SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC
TRƯỜNG THPT TRẦN HƯNG ĐẠO

(Đề thi có 01 trang)

KỲ THI CHỌN HSG LỚP 12 CẤP TRƯỜNG
NĂM HỌC 2017 - 2018
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 180 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1 (*2,5 điểm*).

a) Tìm tất cả các giá trị m để $y=\frac{m}{3}x^3-(m-1)x^2+3(m-2)x+\frac{1}{3}$ đồng biến trên $[2,+\infty)$

b) Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m-1$ (C_m), với m là tham số thực. Xác định tất cả các giá trị của m để hàm số (C_m) có ba điểm cực trị đồng thời các điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành một tam giác có một góc tù.

Câu 2 (*2,0 điểm*).

a) Giải phương trình $\sqrt{3}\sin 2x+\sqrt{3}+1=2\cos^2 x$

b) Cho A là tập hợp các số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau lập được từ các chữ số 0, 2, 3, 5, 6, 8. Lấy ngẫu nhiên một số thuộc tập A . Tính xác suất để số lấy được có chữ số 0 và chữ số 5 không đứng cạnh nhau.

Câu 3 (*1,5 điểm*). Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-y^3+6x^2-3y^2+14x-5y=-9 \\ \sqrt{1-x^2}-\sqrt{y}=\sqrt{2-y}-1 \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Câu 4 (*1,5 điểm*). Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $A(5,-7)$, điểm C thuộc đường thẳng có phương trình $(d_1): x-y+4=0$. Đường thẳng đi qua D và trung điểm của đoạn AB có phương trình $(d_2): 3x-4y-23=0$. Tìm tọa độ của B và C, biết điểm B có hoành độ dương.

Câu 5 (*1,5 điểm*). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a góc $\widehat{BAD}=60^0$, hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng *(ABCD)* trùng với điểm G là trọng tâm tam giác BCD. Góc giữa SA và mặt phẳng *(ABCD)* bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng DC và SA theo a.

Câu 6 (*1,0 điểm*). Cho các số thực dương x, y, z. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}}-\frac{2}{(x+1)(y+1)(z+1)}$$

---------------**Hết**----------------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:…………………..……...................……….….…; Số báo danh:………....……….

TRƯỜNG THPT TRẦN HƯNG ĐẠO

(Đáp án có 05 trang)

ĐÁP ÁN KỲ THI CHỌN HSG CẤP TRƯỜNG

NĂM HỌC 2017 - 2018

MÔN THI: TOÁN KHỐI 12

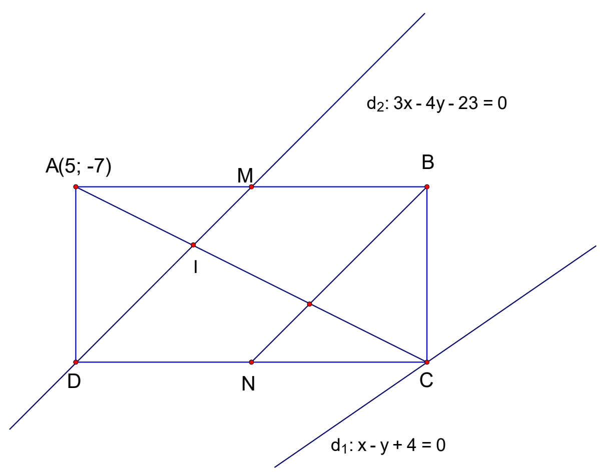
I. LƯU Ý CHUNG:

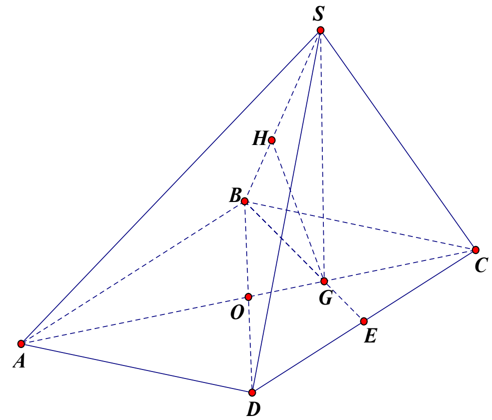
- Hướng dẫn chấm chỉ trình bày một cách giải với những ý cơ bản phải có. Khi chấm bài học sinh làm theo cách khác nếu đúng và đủ ý thì vẫn cho điểm tối đa.
- Điểm toàn bài tính đến 0,25 và không làm tròn.
- Với bài hình học không gian nếu thí sinh không vẽ hình phần nào thì không cho điểm tương ứng với phần đó.

