

CHỦ ĐỀ 1. NGUYÊN HÀM

KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. NGUYÊN HÀM VÀ TÍNH CHẤT

1. Nguyên hàm

Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K (K là khoảng, đoạn hay nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$.

Định lý:

- 1) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C , hàm số $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K .
- 2) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$, với C là một hằng số.

Do đó $F(x) + C, C \in \mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K . Ký hiệu $\int f(x)dx = F(x) + C$.

2. Tính chất của nguyên hàm

Tính chất 1: $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ và $\int f'(x)dx = f(x) + C$

Tính chất 2: $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ với k là hằng số khác 0.

Tính chất 3: $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

3. Sự tồn tại của nguyên hàm

Định lý: Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K .

4. Bảng nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp

Nguyên hàm của hàm số sơ cấp	Nguyên hàm của hàm số hợp ($u = u(x)$)
$\int dx = x + C$	$\int du = u + C$
$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$	$\int u^\alpha du = \frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int \frac{1}{u} du = \ln u + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^u du = e^u + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1)$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1)$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin u du = -\cos u + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos u du = \sin u + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \tan u + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\cot u + C$

II. PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM

1. Phương pháp đổi biến số

Định lý 1: Nếu $\int f(u)du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$$\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C$$

Hệ quả: Nếu $u = ax + b (a \neq 0)$ thì ta có $\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$

2. Phương pháp nguyên hàm từng phần

Định lý 2: Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên K thì

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Hay

$$\int u dv = uv - \int v du$$

A. KỸ NĂNG CƠ BẢN

- Tìm nguyên hàm bằng phương pháp biến đổi trực tiếp.
- Tìm nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến số.
- Tìm nguyên hàm bằng phương pháp nguyên hàm từng phần.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + 3x + 2$ là hàm số nào trong các hàm số sau?

A. $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 2x + C.$

B. $F(x) = \frac{x^4}{3} + 3x^2 + 2x + C.$

C. $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 2x + C.$

D. $F(x) = 3x^2 + 3x + C.$

Hướng dẫn giải: Sử dụng bảng nguyên hàm.

Câu 2. Hàm số $F(x) = 5x^3 + 4x^2 - 7x + 120 + C$ là họ nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $f(x) = 15x^2 + 8x - 7.$

B. $f(x) = 5x^2 + 4x + 7.$

C. $f(x) = \frac{5x^2}{4} + \frac{4x^3}{3} - \frac{7x^2}{2}.$

D. $f(x) = 5x^2 + 4x - 7.$

Hướng dẫn giải: Lấy đạo hàm của hàm số $F(x)$ ta được kết quả.

Câu 3. Họ nguyên hàm của hàm số: $y = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$ là

A. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + \ln|x| + C.$

B. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + \ln x + C.$

C. $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + \ln x + C.$

D. $F(x) = 2x - 3 - \frac{1}{x^2} + C.$

Hướng dẫn giải: Sử dụng bảng nguyên hàm.

Câu 4. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x+1)(x+2)$

A. $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 2x + C.$

B. $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}x^2 + 2x + C.$

C. $F(x) = 2x + 3 + C.$

D. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}x^2 + 2x + C.$

Hướng dẫn giải: $f(x) = (x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$. Sử dụng bảng nguyên hàm.

Câu 5. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{2}{5-2x} + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$ là hàm số nào?

A. $F(x) = -\ln|5-2x| + 2\ln|x| - \frac{3}{x} + C.$

B. $F(x) = -\ln|5-2x| + 2\ln|x| + \frac{3}{x} + C.$

C. $F(x) = \ln|5-2x| + 2\ln|x| - \frac{3}{x} + C.$

D. $F(x) = -\ln|5-2x| - 2\ln|x| + \frac{3}{x} + C.$

Hướng dẫn giải: Sử dụng bảng nguyên hàm.

4.1.2. NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC.

Câu 6. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x$

A. $\int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C.$

B. $\int \sin 2x dx = \frac{1}{2} \cos 2x + C.$

C. $\int \sin 2x dx = \cos 2x + C.$

D. $\int \sin 2x dx = -\cos 2x + C.$

Hướng dẫn giải $\int \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x d(2x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + C.$

Câu 7. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$.

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$.

B. $\int f(x)dx = \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$.

C. $\int f(x)dx = -\frac{1}{3}\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$.

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{6}\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$.

Hướng dẫn giải: $\int f(x)dx = \frac{1}{3}\int \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)d\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3}\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$.

Câu 8. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 1 + \tan^2 \frac{x}{2}$.

A. $\int f(x)dx = 2 \tan \frac{x}{2} + C$.

B. $\int f(x)dx = \tan \frac{x}{2} + C$.

C. $\int f(x)dx = \frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + C$.

D. $\int f(x)dx = -2 \tan \frac{x}{2} + C$.

Hướng dẫn giải: $f(x) = 1 + \tan^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}$ nên $\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}} = 2 \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2 \frac{x}{2}} = 2 \tan \frac{x}{2} + C$.

Câu 9. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}$.

A. $\int f(x)dx = -\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + C$.

B. $\int f(x)dx = -\frac{1}{3}\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + C$.

C. $\int f(x)dx = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + C$.

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + C$.

Hướng dẫn giải: $\int \frac{dx}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} = -\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + C$.

Câu 10. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos x$.

A. $\int f(x)dx = \frac{\sin^4 x}{4} + C$.

B. $\int f(x)dx = -\frac{\sin^4 x}{4} + C$.

C. $\int f(x)dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C$.

D. $\int f(x)dx = -\frac{\sin^2 x}{2} + C$.

Hướng dẫn giải: $\int \sin^3 x \cdot \cos x \cdot dx = \int \sin^2 x \cdot d(\sin x) = \frac{\sin^4 x}{4} + C$.

4.1.3. NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ MŨ, LÔGARIT.

Câu 11. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x - e^{-x}$.

A. $\int f(x)dx = e^x + e^{-x} + C$.

B. $\int f(x)dx = -e^x + e^{-x} + C$.

C. $\int f(x)dx = e^x - e^{-x} + C$.

D. $\int f(x)dx = -e^x - e^{-x} + C$.

Hướng dẫn giải: $\int (e^x - e^{-x})dx = e^x + e^{-x} + C$.

Câu 12. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x \cdot 3^{-2x}$.

A. $\int f(x)dx = \left(\frac{2}{9}\right)^x \cdot \frac{1}{\ln 2 - \ln 9} + C$.

B. $\int f(x)dx = \left(\frac{9}{2}\right)^x \cdot \frac{1}{\ln 2 - \ln 9} + C$.

$$\text{C. } \int f(x)dx = \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \frac{1}{\ln 2 - \ln 9} + C.$$

$$\text{D. } \int f(x)dx = \left(\frac{2}{9}\right)^x \cdot \frac{1}{\ln 2 + \ln 9} + C.$$

Hướng dẫn giải: $\int 2^x \cdot 3^{-2x} dx = \int \left(\frac{2}{9}\right)^x dx = \left(\frac{2}{9}\right)^x \cdot \frac{1}{\ln 2 - \ln 9} + C$

Câu 13. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x(3 + e^{-x})$ là

A. $F(x) = 3e^x + x + C.$

B. $F(x) = 3e^x + e^x \ln e^x + C.$

C. $F(x) = 3e^x - \frac{1}{e^x} + C.$

D. $F(x) = 3e^x - x + C.$

Hướng dẫn giải: $F(x) = \int e^x(3 + e^{-x})dx = \int (3e^x + 1)dx = 3e^x + x + C$

Câu 14. Hàm số $F(x) = 7e^x - \tan x$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $f(x) = e^x \left(7 - \frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right).$

B. $f(x) = 7e^x + \frac{1}{\cos^2 x}.$

C. $f(x) = 7e^x + \tan^2 x - 1.$

D. $f(x) = 7 \left(e^x - \frac{1}{\cos^2 x}\right).$

Hướng dẫn giải: Ta có $g'(x) = 7e^x - \frac{1}{\cos^2 x} = e^x \left(7 - \frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right) = f(x)$

Câu 15. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{e^{4x-2}}.$

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}e^{2x-1} + C.$

B. $\int f(x)dx = e^{2x-1} + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}e^{4x-2} + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\sqrt{e^{2x-1}} + C.$

Hướng dẫn giải: $\int \sqrt{e^{4x-2}} dx = \int e^{2x-1} dx = \frac{1}{2}e^{2x-1} + C.$

4.1.4. NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ CHỨA CĂN THỨC.

Câu 16. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$ là

A. $\int f(x)dx = \sqrt{2x-1} + C.$

B. $\int f(x)dx = 2\sqrt{2x-1} + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{\sqrt{2x-1}}{2} + C.$

D. $\int f(x)dx = -2\sqrt{2x-1} + C.$

Hướng dẫn giải: $\int \frac{1}{\sqrt{2x-1}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x-1)}{\sqrt{2x-1}} = \sqrt{2x-1} + C.$

Câu 17. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}}.$

A. $\int f(x)dx = -2\sqrt{3-x} + C.$

B. $\int f(x)dx = -\sqrt{3-x} + C.$

C. $\int f(x)dx = 2\sqrt{3-x} + C.$

D. $\int f(x)dx = -3\sqrt{3-x} + C.$

Hướng dẫn giải: $\int \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx = -\int \frac{d(3-x)}{\sqrt{3-x}} = -2\sqrt{3-x} + C.$

Câu 18. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x+1}.$

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{2}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C.$

C. $\int f(x)dx = -\frac{1}{3}\sqrt{2x+1} + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C.$

Hướng dẫn giải: Đặt $t = \sqrt{2x+1} \Rightarrow dx = t dt$

$$\Rightarrow \int \sqrt{2x+1} dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C.$$

Câu 19. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{5-3x}$.

- A.** $\int f(x) dx = -\frac{2}{9}(5-3x)\sqrt{5-3x} + C$. **B.** $\int f(x) dx = -\frac{2}{3}(5-3x)\sqrt{5-3x}$.
C. $\int f(x) dx = \frac{2}{9}(5-3x)\sqrt{5-3x}$. **D.** $\int f(x) dx = -\frac{2}{3}\sqrt{5-3x} + C$.

Hướng dẫn giải: Đặt $t = \sqrt{5-3x} \Rightarrow dx = -\frac{2tdt}{3}$

$$\int \sqrt{5-3x} dx = -\frac{2}{9}(5-3x)\sqrt{5-3x} + C.$$

Câu 20. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$.

- A.** $\int f(x) dx = \frac{3}{4}(x-2)\sqrt[3]{x-2} + C$. **B.** $\int f(x) dx = -\frac{3}{4}(x-2)\sqrt[3]{x-2} + C$.
C. $\int f(x) dx = \frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x-2}$. **D.** $\int f(x) dx = \frac{1}{3}(x-2)^{\frac{2}{3}} + C$.

Hướng dẫn giải: Đặt $t = \sqrt[3]{x-2} \Rightarrow dx = 3t^2 dt$. Khi đó $\int \sqrt[3]{x-2} dx = \frac{3}{4}(x-2)\sqrt[3]{x-2} + C$

Câu 21. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{1-3x}$.

- A.** $\int f(x) dx = -\frac{1}{4}(1-3x)\sqrt[3]{1-3x} + C$. **B.** $\int f(x) dx = -\frac{3}{4}(1-3x)\sqrt[3]{1-3x} + C$.
C. $\int f(x) dx = \frac{1}{4}(1-3x)\sqrt[3]{1-3x} + C$. **D.** $\int f(x) dx = -(1-3x)^{-\frac{2}{3}} + C$.

Hướng dẫn giải: Đặt $t = \sqrt[3]{1-3x} \Rightarrow dx = -t^2 dt$. Khi đó $\int \sqrt[3]{1-3x} dx = -\frac{1}{4}(1-3x)\sqrt[3]{1-3x} + C$

Câu 22. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{e^{3x}}$.

