

CHỦ ĐỀ 7: BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO GIỮA HAI ĐỒ THỊ

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

II. CÁC DẠNG TOÁN TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1: Tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị

Phương pháp giải:

Cho 2 hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đồ thị lần lượt là (C) và (C') :

- Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (C') là $f(x) = g(x) (*)$
- Giải phương trình tìm x thay vào $f(x)$ hoặc $g(x)$ để suy ra y và tọa độ giao điểm
- Số nghiệm của phương trình $(*)$ là số giao điểm của (C) và (C')

Ví dụ 1: [Đề minh họa THPT QG năm 2017] Biết rằng đường thẳng $y = -2x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 2$ tại điểm duy nhất; ký hiệu $(x_o; y_o)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_o

- A. $y_o = 4$ B. $y_o = 0$ C. $y_o = 2$ D. $y_o = -1$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm là: $-2x + 2 = x^3 + x + 2 \Leftrightarrow x^3 + 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 2$

Vậy tọa độ giao điểm là $(0; 2)$. **Chọn C.**

Ví dụ 2: Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 5$ và đường thẳng $y = 9$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$. Tính $x_1 + x_2$

- A. $x_1 + x_2 = 3$ B. $x_1 + x_2 = 0$ C. $x_1 + x_2 = 18$ D. $x_1 + x_2 = 5$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm hai đồ thị là:

$$x^4 - 3x^2 + 5 = 9 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -1 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = 0$$

Chọn B.

Ví dụ 3: Hỏi đồ thị của hàm số $y = x^3 + 2x^2 - x + 1$ và đồ thị hàm số $y = x^2 - x + 3$ có tất cả bao nhiêu điểm chung?

- A. 0 B. 2 C. 1 D. 3

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm đồ thị hai hàm số là $x^3 + 2x^2 - x + 1 = x^2 - x + 3 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Suy ra hai đồ thị có một điểm chung. **Chọn C.**

Ví dụ 4: Số giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ và $y = x^4 + x^3 - 3$ là

- A. 1 B. 4 C. 3 D. 2

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm đồ thị hai hàm số là $x^3 + 3x^2 + 1 = x^4 + x^3 - 3 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -1 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow 2 \text{ đồ thị hàm số có 2 giao điểm. Chọn D.}$$

Ví dụ 5: Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$ với đường thẳng $y = 3x - 6$

A. 3

B. 0

C. 1

D. 2

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng (d) là $\frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1} = 3x - 6$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \neq 0 \\ x^2 - 2x + 3 = (x - 1)(3x - 6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - 2x + 3 = 3x^2 - 9x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ 2x^2 - 7x + 3 = 0 \end{cases} (*)$$

Hệ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt nên (C) cắt (d) tại hai điểm. Chọn D.

Ví dụ 6: Hoành độ các giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 1}{x + 2}$ (C) và đường thẳng $d : y = x - 2$ là

A. $\begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 + \sqrt{6} \\ x = 1 - \sqrt{6} \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và (d) là $\frac{2x - 1}{x + 2} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ 2x - 1 = x^2 - 4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases} \text{ Chọn A.}$$

Ví dụ 7: Biết đường thẳng $y = 3x + 4$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{4x + 2}{x - 1}$ tại hai điểm phân biệt có tung độ y_1 và y_2 . Tính $y_1 + y_2$

A. $y_1 + y_2 = 10$

B. $y_1 + y_2 = 11$

C. $y_1 + y_2 = 9$

D. $y_1 + y_2 = 1$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm hai đồ thị là $\frac{4x + 2}{x - 1} = 3x + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

Ta có: $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow y_1 + y_2 = 11. \text{ Chọn B.}$

Ví dụ 8: Gọi A, B là giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{x-1}$ và $y = 1-x$. Diện tích tam giác OAB bằng:

- A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ B. 3 C. $\frac{3}{2}$ D. $3\sqrt{2}$

Lời giải

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm: } \frac{x-3}{x-1} = 1-x \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 2 \\ x = 2 \Rightarrow y = -1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } AB = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2} \text{ và } d(O; AB) = d(O; d: x+y-1=0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Do đó } S_{OAB} = \frac{1}{2} d(O; AB) \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 3\sqrt{2} = \frac{3}{2}. \text{ Chọn C.}$$

Ví dụ 9: Đồ thị hàm số $y = x^2 - x$ và đồ thị hàm số $y = 5 + \frac{3}{x}$ cắt nhau tại hai điểm A và B. Khi đó độ dài AB là

- A. $AB = 8\sqrt{5}$ B. $AB = 25$ C. $AB = 4\sqrt{2}$ D. $AB = 10\sqrt{2}$

Lời giải

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm đồ thị hai hàm số là } x^2 - x = 5 + \frac{3}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \Rightarrow y = 6 \\ x = -1 \Rightarrow y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(3; 6) \\ B(-1; 2) \end{cases} \Rightarrow AB = 4\sqrt{2}. \text{ Chọn C.}$$

Ví dụ 10: Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $y = x+1$ và đường cong $y = \frac{2x+4}{x-1}$. Khi đó hoành độ trung điểm I của đoạn thẳng MN bằng

- A. $\frac{5}{2}$ B. $-\frac{5}{2}$ C. 1 D. 2

Lời giải

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm là } \frac{2x+4}{x-1} = x+1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{6} \\ x = 1 - \sqrt{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_M = 1 + \sqrt{6} \\ x_N = 1 - \sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow x_I = 1. \text{ Chọn C.}$$

Ví dụ 11: Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 1$ tại hai điểm phân biệt A, B. Tính độ dài AB.

- A. $AB = 3$ B. $AB = 2\sqrt{2}$ C. $AB = 2$ D. $AB = 1$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm hai đồ thị là $x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = x^2 - 3x + 1 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A(1;-1) \\ B(2;-1) \end{cases} \Rightarrow AB = 1 \text{ . Chọn D.}$$

Dạng 2: Sự tương giao của đồ thị hàm số phân thức bậc nhất trên bậc nhất

Phương pháp giải:

Xét sự tương giao giữa đồ thị $(C): y = \frac{ax+b}{cx+d}$ và đường thẳng $d: y = kx + \ell$

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm của } d \text{ và } (C) \text{ là: } \frac{ax+b}{cx+d} = kx + \ell \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{d}{c} \\ g(x) = Ax^2 + Bx + C = 0 \end{cases} \quad (*)$$

☑ Bài toán biện luận số giao điểm của hai đồ thị

▪ **Trường hợp 1:** Xét $A = 0 \Rightarrow$ Kết luận về số giao điểm.

▪ **Trường hợp 2:** Xét $A \neq 0$

+) d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ hai nghiệm phân biệt

$$\text{khác } -\frac{d}{c} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = B^2 - 4AC > 0 \\ g\left(-\frac{d}{c}\right) = A\left(-\frac{d}{c}\right)^2 + B\left(-\frac{d}{c}\right) + C \neq 0 \end{cases}$$

+) d cắt (C) tại điểm duy nhất $\Leftrightarrow g(x)$ có nghiệm kép khác $-\frac{d}{c}$ hoặc $g(x)$ có hai nghiệm phân

$$\text{biệt trong đó có một nghiệm } x = -\frac{d}{c} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{g(x)} = 0 \\ g\left(-\frac{d}{c}\right) \neq 0 \\ \Delta_{g(x)} > 0 \\ g\left(-\frac{d}{c}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\text{+) } d \text{ không cắt } (C) \Leftrightarrow g(x) \text{ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép bằng } -\frac{d}{c} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{g(x)} < 0 \\ \Delta_{g(x)} = 0 \\ g\left(-\frac{d}{c}\right) = 0 \end{cases}$$

☑ Bài toán liên quan đến tính chất các giao điểm

Phần này, ta chỉ xét bài toán mà có liên quan đến d cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

Bước 1. Tìm điều kiện để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow g(x) = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt khác } \frac{-d}{c} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = B^2 - 4AC > 0 \\ g\left(\frac{-d}{c}\right) = A\left(\frac{-d}{c}\right)^2 + B\frac{-d}{c} + C \neq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Bước 2. Khi đó gọi $A(x_1; kx_1 + \ell), B(x_2; kx_2 + \ell)$ là tọa độ hai giao điểm

Với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $g(x) = 0$ nên theo định lý Viet ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{B}{A} \\ x_1 x_2 = \frac{C}{A} \end{cases}$$

Bước 3. Theo yêu cầu bài toán, ta tìm giá trị của tham số chú ý đối chiếu với điều kiện (1) để chọn đáp án đúng.