II. ĐÁP ÁN:

Câu	Ý	Nội dung trình bày	Điểm
1	**a**		**1,25**
		Hàm số đồng biến $/\ [2,+\infty) \Leftrightarrow y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) \geq 0\ \forall x \geq 2$ (1)	0,25
		$\Leftrightarrow m\left[(x-1)^2+2\right] \geq -2x+6\ \forall x \geq 2 \Leftrightarrow g(x) = \dfrac{-2x+6}{(x-1)^2+2} \leq m\ \forall x \geq 2$	0,25
		Ta có: $g'(x) = \dfrac{2(x^2-6x+3)}{(x^2-2x+3)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 = 3-\sqrt{6} \\ x = x_2 = 3+\sqrt{6} \end{array}\right.$; $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$	0,25
		$$\begin{array}{c\|ccccc} x & 2 & & 3+\sqrt{6} & & +\infty \\ \hline g'(x) & & - & 0 & + & \\ \hline g(x) & 2/3 & \searrow & \text{CT} & \nearrow & 0 \end{array}$$ Từ BBT $\Rightarrow \underset{x\geq 2}{\text{Max}}\, g(x) = g(2) = \dfrac{2}{3}$. Vậy $m \geq \dfrac{2}{3}$	0, 5
	b		**1,25**
		Tập xác định $D = \mathbb{R}$ Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2-m)$. Khi đó hàm số (C_m) có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow x^2 - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow m > 0$	0,25
		Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{m}$. Giả sử 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số (C_m) là A, B, C. Khi đó $A(0; m-1), B\left(-\sqrt{m}; -m^2+m-1\right), C\left(\sqrt{m}; -m^2+m-1\right)$.	0,25

		$\overrightarrow{AB}\left(-\sqrt{m};-m^2\right)$; $\overrightarrow{AC}\left(\sqrt{m};-m^2\right)$. Tam giác ABC cân tại A, nên nó sẽ có góc tù khi $90^0<\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\Leftrightarrow\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)<0$	0,5
		$\Leftrightarrow\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert\left\lvert\overrightarrow{AC}\right\rvert}<0\Leftrightarrow\dfrac{-m+m^4}{\left\lvert m+m^4\right\rvert}<0\Leftrightarrow-1+m^3<0\Leftrightarrow m<1$ (Do $m>0$). Kết luận: 0 < m < 1.	0,25
2	**a**		**1**
		Phương trình tương đương: $\sqrt{3}\sin 2x+\sqrt{3}+1=1+\cos 2x$.	0,25
		$\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\cos 2x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.	0,25
		$\Leftrightarrow\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.	0,25
		$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{12}+k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z})$ Vậy phương trình có nghiệm là $x=-\dfrac{\pi}{12}+k\pi$ hoặc $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.	0,25
	b		**1**
		$n(\Omega)=5.5!$	0,25
		Gọi số cần tìm là $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ (trong đó các $a_i\in\{0,2,3,5,6,8\}$). TH1: 5 và 0 đứng cạnh nhau ở vị trí a_1,a_2 có 4! số.	0,25
		TH2: 5 và 0 đứng cạnh nhau ở vị trí còn lại có 4.2!4! số.	0,25
		Vậy xác suất để số lấy được có chữ số 0 và chữ số 5 không đứng cạnh nhau là: $P=\dfrac{5.5!-(4!+4.2.4!)}{5.5!}=\dfrac{16}{25}$	0,25
3			**1,5**
		Điều kiện: $-1\le x\le 1;0\le y\le 2$. Ta có (1) $\Leftrightarrow(y+1)^3+2(y+1)=(x+2)^3+2(x+2)$	0,5