- A.** $\int f(x) dx = \frac{2\sqrt{e^{3x}}}{3} + C$ **B.** $\int f(x) dx = \frac{3}{2\sqrt{e^{3x}}} + C$
C. $\int f(x) dx = \frac{3\sqrt{e^{3x}}}{2} + C$ **D.** $\int f(x) dx = \frac{2e^{\frac{3x+2}{2}}}{3x+2} + C$

Hướng dẫn giải: $\int \sqrt{e^{3x}} dx = \frac{2}{3} \int e^{\frac{3x}{2}} d\left(\frac{3x}{2}\right) = \frac{2}{3} \cdot e^{\frac{3x}{2}} + C = \frac{2\sqrt{e^{3x}}}{3} + C$

Câu 23. Hàm số $F(x) = (x+1)^2 \sqrt{x+1} + 2016$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

- A.** $f(x) = \frac{5}{2}(x+1)\sqrt{x+1}$ **B.** $f(x) = \frac{5}{2}(x+1)\sqrt{x+1} + C$
C. $f(x) = \frac{2}{5}(x+1)\sqrt{x+1}$ **D.** $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} + C$

Hướng dẫn giải: $F'(x) = \frac{5}{2}(x+1)\sqrt{x+1}$

Câu 24. Biết một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-3x}} + 1$ là hàm số $F(x)$ thỏa mãn $F(-1) = \frac{2}{3}$.

Khi đó $F(x)$ là hàm số nào sau đây?

- A.** $F(x) = x - \frac{2}{3}\sqrt{1-3x} + 3$ **B.** $F(x) = x - \frac{2}{3}\sqrt{1-3x} - 3$

C. $F(x) = x - \frac{2}{3}\sqrt{1-3x} + 1$

D. $F(x) = 4 - \frac{2}{3}\sqrt{1-3x}$

Hướng dẫn giải

$$F(x) = \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-3x}} + 1 \right) dx = -\frac{1}{3} \int \frac{d(1-3x)}{\sqrt{1-3x}} + x = x - \frac{2}{3}\sqrt{1-3x} + C$$

$$F(-1) = \frac{2}{3} \Rightarrow C = 3 \Rightarrow F(x) = x - \frac{2}{3}\sqrt{1-3x} + 3$$

Câu 25. Biết $F(x) = 6\sqrt{1-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{a}{\sqrt{1-x}}$. Khi đó giá trị của a bằng

A. -3 .

B. 3 .

C. 6 .

D. $\frac{1}{6}$.

Hướng dẫn giải: $F'(x) = (6\sqrt{1-x})' = \frac{-3}{\sqrt{1-x}} \Rightarrow a = -3$

4.1.5. PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

Câu 26. Tính $F(x) = \int x \sin x dx$ bằng

A. $F(x) = \sin x - x \cos x + C$.

B. $F(x) = x \sin x - \cos x + C$.

C. $F(x) = \sin x + x \cos x + C$.

D. $F(x) = x \sin x + \cos x + C$.

Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận: Sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần

Phương pháp trắc nghiệm:

Cách 1: Dùng định nghĩa, sử dụng máy tính nhập $\frac{d}{dx}(F(x)) - f(x)$, CALC ngẫu nhiên tại một số điểm x_0 thuộc tập xác định, kết quả xấp xỉ bằng 0 chọn.

Cách 2: Sử dụng phương pháp bảng

u và đạo hàm của u	dv và nguyên hàm của v
x	$\sin x$
1	$-\cos x$
0	$-\sin x$

Vậy $F(x) = \sin x - x \cos x + C$.

Câu 27. Tính $\int x \ln^2 x dx$. Chọn kết quả đúng:

A. $\frac{1}{4}x^2(2\ln^2 x - 2\ln x + 1) + C$.

B. $\frac{1}{2}x^2(2\ln^2 x - 2\ln x + 1) + C$.

C. $\frac{1}{4}x^2(2\ln^2 x + 2\ln x + 1) + C$.

D. $\frac{1}{2}x^2(2\ln^2 x + 2\ln x + 1) + C$.

Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận: Sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần 2 lần.

Phương pháp trắc nghiệm

Cách 1: Sử dụng định nghĩa $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F'(x) - f(x) = 0$.

Nhập máy tính $\frac{d}{dx}(F(x)) - f(x)$. CALC x tại một số giá trị ngẫu nhiên x_0 trong tập xác định, nếu kết quả xấp xỉ bằng 0 thì chọn.

Cách 2: Sử dụng phương pháp bảng:

u và đạo hàm của u	dv và nguyên hàm của v
$\ln^2 x$	x
$\frac{2 \ln x}{x}$	$\frac{x^2}{2}$

$\ln x$ (chuyển $\frac{2}{x}$ qua dv)	x (nhận $\frac{2}{x}$ từ u)
$\frac{1}{x}$	$\frac{x^2}{2}$
1 (chuyển $\frac{1}{x}$ qua dv)	$\frac{x}{2}$ (nhận $\frac{1}{x}$ từ u)
0	$\frac{x^2}{4}$

Do đó $\int x \ln^2 x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x - \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{4} x^2 + C = \frac{1}{4} x^2 (2 \ln^2 x - 2 \ln x + 1) + C$.

Câu 28. Tính $F(x) = \int x \sin x \cos x dx$. Chọn kết quả đúng:

A. $F(x) = \frac{1}{8} \sin 2x - \frac{x}{4} \cos 2x + C$.

B. $F(x) = \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{x}{2} \sin 2x + C$.

C. $F(x) = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x}{8} \cos 2x + C$.

D. $F(x) = -\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{x}{8} \cos 2x + C$.

Hướng dẫn giải:

Phương pháp tự luận: Biến đổi $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ rồi sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần.

Phương pháp trắc nghiệm:

Cách 1: Sử dụng định nghĩa $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F'(x) - f(x) = 0$

Nhập máy tính $\frac{d}{dx}(F(x)) - f(x)$. CALC x tại một số giá trị ngẫu nhiên x_0 trong tập xác định, nếu kết quả xấp xỉ bằng 0 thì chọn.

Cách 2: Sử dụng phương pháp bảng.

Câu 29. Tính $F(x) = \int x e^{\frac{x}{3}} dx$. Chọn kết quả đúng

A. $F(x) = 3(x-3)e^{\frac{x}{3}} + C$

B. $F(x) = (x+3)e^{\frac{x}{3}} + C$

C. $F(x) = \frac{x-3}{3} e^{\frac{x}{3}} + C$

D. $F(x) = \frac{x+3}{3} e^{\frac{x}{3}} + C$

Hướng dẫn giải:

Phương pháp tự luận: Sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần với $u = x, dv = e^{\frac{x}{3}} dx$.

Phương pháp trắc nghiệm:

Cách 1: Sử dụng định nghĩa $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F'(x) - f(x) = 0$.

Nhập máy tính $\frac{d}{dx}(F(x)) - f(x)$. CALC x tại một số giá trị ngẫu nhiên x_0 trong tập xác định, nếu kết quả xấp xỉ bằng 0 thì chọn.

Cách 2: Sử dụng phương pháp bảng.

Câu 30. Tính $F(x) = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx$. Chọn kết quả đúng

A. $F(x) = x \tan x + \ln |\cos x| + C$.

B. $F(x) = -x \cot x + \ln |\cos x| + C$.

C. $F(x) = -x \tan x + \ln |\cos x| + C$.

D. $F(x) = -x \cot x - \ln |\cos x| + C$.

Hướng dẫn giải:

Phương pháp tự luận: Sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần với $u = x, dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx$

Phương pháp trắc nghiệm:

Cách 1: Sử dụng định nghĩa $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F'(x) - f(x) = 0$.

Nhập máy tính $\frac{d}{dx}(F(x)) - f(x)$. CALC x tại một số giá trị ngẫu nhiên x_0 trong tập xác định, nếu kết quả xấp xỉ bằng 0 thì chọn.

Cách 2: Sử dụng phương pháp bảng.

Câu 31. Tính $F(x) = \int x^2 \cos x dx$. Chọn kết quả đúng

- A.** $F(x) = (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + C$. **B.** $F(x) = 2x^2 \sin x - x \cos x + \sin x + C$.
C. $F(x) = x^2 \sin x - 2x \cos x + 2 \sin x + C$. **D.** $F(x) = (2x + x^2) \cos x - x \sin x + C$.

Hướng dẫn giải:

Phương pháp tự luận: Sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần 2 lần với $u = x^2; dv = \cos x dx$, sau đó $u_1 = x; dv_1 = \sin x dx$.

Phương pháp trắc nghiệm:

Cách 1: Sử dụng định nghĩa $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F'(x) - f(x) = 0$

Nhập máy tính $\frac{d}{dx}(F(x)) - f(x)$. CALC x tại một số giá trị ngẫu nhiên x_0 trong tập xác định, nếu kết quả xấp xỉ bằng 0 thì chọn.

Cách 2: Sử dụng phương pháp bảng.

Câu 32. Tính $F(x) = \int x \sin 2x dx$. Chọn kết quả đúng

- A.** $F(x) = -\frac{1}{4}(2x \cos 2x - \sin 2x) + C$. **B.** $F(x) = \frac{1}{4}(2x \cos 2x - \sin 2x) + C$.
C. $F(x) = -\frac{1}{4}(2x \cos 2x + \sin 2x) + C$. **D.** $F(x) = \frac{1}{4}(2x \cos 2x + \sin 2x) + C$.

Hướng dẫn giải: Sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần với $u = x; dv = \sin 2x dx$

Phương pháp trắc nghiệm: Sử dụng phương pháp bảng hoặc sử dụng máy tính: Nhập $\frac{d}{dx}(F(x)) - f(x)$, CALC ngẫu nhiên tại một số điểm x_0 bất kỳ, nếu kết quả xấp xỉ bằng 0 thì chọn đáp án đó.

Câu 33. Hàm số $F(x) = x \sin x + \cos x + 2017$ là một nguyên hàm của hàm số nào?

- A.** $f(x) = x \cos x$. **B.** $f(x) = x \sin x$.
C. $f(x) = -x \cos x$. **D.** $f(x) = -x \sin x$.

Hướng dẫn giải:

Phương pháp tự luận: Tính $F'(x)$ có kết quả trùng với đáp án chọn.

Phương pháp trắc nghiệm: Sử dụng định nghĩa $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F'(x) - f(x) = 0$

Nhập máy tính $\frac{d}{dx}(F(x)) - f(x)$. CALC x tại một số giá trị ngẫu nhiên x_0 trong tập xác định, nếu kết quả xấp xỉ bằng 0 chọn.

Câu 34. Tính $\int \frac{1 + \ln(x+1)}{x^2} dx$. Khẳng định nào sau đây là sai?

- A.** $\frac{-1 + \ln(x+1)}{x} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C$ **B.** $-\frac{1 + \ln(x+1)}{x} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C$
C. $-\frac{x+1}{x}(1 + \ln(x+1)) + \ln |x| + C$ **D.** $-\frac{1 + \ln(x+1)}{x} - \ln |x+1| + \ln |x| + C$

Hướng dẫn giải:

Phương pháp tự luận: Sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần với $u = 1 + \ln(x+1); dv = -\frac{1}{x^2} dx$ hoặc biến đổi rồi đặt $u = \ln(x+1); dv = -\frac{1}{x^2} dx$.

Phương pháp trắc nghiệm: Sử dụng máy tính kiểm tra bằng định nghĩa.

4.1.6. ÔN TẬP

Câu 35. Hãy chọn mệnh đề đúng

A. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ (0 < a \neq 1).$

B. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

C. $\int f(x).g(x)dx = \int f(x)dx.\int g(x)dx.$

D. $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}.$

Hướng dẫn giải: A đúng. B sai vì thiếu điều kiện $\alpha \neq -1$; C, D sai vì không có tính chất.

