\ &= -(t_1+t_2)\left(\frac{t_1}{t_2^2} + \frac{t_2}{t_1^2}\right) + \frac{t_1t_2}{(t_1+t_2)^2} \\ &= -\left(\frac{t_1^2}{t_2^2} + \frac{t_2^2}{t_1^2} + \frac{t_1}{t_2} + \frac{t_2}{t_1}\right) + \frac{t_1t_2}{(t_1+t_2)^2}.\end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{t_1^2}{t_2^2} + \frac{t_2^2}{t_1^2} \ge 2, \quad \frac{t_1}{t_2} + \frac{t_2}{t_1} \ge 2, \quad \frac{t_1t_2}{(t_1+t_2)^2} \le \frac{1}{4}.$$

Do đó

$$\sqrt[3]{\frac{x_1^2}{x_2x_3}} + \sqrt[3]{\frac{x_2^2}{x_3x_1}} + \sqrt[3]{\frac{x_3^2}{x_1x_2}} \le -(2+2) + \frac{1}{4} = -\frac{15}{4}.$$

Dấu đẳng thức không xảy ra do $t_1,\ t_2$ phân biệt. Ta có điều phải chứng minh. □

Bình luận. Về bản chất, đây là một bài toán thuần đại số được phát biểu dưới dạng hình học giải tích. Câu a) là một áp dụng cơ bản của định lý Vieta cho phương trình bậc ba.

Câu b) là một bất đẳng thức đại số quen thuộc. Bất đẳng thức này đã được giới thiệu và chứng minh trong bài viết *"Một bất đẳng thức thú vị"* của tác giả Nguyễn Văn Huyện (cũng là một trong các tác giả tham gia viết bài này) trên tạp chí Epsilon số 4 năm 2016 (bạn đọc có thể tham khảo ở liên kết: `www.dropbox.com/s/rptud80mboeo412/Epsilon_No4_Beta.pdf?dl=0`).

Ngoài cách ở trên, ta cũng có thể chứng minh câu b) bằng cách sử dụng định lý Vieta và điều kiện có nghiệm của phương trình bậc ba như sau: Xét hàm số $f(t) = at^3 - t^2 + b$. Ta biết rằng điều kiện để $f(t)$ có ba nghiệm thực phân biệt là $f(t)$ có hai điểm cực trị và $f_{\text{CĐ}} \cdot f_{\text{CT}} < 0$. Ta có $f'(t) = 3at^2 - 2t$ và $f'(t) = 0$ có hai nghiệm phân biệt là $t = 0$ và $t = \frac{2}{3a}$. Do đó $f(t)$ có hai điểm cực trị tại $t = 0$ và $t = \frac{2}{3a}$. Suy ra, ta phải có

$$f(0) \cdot f\left(\frac{2}{3a}\right) < 0,$$

hay

$$0 < a^2b < \frac{4}{27}.$$

Bây giờ, sử dụng định lý Vieta, ta cũng có $t_1 + t_2 + t_3 = \frac{1}{a}$ và $t_1t_2t_3 = -\frac{b}{a}$. Do đó, bằng các biến đổi đại số đơn giản, ta có

$$\frac{t_1^2}{t_2t_3} + \frac{t_2^2}{t_3t_1} + \frac{t_3^2}{t_1t_2} = \frac{3a^2b - 1}{a^2b} = 3 - \frac{1}{a^2b} < 3 - \frac{27}{4} = -\frac{15}{4}.$$

Một số bài toán bất đẳng thức có dạng tương tự:

1. (Mongolia TST, 2010)[1] Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực khác 0 thỏa mãn điều kiện $a+b+c=0$. Chứng minh rằng
$$\frac{a^4}{b^2c^2}+\frac{b^4}{c^2a^2}+\frac{c^4}{a^2b^2}\geq\frac{33}{2}.$$
2. Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực khác 0 thỏa mãn điều kiện $a+b+c=0$. Chứng minh rằng
$$(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq\frac{27}{2}.$$
3. Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực phân biệt. Chứng minh rằng
$$(a^2+b^2+c^2)\left[\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}+\frac{1}{(a-b)^2}\right]\geq\frac{9}{2}.$$
4. (IMO, 2008) Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực khác 1 thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng
$$\left(\frac{a}{a-1}\right)^2+\left(\frac{b}{b-1}\right)^2+\left(\frac{c}{c-1}\right)^2\geq 1.$$

Bài 5 (6.0 *điểm*). Cho các số nguyên dương n và d. Xét tập hợp $S_n(d)$ gồm tất cả các bộ số có thứ tự $(x_1,\ \ldots,\ x_d)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau

i) $x_i\in\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ với mọi chỉ số $1\leq i\leq d$;

ii) $x_i\neq x_{i+1}$ với mọi chỉ số $1\leq i\leq d-1$;

iii) không tồn tại các chỉ số $1\leq i<j<k<l\leq d$ sao cho $x_i=x_k$ và $x_j=x_l$.

a) Tính số phần tử của tập hợp $S_3(5)$.

b) Chứng minh rằng tập hợp $S_n(d)$ khác rỗng khi và chỉ khi $d\leq 2n-1$.