		Xét hàm số $f(t)=t^3+2t$, ta có $f'(t)=3t^2+2>0, \forall t\in\mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vậy (1) $\Leftrightarrow f(y+1)=f(x+2) \Leftrightarrow y=x+1$	0,25
		Thế vào (2) ta được $\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}+1=0$ (3) Đặt $t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}, t>0 \Rightarrow \sqrt{1-x^2}=\dfrac{t^2-2}{2}$ Khi đó $(3) \Leftrightarrow \dfrac{t^2-2}{2}-t+1=0 \Leftrightarrow t^2-2t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0\ (l) \\ t=2 \end{array}\right.$ Với $t=2 \Leftrightarrow \sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=2 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}=1 \Leftrightarrow x=0$	0,5
		Với $x=0$ suy ra $y=1$. Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$	0,25
4			**1,5**
			
		Gọi $C(c;c+4)\in d_1$, M là trung điểm AB, I là giao điểm của AC và (d_2) Ta có $\triangle AIM$ đồng dạng $\triangle CID$ $\Rightarrow CI=2AI \Rightarrow \overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{IA} \Rightarrow I\left(\dfrac{c+10}{3};\dfrac{c-10}{3}\right)$	0,5
		Mà $I\in d_2$ nên ta có: $3.\dfrac{c+10}{3}-4.\dfrac{c-10}{3}-23=0 \Leftrightarrow c=1$ Vậy C(1;5).	0,25
		Ta có: $M\in d_2 \Rightarrow M\left(t;\dfrac{3t-23}{4}\right) \Rightarrow B\left(2t-5;\dfrac{3t-9}{2}\right)$ $\overrightarrow{AB}=\left(2t-10;\dfrac{3t+5}{2}\right)$, $\overrightarrow{CB}=\left(2t-6;\dfrac{3t-19}{2}\right)$	0,25
		Do $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}=0 \Leftrightarrow 4(t-5)(t-3)+\dfrac{1}{4}(3t+5)(3t-19)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{29}{5} \end{array}\right.$	0,5

		$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} B(-3;-3)\ (loai) \\ B\left(\dfrac{33}{5};\dfrac{21}{5}\right) \end{array}\right. \Rightarrow B\left(\dfrac{33}{5};\dfrac{21}{5}\right)$	
5			**1,5**
		Gọi O là tâm của đáy. Theo bài ra ta có : Góc $\widehat{SAC}=60^0$, $AO=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a \to AC=\sqrt{3}a,\ AG=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$ Suy ra $SG=AG.\tan 60^0=2a$  	0,5
		Diện tích hình thoi ABCD $S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}AC.BD=\dfrac{1}{2}\sqrt{3}a.a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$ Vậy $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SG=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a^3$	0,25
		Gọi $E=BG\cap CD$ Ta có $CD//AB \Rightarrow CD//mp(SAB) \Rightarrow d(CD,SA)=d(CD,(SAB))$ $=d(E,(SAB))=\dfrac{3}{2}d(G,(SAB))$ Do tam giác BDC đều nên $BE\perp CD \Rightarrow BE\perp AB$. Do đó khi kẻ $GH\perp SB,\ H\in SB$ Suy ra $GH\perp(SAB)\Rightarrow d(G,(SAB))=GH$	0,5
		Trong tam giác vuông SBG ta có $\dfrac{1}{GH^2}=\dfrac{1}{GB^2}+\dfrac{1}{GS^2}=\dfrac{3}{a^2}+\dfrac{1}{4a^2}=\dfrac{13}{4a^2}\to GH=\dfrac{2a}{\sqrt{13}}$ Vậy $d(CD,SA)=\dfrac{3a}{\sqrt{13}}$	0,25
6			**1**
		Sử dụng BĐT cô-si cho 3 số dương ta có: $(a+1)(b+1)(c+1)\le\left(\dfrac{a+b+c+3}{3}\right)^3$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ Mặt khác $a^2+b^2+c^2+1\ge\dfrac{1}{4}(a+b+c+1)^2$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$	0,25

		Đặt $t = x + y + z + 1 > 1$, ta có $S \le \frac{2}{t} - \frac{54}{\left(t+2\right)^3} = f\left(t\right)$	0,25
		$f(t) = \frac{2}{t} - \frac{54}{\left(t+2\right)^3}, \forall t > 1$, $f'(t) = -\frac{2}{t^2} + \frac{162}{\left(t+2\right)^4}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$	0,25
		Suy ra $f_{\max} = f(4) = \frac{1}{4}$. Vậy ta có $S_{\max} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = b = c = 1$	0,25

---------------**Hết**----------------