Câu 36. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\int \sin x dx = \cos x + C.$

B. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, x \neq 0.$

D. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (0 < a \neq 1).$

C. $\int e^x dx = e^x + C.$

Hướng dẫn giải: $\int \sin x dx = -\cos x + C$

Câu 37. Hàm số $f(x) = x^3 - x^2 + 3 + \frac{1}{x}$ có nguyên hàm là

A. $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 3x + \ln|x| + C.$

B. $F(x) = x^4 - \frac{x^3}{3} + 3x + \ln|x| + C.$

C. $F(x) = 3x^2 - 2x - \frac{1}{x^2} + C.$

D. $F(x) = x^4 - x^3 + 3x + \ln|x| + C.$

Hướng dẫn giải: $F(x) = \int (x^3 - x^2 + 3 + \frac{1}{x})dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 3x + \ln|x| + C$

Câu 38. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^2 x$ là

A. $F(x) = \tan x - x + C.$

B. $F(x) = -\tan x + x + C.$

C. $F(x) = \tan x + x + C.$

D. $F(x) = -\tan x - x + C.$

Hướng dẫn giải: $\int f(x)dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \tan x - x + C$

Câu 39. Hàm số $F(x) = 7 \sin x - \cos x + 1$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $f(x) = \sin x + 7 \cos x.$

B. $f(x) = -\sin x + 7 \cos x.$

C. $f(x) = \sin x - 7 \cos x.$

D. $f(x) = -\sin x - 7 \cos x.$

Hướng dẫn giải: $F'(x) = 7 \cos x + \sin x$

Câu 40. Kết quả tính $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$ là

A. $\tan x - \cot x + C.$

B. $\cot 2x + C.$

C. $\tan 2x - x + C.$

D. $-\tan x + \cot x + C.$

Hướng dẫn giải: $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \tan x - \cot x + C$

Câu 41. Hàm số $F(x) = 3x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} - 1$ có một nguyên hàm là

A. $f(x) = x^3 - 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} - x.$

B. $f(x) = x^3 - \sqrt{x} - \frac{1}{x} - x.$

C. $f(x) = x^3 - 2\sqrt{x} + \frac{1}{x}.$

D. $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{x} - x.$

Hướng dẫn giải: Ta có $\int F(x)dx = \int \left(3x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} - 1 \right) dx = x^3 - 2\sqrt{x} - \frac{1}{x^2} - x + C$

Câu 42. Hàm số $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^5 x}$ có một nguyên hàm $F(x)$ bằng

A. $-\frac{1}{4\sin^4 x}$. B. $\frac{1}{4\sin^4 x}$. C. $\frac{4}{\sin^4 x}$. D. $\frac{-4}{\sin^4 x}$.

Hướng dẫn giải: $\int f(x)dx = \int \frac{\cos x}{\sin^5 x} dx = \int \frac{1}{\sin^5 x} d(\sin x) = -\frac{1}{4\sin^4 x} + C$

Câu 43. Kết quả tính $\int 2x\sqrt{5-4x^2} dx$ bằng

A. $-\frac{1}{6}\sqrt{(5-4x^2)^3} + C$. B. $-\frac{3}{8}\sqrt{(5-4x^2)} + C$.
C. $\frac{1}{6}\sqrt{(5-4x^2)^3} + C$. D. $-\frac{1}{12}\sqrt{(5-4x^2)^3} + C$.

Hướng dẫn giải: Đặt $t = \sqrt{5-4x^2} \Rightarrow tdt = -4xdx$

Ta có $\int 2x\sqrt{5-4x^2} dx = -\frac{1}{2} \int t^2 dt = -\frac{1}{6}t^3 + C = -\frac{1}{6}\sqrt{(5-4x^2)^3} + C$

Câu 44. Kết quả $\int e^{\sin x} \cos x dx$ bằng

A. $e^{\sin x} + C$. B. $\cos x \cdot e^{\sin x} + C$. C. $e^{\cos x} + C$. D. $e^{-\sin x} + C$.

Hướng dẫn giải: Ta có $\int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C$

Câu 45. Tính $\int \tan x dx$ bằng

A. $-\ln|\cos x| + C$. B. $\ln|\cos x| + C$. C. $\frac{1}{\cos^2 x} + C$. D. $\frac{-1}{\cos^2 x} + C$.

Hướng dẫn giải: Ta có $\int \tan x dx = -\int \frac{1}{\cos x} d(\cos x) = -\ln|\cos x| + C$

Câu 46. Tính $\int \cot x dx$ bằng

A. $\ln|\sin x| + C$. B. $-\ln|\sin x| + C$. C. $\frac{-1}{\sin^2 x} + C$. D. $\frac{1}{\sin^2 x} - C$.

Hướng dẫn giải: Ta có $\int \cot x dx = \int \frac{1}{\sin x} d(\sin x) = \ln|\sin x| + C$

Câu 47. Nguyên hàm của hàm số $y = \frac{x^3}{x-1}$ là

A. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x-1| + C$. B. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x+1| + C$.
C. $\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x-1| + C$. D. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + x + \ln|x-1| + C$.

Hướng dẫn giải: Ta có $\frac{x^3}{x-1} = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}$. Sử dụng bảng nguyên hàm suy ra đáp án.

Câu 48. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2-2x+3}{x+1}$ là

A. $\frac{x^2}{2} - 3x + 6\ln|x+1|$. B. $\frac{x^2}{2} + 3x + 6\ln|x+1|$.
C. $\frac{x^2}{2} + 3x - 6\ln|x+1|$. D. $\frac{x^2}{2} - 3x + 6\ln(x+1)$.

Hướng dẫn giải: $f(x) = \frac{x^2-2x+3}{x+1} = x-3 + \frac{6}{x+1}$. Sử dụng bảng nguyên hàm.

Câu 49. Kết quả tính $\int \frac{1}{x(x+3)} dx$ bằng

A. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x+3}\right| + C$. B. $-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x+3}\right| + C$.

C. $\frac{2}{3} \ln \left| \frac{x+3}{x} \right| + C.$

D. $\frac{2}{3} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + C.$

Hướng dẫn giải: $\frac{1}{x(x+3)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} \right)$. Sử dụng bảng nguyên hàm.

Câu 50. Kết quả tính $\int \frac{1}{x(x-3)} dx$ bằng

A. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-3}{x} \right| + C.$

B. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x+3}{x} \right| + C.$

C. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + C.$

D. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x}{x-3} \right| + C.$

Hướng dẫn giải: $\frac{1}{x(x+3)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x} \right)$. Sử dụng bảng nguyên hàm.

Câu 51. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$ là

A. $F(x) = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C.$

B. $F(x) = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x+2}{x-1} \right| + C.$

C. $F(x) = \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C.$

D. $F(x) = \ln |x^2 + x - 2| + C.$

Hướng dẫn giải: $f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right)$. Sử dụng bảng nguyên hàm.

Câu 52. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \left(\frac{1-x}{x} \right)^2$ là

A. $F(x) = -\frac{1}{x} - 2 \ln |x| + x + C.$

B. $F(x) = -\frac{1}{x} - 2 \ln x + x + C.$

C. $F(x) = \frac{1}{x} - 2 \ln |x| + x + C.$

D. $F(x) = -\frac{1}{x} - 2 \ln |x| - x + C.$

Hướng dẫn giải: $f(x) = \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 = \frac{1-2x+x^2}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1$. Sử dụng bảng nguyên hàm.

Câu 53. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2}$ với $a \neq 0$ là

A. $\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$

B. $\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C.$

C. $\frac{1}{a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$

D. $\frac{1}{a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C.$

Hướng dẫn giải: $\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right)$. Sử dụng bảng nguyên hàm.

Câu 54. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{8-x^2}}$ thỏa mãn $F(2) = 0$. Khi đó phương trình $F(x) = x$ có nghiệm là

A. $x = 1 - \sqrt{3}.$

B. $x = 1.$

C. $x = -1.$

D. $x = 0.$

Hướng dẫn giải: Đặt $t = \sqrt{8-x^2} \Rightarrow t^2 = 8-x^2 \Rightarrow -tdt = xdx$

$$\int \frac{x}{\sqrt{8-x^2}} dx = -\int \frac{tdt}{t} = -t + C = -\sqrt{8-x^2} + C.$$

Vì $F(2) = 0$ nên $C = 2$. Ta có phương trình $-\sqrt{8-x^2} + 2 = x \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{3}$

Câu 55. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-1}$ và $F(2) = 1$ thì $F(3)$ bằng

- A. $\ln 2 + 1$. B. $\ln \frac{3}{2}$. C. $\ln 2$. D. $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải: $\int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1| + C$, vì $F(2) = 1$ nên $C = 1$. $F(x) = \ln|x-1| + 1$, thay $x = 3$ ta có đáp án.

Câu 56. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{\ln^2 x + 1} \cdot \frac{\ln x}{x}$ thỏa mãn $F(1) = \frac{1}{3}$. Giá trị của $F^2(e)$ là

- A. $\frac{8}{9}$. B. $\frac{1}{9}$. C. $\frac{8}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải: Đặt $t = \sqrt{\ln^2 x + 1} \Rightarrow t dt = \frac{\ln x}{x} dx$

$$\int \sqrt{\ln^2 x + 1} \cdot \frac{\ln x}{x} dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(\sqrt{\ln^2 x + 1})^3}{3} + C. \text{ Vì } F(1) = \frac{1}{3} \text{ nên } C = 0$$

Vậy $F^2(e) = \frac{8}{9}$.

Câu 57. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2x + \frac{1}{\sin^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ là

- A. $-\cot x + x^2 - \frac{\pi^2}{16}$. B. $\cot x - x^2 + \frac{\pi^2}{16}$.
C. $-\cot x + x^2$. D. $\cot x - x^2 - \frac{\pi^2}{16}$.

Hướng dẫn giải: $\int \left(2x + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx = x^2 - \cot x + C$. $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ nên $C = -\frac{\pi^2}{16}$.

4.1.2. NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC.

Câu 58. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^2 x \cdot \sin x$.

- A. $\int f(x) dx = -\frac{\cos^3 x}{3} + C$. B. $\int f(x) dx = \frac{\cos^3 x}{3} + C$.
C. $\int f(x) dx = -\frac{\sin^2 x}{2} + C$. D. $\int f(x) dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C$.

Hướng dẫn giải: $\int \cos^2 x \sin x dx = -\int \cos^2 x d(\cos x) = -\frac{\cos^3 x}{3} + C$

Câu 59. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos 2x - 1}$.

- A. $\int f(x) dx = -\ln|\sin x| + C$. B. $\int f(x) dx = \ln|\cos 2x - 1| + C$.
C. $\int f(x) dx = \ln|\sin 2x| + C$. D. $\int f(x) dx = \ln|\sin x| + C$.

Hướng dẫn giải

$$\int \frac{\sin 2x dx}{\cos 2x - 1} = \int \frac{2 \sin x \cos x}{1 - 2 \sin^2 x + 1} dx = -\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = -\int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = -\ln|\sin x| + C$$

Câu 60. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x \cdot \cos 2x \cdot dx$.

- A. $\int f(x) dx = \frac{-2 \cos^3 x}{3} + \cos x + C$. B. $\int f(x) dx = \frac{1}{6} \cos 3x + \frac{1}{2} \sin x + C$.
C. $\int f(x) dx = \frac{\cos^3 x}{3} + \cos x + C$. D. $\int f(x) dx = \frac{1}{6} \cos 3x - \frac{1}{2} \sin x + C$.

Hướng dẫn giải

$$\int \sin x \cdot \cos 2x dx = \int (2 \cos^2 x - 1) \sin x dx = -\int (2 \cos^2 x - 1) d(\cos x) = \frac{-2 \cos^3 x}{3} + \cos x + C$$

Câu 61. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2 \sin x \cdot \cos 3x$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{4} \cos 4x + C$.

B. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos 4x + C$.

C. $\int f(x) dx = 2 \cos^4 x + 3 \cos^2 x + C$.

D. $\int f(x) dx = 3 \cos^4 x - 3 \cos^2 x + C$.

Hướng dẫn giải: $\int 2 \sin x \cdot \cos 3x dx = \int (\sin 4x - \sin 2x) dx = \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{4} \cos 4x + C$.

Câu 62. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 x \cdot \sin 3x$.

A. $\int f(x) dx = \frac{3}{8} \left(\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 4x}{4} \right) - \frac{1}{8} \left(x - \frac{\sin 6x}{6} \right) + C$.

B. $\int f(x) dx = \frac{3}{8} \left(\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 4x}{4} \right) + \frac{1}{8} \left(x - \frac{\sin 6x}{6} \right) + C$.

C. $\int f(x) dx = \frac{1}{8} \left(\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 4x}{4} \right) - \frac{3}{8} \left(x - \frac{\sin 6x}{6} \right) + C$.

D. $\int f(x) dx = \frac{3}{8} \left(\frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 4x}{4} \right) - \frac{1}{8} \left(x + \frac{\sin 6x}{6} \right) + C$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cdot \sin 3x dx &= \int \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4} \cdot \sin 3x dx \\ &= \frac{3}{8} \int 2 \sin x \cdot \sin 3x dx - \frac{1}{8} \int 2 \sin^2 3x dx = \frac{3}{8} \int (\cos 2x - \cos 4x) dx - \frac{1}{8} \int (1 - \cos 6x) dx \\ &= \frac{3}{8} \left(\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 4x}{4} \right) - \frac{1}{8} \left(x - \frac{\sin 6x}{6} \right) + C \end{aligned}$$

Câu 63. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos 3x + \cos^3 x \cdot \sin 3x$.