Chú ý:

- $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$
- $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$
- $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$
- $S_{IAB} = \frac{1}{2} d(I; AB) \cdot AB$
- Tam giác IAB vuông tại $I \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = 0$
- Trọng tâm tam giác IAB là $G\left(\frac{x_I + x_A + x_B}{3}; \frac{y_I + y_A + y_B}{3}\right)$

Ví dụ 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $(d): x - 2y + m = 0$ cắt đồ thị hàm số

$$y = \frac{x-3}{x+1} \text{ tại hai điểm phân biệt.}$$

A. $\frac{3-4\sqrt{2}}{2} < m < \frac{3+4\sqrt{2}}{2}$

B. $3-4\sqrt{2} < m < 3+4\sqrt{2}$

C. $\begin{cases} m < \frac{3-4\sqrt{2}}{2} \\ m > \frac{3+4\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

D. $\begin{cases} m < 3-4\sqrt{2} \\ m > 3+4\sqrt{2} \end{cases}$

Lời giải

Ta có: $d: y = \frac{x}{2} + \frac{m}{2}$. Phương trình hoành độ giao điểm là: $\frac{x-3}{x+1} = \frac{x+m}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ g(x) = x^2 + (m-1)x + m + 6 = 0 \end{cases}$$

Để d cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ tại 2 điểm phân biệt thì $g(x) = 0$ phải có 2 nghiệm phân biệt

$$\text{khác } -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m-1)^2 - 4(m+6) > 0 \\ g(-1) = 8 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 6m - 23 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 + 4\sqrt{2} \\ m < 3 - 4\sqrt{2} \end{cases} . \text{Chọn D.}$$

Ví dụ 2: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = x + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+m}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

- A. $-2 < m < -1$ B. $m < -1$ C. $m < 1$ D. $-2 < m < 1$

Lời giải

Điều kiện: $x \neq 1$. Phương trình hoành độ giao điểm $x + 1 = \frac{2x+m}{x-1} \Leftrightarrow x^2 - 2x - m - 1 = 0 (*)$

Để cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương thì phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\text{khác } 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + m + 1 > 0 \\ 2 > 0 \\ -m - 1 > 0 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m < -1 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < -1 . \text{Chọn A.}$$

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1} (C)$ và đường thẳng $d: y = x + m$. Gọi S là tập hợp các giá trị của m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 9$. Tổng các phần tử của tập hợp S là:

- A. -2 B. 3 C. 2 D. -1

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là $\frac{x+1}{x-1} = x + m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ g(x) = x^2 + (m-2)x - m - 1 = 0 \end{cases} (1)$

Để đồ thị (C) cắt d tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m-2)^2 + 4(m+1) > 0 \\ g(1) = -2 \neq 0 \end{cases} (*). \text{ Khi đó gọi } x_1; x_2 \text{ là nghiệm của PT } g(x) = 0$$

$$\text{Theo Viet ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 - m \\ x_1 x_2 = -m - 1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (2 - m)^2 + 2(m + 1) = m^2 - 2m + 6 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -1 \end{cases} (\text{thỏa mãn } (*))$$

Vậy $S = \{3; -1\} \Rightarrow T = 2$. **Chọn C.**

Ví dụ 4: Cho hàm số: $y = \frac{2x-1}{x+1} (C)$ và đường thẳng $d: y = 2x + m$. Gọi S là tập hợp các giá trị của m để

d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $|x_1 - x_2| = \frac{1}{2}$. Tổng các phần tử của tập hợp S là:

A. 8

B. 9

C. 10

D. -1

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d: $\frac{2x-1}{x+1} = 2x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ g(x) = 2x^2 + mx + m + 1 = 0 \end{cases}$

Đề đồ thị (C) cắt d tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác -1.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 8(m+1) > 0 \\ g(-1) = 3 \neq 0 \end{cases} (*)$. Khi đó gọi $x_1; x_2$ là nghiệm của PT $g(x) = 0$

Theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-m}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{m+1}{2} \end{cases}$

Khi đó $|x_1 - x_2| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{m^2}{4} - 2(m+1) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 9 \\ m = -1 \end{cases} (t/m)$

Vậy $S = \{9; -1\} \Rightarrow T = 8$. **Chọn A.**

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ (C) và đường thẳng $d: y = x + m$. Số các giá trị của tham số m để d cắt (C)

tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 4\sqrt{2}$ là

A. 2

B. 1

C. 0

D. 3

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d: $\frac{x+1}{x-2} = x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ g(x) = x^2 + (m-3)x - 2m - 1 = 0 \end{cases} (1)$

Đề đồ thị (C) cắt d tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 2.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m-3)^2 + 4(2m+1) > 0 \\ g(2) = -3 \neq 0 \end{cases} (*)$

Khi đó gọi $A(x_1; x_1 + m); B(x_2; x_2 + m)$ là 2 tọa độ các giao điểm

Theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 - m \\ x_1 x_2 = -2m - 1 \end{cases}$

Ta có: $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2} = \sqrt{2[(x_1 - x_2)^2]} = \sqrt{2[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2]}$

$$= \sqrt{2[(3-m)^2 - 4(-2m-1)]} = \sqrt{2(m^2 + 2m + 13)} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases} (t/m)$$

Vậy $m = -3; m = 1$ là các giá trị cần tìm. **Chọn A.**

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ (C) và đường thẳng $d: y = 2x + m$. Số các giá trị của m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -10$ trong đó O là gốc tọa độ.

A. 2

B. 1

C. 0

D. 3

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d: $\frac{2x+1}{x+1} = 2x + m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ g(x) = 2x^2 + mx + m - 1 = 0 \end{cases} \quad (1)$

Đề đề thi (C) cắt d tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác -1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 8(m-1) > 0 \\ g(-1) = 1 \neq 0 \end{cases} (*)$$

Khi đó gọi $A(x_1; 2x_1 + m); B(x_2; 2x_2 + m)$ là 2 tọa độ các giao điểm

Theo Viet ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-m}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{m-1}{2} \end{cases}$$

Khi đó $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1 \cdot x_2 + (2x_1 + m)(2x_2 + m) = 5x_1 x_2 + 2m(x_1 + x_2) + m^2 = \frac{5m-5}{2} - m^2 + m^2 = -10$

$\Leftrightarrow m = -3 (t/m)$. Vậy $m = -3$ là các giá trị cần tìm. **Chọn B.**

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x-2}$ (C) và đường thẳng $d: y = -x + m$. Gọi m là giá trị để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho trọng tâm tam giác OAB thuộc đường thẳng $x + y = 0$. Tính độ dài AB khi đó.

A. $AB = 2\sqrt{2}$

B. $AB = 10$

C. $AB = 5$

D. $AB = \sqrt{10}$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d: $\frac{x-1}{x-2} = -x + m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ g(x) = x^2 - (m+1)x + 2m - 1 = 0 \end{cases} \quad (1)$

Đề đề thi (C) cắt d tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m+1)^2 - 4(2m-1) > 0 \\ g(2) = -1 \neq 0 \end{cases} (*)$$

Khi đó gọi $A(x_1; -x_1 + m); B(x_2; -x_2 + m)$ là 2 tọa độ các giao điểm

Theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 1 \\ x_1 x_2 = 2m - 1 \end{cases}$

Gọi G là trọng tâm tam giác OAB ta có $\begin{cases} x_G = \frac{x_1 + x_2 + 0}{3} = \frac{m+1}{3} \\ y_G = \frac{-x_1 + m - x_2 + m + 0}{3} = \frac{m-1}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{m+1}{3}; \frac{m-1}{3}\right)$

Do điểm $G \in x + y = 0$ nên ta có: $\frac{m+1}{3} + \frac{m-1}{3} = 0 \Leftrightarrow m = 0 (t/m)$

Khi đó $AB^2 = 2(x_1 - x_2)^2 = 2(x_1 + x_2)^2 - 8x_1 x_2 = 2(m+1)^2 - 8(2m-1) = 10 \Rightarrow AB = \sqrt{10}$. **Chọn D.**

Ví dụ 8: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2mx + m - 2}{x + 1}$ cắt đường thẳng $d: y = x + 3$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB có diện tích bằng 3, với $I(-1;1)$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 7

B. - 10

C. 3

D. 5

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm là $\frac{2mx + m - 2}{x + 1} = x + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x^2 - 2(m-2)x + 5 - m = 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$

Hai đồ thị có giao điểm khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)^2 - (5-m) > 0 \\ 1 + 2(m-2) + 5 - m \neq 0 \end{cases} (*)$

Khi đó $\begin{cases} x_A + x_B = 2(m-2) \\ x_A \cdot x_B = 5 - m \end{cases} \Rightarrow AB = \sqrt{2(x_A - x_B)^2} = \sqrt{2(x_A + x_B)^2 - 8x_A \cdot x_B}$

$= \sqrt{8(m-2)^2 - 8(5-m)}$

Mặt khác $d(I; d) = \frac{|-1 - 1 + 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot d(I; d) = \frac{1}{2} \sqrt{8(m-2)^2 - 8(5-m)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \sqrt{(m-2)^2 - (5-m)} = \sqrt{m^2 - 3m - 1} = 3 \Leftrightarrow m^2 - 3m - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m = -2 \end{cases}$