Lời giải. a) Để tính $S_3(5)$, ta cần đếm số bộ $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$ sao cho $a,\ b,\ c,\ d,\ e\in\{1,\ 2,\ 3\}$ và thỏa mãn các ràng buộc ii), iii) đã cho. Ta xét hai trường hợp sau:

- Nếu 3 số hạng đầu đều khác nhau, ta xét trường hợp $(a,\ b,\ c)=(1,\ 2,\ 3)$ đại diện. Với $(1,\ 2,\ 3,\ d,\ e)$ thì $d=1$ hoặc $d=2$, nhưng nếu $d=1$ thì không có cách chọn cho e. Do đó, $d=2$ và chọn được $e=1$. Vì thế chỉ có đúng 1 bộ cho trường hợp này. Ta thấy có tổng cộng $3!=6$ cách chọn cho $(a,\ b,\ c)$ nên có 6 bộ số thỏa mãn.

- Nếu có hai số giống nhau trong 3 số hạng đầu, ta xét $(a,\ b,\ c)=(1,\ 2,\ 1)$ đại diện. Với bộ $(1,\ 2,\ 1,\ d,\ e)$, ta thấy d không thể là 1 hoặc 2 nên $d=3$, từ đó có $e=1$ nên cũng có 1 bộ thỏa mãn. Ta thấy có tất cả $3\cdot 2=6$ cách chọn cho $(a,\ b,\ c)$ nên có 6 bộ thỏa mãn.

Vậy tổng cộng có 12 bộ thỏa mãn đề bài và $\left|S_3(5)\right|=12$.

[1]Đề xuất bởi Võ Quốc Bá Cẩn

b) Ta gọi một bộ số thỏa mãn các điều kiện của đề bài là bộ số "đẹp". Rõ ràng khi d càng lớn thì khả năng tồn tại bộ số đẹp càng thấp do có nhiều sự lặp lại. Ngoài ra, nếu bỏ đi một số số hạng ở cuối bộ số đẹp thì bộ mới sinh ra vẫn đẹp. Ta sẽ chứng minh điều kiện cần và đủ để tồn tại bộ số đẹp trong tập hợp $S_n(d)$ là $d \le 2n - 1$.

Điều kiện đủ: Ứng với $d = 2n - 1$, ta xét bộ số có dạng

$$1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n-1,\ n,\ n-1,\ \dots,\ 3,\ 2,\ 1.$$

Dễ thấy rằng vì tính đối xứng qua số hạng ở giữa nên không có hai cặp chỉ số nào bằng nhau vi phạm ràng buộc iii). Do đó, bộ trên là đẹp. Từ đó suy ra với mọi $1 \le d < 2n - 1$ thì tập hợp $S_n(d)$ khác rỗng.

Điều kiện cần: Để chứng minh $S_n(d) = \emptyset$ với $d \ge 2n$, ta chỉ cần chứng minh không tồn tại bộ đẹp ứng với $d = 2n$ là được. Ta sẽ chứng minh điều này bằng quy nạp.

Với $n = 1, d = 2$ thì rõ ràng khẳng định đúng. Giả sử rằng với mọi $1 \le k \le n$ thì không tồn tại bộ đẹp nào ứng với $d = 2k$. Ta sẽ chứng minh điều này cũng đúng với $k = n + 1$. Lại giả sử rằng có một bộ đẹp ứng với $d = 2k = 2(n + 1)$ là $(x_1, x_2, \dots, x_{2n+2})$ thì gọi S là số lần xuất hiện của phần tử $n + 1$ trong bộ đó, ta có các trường hợp sau đây xảy ra:

- Nếu $S = 0$ thì bộ đẹp này có độ dài $2n + 2$ nhưng các phần tử chỉ lấy giá trị không vượt quá n, mâu thuẫn.

- Nếu $S = 1$ thì khi $n + 1$ đứng đầu hoặc cuối bộ, ta xóa nó đi thì bộ mới cũng đẹp, độ dài $2n + 1$ nhưng lấy giá trị không vượt quá n, mâu thuẫn. Do đó $n + 1$ phải đứng giữa với dạng

  $$(*\ *\ *,\ u,\ n+1,\ v,\ *\ *\ *).$$

  Nếu $u \ne v$ thì lại xóa $n + 1$ ra như trên; còn nếu $u = v$ thì xóa $n + 1$ đi cùng với u hoặc v (để không có hai số bằng nhau nằm cạnh nhau) thì bộ mới cũng đẹp và có độ dài $2n$, mâu thuẫn.

- Từ lập luận trên, với tính bình đẳng, ta thấy rằng không thể xảy ra trường hợp có giá trị nào đó chỉ xuất hiện 1 lần. Do đó, $S = 2$ và tất cả các giá trị $1, 2, 3, \dots, n + 1$ đều xuất hiện đúng 2 lần trong bộ. Gọi T là số các số nằm giữa hai số $n + 1$ với dạng

  $$*\ *\ *,\ n+1,\ \underbrace{*\ *\ *}_{T \text{ số}},\ n+1,\ *\ *\ *$$

  thì rõ ràng các số phía ngoài phải khác với T số này. Ta có thể giả sử T số này nhận giá trị thuộc $\{1, 2, \dots, m\}$ thì $T = 2m < 2n$ và các số này lập thành một bộ mới cũng đẹp, mâu thuẫn.

- Nếu $S \ge 3$ thì do lập luận như trên nên trường hợp này không xảy ra.