A. $\int f(x) dx = \frac{-3}{16} \cos 4x + C$.

B. $\int f(x) dx = \frac{3}{16} \cos 4x + C$.

C. $\int f(x) dx = \frac{-3}{16} \sin 4x + C$.

D. $\int f(x) dx = \frac{3}{16} \sin 4x + C$.

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned} \int (\sin^3 x \cdot \cos 3x + \cos^3 x \cdot \sin 3x) dx &= \int \left(\frac{3 \sin x - \sin 3x}{4} \cdot \cos 3x + \frac{\cos 3x + 3 \cos x}{4} \cdot \sin 3x \right) dx \\ &= \int \left(\frac{3}{4} \sin x \cdot \cos 3x - \sin 3x \cdot \cos 3x + \frac{3}{4} \sin 3x \cdot \cos x + \sin 3x \cdot \cos 3x \right) dx \\ &= \frac{3}{4} \int (\sin x \cdot \cos 3x + \sin 3x \cdot \cos x) dx = \frac{3}{4} \int \sin 4x dx = \frac{-3}{16} \cos 4x + C \end{aligned}$$

Câu 64. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2}$ biết $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

A. $F(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin x}{2} + \frac{1}{2}$.

B. $F(x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + \frac{3}{2}$.

C. $F(x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + \frac{1}{2}$.

D. $F(x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + \frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

$$\bullet F(x) = \int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos x) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x + C$$

$$\bullet F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} + C = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$$

4.1.3. NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LÔGARIT.

Câu 65. Hàm số $f(x) = e^x \left(\ln 2 + \frac{e^{-x}}{\sin^2 x} \right)$ có họ nguyên hàm là

A. $F(x) = e^x \ln 2 - \cot x + C.$

B. $F(x) = e^x \ln 2 + \cot x + C.$

C. $F(x) = e^x \ln 2 + \frac{1}{\cos^2 x} + C.$

D. $F(x) = e^x \ln 2 - \frac{1}{\cos^2 x} + C.$

Hướng dẫn giải: $\int f(x) dx = \int \left(e^x \ln 2 + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = e^x \ln 2 - \cot x + C$

Câu 66. Hàm số $f(x) = 3^x - 2^x \cdot 3^x$ có nguyên hàm bằng

A. $\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{6^x}{\ln 6} + C.$

B. $3^x \ln 3(1 + 2^x \ln 2) + C.$

C. $\frac{3^x}{\ln 3} + \frac{3^x \cdot 2^x}{\ln 6} + C.$

D. $\frac{3^x}{\ln 3} + \frac{6^x}{\ln 3 \cdot \ln 2} + C.$

Hướng dẫn giải: $\int f(x) dx = \int (3^x + 6^x) dx = \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{6^x}{\ln 6} + C$

Câu 67. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = (e^{-x} + e^x)^2$ thỏa mãn điều kiện $F(0) = 1$ là

A. $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{2x} + 2x + 1.$

B. $F(x) = -2e^{-2x} + 2e^{2x} + 2x + 1.$

C. $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{2x} + 2x.$

D. $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{2x} + 2x - 1.$

Hướng dẫn giải: Ta có $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{2x} + 2x + C, F(0) = 1 \Leftrightarrow C = 1$

Câu 68. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}.$

A. $F(x) = 2x - 3 \ln|x+1| + C.$

B. $F(x) = 2x + 3 \ln|x+1| + C.$

C. $F(x) = 2x - \ln|x+1| + C.$

D. $F(x) = 2x + \ln|x+1| + C.$

Hướng dẫn giải: $\int \frac{2x-1}{x+1} dx = \int \left(2 - \frac{3}{x+1} \right) dx = 2x - 3 \ln|x+1| + C$

Câu 69. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x^2 + 2x + 3}{2x+1}.$

A. $F(x) = \frac{1}{8}(2x+1)^2 + \frac{5}{4} \ln|2x+1| + C.$

B. $F(x) = \frac{1}{8}(2x+1)^2 + 5 \ln|2x+1| + C.$

C. $F(x) = (2x+1)^2 + \ln|2x+1| + C.$

D. $F(x) = (2x+1)^2 - \ln|2x+1| + C.$

Hướng dẫn giải:

$$\int \frac{2x^2 + 2x + 3}{2x+1} dx = \int \left(\frac{2x+1}{2} + \frac{5}{2(2x+1)} \right) dx = \frac{1}{8}(2x+1)^2 + \frac{5}{4} \ln|2x+1| + C$$

Câu 70. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1}.$

A. $F(x) = \frac{x^2}{2} - \ln(x^2 + 1) + C.$

B. $F(x) = \frac{x^2}{2} + \ln(x^2 + 1) + C.$

C. $F(x) = x^2 - \ln(x^2 + 1) + C.$

D. $F(x) = x^2 + \ln(x^2 + 1) + C.$

Hướng dẫn giải: $\int \frac{x^3 - x}{x^2 + 1} dx = \int \left(x - \frac{2x}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{x^2}{2} - \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{x^2}{2} - \ln(x^2 + 1) + C$

Câu 71. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x \ln x + x}$.

A. $F(x) = \ln|\ln x + 1| + C$.

B. $F(x) = \ln|\ln x - 1| + C$.

C. $F(x) = \ln|x + 1| + C$.

D. $F(x) = \ln x + 1 + C$.

Hướng dẫn giải: $\int \frac{1}{x(\ln x + 1)} dx = \int \frac{d(\ln x + 1)}{(\ln x + 1)} = \ln|\ln x + 1| + C$

Câu 72. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x + 1}$.

A. $F(x) = e^x - \ln(e^x + 1) + C$.

B. $F(x) = e^x + \ln(e^x + 1) + C$.

C. $F(x) = \ln(e^x + 1) + C$.

D. $F(x) = e^{2x} - e^x + C$.

Hướng dẫn giải: $\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx = \int \left(e^x - \frac{e^x}{e^x + 1} \right) dx = e^x - \int \frac{d(e^x + 1)}{e^x + 1} = e^x - \ln(e^x + 1) + C$

4.1.4. NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ CHỨA CĂN THỨC.

Câu 73. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$.

A. $\int f(x) dx = 2\sqrt{x} - 2\ln(1 + \sqrt{x}) + C$.

B. $\int f(x) dx = 2\sqrt{x} + 2\ln(1 + \sqrt{x}) + C$.

C. $\int f(x) dx = \ln(1 + \sqrt{x}) + C$.

D. $\int f(x) dx = 2 + 2\ln(1 + \sqrt{x}) + C$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = 1 + \sqrt{x} \Rightarrow x = (t - 1)^2 \Rightarrow dx = 2(t - 1)dt$.

Khi đó $\int \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx = \int \frac{2(t - 1)dt}{t} = 2 \int \left(1 - \frac{1}{t} \right) dt = 2(t - \ln|t|) + C_1$

$= 2(\sqrt{x} + 1 - \ln|1 + \sqrt{x}|) + C_1 = 2\sqrt{x} - 2\ln(1 + \sqrt{x}) + C$. (Với $C = 2 + C_1$ và $1 + \sqrt{x} > 0$)

Câu 74. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x + 2}{\sqrt{x + 1}}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{2}{3}(x + 4)\sqrt{x + 1} + C$.

B. $\int f(x) dx = (x + 4)\sqrt{x + 1} + C$.

C. $\int f(x) dx = \frac{x}{2(x + 1)\sqrt{x + 1}} + C$.

D. $\int f(x) dx = \sqrt{x + 1} + \frac{1}{\sqrt{x + 1}} + C$.

Hướng dẫn giải: $\int \frac{x + 2}{\sqrt{x + 1}} dx = \int \left(\sqrt{x + 1} + \frac{1}{\sqrt{x + 1}} \right) d(x + 1) = \frac{2}{3}(x + 4)\sqrt{x + 1} + C$

Câu 75. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x - 1}{\sqrt{1 - x}}$.

A. $\int f(x) dx = -\frac{2}{3}(2x + 1)\sqrt{1 - x} + C$.

B. $\int f(x) dx = \frac{2}{3}(2x + 1)\sqrt{1 - x} + C$.

C. $\int f(x) dx = -\frac{2}{3}(2x - 1)\sqrt{1 - x} + C$.

D. $\int f(x) dx = -2\sqrt{1 - x} + \frac{1}{\sqrt{1 - x}} + C$.

Hướng dẫn giải

$\int \frac{2x - 1}{\sqrt{1 - x}} dx = - \int \left(-2\sqrt{1 - x} + \frac{1}{\sqrt{1 - x}} \right) d(1 - x)$

$= \frac{2}{3}(1 - x)^{\frac{3}{2}} - 2(1 - x)^{\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{3}(2x + 1)\sqrt{1 - x} + C$

Câu 76. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3x^2 + 2}}$.

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}\sqrt{3x^2+2} + C.$

B. $\int f(x)dx = -\frac{1}{3}\sqrt{3x^2+2} + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{1}{6}\sqrt{3x^2+2} + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{2}{3}\sqrt{3x^2+2} + C.$

Hướng dẫn giải: $\int \frac{x}{\sqrt{3x^2+2}} dx = \frac{1}{6} \int \frac{d(3x^2+2)}{\sqrt{3x^2+2}} = \frac{1}{3}\sqrt{3x^2+2} + C$

Câu 77. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}.$

A. $\int f(x)dx = -\frac{1}{3}(x^2+8)\sqrt{4-x^2} + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}(x^2+8)\sqrt{4-x^2} + C.$

C. $\int f(x)dx = -\frac{1}{3}\sqrt{4-x^2} + C.$

D. $\int f(x)dx = -\frac{2}{3}(x^2+8)\sqrt{4-x^2} + C.$

Hướng dẫn giải: Đặt $t = \sqrt{4-x^2} \Rightarrow x^2 = 4-t^2 \Rightarrow xdx = -tdt.$ Khi đó

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx &= \int \frac{(4-t^2)(-tdt)}{t} = \int (t^2-4)dt = \frac{t^3}{3} - 4t + C \\ &= \frac{(\sqrt{4-x^2})^3}{3} - 4\sqrt{4-x^2} + C = -\frac{1}{3}(x^2+8)\sqrt{4-x^2} + C \end{aligned}$$

4.1.5. PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

Câu 78. Tính $F(x) = \int (2x-1)e^{1-x} dx = e^{1-x}(Ax+B) + C.$ Giá trị của biểu thức $A+B$ bằng:

A. $-3.$

B. $3.$

C. $0.$

D. $5.$

Hướng dẫn giải:

Phương pháp trắc nghiệm: Sử dụng phương pháp bảng.

u và đạo hàm của u	dv và nguyên hàm của v
$2x-1$	e^{1-x}
2	$-e^{1-x}$
0	e^{1-x}

Do đó $F(x) = -(2x-1)e^{1-x} - 2e^{1-x} + C = e^{1-x}(-2x-1) + C.$

Vậy $A+B = -3.$

Câu 79. Tính $F(x) = \int e^x \cos x dx = e^x(A \cos x + B \sin x) + C.$ Giá trị của biểu thức $A+B$ bằng

A. $1.$

B. $-1.$

C. $2.$

D. $-2.$

Hướng dẫn giải:

Phương pháp trắc nghiệm: Sử dụng bảng

u và đạo hàm của u	dv và nguyên hàm của v
e^x	$\cos x$
e^x	$\sin x$
e^x	$-\cos x$

Do đó $F(x) = e^x \sin x + e^x \cos x - F(x) + C_1$ hay $F(x) = \frac{1}{2}(e^x \sin x + e^x \cos x) + C.$

Vậy $A+B = 1.$

Câu 80. Tính $F(x) = \int 2x(3x-2)^6 dx = A(3x-2)^8 + Bx(3x-2)^7 + C.$ Giá trị của biểu thức $12A+11B$ là

A. $1.$

B. $-1.$

C. $\frac{12}{11}.$

D. $-\frac{12}{11}.$

Hướng dẫn giải:

Phương pháp trắc nghiệm: Sử dụng bảng

u và đạo hàm của u	dv và nguyên hàm của v
$2x$	$(3x-2)^6$
2	$\frac{1}{21}(3x-2)^7$
0	$\frac{1}{504}(3x-2)^8$

Do đó $F(x) = \frac{2}{21}x(3x-2)^7 - \frac{1}{252}(3x-2)^8 + C$. Vậy $12A+11B=1$.

Câu 81. Tính $F(x) = \int x^2 \sqrt{x-1} dx = ax^2(x-1)\sqrt{x-1} + bx(x-1)^2 \sqrt{x-1} + c(x-1)^3 \sqrt{x-1} + C$. Giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng:

A. $\frac{2}{7}$

B. $\frac{-2}{7}$

C. $\frac{142}{105}$

D. $\frac{-142}{105}$

Hướng dẫn giải:

Phương pháp tự luận:

Đặt $u = x^2, dv = \sqrt{x-1} dx$ ta được

$$F(x) = \int x^2 \sqrt{x-1} dx = \frac{2}{3}x^2(x-1)\sqrt{x-1} - \frac{8}{15}x(x-1)^2 \sqrt{x-1} + \frac{16}{105}(x-1)^3 \sqrt{x-1} + C$$

Vậy $a+b+c = \frac{-82}{105}$.