Kết hợp điều kiện (*) suy ra $m = 5$. **Chọn D.**

Ví dụ 9: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ và đường thẳng $d: y = 2x - m$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $S_{OAB} = \frac{5}{4}$ trong đó O là gốc tọa độ. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 1

B. 0

C. 2

D. 3

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d: $\frac{2x+1}{x-1} = 2x-m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ g(x) = 2x^2 - (m+4)x + m-1 = 0 \end{cases} \quad (1)$

Để đồ thị (C) cắt d tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m+4)^2 - 8(m-1) > 0 \\ g(1) = -3 \neq 0 \end{cases} \quad (*)$$

Khi đó gọi $A(x_1; 2x_1 - m); B(x_2; 2x_2 - m)$ là 2 tọa độ các giao điểm

Theo Viet ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m+4}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{m-1}{2} \end{cases}$$

Ta có: $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (2x_1 - 2x_2)^2} = \sqrt{5(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{5[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2]} = \sqrt{\frac{5}{4}(m^2 + 24)}$

$d(O; AB) = \frac{|m|}{\sqrt{5}}$. Khi đó: $S_{OAB} = \frac{1}{2} AB \cdot d(O; AB) = \frac{1}{4} |m| \sqrt{m^2 + 24} = \frac{5}{4}$

$\Leftrightarrow m^4 + 24m^2 = 25 \Leftrightarrow (m^2 - 1)(m^2 + 25) = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1 (t/m) \Rightarrow S = \{\pm 1\}$. **Chọn B.**

Ví dụ 10: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ và đường thẳng $y = -2x + m$. Tìm giá trị của tham số m để đồ thị hàm số đã cho cắt nhau tại 2 điểm phân biệt A, B và trung điểm AB có hoành độ bằng $\frac{5}{2}$

A. 8 B. 11 C. 9 D. 10

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d): $\frac{x+1}{x-1} = m - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ 2x^2 - (m+1)x + m+1 = 0 \end{cases} \quad (*)$

Để đồ thị (C) cắt (d) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm khác 1.

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 - 8(m+1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 7 \\ m < -1 \end{cases}$$

Khi đó gọi x_A, x_B là hoành độ của hai giao điểm A, B suy ra $x_A + x_B = 5 = \frac{m+1}{2} \Rightarrow m = 9 (t/m)$

Chọn C.

Ví dụ 11: Tìm m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A và B sao cho hai điểm A, B cách đều đường thẳng $\Delta: 2x - 4y + 5 = 0$

A. $m = 3$ B. $m = -5$ C. $m = 1$ D. $m = 5$

Lời giải

Để A, B cách đều đường thẳng $\Delta: 2x - 4y + 5 = 0$ thì $AB \parallel \Delta$ hoặc trung điểm I của AB thuộc Δ .
Do $AB \equiv d$ không song song với Δ nên bài toán thỏa mãn khi trung điểm của I của AB thuộc Δ .

Phương trình hoành độ giao điểm hai đồ thị là $\frac{x}{x-1} = -x + m \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - mx + m = 0 (*) \\ x \neq 1 \end{cases}$

Hai đồ thị cắt nhau tại hai điểm khi và chỉ khi PT (*) có hai nghiệm phân biệt $x \neq 1$

Suy ra $\begin{cases} \Delta(*) > 0 \\ 1 - m + m \neq 0 \end{cases} \Rightarrow m^2 - 4m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(x_A; y_A) \\ B(x_B; y_B) \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ là trung điểm AB.

Hai điểm A, B cách đều đường thẳng $\Delta: 2x - 4y + 5 = 0 \Rightarrow I \in \Delta \Rightarrow (x_A + x_B) - 2(y_A + y_B) + 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x_A + x_B) - 2(-x_A - x_B + 2m) + 5 = 0 \Leftrightarrow 3(x_A + x_B) - 4m + 5 = 0 \Leftrightarrow 5 - m = 0 \Leftrightarrow m = 5$

Kết hợp với điều kiện $\begin{cases} m > 4 \\ m < 0 \end{cases} \Rightarrow m = 5$. **Chọn D.**

Ví dụ 12: Số các giá trị nguyên của tham số $m \in [-20; 20]$ để đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x+3}{x+1}$ cắt đường

thẳng $d: y = x - m$ tại hai điểm phân biệt A và B thỏa mãn $\widehat{AOB}$ tù, với O là gốc tọa độ.

A. 22

B. 17

C. 16

D. 23

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x - m = \frac{x+3}{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ (x-m)(x+1) = x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ g(x) = x^2 - mx - m - 3 = 0 \end{cases}$$

Ta có d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow g(x)$ có 2 nghiệm phân biệt khác -1 .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4(-m-3) > 0 \\ g(-1) = (-1)^2 - m(-1) - m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)^2 + 8 > 0 \\ m \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} (*)$$

Do $A, B \in d \Rightarrow A(x_1; x_1 - m), B(x_2; x_2 - m)$ với $x_1; x_2$ là 2 nghiệm của $g(x) = 0$

Theo hệ thức Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -m - 3 \end{cases}$

Khi đó: $\begin{cases} \overrightarrow{OA} = (x_1; x_1 - m) \\ \overrightarrow{OB} = (x_2; x_2 - m) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1 x_2 + (x_1 - m)(x_2 - m)$

$$= 2x_1 x_2 - m(x_1 + x_2) + m^2 = -2(m+3) - m^2 + m^2 = -2(m+3)$$

Do $\widehat{AOB}$ tù nên $\cos \widehat{AOB} = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{OA \cdot OB} < 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} < 0 \Leftrightarrow -2(m+3) < 0 \Leftrightarrow m > -3$

Kết hợp $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-20; 20] \end{cases} \Rightarrow$ có 23 giá trị của m . **Chọn D.**

Ví dụ 13: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1} (C)$ và đường thẳng $d: y = 2x + m$. Gọi m là giá trị để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho tam giác ABC cân tại $C\left(\frac{3}{4}; 3\right)$. Tính $d(O; d)$ khi đó:

A. $d = \frac{9}{\sqrt{5}}$

B. $d = \frac{3}{\sqrt{5}}$

C. $d = \frac{2}{\sqrt{5}}$

D. $d = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) : $\frac{2x-1}{x+1} = 2x + m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ g(x) = 2x^2 + mx + m + 1 = 0 \end{cases}$

Để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{g(x)} = m^2 - 8(m+1) > 0 \\ g(-1) = 3 \neq 0 \end{cases}$

Khi đó gọi $A(x_1; 2x_1 + m); B(x_2; 2x_2 + m)$ theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{m}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{m+1}{2} \end{cases}$

Trung điểm I của AB là $I\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{2x_1 + 2x_2 + 2m}{2}\right)$ hay $I\left(\frac{-m}{4}; \frac{m}{2}\right)$

Giải $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{u_{AB}} = 0 \Leftrightarrow \frac{m+3}{4} + 2\left(3 - \frac{m}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow m = 9 (t/m)$. Khi đó $d(O; d) = \frac{9}{\sqrt{5}}$. **Chọn A.**

Dạng 3: Sự tương giao của đồ thị hàm số trùng phương

Phương pháp giải:

Xét sự tương giao đồ thị $(C): y = ax^4 + bx^2 + c (a \neq 0)$ và trục hoành có phương trình $y = 0$

Phương trình hoành độ giao điểm (C) và trục hoành là $ax^4 + bx^2 + c = 0 (1)$

▪ **Bài toán liên quan đến số giao điểm**

Số giao điểm của đồ thị (C) và trục hoành chính là số nghiệm của phương trình (1).

Đặt $t = x^2 \geq 0$ thì (1) thành $at^2 + bt + c = 0 (2)$

+) (C) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac > 0 \\ t_1 + t_2 = -\frac{b}{a} > 0 \\ t_1 \cdot t_2 = \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$$

+) (C) cắt trục hoành tại đúng 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 1 nghiệm dương và 1 nghiệm bằng 0.

(C) cắt trục hoành tại đúng 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm kép dương hoặc (2) có hai nghiệm trái dấu.

+) (C) cắt trục hoành tại điểm duy nhất $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm kép bằng 0 hoặc (2) có một nghiệm bằng 0 hoặc một nghiệm âm.

+) (C) không cắt trục hoành $\Leftrightarrow$ (2) vô nghiệm, có nghiệm kép âm hoặc có 2 nghiệm phân biệt đều âm

Một số bài toán có thể thay trục hoành thành $d: y = m$ hoặc $(P): y = mx^2 + n$, phương pháp giải hoàn toàn tương tự như trên.

▪ Bài toán liên quan đến tính chất giao điểm

Tìm điều kiện để (C): $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt A, B, C, D thỏa mãn điều kiện cho trước.

Bước 1: Tìm điều kiện để (1) có 4 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow (2) \text{ có 2 nghiệm dương phân biệt } t_1 \text{ và } t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac > 0 \\ t_1 + t_2 = -\frac{b}{a} > 0 \quad (*) \\ t_1 t_2 = \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$$

Bước 2: Giả sử $t_1 > t_2 > 0$ khi đó các nghiệm của (1) sắp xếp theo thứ tự tăng dần là $-\sqrt{t_1}; -\sqrt{t_2}; \sqrt{t_2}; \sqrt{t_1}$, xử lý điều kiện và tìm giá trị của tham số.