Do đó, trong mọi trường hợp, khẳng định đều đúng. Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Bình luận. Đây là một bài tổ hợp thú vị liên quan đến việc sắp xếp các số. Rõ ràng các ràng buộc dễ hiểu, không quá nặng nề và cách tiếp cận quy nạp cho lời giải cũng tự nhiên. Đầu tiên, câu a) giúp định hướng nhiều cho điều kiện đủ của câu b), ta chỉ cần xây dựng một bộ số đối xứng qua phần tử lớn nhất ở giữa thì thỏa mãn ràng buộc. Tuy nhiên, nếu đếm không cẩn thận sẽ dễ bị dẫn đến dư - thiếu; bởi vậy nên ta cần tận dụng tính tương tự để hạn chế xét trường hợp.

Để hoàn tất bước quy nạp trong điều kiện cần, ta thấy mấu chốt là khi số $n+1$ xuất hiện 1 hoặc 2 lần: nếu chỉ có 1 số $n+1$ thì ta có thể tìm cách xóa nó đi để áp dụng quy nạp, còn nếu có 2 số thì ta xem xét các giá trị nằm giữa hai số đó.

Ta có thể tiếp cận ý b theo cách như sau (sau khi đã chỉ ra mỗi số xuất hiện đúng hai lần): Giả sử rằng $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ là vị trí đầu tiên của các số $1, 2, \ldots, n+1$ thì có thể giả sử dãy trên tăng. Khi đó, theo ràng buộc iii) thì vị trí thứ hai của các số $1, 2, \ldots, n+1$ là $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$ sẽ tạo thành dãy giảm. Khi đó, dễ thấy rằng $a_{n+1} = n+1$, $b_{n+1} = n+2$ là hai số liên tiếp, không thỏa ràng buộc i).

Một số bài tương tự:

1. Một chú thỏ cần ăn n củ cà rốt trong một số ngày sao cho hai ngày liên tiếp thì số lượng củ cà rốt mà chú ta ăn chênh lệch nhau không quá 1; trong ngày đầu tiên và ngày cuối cùng, thỏ ăn 1 củ cà rốt. Chứng minh rằng thỏ có thể ăn trong tối đa $\sqrt{4n-3}$ ngày.

2. (Iran 2nd Round, 2011) Cầu vồng là tên của một loài chim. Nó có khả năng đổi màu luân phiên trong n màu có sẵn và không có hai ngày liên tiếp nào mà nó giữ cùng một màu. Biết rằng không có bốn ngày nào trong cuộc đời của cầu vồng là i, j, k, l với $i < j < k < l$ mà nó có cùng màu trong ngày i và k; cùng màu trong ngày j và l nhưng hai màu trên khác nhau. Đến khi điều trên không còn thực hiện được nữa thì cũng là lúc cuộc đời nó kết thúc. Hỏi chim cầu vồng sẽ sống được tối đa bao lâu?

Có lẽ bài toán 5 này được tham khảo từ đề chọn đội tuyển của Iran ở trên, và tác giả đã bỏ đi yếu tố khác màu trong hai cặp ngày (i, k) và (j, l) để bài toán chặt hơn. Nếu thêm ràng buộc đó vào, đáp số của câu a) sẽ nhiều hơn (một số học sinh đã hiểu nhầm thế này và chấp nhận luôn trường hợp có 4 số giống nhau ở $S_3(5)$). Khi đó, việc xây dựng trong câu b) sẽ dễ dàng hơn (cứ cho các số 1 ở vị trí lẻ còn $n-1$ số còn lại đặt vào vị trí chẵn) nhưng điều kiện cần lại khó hơn.

Một số câu hỏi có thể đặt ra dựa trên bài toán 5 như sau, mời các bạn nghiên cứu thử:

1. Đếm số bộ $S_n(d)$ khi $d = 2n-1$?

2. Xét d số của bộ được đặt lên vòng tròn mà hai số cạnh nhau thì phân biệt và hai số giống nhau thì được nối với nhau bằng một dây cung sao cho không có dây nào cắt nhau ở giữa thì hỏi d lớn nhất là bao nhiêu?

Bài 6 (7.0 *điểm*)**.** Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_0 = 2$, $x_1 = 1$ và

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \quad \forall n \geq 0.$$

a) Với $n \geq 1$, chứng minh rằng nếu x_n là số nguyên tố thì n là số nguyên tố hoặc n không có ước nguyên tố lẻ.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên không âm (m, n) sao cho x_n chia hết cho x_m.

Lời giải. a) Ta chứng minh được $x_n = \alpha^n + \beta^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, trong đó $\alpha < 0 < \beta$ là hai nghiệm của phương trình đặc trưng $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$.