Phương pháp trắc nghiệm: Sử dụng phương pháp bảng

u và đạo hàm của u	dv và nguyên hàm của v
x^2	$(x-1)^{\frac{1}{2}}$
$2x$	$\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$
2	$\frac{4}{15}(x-1)^{\frac{5}{2}}$
0	$\frac{8}{105}(x-1)^{\frac{7}{2}}$

$$F(x) = \int x^2 \sqrt{x-1} dx = \frac{2}{3}x^2(x-1)\sqrt{x-1} - \frac{8}{15}x(x-1)^2 \sqrt{x-1} + \frac{16}{105}(x-1)^3 \sqrt{x-1} + C$$

Vậy $a+b+c = \frac{2}{7}$.

Câu 82. Tính $F(x) = \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$. Chọn kết quả đúng:

A. $F(x) = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C$.

B. $F(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C$.

C. $F(x) = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \sqrt{1+x^2} + C$.

D. $F(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - x\sqrt{1+x^2} + C$.

Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận: Sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần với $u = \ln(x + \sqrt{1+x^2}); dv = dx$

Phương pháp trắc nghiệm: Sử dụng phương pháp bảng

u và đạo hàm của u	dv và nguyên hàm của v
$\ln(x + \sqrt{1+x^2})$	1

$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (Chuyển $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ qua dv)	x
1	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (Nhận $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ từ u)
0	$\sqrt{1+x^2}$

Câu 83. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^3 e^{x^2}$ và đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua gốc tọa độ O . Chọn kết quả đúng:

A. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + \frac{1}{2}$.

B. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} + \frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2}$.

C. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2}$.

D. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} + \frac{1}{2}e^{x^2} + \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Phương pháp tự luận: Đặt $u = x^2, dv = xe^{x^2}$ chọn $du = 2xdx, v = \frac{1}{2}e^{x^2}$ ta được

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + C. \text{ Đồ thị đi qua } O(0;0) \text{ nên } C = \frac{1}{2}.$$

Phương pháp trắc nghiệm:

u và đạo hàm của u	dv và nguyên hàm của v
x^2	xe^{x^2}
$2x$ (chuyển $2x$ qua dv)	$\frac{1}{2}e^{x^2}$
1	xe^{x^2} (nhận $2x$ từ u)
0	$\frac{1}{2}e^{x^2}$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + C. \text{ Đồ thị đi qua } O(0;0) \text{ nên } C = \frac{1}{2}.$$

Câu 84. Tính $F(x) = \int \sqrt{x^2 - 1} dx$ bằng:

A. $F(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| + C$.

B. $F(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| + C$.

C. $F(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2}\ln|x - \sqrt{x^2 - 1}| + C$.

D. $F(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{2}\ln|x - \sqrt{x^2 - 1}| + C$.

Hướng dẫn giải:

Cách 1: Sử dụng định nghĩa $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F'(x) - f(x) = 0$

Nhập máy tính $\frac{d}{dx}(F(x)) - f(x)$. CALC x tại một số giá trị ngẫu nhiên trong tập xác định, nếu kết quả xấp xỉ bằng 0 thì chọn.

Cách 2: Đặt $u = \sqrt{x^2 - 1}, dv = dx$ ta được $F(x) = x\sqrt{x^2 - 1} - F(x) - J(x)$

với $J(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$, bằng cách đặt $u = x + \sqrt{x^2 - 1}$ ta được $J(x) = \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| + C$

$$\text{Vậy } F(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| + C.$$

4.1.6. ÔN TẬP

Câu 85. Kết quả của $\int \sin^2 x \cos x dx$ bằng

- A.** $\frac{1}{3} \sin^3 x + C$. **B.** $\sin^3 x + C$. **C.** $-\frac{1}{3} \sin^3 x + C$. **D.** $-\sin^3 x + C$.

Hướng dẫn giải: Ta có $\int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x d(\sin x) = -\frac{1}{3} \sin^3 x + C$.

Câu 86. Tính $\int \cos^2 x \sin x dx$ bằng

- A.** $-\frac{1}{3} \cos^3 x + C$. **B.** $-\cos^3 x + C$. **C.** $\frac{1}{3} \cos^3 x + C$. **D.** $\cos^3 x + C$.

Hướng dẫn giải: Ta có $\int \cos^2 x \sin x dx = -\int \cos^2 x d(\cos x) = -\frac{1}{3} \cos^3 x + C$.

Câu 87. Kết quả của $\int \sin^3 x dx$ bằng

- A.** $\frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$. **B.** $-\frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$.
C. $3 \sin^2 x \cdot \cos x + C$. **D.** $\frac{\cos^3 x}{6} - \cos x + C$.

Hướng dẫn giải: $\int \sin^3 x dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx = -\int (1 - \cos^2 x) d(\cos x) = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C$.

Câu 88. Kết quả của $\int \cos^3 x dx$ bằng

- A.** $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$. **B.** $\sin x + \frac{\sin^3 x}{3} + C$.
C. $3 \sin^2 x \cdot \cos x + C$. **D.** $-\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$.

Hướng dẫn giải: $\int \cos^3 x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) d(\sin x) = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C$.

Câu 89. Kết quả của $\int \sin^4 x \cos x dx$ bằng

- A.** $\frac{1}{5} \sin^5 x + C$. **B.** $-\frac{1}{5} \sin^5 x + C$. **C.** $\sin^5 x + C$. **D.** $-\sin^5 x + C$.

Hướng dẫn giải: Ta có $\int \sin^4 x \cos x dx = \int \sin^4 x d(\sin x) = \frac{1}{5} \sin^5 x + C$.

Câu 90. Tính $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx$ bằng

- A.** $e^{\tan x} + C$. **B.** $\tan x \cdot e^{\tan x} + C$. **C.** $e^{-\tan x} + C$. **D.** $-e^{\tan x} + C$.

Hướng dẫn giải: $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx = \int e^{\tan x} d(\tan x) = e^{\tan x} + C$.

Câu 91. Tính $\int \frac{1}{\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} dx$ bằng:

- A.** $2 \tan \sqrt{x} + C$. **B.** $\tan \sqrt{x} + C$. **C.** $\tan^2 \sqrt{x} + C$. **D.** $\frac{1}{2} \tan \sqrt{x} + C$.

Hướng dẫn giải: $\int \frac{1}{\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} d(\sqrt{x}) = 2 \tan \sqrt{x} + C$.

Câu 92. Tính $\int \frac{3x^2}{x^3 + 1} dx$ bằng

- A.** $\ln|x^3 + 1| + C$. **B.** $\frac{4x^3}{x^4 + 4x} + C$. **C.** $\ln(x^3 + 1) + C$. **D.** $\frac{x^3}{x^4 + x} + C$.

Hướng dẫn giải: $\int \frac{3x^2}{x^3+1} dx = \int \frac{1}{x^3+1} d(x^3+1) = \ln|x^3+1| + C.$

Câu 93. Tính $\int \frac{6x^2-12x}{x^3-3x^2+6} dx$ bằng

A. $2\ln|x^3-3x^2+6| + C.$

B. $\ln|x^3-3x^2+6| + C.$

C. $\frac{1}{2}\ln|x^3-3x^2+6| + C.$

D. $2\ln(x^3-3x^2+6) + C.$

Hướng dẫn giải: $\int \frac{6x^2-12x}{x^3-3x^2+6} dx = 2 \int \frac{1}{x^3-3x^2+6} d(x^3-3x^2+6) = 2\ln|x^3-3x^2+6| + C.$

Câu 94. Tính $\int \frac{4x^3+2x}{x^4+x^2+3} dx$ bằng

A. $\ln|x^4+x^2+3| + C.$

B. $2\ln|x^4+x^2+3| + C.$

C. $\frac{1}{2}\ln|x^4+x^2+3| + C.$

D. $-2\ln(x^4+x^2+3) + C.$

Hướng dẫn giải: $\int \frac{4x^3+2x}{x^4+x^2+3} dx = \int \frac{1}{x^4+x^2+3} d(x^4+x^2+3) = \ln|x^4+x^2+3| + C.$

Câu 95. Tính $\int \frac{x^2+1}{x^3+3x-1} dx$ bằng

A. $\frac{1}{3}\ln|x^3+3x-1| + C.$

B. $\ln|x^3+3x-1| + C.$

C. $\ln|x^3+3x-1| + C.$

D. $\frac{1}{3}\ln(x^3+3x-1) + C.$

Hướng dẫn giải: $\int \frac{x^2+1}{x^3+3x-1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x^3+3x-1} d(x^3+3x-1) = \frac{1}{3}\ln|x^3+3x-1| + C.$

Câu 96. Tính $\int e^{6x-5} dx$ bằng

A. $\frac{1}{6}e^{6x-5} + C.$

B. $e^{6x-5} + C.$

C. $6e^{6x-5} + C.$

D. $e^{6x+5} - C.$

Hướng dẫn giải: $\int e^{6x-5} dx = \frac{1}{6} \int e^{6x-5} d(6x-5) = \frac{1}{6}e^{6x-5} + C.$

Câu 97. Tính $\int e^{-x-5} dx$ bằng

A. $-e^{-x-5} + C.$

B. $e^{-x-5} + C.$

C. $e^{x+5} + C.$

D. $-e^{x+5} + C.$

Hướng dẫn giải: $\int e^{-x-5} dx = -\int e^{-x-5} d(-x-5) = -e^{-x-5} + C.$

Câu 98. Tính $\int (5-9x)^{12} dx$ bằng

A. $-\frac{(5-9x)^{13}}{117} + C.$

B. $\frac{(5-9x)^{13}}{117} + C.$

C. $\frac{(5-9x)^{13}}{13} + C.$

D. $\frac{(5-9x)^{13}}{9} + C.$

Hướng dẫn giải: $\int (5-9x)^{12} dx = -\frac{1}{9} \int (5-9x)^{12} d(5-9x) = -\frac{(5-9x)^{13}}{117} + C.$

Câu 99. Tính $\int \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) dx$ bằng

A. $\frac{1}{5}\sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) + C.$

B. $\sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) + C.$

C. $-5\sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) + C.$

D. $-\frac{1}{5}\sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) + C.$

Hướng dẫn giải: $\int \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) dx = \frac{1}{5} \int \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) d\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{5} \sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) + C.$

Câu 100. Tính $\int \frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} dx$ bằng

A. $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C.$

B. $4 \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C.$

C. $-\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C.$

D. $\frac{1}{4} \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C.$

Hướng dẫn giải: $\int \frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} dx = \int \frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} d\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C.$

Câu 101. Tính $\int \frac{1}{(\cos x + \sin x)^2} dx$ bằng

A. $-\frac{1}{2} \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C.$

B. $\frac{1}{2} \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C.$

C. $-\cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C.$

D. $-\frac{1}{4} \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C.$

Hướng dẫn giải

$$\int \frac{1}{(\cos x + \sin x)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} d\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C$$

Câu 102. Tính $\int \frac{12x+5}{3x+1} dx$ bằng

A. $4x + \frac{1}{3} \ln|3x+1| + C.$

B. $\frac{6x^2+5x}{x^3+x} + C.$

C. $4x + \ln|3x+1| + C.$

D. $4x + \frac{1}{3} \ln(3x+1) + C.$

Hướng dẫn giải: $\int \frac{12x+5}{3x+1} dx = \int \left(4 + \frac{1}{3x+1}\right) dx = 4x + \frac{1}{3} \ln|3x+1| + C.$

Câu 103. Tính $\int \frac{2x^2+x}{2x-1} dx$ bằng

A. $\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} \ln|2x-1| + C.$

B. $\frac{x^2}{2} + x + \ln|2x-1| + C.$

C. $\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} \ln(2x-1) + C.$

D. $\frac{x^2}{2} + x + 2 \ln(2x-1) + C.$

Hướng dẫn giải: $\int \frac{2x^2+x}{2x-1} dx = \int \left(x+1 + \frac{1}{2x-1}\right) dx = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} \ln|2x-1| + C.$