Đặc biệt: Khi hoành độ 4 điểm A, B, C, D lập thành cấp số cộng hoặc $AB = BC = CD$ khi:

$$\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} = 2\sqrt{t_2} \Leftrightarrow \sqrt{t_1} = 3\sqrt{t_2} \Leftrightarrow t_1 = 9t_2$$

Ví dụ 1: Số giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 5 - 2m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt là:

A. 9

B. 6

C. 7

D. 8

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm là $x^4 - 8x^2 + 5 - 2m = 0$

Đặt $t = x^2, t \geq 0 \Rightarrow PT \Leftrightarrow t^2 - 8t + 5 - 2m = 0 (*)$

Phương trình ban đầu có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (*) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn

$$t_1 > t_2 > 0$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} \Delta'(*) > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1 t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 - (5 - 2m) > 0 \\ 8 > 0 \\ 5 - 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{11}{2} < m < \frac{5}{2}$$

Kết hợp $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ Có 8 giá trị của m. **Chọn D.**

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + 4$ có đồ thị (C_m) , với m là tham số thực. Tìm tập hợp T gồm tất cả các giá trị của tham số m để (C_m) cắt Ox tại bốn điểm phân biệt

- A. $T = (0; 2)$ B. $T = (4; +\infty)$ C. $T = (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$ D. $T = (-\infty; 0)$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm là $x^4 + 2(m-2)x^2 + 4 = 0 \xrightarrow{t=x^2} t^2 + 2(m-2)t + 4 = 0(*)$

Đồ thị hàm số và trục hoành có 4 giao điểm khi và chỉ khi PT hoành độ giao điểm có 4 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow (*) \text{ có hai nghiệm phân biệt } t > 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta'(*) > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1 t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)^2 - 4 > 0 \\ -2(m-2) > 0 \\ 4 > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow m < 0 \Rightarrow T = (-\infty; 0)$. **Chọn D.**

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m + 1(C)$. Gọi S là tập hợp các giá trị của m để (C) cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 20$. Tổng các phần tử của tập hợp (S) là:

- A. 1 B. -1 C. 2 D. -3

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox là $x^4 - 2mx^2 + m + 1 = 0(1)$

Đặt $t = x^2 : (1) \Rightarrow t^2 - 2mt + m + 1 = 0(2)$

Để (C) cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có 2 nghiệm phân biệt $t_1 > t_2 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m - 1 > 0 \\ S = 2m > 0 \\ P = m + 1 > 0 \end{cases} (*) \text{ Theo Viet: } \begin{cases} t_1 + t_2 = 2m \\ t_1 t_2 = m + 1 \end{cases}$$

Khi đó phương trình (1) có 4 nghiệm $-\sqrt{t_1}; -\sqrt{t_2}; \sqrt{t_2}; \sqrt{t_1}$

Ta có: giả thiết bài toán $\Leftrightarrow t_1^2 + t_2^2 + t_2^2 + t_1^2 = 20 \Leftrightarrow t_1^2 + t_2^2 = 10 \Leftrightarrow (t_1 + t_2)^2 - 2t_1 t_2 = 10$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 2m - 2 = 10 \Leftrightarrow 2m^2 - m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -3 \end{cases}$$

Kết hợp (*) $\Rightarrow m = 2$ là giá trị cần tìm. **Chọn C.**

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = x^4 - (2m+1)x^2 + 2(C)$. Gọi S là tập hợp các giá trị của m để (C) cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $\frac{1}{x_1^4} + \frac{1}{x_2^4} + \frac{1}{x_3^4} + \frac{1}{x_4^4} = \frac{5}{2}$

Số phần tử của tập hợp S là:

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox là $x^4 - (2m+1)x^2 + 2 = 0$ (1)

Đặt $t = x^2 : (1) \Rightarrow t^2 - (2m+1)t + 2 = 0$ (2)

Đề (C) cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt $t_1 > t_2 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (2m+1)^2 - 8 > 0 \\ S = 2m+1 > 0 \\ P = 2 > 0 \end{cases} \quad (*) \text{ . Theo Viet: } \begin{cases} t_1 + t_2 = 2m+1 \\ t_1 t_2 = 2 \end{cases}$$

+) Khi đó phương trình (1) có 4 nghiệm $-\sqrt{t_1}; -\sqrt{t_2}; \sqrt{t_2}; \sqrt{t_1}$ ta có: $\frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_2^2} + \frac{1}{t_3^2} + \frac{1}{t_4^2} = \frac{5}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{t_1^2} + \frac{2}{t_2^2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{2(t_1^2 + t_2^2)}{t_1^2 t_2^2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow t_1^2 + t_2^2 = 5 \Leftrightarrow (t_1 + t_2)^2 - 2t_1 t_2 = 5 \Leftrightarrow (2m+1)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$$

Kết hợp (*) $\Rightarrow m = 1$ là giá trị cần tìm. **Chọn B.**

Ví dụ 5: Cho hàm số: $y = x^4 - 2mx^2 + m + 4$ (C). Gọi S là tập hợp các giá trị của m để (C) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn: $|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| = 8$. Tổng các phần tử của tập hợp S là:

A. 5

B. 12

C. 17

D. -17

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox là $x^4 - 2mx^2 + m + 4 = 0$ (1)

Đặt $t = x^2 : (1) \Rightarrow t^2 - 2mt + m + 4 = 0$ (2)

Đề (C) cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt $t_1 > t_2 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m - 4 > 0 \\ S = 2m > 0 \\ P = m + 4 > 0 \end{cases} \quad (*) \text{ . Theo Viet: } \begin{cases} t_1 + t_2 = 2m \\ t_1 t_2 = m + 4 \end{cases}$$

+) Khi đó phương trình (1) có 4 nghiệm $-\sqrt{t_1}; -\sqrt{t_2}; \sqrt{t_2}; \sqrt{t_1}$

Ta có: giả thiết $\Leftrightarrow |-\sqrt{t_1}| + |-\sqrt{t_2}| + |\sqrt{t_2}| + |\sqrt{t_1}| = 8 \Leftrightarrow 2(\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2}) = 8 \Leftrightarrow \sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} = 4$

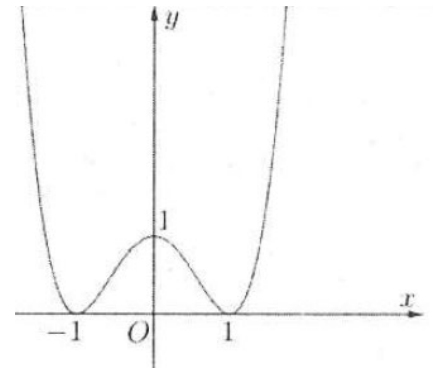
$$\Leftrightarrow t_1 + t_2 + 2\sqrt{t_1 t_2} = 16 \Leftrightarrow 2\sqrt{m+4} = 16 - 2m \Leftrightarrow \sqrt{m+4} = 8 - m \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 8 \\ m^2 - 17m + 60 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 5$$

Vậy $m = 5$ là giá trị cần tìm. **Chọn A.**

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ.

Tập hợp các giá trị thực của m để đường thẳng $d: y = -m + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại bốn điểm phân biệt cách đều nhau là

- A. $\left\{\frac{34}{25}; \frac{7}{4}\right\}$ B. $\left\{\frac{34}{25}\right\}$
C. $\left\{\frac{7}{4}\right\}$ D. $\{1; 2\}$



Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số, suy ra $y = f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

PT hoành độ giao điểm hai đồ thị là $x^4 - 2x^2 + 1 = -m + 2 \xrightarrow{t=x^2} t^2 - 2t + m - 1 = 0(*)$

Hai đồ thị có 4 giao điểm khi và chỉ khi PT (*) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\text{Suy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'(*) > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1 t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m + 1 > 0 \\ 2 > 0 \\ m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 2 \Rightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 = 2 \\ t_1 t_2 = m - 1 \end{cases}$$

Giả sử $t_1 > t_2$, 4 nghiệm của PT ban đầu theo thứ tự từ bé đến lớn sẽ là $-\sqrt{t_1}; -\sqrt{t_2}; \sqrt{t_2}; \sqrt{t_1}$

$$\text{Theo đề bài ta có } -\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} = -2\sqrt{t_2} \Rightarrow \sqrt{t_1} = 3\sqrt{t_2} \Leftrightarrow t_1 = 9t_2 \Rightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 = 2 \\ t_1 t_2 = m - 1 \\ t_1 = 9t_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{9}{5}; t_2 = \frac{1}{5} \\ t_1 t_2 = m - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m - 1 = \frac{9}{25} \Leftrightarrow m = \frac{34}{25} \text{ . Chọn B.}$$