Giả sử x_n là số nguyên tố với n là số nguyên dương có ước nguyên tố lẻ. Khi đó, n có dạng pq với p là số nguyên tố lẻ và q là số tự nhiên lớn hơn 1. Ta có

$$\begin{aligned}
& x_{pq} = \alpha^{pq} + \beta^{pq} \\
& = (\alpha^q + \beta^q)\left(\alpha^{q(p-1)} - \alpha^{q(p-2)}\beta^q + \alpha^{q(p-3)}\beta^{2q} - \cdots - \alpha^q\beta^{q(p-2)} + \beta^{q(p-1)}\right) \\
& = (\alpha^q + \beta^q)\left[(\alpha^{q(p-1)} + \beta^{q(p-1)}) + \cdots + (-1)^{\frac{(q+1)(p+1)}{2}}(\alpha^{2q} + \beta^{2q}) + (-1)^{\frac{(q+1)(p-1)}{2}}\right] \\
& = x_q\left(x_{q(p-1)} + \cdots + (-1)^{\frac{(q+1)(p+1)}{2}} x_{2q} + (-1)^{\frac{(q+1)(p-1)}{2}}\right)
\end{aligned}$$

nên $x_{pq} \vdots x_q$. Mặt khác, dễ thấy dãy (x_n) tăng ngặt kể từ $n = 1$ nên $x_q > x_1 = 1$. Do đó, x_{pq} là hợp số, mâu thuẫn. Vậy, với $n \geq 1$, để x_n là số nguyên tố thì n là số nguyên tố hoặc n không có ước nguyên tố lẻ.

b) Xét các trường hợp sau:

- **Trường hợp 1: $m = 0$.** Xét trong modulo 2, ta có $x_0 \equiv 0$, $x_1 \equiv 1$, $x_2 \equiv 1$, $x_3 \equiv 0$, $x_4 \equiv 1$, $x_5 \equiv 1$, $x_6 \equiv 0, \ldots$ Do đó, x_n chẵn với mọi n chia hết cho 3 và lẻ trong các trường hợp còn lại. Từ đây suy ra, để x_n chia hết cho x_0, ta phải có n chia hết cho 3. Cặp số (m, n) thỏa mãn trong trường hợp này là $(0, 3k)$ với $k \in \mathbb{N}$.

- **Trường hợp 2: $m = 1$.** Dễ thấy $(m, n) = (1, k)$ với $k \in \mathbb{N}$.

- **Trường hợp 3: $m > 1$.**Với mọi $k \geq \ell \geq 0$, ta có

  $$(\alpha^k + \beta^k)(\alpha^\ell + \beta^\ell) - (\alpha^{k+\ell} + \beta^{k+\ell}) = (\alpha\beta)^\ell(\alpha^{k-\ell} + \beta^{k-\ell}) = (-1)^\ell(\alpha^{k-\ell} + \beta^{k-\ell}).$$

  Do đó
  $$x_{k+\ell} = x_k x_\ell - (-1)^\ell x_{k-\ell}. \tag{1}$$
  Nói cách khác, với mọi $k \geq 2\ell \geq 0$, ta có

  $$x_k = x_{k-\ell}x_\ell - (-1)^\ell x_{k-2\ell}.$$

  Do đó x_k chia hết cho x_ℓ khi và chỉ khi $x_{k-2\ell}$ chia hết cho x_ℓ, $x_{k-2\ell}$ chia hết cho x_ℓ khi và chỉ khi $x_{k-4\ell}$ chia hết cho x_ℓ (nếu $k \geq 4\ell$), ... Một cách tổng quát, ta có x_k chia hết cho x_ℓ khi và chỉ khi $x_{k-2t\ell}$ chia hết cho x_ℓ (nếu $k \geq 2t\ell$, $t \in \mathbb{N}$). (2)

  Bây giờ, do x_n chia hết cho x_m nên $x_n \geq x_m \geq 3$, suy ra $n \geq m > 1$. Đặt $n = qm + r$ với $q \in \mathbb{N}^*$, $r \in \mathbb{N}$, $0 \leq r \leq m - 1$. Xét các trường hợp sau:

  - **Trường hợp 3.1: q chẵn.** Theo nhận xét (2), ta có x_n chia hết cho x_m khi và chỉ khi x_r chia hết cho x_m. Suy ra
    $$x_r \geq x_m.$$
    Nếu $r \geq 1$ thì từ bất đẳng thức trên, ta suy ra $r \geq m$ (do (x_n) tăng ngặt với mọi $n \geq 1$), mâu thuẫn. Do đó $r = 0$, tuy nhiên điều này cũng mâu thuẫn vì

    $$x_m \geq x_2 = 3 > x_0 = x_r.$$

- **Trường hợp 3.2: q lẻ.** Theo nhận xét (2), ta có x_n chia hết cho x_m khi và chỉ khi x_{m+r} chia hết cho x_m. Mặt khác, theo (2), ta lại có

  $$x_{m+r} = x_m x_r - (-1)^r x_{m-r}$$

  nên x_n chia hết cho x_m khi và chỉ khi x_{m-r} chia hết cho x_m. Nếu $0 < r < m$, ta có $1 \le m-r$ nên $x_{m-r} < x_m$, mâu thuẫn. Do đó, $r = 0$ và giá trị này thỏa mãn. Suy ra, trong trường hợp này, cặp số (m, n) thỏa mãn yêu cầu là $(m, (2k+1)m)$ với $k \in \mathbb{N}$.

Tóm lại, các cặp số cần tìm là $(0, 3k)$, $(1, k)$ và $(m, (2k+1)m)$ với $m, k \in \mathbb{N}$, $m > 1$. □

Bình luận. Đây là một bài toán về tính chất của dãy Lucas (bạn đọc có thể tham khảo ở liên kết: `mathworld.wolfram.com/LucasNumber.html`). Câu a) của bài toán là một kết quả quen thuộc. Ngoài cách trên, ta cũng có thể giải bằng cách sử dụng (1).