Câu 104. Tính $\int \frac{-x}{(x+1)^2} dx$ bằng

A. $-\frac{1}{x+1} - \ln|x+1| + C.$

B. $\frac{1}{x+1} - \ln|x+1| + C.$

C. $-\frac{1}{x+1} + \ln|x+1| + C.$

D. $-\frac{1}{x+1} - \ln(x+1) + C.$

Hướng dẫn giải: $\int \frac{-x}{(x+1)^2} dx = \int \left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1}\right) dx = -\frac{1}{x+1} - \ln|x+1| + C.$

Câu 105. Tính $\int \sin x(2 + \cos x)dx$ bằng

A. $-2 \cos x - \frac{1}{4} \cos 2x + C$

B. $2 \cos x - \frac{1}{4} \cos 2x + C$

C. $2 \cos x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$

D. $2 \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + C$

Hướng dẫn giải: $\int \sin x(2 + \cos x)dx = \int (2 \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x)dx = -2 \cos x - \frac{1}{4} \cos 2x + C.$

Câu 106. Tính $\int x.2^x dx$ bằng:

A. $\frac{x.2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{\ln^2 2} + C.$

B. $\frac{2^x(x-1)}{\ln 2} + C.$

C. $2^x(x+1) + C.$

D. $2^x(x-1) + C.$

Hướng dẫn giải

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = 2^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{2^x}{\ln 2} \end{cases}$. Ta có $\int x2^x dx = \frac{x.2^x}{\ln 2} - \int \frac{2^x}{\ln 2} dx = \frac{x.2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{\ln^2 2} + C.$

Câu 107. Tính $\int \ln x dx$ bằng:

A. $x \ln x - x + C.$

B. $x \ln x - \frac{x^2}{2} \ln x + C.$

C. $\frac{1}{x} \ln x - x + C.$

D. $x \ln x - \frac{1}{x} + C.$

Hướng dẫn giải

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x \end{cases}$. Ta có $\int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$

Câu 108. Tính $\int 2x \ln(x-1)dx$ bằng:

A. $(x^2 - 1) \ln(x-1) - \frac{x^2}{2} - x + C.$

B. $x^2 \ln(x-1) - \frac{x^2}{2} - x + C.$

C. $(x^2 + 1) \ln(x-1) - \frac{x^2}{2} - x + C.$

D. $(x^2 - 1) \ln(x-1) - \frac{x^2}{2} + x + C.$

Hướng dẫn giải

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x-1) \\ dv = 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x-1} dx \\ v = x^2 - 1 \end{cases}$

Ta có $\int 2x \ln(x-1)dx = (x^2 - 1) \ln(x-1) - \int (x+1)dx = (x^2 - 1) \ln(x-1) - \frac{x^2}{2} - x + C.$

Câu 109. Tính $\int \left(\sin x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$ bằng:

A. $-\cos x + \tan x + C.$

B. $\cos x + \tan x + C.$

C. $\cos x - \tan x + C.$

D. $-\cos x - \frac{1}{\cos x} + C.$

Hướng dẫn giải: Ta có $\int \left(\sin x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = -\cos x + \tan x + C$

Câu 110. Hàm số $F(x) = \ln|\sin x - \cos x|$ là một nguyên hàm của hàm số

A. $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}.$

B. $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}.$

$$\text{C. } f(x) = \frac{1}{\sin x + \cos x}.$$

$$\text{D. } f(x) = \frac{1}{|\sin x - \cos x|}.$$

Hướng dẫn giải: Ta có $F'(x) = \frac{(\sin x - \cos x)'}{\sin x - \cos x} = \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x}$.

Câu 111. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 1$ thỏa mãn điều kiện $F(-2) = 3$ là:

$$\text{A. } F(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x - \frac{37}{3}.$$

$$\text{B. } F(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x + C.$$

$$\text{C. } F(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x.$$

$$\text{D. } F(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x + \frac{37}{3}.$$

Hướng dẫn giải

Ta có $F(x) = \int (3x^3 - 2x^2 + 1) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x + C$ và $F(-2) = 3 \Leftrightarrow C = -\frac{37}{3}$

Vậy $F(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x - \frac{37}{3}$.

VẬN DỤNG CAO

4.1.1. NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ ĐA THỨC, PHÂN THỨC.

Câu 112. Kết quả tích $\int \frac{-x^3 + 5x + 2}{4 - x^2} dx$ bằng

$$\text{A. } \frac{x^2}{2} - \ln|2 - x| + C.$$

$$\text{B. } \frac{x^2}{2} + \ln|2 - x| + C.$$

$$\text{C. } \frac{x^3}{3} - \ln|2 - x| + C.$$

$$\text{D. } \frac{x^3}{3} + \ln|x - 2| + C.$$

Hướng dẫn giải

$\frac{-x^3 + 5x + 2}{4 - x^2} = \frac{x^3 - 5x - 2}{x^2 - 4} = \frac{(x + 2)(x^2 - 2x - 1)}{(x + 2)(x - 2)} = x - \frac{1}{x - 2}$. Sử dụng bảng nguyên hàm.

Câu 113. Họ nguyên hàm của $f(x) = x^2(x^3 + 1)^5$ là

$$\text{A. } F(x) = \frac{1}{18}(x^3 + 1)^6 + C.$$

$$\text{B. } F(x) = 18(x^3 + 1)^6 + C.$$

$$\text{C. } F(x) = (x^3 + 1)^6 + C.$$

$$\text{D. } F(x) = \frac{1}{9}(x^3 + 1)^6 + C.$$

Hướng dẫn giải: Đặt $t = x^3 + 1 \Rightarrow dt = 3x^2 dx$. Khi đó

$$\int x^2(x^3 + 1)^5 dx = \frac{1}{3} \int t^5 dt = \frac{1}{18} t^6 + C = \frac{1}{18}(x^3 + 1)^6 + C.$$

Câu 114. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + x + x^3 + 1}{x^3}$ là hàm số nào?

$$\text{A. } F(x) = \ln|x| - \frac{1}{x} + x - \frac{1}{2x^2} + C.$$

$$\text{B. } F(x) = \ln|x| + \frac{1}{x} + x - \frac{1}{2x^2} + C.$$

$$\text{C. } F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C.$$

$$\text{D. } F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + \ln x + C.$$

Hướng dẫn giải: $f(x) = \frac{x^2 + x + x^3 + 1}{x^3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + 1 + \frac{1}{x^3}$. Sử dụng bảng nguyên hàm.

Câu 115. Giá trị m để hàm số $F(x) = mx^3 + (3m + 2)x^2 - 4x + 3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 10x - 4$ là:

$$\text{A. } m = 1.$$

$$\text{B. } m = 0.$$

$$\text{C. } m = 2.$$

$$\text{D. } m = 3.$$

Hướng dẫn giải: $\int (3x^2 + 10x - 4) dx = x^3 + 5x^2 - 4x + C$, nên $m = 1$.

Câu 116. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^4(2x)$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{8}$. Khi đó $F(x)$ là:

- A. $F(x) = \frac{3}{8}(x+1) - \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{64}\sin 8x$. B. $F(x) = \frac{3}{8}x - \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{64}\sin 8x$.
 C. $F(x) = \frac{3}{8}x - \frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{3}{8}$. D. $F(x) = x - \sin 4x + \sin 6x + \frac{3}{8}$.

Hướng dẫn giải

$$\sin^4(2x) = \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}(1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x) = \frac{1}{4} \left(1 - 2\cos 4x + \frac{1 + \cos 8x}{2} \right)$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{\cos 4x}{2} + \frac{\cos 8x}{8}$$

$$\text{Nên } \int \sin^4(2x) dx = \int \left(\frac{3}{8} - \frac{\cos 4x}{2} + \frac{\cos 8x}{8} \right) dx = \frac{3}{8}x - \frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 8x}{64} + C.$$

Vì $F(0) = \frac{3}{8}$ nên suy ra đáp án.

Câu 117. Biết hàm số $f(x) = (6x+1)^2$ có một nguyên hàm là $F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ thỏa mãn điều kiện $F(-1) = 20$. Tính tổng $a + b + c + d$.

- A. 46. B. 44. C. 36. D. 54.

Hướng dẫn giải

$$\int (6x+1)^2 dx = \int (36x^2 + 12x + 1) dx = 12x^3 + 6x^2 + x + C \text{ nên } a = 12; b = 6; c = 1$$

Thay $F(-1) = 20$. $d = 27$, cộng lại và chọn đáp án.

Câu 118. Hàm số $f(x) = x\sqrt{x+1}$ có một nguyên hàm là $F(x)$. Nếu $F(0) = 2$ thì $F(3)$ bằng

- A. $\frac{146}{15}$. B. $\frac{116}{15}$. C. $\frac{886}{105}$. D. $\frac{105}{886}$.

Hướng dẫn giải: Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow 2tdt = dx$

$$\int x\sqrt{x+1} dx = \int (2t^4 - 2t^2) dt = \frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + C = \frac{2}{5}(\sqrt{x+1})^5 - \frac{2}{3}(\sqrt{x+1})^3 + C$$

Vì $F(0) = 2$ nên $C = \frac{34}{15}$. Thay $x = 3$ ta được đáp án.

Câu 119. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \cos x$ thỏa mãn $F(0) = 1$. Khi đó phát biểu nào sau đây đúng?

- A. $F(x)$ là hàm số chẵn.
 B. $F(x)$ là hàm số lẻ.
 C. Hàm số $F(x)$ tuần hoàn với chu kỳ là 2π .
 D. Hàm số $F(x)$ không là hàm số chẵn cũng không là hàm số lẻ.

Hướng dẫn giải

$$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C$$

$F(0) = 1$ nên $C = 0$. Do đó $F(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 120. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 3}$ thỏa mãn $F(0) = 0$ là

- A. $\ln \left| 1 + \frac{\sin^2 x}{3} \right|$. B. $\ln |1 + \sin^2 x|$. C. $\frac{\ln |2 + \sin^2 x|}{3}$. D. $\ln |\cos^2 x|$.

Hướng dẫn giải: Đặt $t = \sin^2 x + 3 \Rightarrow dt = 2 \sin x \cos x dx$

$$\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 3} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |\sin^2 x + 3| + C$$

vì $F(0) = 0$ nên $C = -\ln 3$. Chọn đáp án.

Câu 121. Cho $f(x) = \frac{4m}{\pi} + \sin^2 x$. Tìm m để nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 1$ và $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}$.

A. $-\frac{3}{4}$.

B. $\frac{3}{4}$.

C. $-\frac{4}{3}$.

D. $\frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải: $\int \left(\frac{4m}{\pi} + \sin^2 x \right) dx = \frac{4m}{\pi} x + \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$ vì $F(0) = 1$ nên $C = 1$

$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}$ nên tính được $m = -\frac{3}{4}$

4.1.2. NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC.

Câu 122. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}$.

A. $\int f(x) dx = \ln|\sin x| - \frac{1}{2} \ln|1 - \sin^2 x| + C$.

B. $\int f(x) dx = \ln|\sin x| + \frac{1}{2} \ln|1 - \sin^2 x| + C$.

C. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \ln|\sin x| - \frac{1}{2} \ln|1 - \sin^2 x| + C$.

D. $\int f(x) dx = -\ln|\sin x| - \frac{1}{2} \ln|1 - \sin^2 x| + C$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x} &= \int \frac{\cos x dx}{\sin x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x \cdot (1 - \sin^2 x)} = \frac{1}{2} \int \frac{d(\sin x)}{1 - \sin x} + \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} - \frac{1}{2} \int \frac{d(\sin x)}{1 + \sin x} \\ &= -\frac{1}{2} \ln|1 - \sin x| + \ln|\sin x| - \frac{1}{2} \ln|1 + \sin x| + C = \ln|\sin x| - \frac{1}{2} \ln|1 - \sin^2 x| + C \end{aligned}$$

Câu 123. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2 \sin^3 x}{1 + \cos x}$.

A. $\int f(x) dx = \cos^2 x - 2 \cos x + C$.

B. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \cos^2 x - 2 \cos x + C$.

C. $\int f(x) dx = \cos^2 x + \cos x + C$.

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \cos^2 x + 2 \cos x + C$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \int \frac{2 \sin^3 x}{1 + \cos x} dx &= \int \frac{2 \sin^2 x}{1 + \cos x} \cdot \sin x dx = \int \frac{2 \cos^2 x - 2}{1 + \cos x} d(\cos x) \\ &= \int 2(\cos x - 1) d(\cos x) = \cos^2 x - 2 \cos x + C \end{aligned}$$

Câu 124. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{-\cot^4 x}{4} + C$.