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = x^4 - 2(2m+1)x^2 + 4m^2 (C)$. Các giá trị của tham số thực m để đồ thị (C) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 6$ là

- A. $m \geq -\frac{1}{4}$ B. $m = -\frac{1}{4}$ C. $m = 1$ D. $m = \frac{1}{4}$

Lời giải

PT hoành độ giao điểm hai đồ thị là $x^4 - 2(2m+1)x^2 + 4m^2 = 0 \xrightarrow{t=x^2} t^2 - 2(2m+1)t + 4m^2 = 0(*)$

$$\text{Đồ thị cắt trục hoành tại 4 điểm } \Leftrightarrow (*) \text{ có 2 nghiệm dương phân biệt } \begin{cases} \Delta' > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1 t_2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2m+1)^2 - 4m^2 > 0 \\ 2(2m+1) > 0 \\ 4m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{4} \\ m \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = x_1^2 = x_2^2 \\ t_1 = x_3^2 = x_4^2 \end{cases}$$

Khi đó $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2(t_1 + t_2) = 4(2m+1) = 6 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$ thỏa mãn $\begin{cases} m > -\frac{1}{4} \\ m \neq 0 \end{cases}$. **Chọn D.**

Ví dụ 8: Cho hàm số $y = x^4 - (4m+2)x^2 + 2m^2 + 1 (C)$. Có bao nhiêu giá trị của m để (C) chia trục hoành thành 4 đoạn phân biệt có độ dài bằng nhau.

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox là $x^4 - (4m+2)x^2 + 2m^2 + 1 = 0 (1)$

Đặt $t = x^2 : (1) \Rightarrow t^2 - (4m+2)t + 2m^2 + 1 = 0 (2)$

Để (C) cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có 2 nghiệm phân biệt $t_1 > t_2 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (2m+1)^2 - 2m^2 - 1 > 0 \\ S = (4m+2) > 0 \\ P = 2m^2 + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 + 4m > 0 \\ 2m+1 > 0 \end{cases} (*)$$

Theo định lý Viet ta có: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 4m+2 \\ t_1 t_2 = 2m^2 + 1 \end{cases}$

Khi đó PT (1) có 4 điểm A, B, C, D theo thứ tự hoành độ tăng dần là: $-\sqrt{t_1}; -\sqrt{t_2}; \sqrt{t_2}; \sqrt{t_1}$

Ta có: $AB = CD = \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2}; BC = 2\sqrt{t_2} \Rightarrow AB = BC = CD \Leftrightarrow \sqrt{t_1} = 3\sqrt{t_2} \Leftrightarrow t_1 = 9t_2$

$$\text{Giải hệ: } \begin{cases} t_1 + t_2 = 4m+2 \\ t_1 = 9t_2 \\ t_1 t_2 = 2m^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 9 \cdot \frac{2m+1}{5}, t_2 = \frac{2m+1}{5} \\ t_1 t_2 = 2m^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow 9(2m+1)^2 = 25(2m^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow 7m^2 - 18m + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{4}{7} \end{cases} \text{ (t/m(*)). Vậy } m = 2, m = \frac{4}{7} \text{ là giá trị cần tìm. Chọn C.}$$

✎ Dạng 4: Sự tương giao của đồ thị hàm số bậc 3

Phương pháp giải:

Xét đồ thị $(C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$ và đường thẳng $d: y = kx + \ell$

Hoành độ giao điểm của $y = x + m$ và (C) là nghiệm của phương trình

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = kx + \ell \Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + (x-k)x + d - \ell = 0 \quad (1)$$

$\rightarrow$ Số giao điểm của d và (C) là nghiệm của phương trình (1).

▪ **Trường hợp 1:** Phương trình (1) có một nghiệm đẹp $x = x_0$

Khi đó (1) thành $(x - x_o) \cdot (Ax^2 + Bx + C) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_o \\ g(x) = Ax^2 + Bx + C = 0 \end{cases}$

- Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác $x_o \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{g(x)} > 0 \\ g(x_o) \neq 0 \end{cases}$

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $g(x) = 0$ khi đó tọa độ các giao điểm của d và (C) là:

$A(x_o; kx_o + \ell), B(x_1; kx_1 + \ell), C(x_2; kx_2 + \ell)$ trong đó $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-B}{A} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{C}{A} \end{cases}$ (Định lý Viet).

- Phương trình (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có nghiệm kép khác x_o hoặc $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt, trong đó 1 nghiệm bằng x_o và nghiệm còn lại khác x_o .

- Phương trình (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow g(x) = 0$ vô nghiệm hoặc $g(x) = 0$ có nghiệm kép $x = x_o$.

▪ **Trường hợp 2:** Phương trình (1) không có một nghiệm đẹp $x = x_o$ nhưng cô lập được tham số.

Khi đó ta biến đổi (1) thành $\varphi(x) = h(m)$.

Từ đó số nghiệm của (1) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \varphi(x)$ và $y = h(m)$

Lập bảng biến thiên cho hàm số $y = \varphi(x) \Rightarrow$ Kết luận.

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1(C)$. Tìm giá trị của tham số m để (C) cắt đường thẳng $y = mx + 1$ tại 3 điểm phân biệt.

A. $\begin{cases} m > \frac{3}{2} \\ m \neq 2 \end{cases}$ B. $\begin{cases} m > \frac{-9}{8} \\ m \neq 1 \end{cases}$ C. $m > \frac{-9}{8}$ D. $\begin{cases} m > -\frac{9}{8} \\ m \neq 0 \end{cases}$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm là

$$2x^3 - 3x^2 + 1 = mx + 1 \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 - mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ g(x) = 2x^2 - 3x - m = 0 \end{cases}$$

$$\text{ĐK cắt tại 3 điểm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{g(x)} = 9 + 8m > 0 \\ g(0) = -m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{9}{8} \\ m \neq 0 \end{cases} \text{ . Chọn D.}$$

Ví dụ 2: Tìm m để đồ thị hàm số $y = (x - 2)[x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m]$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

A. Không tồn tại m B. $m < 1$ hoặc $m > 2$ C. $m \neq 1, m \neq 2$ D. $\forall m \in \mathbb{R}$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (C) và trục hoành là

$$(1) \Leftrightarrow (x-2)[x^2 - (2m+1)x + m^2 + m] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ f(x) = x^2 - (2m+1)x + m^2 + m = 0 \end{cases}$$

Đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$x \neq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+1)^2 - 4(m^2 + m) > 0 \\ 4 - 2(2m+1) + m^2 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ m \neq 1 \\ m \neq 2 \end{cases} \cdot \text{Chọn C.}$$

Ví dụ 3: Số các giá trị nguyên của tham số m để $m \in [-10; 10]$ đường thẳng $y = 4x - 5$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - (m+2)x + 2m - 1$ tại ba điểm phân biệt là

A. 10

B. 11

C. 12

D. 13

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm là

$$x^3 - (m+2)x + 2m - 1 = 4x - 5 \Leftrightarrow x^3 - (m+6)x + 2m + 4 = 0 (*)$$

$$(x-2)(x^2 + 2x - m - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ f(x) = x^2 + 2x - m - 2 = 0 \end{cases}$$

Hai đồ thị có giao điểm khi và chỉ khi PT (*) có ba nghiệm phân biệt, khi đó PT $f(x) = 0$ có 2 nghiệm

$$\text{phân biệt } x \neq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + m + 2 > 0 \\ 4 + 4 - m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m \neq 6 \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp } \begin{cases} m \in [-10; 10] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \text{có 12 giá trị của } m. \text{ Chọn C.}$$

Ví dụ 4: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $(C): y = (x-2)(x^2 - 2mx + m)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ dương.