Để giải ý b), điểm mấu chốt chính là phát hiện ra đẳng thức (1). Phần còn lại là sử dụng các phép đánh giá đại số để chặn giá trị của n . Vì vậy, về bản chất thì đây cũng có thể coi như một bài đại số.

Ngoài cách giải như trên, bạn Trần Quang Độ (học sinh lớp 10 Toán 1, trường THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam) có gửi đến chúng tôi một cách tiếp cận khác cho trường hợp $n \ge m > 1$ dựa trên tính chất của dãy Fibonacci như sau: Xét dãy Fibonacci (F_n) với $F_{-1} = 0,\ F_0 = F_1 = 1$ và $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,\ \forall n \ge 0$, ta chứng minh được

$$x_n = F_n + F_{n-2}, \quad \forall n \ge 1.$$

Từ yêu cầu của bài toán, ta cần tìm $n \ge m > 1$ để

$$F_n + F_{n-2} \;\vdots\; F_m + F_{m-2}.$$

Rõ ràng $n = m$ thỏa mãn yêu cầu. Xét $n > m$, sử dụng tính chất dãy Fibonacci, ta có

$$\begin{aligned} F_n + F_{n-2} &= F_m F_{n-m} + F_{m-1} F_{n-m-1} + F_{m-2} F_{n-m} + F_{m-3} F_{n-m-1} \\ &= F_{n-m}(F_m + F_{m-2}) + F_{n-m-1}(F_{m-1} + F_{m-3}). \end{aligned}$$

Mặt khác, ta lại có

$$\begin{aligned} (F_k + F_{k-2},\ F_{k-1} + F_{k-3}) &= (F_{k-1} + F_{k-2} + F_{k-3} + F_{k-4},\ F_{k-1} + F_{k-3}) \\ &= (F_{k-1} + F_{k-3},\ F_{k-2} + F_{k-4}) \\ &= \cdots \\ &= (F_2 + F_0,\ F_1 + F_{-1}) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Do đó, ta cần tìm $n > m > 1$ để

$$F_{n-m-1} \;\vdots\; F_m + F_{m-2}.$$

Vì $F_{n-m-1} > 0$ nên ta có $F_{n-m-1} > F_m$, suy ra $n - m - 1 > m$. Đặt $\ell = n - m - 1$ thì ta cần tìm $\ell > m$ sao cho

$$F_\ell \;\vdots\; F_m + F_{m-2}. \tag{3}$$

Mặt khác, ta lại có

$$\begin{aligned}F_\ell &= F_m F_{\ell-m} + F_{m-1}F_{\ell-m-1}\\ &= F_m F_{\ell-m} + (F_m - F_{m-2})F_{\ell-m-1}\\ &= F_m(F_{\ell-m} + F_{\ell-m-1}) - F_{m-2}F_{\ell-m-1}\\ &= F_m F_{\ell-m+1} - F_{m-2}F_{\ell-m-1}\\ &\equiv F_m(F_{\ell-m+1} + F_{\ell-m-1}) \pmod{F_m + F_{m-2}}\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}(F_m, F_m + F_{m-2}) &= (F_m, 2F_m - F_{m-1})\\ &= (F_m, F_{m-1})\\ &= (F_{m-1} + F_{m-2}, F_{m-1})\\ &= (F_{m-1}, F_{m-2})\\ &= \cdots\\ &= (F_1, F_0)\\ &= 1,\end{aligned}$$

nên để điều kiện (3) được thỏa mãn thì ta phải có

$$F_{\ell-m+1} + F_{\ell-m-1} \vdots F_m + F_{m-2},$$

hay

$$F_{n-2m} + F_{n-2m-2} \vdots F_m + F_{m-2}.$$

Một cách tương đương, ta phải có $x_{n-2m} \vdots x_m$. Đến đây thì ta có thể xử lý tương tự như đoạn sau của lời giải trên đề hoàn tất phép giải.

Bài toán tương tự: *Cho dãy (a_n) được xác định bởi $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ và $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Với mỗi số tự nhiên k cho trước, chứng minh rằng a_n chia hết cho 2^k khi và chỉ khi n chia hết cho 2^k.*

Bài 7 (7.0 *điểm*)**.** Cho tam giác nhọn không cân ABC có trọng tâm G nội tiếp đường tròn (O). Gọi H_a, H_b, H_c lần lượt là chân các đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC và D, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Các tia GH_a, GH_b, GH_c lần lượt cắt (O) tại các điểm X, Y, Z.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác XCE đi qua trung điểm đoạn thẳng BH_a.