B. $\int f(x) dx = \frac{\cot^4 x}{4} + C$.

C. $\int f(x) dx = \frac{\cot^2 x}{2} + C$.

D. $\int f(x) dx = \frac{\tan^4 x}{4} + C$.

Hướng dẫn giải $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^5 x} = \int \cot^3 x \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} = -\int \cot^3 x d(\cot x) = \frac{-\cot^4 x}{4} + C$

Câu 125. Tìm nguyên hàm của hàm số: $f(x) = \cos 2x (\sin^4 x + \cos^4 x)$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{12} \sin^3 2x + C$.

B. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{12} \sin^3 2x + C$.

C. $\int f(x) dx = \sin 2x - \frac{1}{4} \sin^3 2x + C$.

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{4} \sin^3 2x + C$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned}
\int \cos 2x (\sin^4 x + \cos^4 x) dx &= \int \cos 2x \left[(\sin^2 x + \cos^2 x) - 2 \sin^2 x \cos^2 x \right] dx \\
&= \int \cos 2x \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \right) dx = \int \cos 2x dx - \frac{1}{2} \int \sin^2 2x \cos 2x dx \\
&= \int \cos 2x dx - \frac{1}{4} \int \sin^2 2x d(\sin 2x) = \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{12} \sin^3 2x + C
\end{aligned}$$

Câu 126. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = (\tan x + e^{2\sin x}) \cos x$.

A. $\int f(x) dx = -\cos x + \frac{1}{2} e^{2\sin x} + C$.

B. $\int f(x) dx = \cos x + \frac{1}{2} e^{2\sin x} + C$.

C. $\int f(x) dx = -\cos x + e^{2\sin x} + C$.

D. $\int f(x) dx = -\cos x - \frac{1}{2} e^{2\sin x} + C$.

Hướng dẫn giải

$$\int (\tan x + e^{2\sin x}) \cos x dx = \int \sin x dx + \int e^{2\sin x} d(\sin x) = -\cos x + \frac{1}{2} e^{2\sin x} + C$$

Câu 127. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin x + \cos x + \sqrt{2}}$.

A. $\int f(x) dx = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cot\left(\frac{x}{2} + \frac{3\pi}{8}\right) + C$.

B. $\int f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \cot\left(\frac{x}{2} + \frac{3\pi}{8}\right) + C$.

C. $\int f(x) dx = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cot\left(\frac{x}{2} + \frac{3\pi}{4}\right) + C$.

D. $\int f(x) dx = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cot\left(\frac{x}{2} - \frac{3\pi}{8}\right) + C$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin x + \cos x + \sqrt{2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\left(\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{2 \sin^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cot\left(\frac{x}{2} + \frac{3\pi}{8}\right) + C
\end{aligned}$$

4.1.3. NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ MŨ, LÔGARIT.

Câu 128. Hàm số $F(x) = \ln|\sin x - \cos x|$ là một nguyên hàm của hàm số

A. $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

B. $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$.

C. $f(x) = \frac{1}{\sin x + \cos x}$.

D. $f(x) = \frac{1}{|\sin x - \cos x|}$.

Hướng dẫn giải: $F'(x) = \frac{(\sin x - \cos x)'}{\sin x - \cos x} = \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x}$

Câu 129. Kết quả tính $\int 2x \ln(x-1) dx$ bằng:

A. $(x^2 - 1) \ln(x-1) - \frac{x^2}{2} - x + C$.

B. $x^2 \ln(x-1) - \frac{x^2}{2} - x + C$.

C. $(x^2 + 1) \ln(x-1) - \frac{x^2}{2} - x + C$.

D. $(x^2 - 1) \ln(x-1) - \frac{x^2}{2} + x + C$.

Hướng dẫn giải

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x-1) \\ dv = 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x-1} dx \\ v = x^2 - 1 \end{cases}$

Ta có $\int 2x \ln(x-1) dx = (x^2 - 1) \ln(x-1) - \int (x+1) dx = (x^2 - 1) \ln(x-1) - \frac{x^2}{2} - x + C$

Câu 130. Kết quả tính $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx$ bằng:

- A.** $e^{\tan x} + C$. **B.** $\tan x \cdot e^{\tan x} + C$. **C.** $e^{-\tan x} + C$. **D.** $-e^{\tan x} + C$.

Hướng dẫn giải: $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx = \int e^{\tan x} d(\tan x) = e^{\tan x} + C$.

Câu 131. Tính $\int e^{\cos^2 x} \sin 2x dx$ bằng:

- A.** $-e^{\cos^2 x} + C$. **B.** $e^{-\sin 2x} + C$. **C.** $e^{-2\sin x} + C$. **D.** $-e^{\sin 2x} + C$.

Hướng dẫn giải: $\int e^{\cos^2 x} \sin 2x dx = -\int e^{\cos^2 x} d(\cos^2 x) = -e^{\cos^2 x} + C$.

Câu 132. Tính $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx$ bằng:

- A.** $e^{\sin^2 x} + C$. **B.** $e^{\sin 2x} + C$. **C.** $e^{\cos^2 x} + C$. **D.** $e^{2\sin x} + C$.

Hướng dẫn giải: $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx = \int e^{\sin^2 x} d(\sin^2 x) = e^{\sin^2 x} + C$.

Câu 133. Kết quả $\int e^{\cos x} \sin x dx$ bằng:

- A.** $-e^{\cos x} + C$. **B.** $e^{\cos x} + C$. **C.** $-e^{-\cos x} + C$. **D.** $e^{-\sin x} + C$.

Hướng dẫn giải: $\int e^{\cos x} \sin x dx = -\int e^{\cos x} d(\cos x) = -e^{\cos x} + C$.

4.1.4. NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ CHỨA CĂN THỨC.

Câu 134. Biết hàm số $F(x) = -x\sqrt{1-2x} + 2017$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{\sqrt{1-2x}}$. Khi đó

tổng của a và b là

- A.** 2. **B.** -2. **C.** 0. **D.** 1.

Hướng dẫn giải: $F'(x) = (-x\sqrt{1-2x} + 2017)' = \frac{3x-1}{\sqrt{1-2x}}$

$$\Rightarrow a+b = 3+(-1) = 2$$

Câu 135. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^3-2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

- A.** $F(x) = \frac{1}{3}(x^2-8)\sqrt{x^2+1} + C$. **B.** $F(x) = \frac{1}{3}x^2\sqrt{1+x^2} + 8\sqrt{1+x^2} + C$.

- C.** $F(x) = \frac{1}{3}(8-x^2)\sqrt{x^2+1} + C$. **D.** $F(x) = \frac{2}{3}(x^2-8)\sqrt{1+x^2} + C$.

Hướng dẫn giải: $\int \frac{x^3-2x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int \frac{(x^2-2)x dx}{\sqrt{x^2+1}}$

Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow x^2 = t^2-1 \Rightarrow x dx = t dt$. Khi đó

$$\int \frac{x^3-2x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int \frac{(t^2-3)(t dt)}{t} = \int (t^2-3) dt = \frac{t^3}{3} - 3t + C$$

$$= \frac{(\sqrt{x^2+1})^3}{3} - 3\sqrt{x^2+1} + C = \frac{1}{3}(x^2-8)\sqrt{x^2+1} + C$$

Câu 136. Tính $F(x) = \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{4\sin^2 x + 2\cos^2 x + 3}} dx$. Hãy chọn đáp án đúng.

- A.** $F(x) = \sqrt{6-\cos 2x} + C$. **B.** $F(x) = \sqrt{6-\sin 2x} + C$.
C. $F(x) = \sqrt{6+\cos 2x} + C$. **D.** $F(x) = -\sqrt{6-\sin 2x} + C$.

Hướng dẫn giải

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{4\sin^2 x + 2\cos^2 x + 3}} dx = \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{6 - \cos 2x}} dx = \int \frac{d(6 - \cos 2x)}{2\sqrt{6 - \cos 2x}} = \sqrt{6 - \cos 2x} + C$$

Câu 137. Biết hàm số $F(x) = (mx + n)\sqrt{2x-1}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{2x-1}}$. Khi đó tích của m và n là

- A. $-\frac{2}{9}$. B. -2 . C. $-\frac{2}{3}$. D. 0 .

Hướng dẫn giải

Cách 1: Tính $\int \frac{1-x}{\sqrt{2x-1}} dx = \left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right)\sqrt{2x-1} + C$. Suy ra $m = -\frac{1}{3}; n = \frac{2}{3} \Rightarrow m.n = -\frac{2}{9}$

Cách 2: Tính $F'(x) = \frac{3mx - m + n}{\sqrt{2x-1}}$. Suy ra $\begin{cases} 3m = -1 \\ n - m = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{3} \\ n = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow m.n = -\frac{2}{9}$

Câu 138. Biết hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x\sqrt{\ln^2 x + 3}}$ có đồ thị đi qua điểm $(e; 2016)$. Khi đó hàm số $F(1)$ là

- A. $\sqrt{3} + 2014$. B. $\sqrt{3} + 2016$.
C. $2\sqrt{3} + 2014$. D. $2\sqrt{3} + 2016$.

Hướng dẫn giải: Đặt $t = \sqrt{\ln^2 x + 3}$ và tính được $F(x) = \sqrt{\ln^2 x + 3} + C$.

$$F(e) = 2016 \Rightarrow C = 2014 \Rightarrow F(x) = \sqrt{\ln^2 x + 3} + 2014 \Rightarrow F(1) = \sqrt{3} + 2014$$

4.1.5. PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

Câu 139. Tính $\int x^3 e^x dx = e^x(ax^3 + bx^2 + cx + d) + C$. Giá trị của $a + b + c + d$ bằng

- A. -2 . B. 10 . C. 2 . D. -9 .

Hướng dẫn giải:

Phương pháp trắc nghiệm: Sử dụng phương pháp bảng

Kết quả: $\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + C = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$.

Vậy $a + b + c + d = -2$.

Câu 140. Tính $F(x) = \int x \ln(x^2 + 3) dx = A(x^2 + 3) \ln(x^2 + 3) + Bx^2 + C$. Giá trị của biểu thức $A + B$ bằng

- A. 0 . B. 1 . C. -1 . D. 2 .

Hướng dẫn giải

Phương pháp trắc nghiệm: Sử dụng phương pháp bảng

u và đạo hàm của u	dv và nguyên hàm của v
$\ln(x^2 + 3)$	x
$\frac{2x}{x^2 + 3}$	$\frac{x^2 + 3}{2}$
$\frac{1}{x^2 + 3}$ (Chuyển $\frac{2x}{x^2 + 3}$ qua dv)	$\frac{x}{2}$ (Nhận $\frac{2x}{x^2 + 3}$ từ u)
0	$\frac{x^2}{2}$

$$\text{Do đó } F(x) = \int x \ln(x^2 + 3) dx = \frac{1}{2}(x^2 + 3) \ln(x^2 + 3) - \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Vậy $A + B = 0$.

Câu 141. Tính $\int x^2 \cos 2x dx = ax^2 \sin 2x + bx \cos 2x + c \sin x + C$. Giá trị của $a + b + 4c$ bằng

- A. 0. B. $\frac{3}{4}$. C. $-\frac{3}{4}$. D. $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận: Sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần 2 lần.

Phương pháp trắc nghiệm: Sử dụng phương pháp bảng

Kết quả: $\int x^2 \cos 2x dx = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x + \frac{1}{2} x \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$.

Vậy $a + b + 4c = 0$.

Câu 142. Tính $\int x^3 \ln 2x dx = x^4(A \ln 2x + B) + C$. Giá trị của $5A + 4B$ bằng:

- A. 1. B. $-\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{4}$. D. -1.

Hướng dẫn giải:

Phương pháp tự luận: Sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần với $u = \ln 2x, dv = x^3 dx$.

Phương pháp trắc nghiệm: Sử dụng phương pháp bảng

Kết quả: $\int x^3 \ln 2x dx = \frac{1}{4} x^4 \ln 2x - \frac{1}{16} x^4 + C = x^4 \left(\frac{1}{4} \ln 2x - \frac{1}{16} \right) + C$.

Vậy $5A + 4B = 1$.

Câu 143. Tính $F(x) = \int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx$. Chọn kết quả đúng:

- A. $F(x) = \frac{x^2 - 1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + x + C$ B. $F(x) = \frac{x^2 + 1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + x + C$
C. $F(x) = \frac{x^2 + 1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - x + C$ D. $F(x) = \frac{x^2 - 1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - x + C$

Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận: Sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần và nguyên hàm của hàm số hữu tỉ.

Phương pháp trắc nghiệm: Sử dụng phương pháp bảng

Kết quả: $\int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{x^2 - 1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + x + C$.