A. $m \in (1; +\infty) \setminus \left\{ \frac{4}{3} \right\}$

B. $m \in (-\infty; 0) \cup \left(1; \frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$

C. $m \in (1; +\infty)$

D. $m \in (0; +\infty)$

Lời giải

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm là } (x-2)(x^2 - 2mx + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ f(x) = x^2 - 2mx + m = 0 \end{cases}$$

(C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ dương $\Leftrightarrow$ PT $f(x) = 0$ có hai nghiệm $x > 0, x \neq 2$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \\ f(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m > 0 \\ 2m > 0 \\ m > 0 \\ 4 - 4m + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \neq \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m \in (1; +\infty) \setminus \left\{ \frac{4}{3} \right\} . \text{ Chọn A.}$$

Ví dụ 5: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (m+2)x - m$ và đồ thị hàm số $y = 2x - 2$ có ba điểm chung phân biệt

A. $m < 3$

B. $m < 2$

C. $m > 3$

D. $m > 2$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm đồ thị hai hàm số là

$$x^3 - 3x^2 + (m+2)x - m = 2x - 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + mx - m + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x + m - 2) = 0 (*)$$

Đồ thị hai hàm số có ba điểm chung phân biệt khi và chỉ khi pt (*) có ba nghiệm phân biệt. Khi đó

$$(x-1)(x^2 - 2x + m - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f(x) = x^2 - 2x + m - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Rightarrow \begin{cases} f(1) \neq 1 \\ \Delta'_{f(x)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2 + m - 2 \neq 0 \\ 1 - m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m < 3 \end{cases} \Rightarrow m < 3 . \text{ Chọn A.}$$

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = (x-1)(x^2 + mx + 1)(C)$. Số các giá trị của m thỏa mãn đồ thị (C) cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2; x_3$ thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 10$ là

A. 1

B. 2

C. 0

D. 3

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục Ox là:

$$(x-1)(x^2 + mx + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ f(x) = x^2 + mx + 1 = 0 \end{cases} (1)$$

Đồ thị (C) cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân

$$\text{biệt và 2 nghiệm đó khác 1} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4 > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > 4 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases}$$

Khi đó cho $x_3 = 1$ và $x_1; x_2$ là nghiệm của PT $g(x) = 0$. Theo định lý Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 \cdot x_2 = 1 \end{cases}$

$$\text{Theo đề bài ta có: } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 9 \Leftrightarrow m^2 - 2 = 9$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 11 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{11} (t/m)$$

Vậy $m = \pm\sqrt{11}$ là giá trị cần tìm. **Chọn B.**

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = x^3 - mx + m - 1(C)$. Gọi m_0 là giá trị của m để đồ thị (C) cắt trục Ox tại 3 điểm

phân biệt có hoành độ $x_1; x_2; x_3$ thỏa mãn: $A = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 2$. Khi đó:

- A. $m_o \in (-2; 0)$ B. $m_o \in (0; 3)$ C. $m_o \in (3; 5)$ D. $m_o \in (5; 7)$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục Ox là: $x^3 - mx + m - 1 = 0$

$$x^3 - 1 - m(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ g(x) = x^2 + x + 1 - m = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Để đồ thị (C) cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 3 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1 - 4(1 - m) = 4m - 3 > 0 \\ g(1) = 3 - m \neq 0 \end{cases} \quad (*)$$

Khi đó gọi $x_3 = 1$ và $x_1; x_2$ là nghiệm của PT $g(x) = 0$

Theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 \cdot x_2 = 1 - m \end{cases}$

Do vậy $A = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + 1 = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} + 1 = \frac{-1}{1 - m} + 1 = 2 \Leftrightarrow m = 2 (tm)$

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm. **Chọn B.**

Ví dụ 8: Cho hàm số $y = x^3 - 2mx^2 - 1$ có đồ thị (C_m) , với m là tham số thực. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để (C_m) cắt đường thẳng $d: y = x - 1$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 20$

- A. 4 B. 6 C. 5 D. 3

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 - 2mx^2 - 1 = x - 1 \Leftrightarrow x(x^2 - 2mx - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2mx - 1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Ta có d cắt (C_m) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 + 1 > 0 \\ 0^2 - 2m \cdot 0 - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \quad (*)$$

Giả sử $x_3 = 0$ khi đó $x_1; x_2$ là 2 nghiệm của (1), theo Viet có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 \cdot x_2 = -1 \end{cases}$

Do đó $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 20 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 \leq 20 \Leftrightarrow 4m^2 + 2 \leq 20 \Leftrightarrow m^2 \leq \frac{9}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{\sqrt{2}} \leq m \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{\pm 2; \pm 1; 0\}$. **Chọn C**

Ví dụ 9: Cho hàm số $y = x^3 - x(C)$ và đường thẳng $d: y = m(x-1)$. Gọi m_o là giá trị của m để đồ thị (C) cắt đường thẳng d tại 3 điểm phân biệt $A; B; C$ sao cho điểm $M\left(-\frac{1}{2}; -9\right)$ là trung điểm của đoạn AB trong đó $C(1; 0)$. Khi đó:

A. $m_o < -1$

B. $m_o \in (0; 4)$

C. $m_o \in (4; 7)$

D. $m_o \in (7; +\infty)$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng d là: $x(x^2 - 1) - m(x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x) - m(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ g(x) = x^2 + x - m = 0 \end{cases}$$

Đồ thị (C) cắt d tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt và

$$2 \text{ nghiệm đó khác } 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1 + 4m > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m + 1 > 0 \\ 2 - m \neq 0 \end{cases} (*)$$

Khi đó gọi $x_1; x_2$ là nghiệm của PT $g(x) = 0$. Theo định lý Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 \cdot x_2 = -m \end{cases}$

Ta có: $A(x_1; m(x_1 - 1)); B(x_2; m(x_2 - 1))$, trung điểm của AB là

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1}{2} \\ y_M = \frac{m(x_1 - 1) + m(x_2 - 1)}{2} = \frac{m(x_1 + x_2) - 2m}{2} = \frac{-3m}{2} \end{cases}$$

Theo bài ra $M\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ nên $\frac{-3m}{2} = -9 \Leftrightarrow m = 6(tm)$

Vậy $m = 6$ là giá trị cần tìm. **Chọn C.**

Ví dụ 10: [Đề thi THPT Quốc gia năm 2017] Tìm tất cả các giá trị thực của m để đường thẳng $y = mx - m + 1$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x + 2$ tại ba điểm A, B, C phân biệt sao cho $AB = BC$.

A. $m \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$

B. $m \in \left(-\frac{5}{4}; +\infty\right)$

C. $m \in (-2; +\infty)$

D. $m \in \mathbb{R}$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm là $x^3 - 3x^2 + x + 2 = m(x - 1) + 1$

$$(x-1)(x^2 - 2x - 1 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ g(x) = x^2 - 2x - 1 - m = 0 \end{cases}$$

Giả thiết bài toán B là trung điểm của AC hay $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_1 \neq 1$ thỏa mãn

$$\Leftrightarrow x_A + x_C = 2x_B \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{g(x)} = 2 + m > 0 \\ g(1) = -2 - m \neq 0 \Leftrightarrow m > -2 \text{ . Chọn C.} \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Ví dụ 11: Cho hàm số: $y = x^3 + (m+2)x - m$ (C) và đường thẳng $d: y = 2x + 1$. Số giá trị nguyên của m để đồ thị (C) cắt đường $y = x + m$ tại 3 điểm phân biệt có tung độ y_1, y_2, y_3 thỏa mãn $A = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \leq 83$

A. 9

B. 10

C. 11

D. 12

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng d là: $x^3 + mx - m - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 1 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \Rightarrow y_3 = 3 \\ g(x) = x^2 + x + 1 - m = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Đồ thị (C) cắt $y = x + m$ tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có 2 nghiệm

$$\text{phân biệt và 2 nghiệm đó khác 1} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1 - 4(1 - m) > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m - 3 > 0 \\ 3 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{3}{4} \\ m \neq 3 \end{cases} (*)$$

Khi đó cho $x_3 = 1; y_3 = 3$ và $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $g(x) = 0$

$$\text{Theo định lý Viet ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 \cdot x_2 = -m \end{cases}$$

$$\text{Theo đề bài ta có: } A = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = (2x_1 + 1)^2 + (2x_2 + 1)^2 + 9 = 4(x_1^2 + x_2^2) + 4(x_1 + x_2) + 11$$

$$A = 4[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2] + 4(x_1 + x_2) + 11 = 4[1 - 2(1 - m)] - 4 + 11 = 8m + 3 \leq 83 \Leftrightarrow m \leq 10$$

Kết hợp (*) và $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ có 9 giá trị của m . **Chọn A.**

Ví dụ 12: Cho hàm số: $y = x^3 + mx - 4$ (C) và đường thẳng $d: y = 2mx + 4$. Gọi m_0 là giá trị của m để d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt A, B, C sao cho trọng tâm tam giác OAB là $G\left(-\frac{2}{3}; 8\right)$ trong đó (C) là điểm có hoành độ $x_C = 2$ và O là gốc tọa độ. Khi đó

A. $m_0 \in (-5; -2)$

B. $m_0 \in (-1; 3)$

C. $m_0 \in (3; 6)$

D. $m_0 \in (6; +\infty)$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là: $x^3 + mx - 2mx - 8 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 4) + m(x-2) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 4 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow C(2; 4m + 4) \\ g(x) = x^2 + 2x + 4 + m = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Để đồ thị (C) cắt đường thẳng d tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 3 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 - 4 - m = -m - 3 > 0 \\ g(2) = 12 + m \neq 0 \end{cases} (*)$$

Khi đó gọi $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $g(x) = 0$. Theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 \cdot x_2 = 4 + m \end{cases}$

$$\text{Gọi } A(x_1; 2mx_1 + 4); B(x_2; 2mx_2 + 4) \text{ ta có: } \begin{cases} x_o = \frac{x_1 + x_2 + 0}{3} = \frac{-2}{3} \\ y_o = \frac{2mx_1 + 4 + 2mx_2 + 4 + 0}{3} = \frac{2m(x_1 + x_2) + 8}{3} \end{cases}$$

$$\text{Do vậy } G\left(-\frac{2}{3}; \frac{8-4m}{3}\right). \text{ Cho } \frac{8-4m}{3} = 8 \Leftrightarrow m = -4(tm)$$