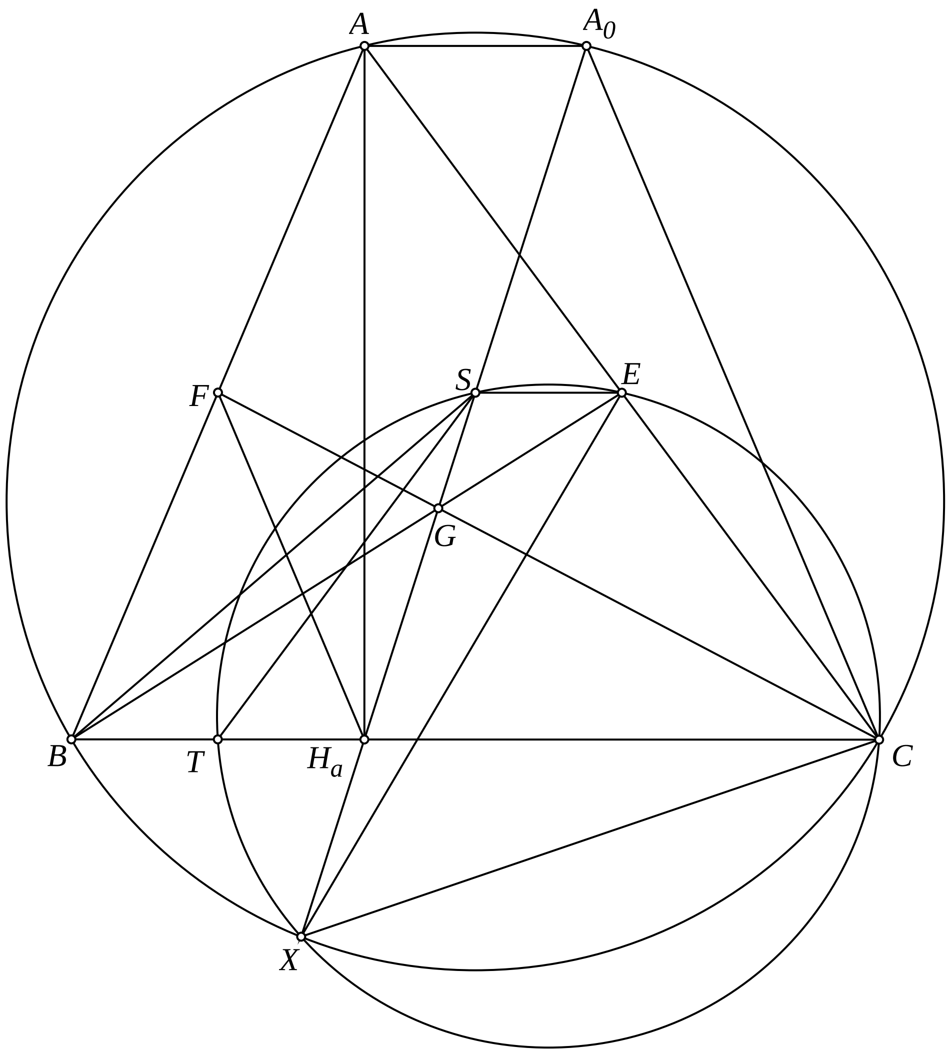
b) Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm các đoạn thẳng AX, BY, CZ. Chứng minh rằng các đường thẳng DM, EN, FP đồng quy.

Lời giải. a) Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt (O) tại A_0 (khác A). Ta có AA_0CB là hình thang cân nên $A_0C = AB = 2FH_a$. Lại có $\angle FH_aB = \angle FBH_a = \angle A_0CB$ nên $FH_a \parallel A_0C$. Mà $GC = 2GF$ nên ta suy ra ba điểm G, A_0, H_a thẳng hàng.

Gọi S là trung điểm A_0H_a thì ta có $SE \parallel AA_0$ nên $\angle AES = \angle A_0AC = \angle A_0XC$, suy ra tứ giác $SECX$ nội tiếp. (1)

Gọi T là trung điểm BH_a thì ta có $ST \parallel BA_0$. Suy ra $\angle XST = \angle XA_0B = \angle XCB$ nên tứ giác $XCST$ nội tiếp. (2)

Từ (1) và (2), ta có năm điểm X, C, E, S, T đồng viên nên đường tròn ngoại tiếp tam giác XEC đi qua trung điểm BH_a.