Câu 144. Cho hàm số $F(x) = \int x(1-x)^3 dx$. Biết $F(0) = 1$, khi đó $F(1)$ bằng:

- A. $\frac{21}{20}$. B. $\frac{19}{20}$. C. $-\frac{21}{20}$. D. $-\frac{19}{20}$.

Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận: Sử dụng phương pháp đổi biến số với $u = 1 - x$.

Sử dụng phương pháp từng phần với $u = x; dv = (1-x)^3 dx$.

Phương pháp trắc nghiệm: Sử dụng phương pháp bảng với $u = x; dv = (1-x)^3 dx$

Kết quả $F(x) = \int x(1-x)^3 dx = \frac{-x(1-x)^4}{4} - \frac{(1-x)^5}{20} + C$

$F(0) = 1$ suy ra $C = \frac{21}{20}$. Do đó $F(1) = \frac{21}{20}$.

Câu 145. Tính $\int (2x+1) \sin x dx = a x \cos x + b \cos x + c \sin x + C$. Giá trị của biểu thức $a + b + c$ bằng

- A. -1. B. 1. C. 5. D. -5.

Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận: Sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần.

Phương pháp trắc nghiệm: Sử dụng phương pháp bảng.

Kết quả $F(x) = \int (2x+1) \sin x dx = -2x \cos x - \cos x + 2 \sin x + C$ nên $a + b + c = -1$.

Câu 146. Cho hàm số $F(x) = \int x \ln(x+1) dx$ có $F(1) = 0$. Khi đó giá trị của $F(0)$ bằng

A. $\frac{-1}{4}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{-1}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Phương pháp tự luận: Sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần với $u = \ln(x+1)$, $dv = xdx$

Phương pháp trắc nghiệm: Sử dụng phương pháp bảng

Kết quả $F(x) = \int x \ln(x+1) dx = \frac{1}{2}(x^2-1) \ln(x+1) - \frac{1}{4}(x^2-2x) + C$.

Từ $F(1) = 0$ suy ra $C = \frac{-1}{4}$. Vậy $F(0) = \frac{-1}{4}$.

Câu 147. Hàm số $F(x) = \int (x^2+1) \ln \sqrt{x} dx$ thỏa mãn $F(1) = \frac{-5}{9}$ là

A. $\frac{1}{6}(x^3+3x) \ln x - \frac{x^3}{18} - \frac{x}{2}$.

B. $\frac{1}{6}(x^3+3x) \ln x - \frac{x^3}{18} - \frac{x}{2} - 1$.

C. $\frac{1}{6}(x^3+3x) \ln x - \frac{x^3}{18} - \frac{x}{2} + \frac{10}{9}$.

D. $\frac{1}{6}(x^3+3x) \ln x - \frac{x^3}{18} - \frac{x}{2} + 1$.

Hướng dẫn giải:

Phương pháp tự luận: Sử dụng phương pháp từng phần.

Phương pháp trắc nghiệm: Sử dụng phương pháp bảng

Kết quả $F(x) = \int (x^2+1) \ln \sqrt{x} dx = \frac{1}{6}(x^3+3x) \ln x - \frac{x^3}{18} - \frac{x}{2} + C$

Với $F(1) = \frac{-5}{9}$ suy ra $C = 0$ nên $F(x) = \frac{1}{6}(x^3+3x) \ln x - \frac{x^3}{18} - \frac{x}{2}$.

Câu 148. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$ và có đồ thị đi qua điểm $A(0;1)$. Chọn kết quả đúng

A. $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$

B. $f(x) = \frac{e^x}{x+1} + 1$

C. $f(x) = \frac{e^x}{x+1} - 1$

D. $f(x) = \frac{e^x}{x+1} + 2$

Hướng dẫn giải: Sử dụng phương pháp từng phần với $u = xe^x$, $dv = \frac{1}{(x+1)^2} dx$

u và đạo hàm của u	dv và nguyên hàm của v
xe^x	$\frac{1}{(x+1)^2}$
$(x+1)e^x$ (Chuyển $(x+1)e^x$ qua dv)	$\frac{-1}{x+1}$
1	$-e^x$ (nhận $(x+1)e^x$ từ u)
0	$-e^x$

Kết quả $f(x) = \int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx = \frac{e^x}{x+1} + C$. Với $f(0) = 1$ suy ra $C = 0$. Vậy $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$

Câu 149. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ thỏa mãn $F(0) = 1$. Chọn kết quả đúng

A. $F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1} + 2$.

B. $F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1} - 2$.

C. $F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1} + 1$.

D. $F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1}$.

Hướng dẫn giải:

Đặt $u = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $dv = dx$ ta được

$$F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1} + C. \text{ Vì } F(0) = 1 \text{ nên } C = 2$$

$$\text{Vậy } F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1} + 2.$$

Câu 150. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$ thỏa mãn $F(\pi) = 2017$. Khi đó $F(x)$ là hàm số nào dưới đây?

A. $F(x) = x \tan x + \ln |\cos x| + 2017$.

B. $F(x) = x \tan x - \ln |\cos x| + 2018$.

C. $F(x) = x \tan x + \ln |\cos x| + 2016$.

D. $F(x) = x \tan x - \ln |\cos x| + 2017$.

Hướng dẫn giải: Đặt $u = x$, $dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx$ ta được $du = dx$, $v = \tan x$

$$\text{Kết quả } F(x) = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x + \ln |\cos x| + C.$$

$$\text{Vì } F(\pi) = 2017 \text{ nên } C = 2017. \text{ Vậy } F(x) = x \tan x + \ln |\cos x| + 2017.$$

Câu 151. Tính $F(x) = \int x(1 + \sin 2x) dx = Ax^2 + Bx \cos 2x + C \sin 2x + D$. Giá trị của biểu thức $A + B + C$ bằng

A. $\frac{1}{4}$.

B. $-\frac{1}{4}$.

C. $\frac{5}{4}$.

D. $-\frac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Cách 1: Sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần.

Cách 2: Sử dụng phương pháp bảng với $u = x$, $dv = (1 + \sin 2x) dx$ ta được

$$F(x) = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + D. \text{ Vậy } A + B + C = \frac{1}{4}.$$

Câu 152. Tính $F(x) = \int \frac{1 + x \sin x}{\cos^2 x} dx$. Chọn kết quả đúng

A. $F(x) = \tan x + \frac{x}{\cos x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| + C$.

B. $F(x) = \tan x - \frac{x}{\cos x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| + C$.

C. $F(x) = \tan x + \frac{x}{\cos x} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| + C$.

D. $F(x) = \tan x - \frac{x}{\cos x} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| + C$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Biến đổi $F(x) = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx = \tan x + I(x)$

$$\text{Tính } I(x) \text{ bằng cách đặt } u = x; dv = \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx \text{ ta được } I(x) = \frac{x}{\cos x} - \int \frac{dx}{\cos x}$$

$$\text{Tính } J(x) = - \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x - 1} = \int \frac{d(\sin x)}{(\sin x - 1)(\sin x + 1)} = \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| + C$$

$$\text{Kết quả } F(x) = \tan x + \frac{x}{\cos x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| + C$$

Phương pháp trắc nghiệm: Sử dụng máy tính kiểm tra $\frac{d}{dx}(F(x)) - f(x) = 0$ tại một số điểm ngẫu nhiên x_0 .

4.1.6. ÔN TẬP

Câu 153. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \frac{1}{\cos^2 x}$ thỏa mãn điều kiện $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ là

A. $F(x) = -\cos x + \tan x + \sqrt{2} - 1$.

B. $F(x) = \cos x + \tan x + \sqrt{2} - 1$.

C. $F(x) = -\cos x + \tan x + 1 - \sqrt{2}$.

D. $F(x) = -\cos x + \tan x$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\int \left(\sin x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = -\cos x + \tan x + C \Rightarrow F(x) = -\cos x + \tan x + C$

$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow C = \sqrt{2} - 1$. Vậy $F(x) = -\cos x + \tan x + \sqrt{2} - 1$

Câu 154. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2 \sin 5x + \sqrt{x} + \frac{3}{5}$ thỏa mãn đồ thị của hai hàm số $F(x)$ và $f(x)$ cắt nhau tại một điểm nằm trên trục tung là

A. $F(x) = -\frac{2}{5} \cos 5x + \frac{2}{3} x \sqrt{x} + \frac{3}{5} x + 1$.

B. $F(x) = \frac{2}{5} \cos 5x + \frac{2}{3} x \sqrt{x} + \frac{3}{5} x + 1$.

C. $F(x) = 10 \cos 5x + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{5} x + 1$.

D. $F(x) = -\frac{2}{5} \cos 5x + \frac{2}{3} x \sqrt{x} + \frac{3}{5} x$.

Hướng dẫn giải

Ta có $F(x) = -\frac{2}{5} \cos 5x + \frac{2}{3} x \sqrt{x} + \frac{3}{5} x + C$ và $F(0) = f(0) \Leftrightarrow C = 1$

Vậy $F(x) = -\frac{2}{5} \cos 5x + \frac{2}{3} x \sqrt{x} + \frac{3}{5} x + 1$

Câu 155. Hàm số $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 e^x$ thì $a + b + c$ bằng:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. -2.

Hướng dẫn giải

Ta có $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow ax^2 + (2a + b)x + b + c = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases}$

Vậy $a + b + c = 1$

Câu 156. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = a + b \cos 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{\pi}{2}$, $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$,

$F\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{3}$ là

A. $F(x) = -\frac{2}{3} x + \frac{7\pi}{9} \sin 2x + \frac{\pi}{2}$.

B. $F(x) = -\frac{2}{3} x + \frac{7\pi}{9} \sin 2x$.

C. $F(x) = -\frac{2}{3} x - \frac{7\pi}{9} \sin 2x + \frac{\pi}{2}$.

D. $F(x) = -\frac{2}{3} x + \frac{7\pi}{9} \sin 2x - \frac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $F(x) = ax + \frac{b}{2} \sin 2x + C$ và $\begin{cases} F(0) = \frac{\pi}{2} \\ F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \\ F\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ b = \frac{7\pi}{9} \\ C = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Vậy $F(x) = -\frac{2}{3} x + \frac{7\pi}{9} \sin 2x + \frac{\pi}{2}$

Câu 157. Cho hàm số $F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$. Hàm số $F(x)$ là

A. $F(x) = \frac{1}{2} x^2 + x + 1$.

B. $F(x) = -\frac{1}{2} x^2 + x + 1$.

C. $F(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 1.$

D. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1.$

Hướng dẫn giải

Ta có $f(x) = F'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ và
$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(2) = 3 \\ f(3) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 2 \\ 12a + 4b + c = 3 \\ 27a + 6b + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{2} \\ c = 1 \end{cases}$$

Vậy $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1.$

Câu 158. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \tan x \cdot \sin 2x$ thỏa mãn điều kiện $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ là

A. $F(x) = x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$

B. $F(x) = x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\pi}{4} - 1.$

C. $F(x) = \frac{2}{3}\cos^3 x + \frac{\sqrt{2}}{2}.$

D. $x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\pi}{4}.$

Hướng dẫn giải

Ta có $\int \tan x \cdot \sin 2x dx = \int (1 - \cos 2x) dx = x - \frac{1}{2}\sin 2x + C \Rightarrow F(x) = x - \frac{1}{2}\sin 2x + C$

và $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow C = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$

Vậy $F(x) = x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$

Câu 159. Cho hàm số $f(x) = \tan^2 x$ có nguyên hàm là $F(x)$. Đồ thị hàm số $y = F(x)$ cắt trục tung tại điểm $A(0; 2)$. Khi đó $F(x)$ là

A. $F(x) = \tan x - x + 2.$

B. $F(x) = \tan x + 2.$

C. $F(x) = \frac{1}{3}\tan^3 x + 2.$

D. $F(x) = \cot x - x + 2.$

Hướng dẫn giải

$F(x) = \int f(x) dx = \int \tan^2 x dx = \tan x - x + C.$

Vì đồ thị hàm số $y = F(x)$ đi qua điểm $A(0; 2)$ nên $C = 2.$

Vậy $F(x) = \tan x - x + 2.$

Câu 160. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^2 x$. Giá trị của $F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0)$ bằng

A. $1 - \frac{\pi}{4}.$

B. $\frac{\pi}{4}.$

C. $1 + \frac{\pi}{4}.$

D. $\sqrt{3} - \frac{\pi}{4}.$

Hướng dẫn giải: $F(x) = \tan x - x + C \Rightarrow F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = 1 - \frac{\pi}{4}.$