Vậy $m = -4$ là giá trị cần tìm. **Chọn A.**

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = x^3 - x^2(2m+3) + x(6m+7) - 4m - 3$ và đường thẳng $d: y = x + 1$. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của m để đường thẳng d cắt đồ thị hàm số tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $x_A = 1$ và diện tích tam giác OBC bằng $\sqrt{5}$, với O là gốc tọa độ. Tổng các phần tử của tập hợp S là:

A. T = 2

B. T = 4

C. T = -2

D. T = 3

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm hai đồ thị là $x^3 - x^2(2m+3) + x(6m+7) - 4m - 3 = x + 1$

$$\Leftrightarrow x^3 - (2m+3)x^2 + (6m+6)x - 4m - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)[x^2 - (2m+2)x + 4m+4] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x^2 - (2m+2)x + 4m+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A=1 \\ f(x) = x^2 - (2m+2)x + 4m+4 = 0(*) \end{cases}$$

Hai đồ thị có ba giao điểm khi và chỉ khi (*) có hai nghiệm phân biệt $x \neq 1$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} f(1) \neq 0 \\ \Delta'(*) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2m - 2 + 4m + 4 \neq 0 \\ (m+1)^2 - 4(m+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -\frac{3}{2} \\ m > 3 \\ m < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B + x_C = 2(m+1) \\ x_B \cdot x_C = 4(m+1) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{2(x_B - x_C)^2} = \sqrt{2(x_B + x_C)^2 - 8x_B \cdot x_C}$$

$$= \sqrt{8(m+1)^2 - 32(m+1)}. \text{ Mặt khác } d(O; d) = \frac{|1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Suy ra } S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2} d(O; d) \cdot BC = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{8(m+1)^2 - 32(m+1)} = \sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 4 \end{cases} \Rightarrow m \in \{-2; 4\} (t/m)$$

Vậy $T = 2$. **Chọn A.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Có bao nhiêu số nguyên dương m sao cho đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ tại

hai điểm phân biệt A, B và $AB \leq 4$?

- A.** 7 **B.** 6 **C.** 1 **D.** 2

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $(d): y = mx - m - 1$ cắt đồ thị $(C): y = x^3 - 3x^2 + 1$ tại 3 điểm A, B, C phân biệt (B thuộc đoạn AC), sao cho tam giác AOC cân tại O (với O là gốc tọa độ).

- A.** $m = -2$ **B.** $m = 2$ **C.** $m = -1$ **D.** $m = 1$

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -2x + m$ cắt đồ thị (H) của hàm số $y = \frac{2x+3}{x+2}$ tại hai điểm A, B phân biệt sao cho $P = k_1^{2018} + k_2^{2018}$ đạt giá trị nhỏ nhất, với k_1, k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến tại A, B của đồ thị (H) .

- A.** $m = 3$ **B.** $m = 2$ **C.** $m = -3$ **D.** $m = -2$

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x+1}$ có đồ thị (C) . Tìm m sao cho đường thẳng $d: y = x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B thỏa mãn điều kiện $G(2; -2)$ là trọng tâm của tam giác OAB.

- A.** $m = 2$ **B.** $m = 5$ **C.** $m = 6$ **D.** $m = 3$

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x+1}$ và đường thẳng $y = 2x + m$. Tìm giá trị của m để đồ thị hai hàm số đã cho cắt nhau tại hai điểm A, B phân biệt sao cho độ dài đoạn AB nhỏ nhất.

- A.** $m = -1$ **B.** $m = 3$ **C.** $m = 4$ **D.** $m = 1$

Câu 6: Tìm giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ cắt đường thẳng $(d): y = m(x - 1)$ tại ba điểm phân biệt hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 5$.

- A.** $m \geq -3$ **B.** $m \geq -2$ **C.** $m > -3$ **D.** $m > -2$

Câu 7: Cho hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + 3(m-1) + 2$ có đồ thị (C) . Đường thẳng $d: y = -x + 2$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt $A(0;2), B$ và C . Với $M(3;1)$, giá trị của tham số m để tam giác MBC có diện tích bằng $2\sqrt{6}$ là

- A.** $m = -1$

B. $m = -1$ hoặc $m = 4$

- C. $m = 4$**

D. Không tồn tại m

Câu 8: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + m$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt A, B, C sao cho B là trung điểm của AC. Phát biểu nào sau đây đúng?

- A.** $m \in (0; +\infty)$ **B.** $m \in (-\infty; -4)$ **C.** $m \in (-4; 0)$ **D.** $m \in (-4; -2)$

Câu 9: Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị (C) . Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của k để đường thẳng $d: y = k(x+1) + 2$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt M, N, P sao cho các tiếp tuyến của (C) tại N và P vuông góc với nhau. Biết $M(-1; 2)$, tính tích tất cả các phần tử của tập S.

- A. $\frac{1}{9}$ B. $-\frac{2}{9}$ C. $\frac{1}{3}$ D. -1

Câu 10: Đường thẳng $y = m^2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2 - 10$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông với O là gốc tọa độ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $m^2 \in (5; 7)$ B. $m^2 \in (3; 5)$ C. $m^2 \in (1; 3)$ D. $m^2 \in (0; 1)$

Câu 11: Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 2m + 1$ và trục Ox có đúng hai điểm chung phân biệt. Tính tổng T của các phần tử thuộc tập S.

- A. $T = 12$ B. $T = 10$ C. $T = -12$ D. $T = -10$

Câu 12: Biết rằng đường thẳng $y = x - m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ tại ba điểm phân biệt sao cho có một giao điểm cách đều hai giao điểm còn lại. Khi đó m thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $(2; 4)$ B. $(-2; 0)$ C. $(0; 2)$ D. $(4; 6)$

Câu 13: Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 + 3x + 1$ và $M(1; -2)$. Biết có 2 giá trị của m là m_1 và m_2 để đường thẳng $\Delta: y = x + 1$ cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt A(0;1), B, C sao cho tam giác MBC có diện tích bằng $4\sqrt{2}$. Hỏi tổng $m_1^2 + m_2^2$ thuộc khoảng nào trong các khoảng sau:

- A. $(15; 17)$ B. $(3; 5)$ C. $(31; 33)$ D. $(16; 18)$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Ta có $\frac{2x-1}{x+1} = x+m \Leftrightarrow x^2 + (m-1)x + m+1 = 0$

Để cắt nhau tại 2 điểm phân biệt thì $\Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3+2\sqrt{3} \\ m < 3-2\sqrt{3} \end{cases}$

Giả sử $A(x_1; x_1+m), B(x_2; x_2+m) \Rightarrow AB = \sqrt{2(x_1-x_2)^2}$

Ta có $AB \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{2(x_1-x_2)^2} \leq 4 \Leftrightarrow (x_1-x_2)^2 \leq 8 \Leftrightarrow (x_1-x_2)^2 - 4x_1x_2 \leq 8$

$\Leftrightarrow (m-1)^2 - 4(m+1) \leq 8 \Leftrightarrow m^2 - 6m - 11 \leq 0 \Leftrightarrow 3-2\sqrt{5} \leq m \leq 3+2\sqrt{5}$

Do đó $3+2\sqrt{3} < m \leq 3+2\sqrt{5} \Rightarrow m = 7$. **Chọn C**

Câu 2: $x^3 - 3x^2 + 1 = mx - m - 1 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - m - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ g(x) = x^2 - 2x - m - 2 = 0 \end{cases}$

Để cắt nhau tại 3 điểm thì $\begin{cases} g(1) \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -3$

Giả sử $A(x_1; mx_1 - m - 1), C(x_2; mx_2 - m - 1)$ với $x_1 + x_2 = 2, x_1x_2 = -m - 2$

Ta có $OA = OC \Leftrightarrow x_1^2 + (mx_1 - m - 1)^2 = x_2^2 + (mx_2 - m - 1)^2$

$\Leftrightarrow (m^2 + 1)(x_1^2 - x_2^2) - 2m(m+1)(x_1 - x_2) = 0 \Leftrightarrow (m^2 + 1)(x_1 + x_2) - 2m(m+1) = 0$

$\Leftrightarrow 2(m^2 + 1) - 2m(m+1) = 0 \Leftrightarrow 2 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = 1$. **Chọn D.**

Câu 3: Ta có $y' = \frac{1}{(x+2)^2}$. Xét phương trình $\frac{2x+3}{x+2} = -2x+m \Leftrightarrow 2x^2 - (m-6)x - 2m+3 = 0$

Để cắt nhau tại 2 điểm thì $\Delta > 0 \Leftrightarrow (m-6)^2 - 8(-2m+3) > 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 12 > 0, \forall m$

Ta có $P = k_1^{2018} + k_2^{2018} = \frac{1}{(x_1+2)^{4036}} + \frac{1}{(x_2+2)^{4036}}$