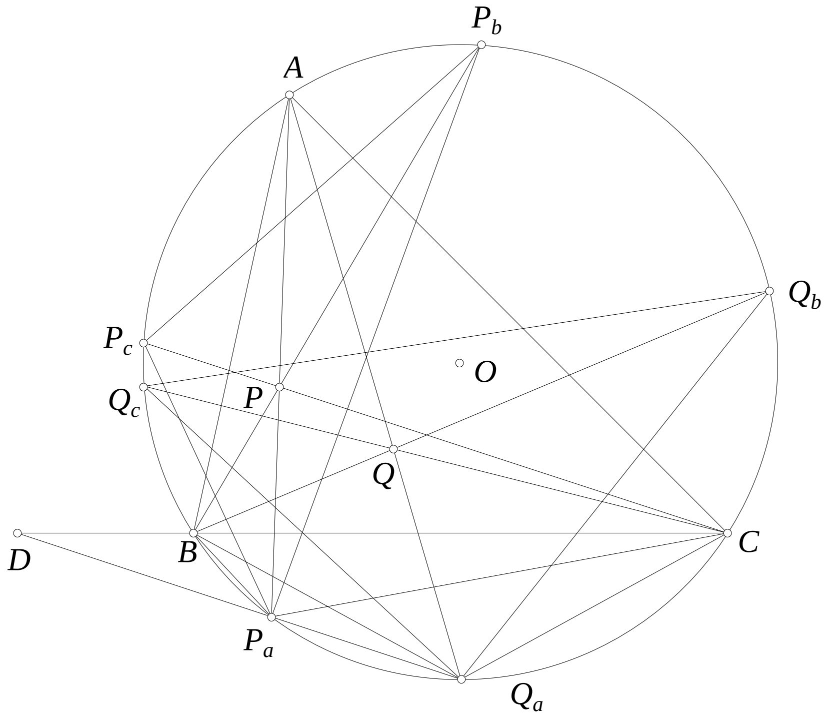


b) Trước hết, ta sẽ chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với P, Q là hai điểm bất kỳ. Các đường thẳng PA, PB, PC cắt lại (O) tại các điểm thứ hai lần lượt là P_a, P_b, P_c. Các đường thẳng QA, QB, QC cắt lại (O) tại các điểm thứ hai lần lượt là Q_a, Q_b, Q_c. Các đường thẳng P_aQ_a, P_bQ_b, P_cQ_c lần lượt cắt các đường thẳng BC, CA, AB tại D, E, F. Khi đó, các điểm D, E, F thẳng hàng.*

Chứng minh. Sử dụng tính chất của tứ giác nội tiếp, ta có

$$\frac{DB}{DC} = \frac{P_aB}{P_aC} \cdot \frac{Q_aB}{Q_aC}.$$



Từ đó ta có

$$\prod \frac{DB}{DC} = \prod \left(\frac{P_a B}{P_a C} \cdot \frac{Q_a B}{Q_a C} \right) = \prod \frac{P_a B}{P_a C} \cdot \prod \frac{Q_a B}{Q_a C}$$
$$= \prod \frac{\sin \widehat{PAB}}{\sin \widehat{PAC}} \cdot \prod \frac{\sin \widehat{QAB}}{\sin \widehat{QAC}} = 1.$$

Sử dụng định lý Menelaus, ta suy ra ba điểm D, E, F thẳng hàng. □

Trở lại bài toán: Theo câu a) thì $AA_0 \parallel BC$ nên hai đường thẳng XA và XA_0 đẳng giác trong $\angle BXC$. Gọi U là giao điểm của AX và BC. Ta có

$$\frac{UB}{UC} \cdot \frac{H_a B}{H_a C} = \frac{XB^2}{XC^2}. \tag{1}$$

Theo tính chất của tứ giác nội tiếp, ta lại có

$$\frac{UB}{UC} = \frac{BA}{CA} \cdot \frac{BX}{XC}.$$

Do đó

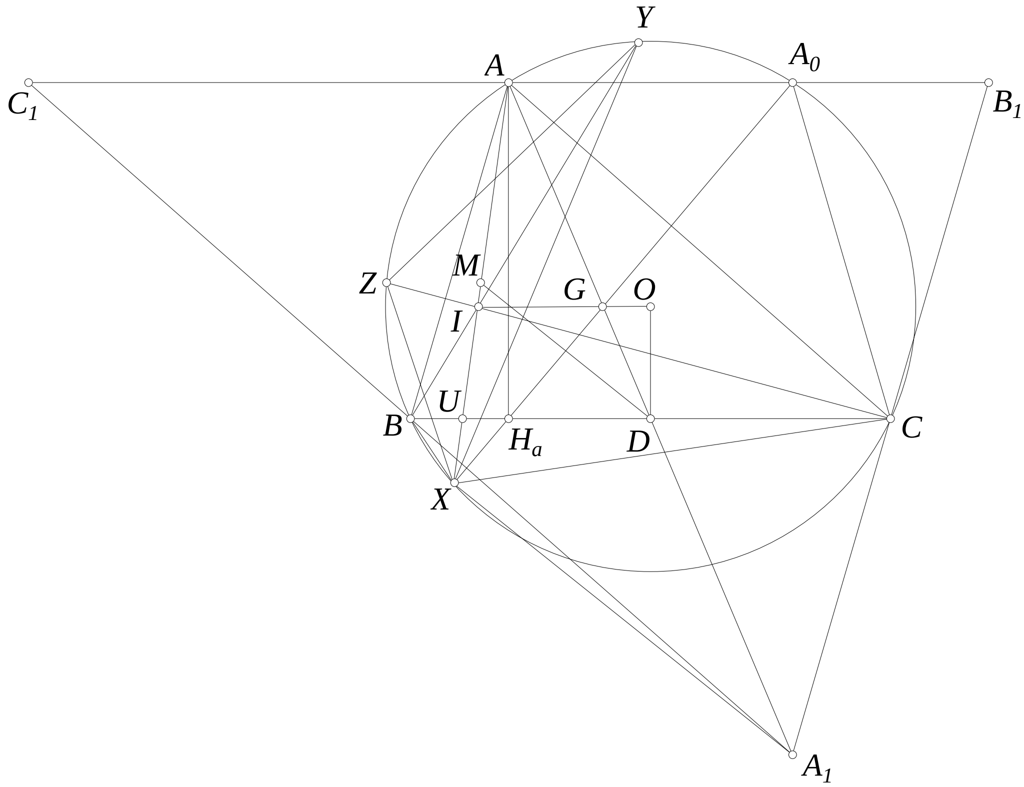
$$\frac{XB^2}{XC^2} = \frac{UB^2}{UC^2} \div \frac{AB^2}{AC^2}.$$