Để đạt giá trị nhỏ nhất thì $\frac{1}{(x_1+2)^{4036}} = \frac{1}{(x_2+2)^{4036}}$

$\Leftrightarrow x_1 + 2 = -(x_2 + 2) \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -4 \Leftrightarrow \frac{m-6}{2} = -4 \Leftrightarrow m = -2$. **Chọn D.**

Câu 4: Ta có $\frac{x+3}{x+1} = x-m \Leftrightarrow x^2 - mx - m - 3 = 0$. Giả sử $A(x_1; x_1-m), B(x_2; x_2-m)$

Do G là trọng tâm của ΔABC nên $\begin{cases} \frac{x_1+x_2}{3} = 2 \\ \frac{x_1+x_2-2m}{3} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m}{3} = 2 \\ \frac{-m}{3} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 6$. **Chọn C.**

Câu 5: Ta có $\frac{x+3}{x+1} = 2x+m \Leftrightarrow 2x^2 + (m+1)x + m - 3 = 0$. Giả sử $A(x_1; 2x_1 + m), B(x_2; 2x_2 + m)$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } AB &= \sqrt{5(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{5\left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2\right]} = \sqrt{5\left[\left(\frac{m+1}{2}\right)^2 - 4\frac{m-3}{2}\right]} \\ &= \sqrt{5\left(\frac{1}{4}m^2 - \frac{3}{4}m + \frac{25}{4}\right)} \text{ nhỏ nhất khi } m = \frac{-b}{2a} = 3. \text{ Chọn B.} \end{aligned}$$

Câu 6: Ta có $x^3 - 3x^2 + 2 = m(x+1) \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - m - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2 - 2x - m - 2 = 0 \end{cases}$

$$\text{Giả sử } x_1 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = 2 \\ x_2x_3 = -m-3 \end{cases} \text{ Ta có } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 5 \Leftrightarrow x_1^2 + (x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3 > 5$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2^2 - 2(-m-3) > 5 \Leftrightarrow m > -3. \text{ Chọn C.}$$

Câu 7: Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là $x^3 + 2mx^2 + 3(m-1)x + 2 = -x + 2$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2mx^2 + (3m-2)x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 2mx + 3m-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \underbrace{x^2 + 2mx + 3m-2}_{f(x)} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Đề (C) cắt d tại 3 điểm} \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt khác } 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-2 \neq 0 \\ m^2 - 3m + 2 > 0 \end{cases} (*)$$

Khi đó, gọi $A(0; 2), B(x_1; y_1)$ và $C(x_2; y_2)$ là tọa độ giao điểm của (C) và d

$$\text{Với } x_1, x_2 \text{ thỏa mãn hệ thức Vi - et : } \begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1x_2 = 3m-2 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } d[M; (BC)] = d[M; (d)] = \sqrt{2} \Rightarrow S_{\Delta MBC} = \frac{1}{2} d[M; (d)] \cdot BC \Rightarrow BC = 4\sqrt{3}$$

$$\text{Lại có } \overline{BC} = (x_2 - x_1; -x_2 + x_1) \Rightarrow BC^2 = 2(x_2 - x_1)^2 = 2\left[(x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2\right] = 48$$

$$\text{Suy ra } (-2m)^2 - 4(3m-2) = 24 \Leftrightarrow 4m^2 - 12m - 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 4 \end{cases} \text{ (thỏa mãn } (*))$$

Vậy $m = -1$ hoặc $m = 4$ là giá trị cần tìm. **Chọn B.**

Câu 8: Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ Điểm uốn của đồ thị (C) thuộc trục hoành

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 + 6x \Rightarrow y'' = 6x + 6; y'' = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y(-1) = m + 2$$

$$\text{Do đó, tọa độ điểm uốn là } 1(-1; m+2) \in Ox \Rightarrow m+2 = 0 \Leftrightarrow m = -2. \text{ Chọn C.}$$

Câu 9: Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là $x^3 - 3x = k(x+1) + 2$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x - 2 = k(x+1) \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x - 1) = k(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \underbrace{x^2 - x - k - 2}_{f(x)} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Đề (C) cắt d tại 3 điểm phân biệt} \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt khác } -1 \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k > -\frac{9}{4} \end{cases}$$

Khi đó, gọi $M(-1; 2)$, $N(x_1; y_1)$ và $P(x_2; y_2)$ là tọa độ giao điểm của (C) và d

$$\text{Với thỏa mãn hệ thức Vi - et : } \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 x_2 = -k - 2 \end{cases}$$

$$\text{Theo bài ra, ta có } y'(x_1) \cdot y'(x_2) = -1 \Leftrightarrow (3x_1^2 - 3)(3x_2^2 - 3) = -1$$

$$\Leftrightarrow 9(x_1 x_2)^2 - 9(x_1^2 + x_2^2) + 10 = 0 \Leftrightarrow 9(x_1 x_2)^2 - 9[9(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9(k+2)^2 - 9[1 + 2(k+2)] + 10 = 0 \Leftrightarrow 9k^2 + 18k + 1 = 0 \Rightarrow k_1 \cdot k_2 = \frac{1}{9}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 10: Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là $x^4 - x^2 - m^2 - 10 = 0$ (*)

$$\text{Đặt } t = x^2 \geq 0, \text{ khi đó (*)} \Leftrightarrow t^2 - t - m^2 - 10 = 0 \text{ luôn có hai nghiệm thỏa mãn } \begin{cases} t_1 + t_2 = 1 \\ t_1 t_2 = -m^2 - 10 \end{cases}$$

$$\text{Vì } -m^2 - 10 < 0 \Rightarrow t_1 t_2 < 0 \text{ nên giả sử } t_2 < 0 \Rightarrow t_1 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{t_1} \\ x_2 = -\sqrt{t_1} \end{cases}$$

$$\text{Do đó tọa độ hai điểm A, B lần lượt là } A(\sqrt{t_1}; m^2); B(-\sqrt{t_1}; m^2)$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{OA} = (\sqrt{t_1}; m^2), \overrightarrow{OB} = (-\sqrt{t_1}; m^2) \Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \sqrt{t_1} \cdot (-\sqrt{t_1}) + m^2 \cdot m^2 = -t_1 + m^4$$

$$\text{Tam giác OAB vuông} \Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Rightarrow -t_1 + m^4 = 0 \Rightarrow t_1 = m^4$$

$$\text{Thay } t_1 = m^4 \text{ vào phương trình ẩn t, ta được } m^4 - m^2 - m^2 - 10 = 0 \Rightarrow m^2 = 1 + \sqrt{11}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 11: Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox là

$$x^3 - 3x^2 - 9x + 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow -2m = x^3 - 3x^2 - 9x + 1 \Leftrightarrow -2m = f(x)$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1 \text{ có } f'(x) = 3x^2 + 6x - 9; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$\text{Lập bảng biến thiên hàm số } f(x), \text{ để } -2m = f(x) \text{ có 2 nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m = 28 \\ -2m = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 14 \\ m = 2 \end{cases}$$

Vậy tổng các giá trị của m là $T = -12$. **Chọn C.**

Câu 12: Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là $x^3 - 3x^2 = x - m \Leftrightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 - x + m = 0$

Yêu cầu bài toán trở thành: Đồ thị $y = f(x)$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt và có một giao điểm cách hai giao điểm còn lại $\Leftrightarrow$ Đồ thị $y = f(x)$ có điểm uốn thuộc Ox

$$\text{Xét hàm số } f(x) = x^3 - 3x^2 - x + m, \text{ có } f'(x) = 3x^2 - 6x - 1; f''(x) = 6x - 6$$

Ta có $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = m - 3$ nên tọa độ điểm uốn là $I(1; m - 3)$

Theo bài ra, ta có $m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3$. **Chọn A.**

Câu 13: Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là $x^3 - mx^2 + 3x + 1 = x + 1$

$$\Leftrightarrow x^3 - mx^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - mx + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \underbrace{x^2 - mx + 1}_{f(x)} = 0 \end{cases}$$

Để (C) cắt d tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow f(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow m^2 - 8 > 0$

Khi đó, gọi $A(0; 1), B(x_1; y_1)$ và $C(x_2; y_2)$ là tọa độ giao điểm của (C) và d

$$\text{Với } x_1, x_2 \text{ thỏa mãn hệ thức Vi - et : } \begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = 2 \end{cases}$$

Khoảng cách từ điểm $M \rightarrow BC$ là $h = d[M; (BC)] = 2\sqrt{2}$

$$\text{Suy ra } S_{\Delta MBC} = \frac{1}{2} h \cdot BC = 4\sqrt{2} \Rightarrow BC = 4 \Rightarrow 2(x_2 - x_1)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 - 4x_1 x_2 = 8 \Leftrightarrow m^2 - 8 = 8 \Leftrightarrow m^2 = 16 \rightarrow m_1^2 + m_2^2 = 32. \text{ **Chọn C.**}$$