Thay vào đẳng thức (1), ta được

$$\frac{UB}{UC} = \frac{UB^2}{UC^2} \div \frac{AB^2}{AC^2} \div \frac{H_a B}{H_a C}.$$

Do đó

$$\frac{UB}{UC} = \frac{AB^2}{AC^2} \cdot \frac{H_a B}{H_a C}.$$



Gọi V là giao điểm của BY và CA, W là giao điểm của CZ và AB thì ta cũng có các đẳng thức tương tự. Khi đó, ta có

$$\prod \frac{UB}{UC} = \prod \left(\frac{AB^2}{AC^2} \cdot \frac{H_a B}{H_a C} \right) = 1.$$

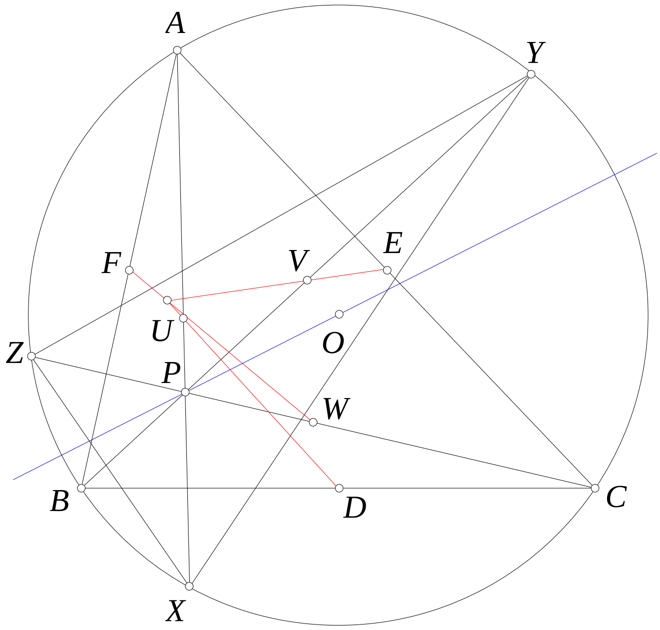
Suy ra AX, BY, CZ đồng quy tại I.

Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm đối xứng của A, B, C qua các trung điểm của BC, CA, AB. Theo tính chất đường trung bình, ta thấy ngay $A_1X \parallel DM$ và $\frac{GA_1}{GD} = 3$. Do đó phép vị tự tâm G tỷ số 3 biến đường thẳng DM thành đường thẳng A_1X. Tương tự với các đường thẳng EN và FP.

Từ đây suy ra, ta chỉ cần chứng minh các đường thẳng A_1X, B_1Y, C_1Z đồng quy là đủ. Xét tam giác XYZ và hai điểm I và G, ta có XI, YI, ZI cắt (XYZ) tại A, B, C, còn XG, YG, ZG cắt (XYZ) tại A_0, B_0, C_0. Do đó, theo bổ đề trên thì YZ, ZX, XY cắt AA_0, BB_0, CC_0 theo ba điểm thẳng hàng. Theo định lý Desargues thì A_1X, B_1Y, C_1Z đồng quy. Đó là điều phải chứng minh. □

Bình luận. Ý b) là ý hình học khó nhất trong toàn bộ bài thi VMO 2018. Để giải ý b), ta cần bổ đề trên có thể coi là một mở rộng của tính chất các điểm đẳng giác. Ta có thể thấy điểm I cũng nằm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC (xem bài toán 3), tuy nhiên trong lời giải trên, ta không cần thiết phải sử dụng điều kiện này. Ngoài ra, nếu xét một cách rộng hơn thì đây chính là ý tưởng để tổng quát bài toán hay này. Chúng tôi xin giới thiệu một bài toán tổng quát như sau:

1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là một điểm nằm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC. Các đường thẳng PA, PB, PC cắt lại (O) tại các điểm thứ hai X, Y, Z. Gọi D, E, F và U, V, W lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, CA, AB và AX, BY, CZ. Chứng minh rằng DU, EV và FW đồng quy.



Sử dụng phép vị tự tâm G là trọng tâm tam giác ABC, ta có thể chuyển về một bài toán khác như sau đã được tìm ra bởi Telv Cohl trên diễn đàn AoPS.

2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là một điểm nằm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC. Các đường thẳng PA, PB, PC cắt lại (O) tại các điểm thứ hai X, Y, Z. Gọi D, E, F lần lượt là các điểm đối xứng của X, Y, Z qua trung điểm của các đoạn thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng AX, BY và CZ đồng quy.

Bài toán 2 này được giải một cách khá đơn giản nhờ một bài toán tổng quát hơn của tác giả Trần Quang Hùng đã đưa lên AoPS từ năm 2011 như sau.

3. Cho tam giác ABC và P là một điểm bất kỳ. Gọi $A_1B_1C_1$ là tam giác pedal của P. Gọi P^* là điểm đẳng giác của P và $A_2B_2C_2$ là tam giác pedal của P^*. Q là một điểm nằm trên đường thẳng PP^*. Các đường thẳng A_2Q, B_2Q, C_2Q cắt lại đường tròn $(A_1B_1C_1)$ lần lượt tại A_3, B_3, C_3. Chứng minh rằng

a) Các đường thẳng A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 đồng quy tại một điểm trên PP^*.

b) Các đường thẳng AA_3, BB_3, CC_3 đồng quy.