

Chủ đề 4: PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

I. MỘT SỐ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

1. Phương trình dạng: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{dx^2 + ex + f}$

Để giải phương trình:

Ta làm như sau: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{dx^2 + ex + f}$

Bước 1: Bình phương hai vế, rút gọn rồi giải phương trình bậc 2 hoặc bậc nhất.

Bước 2: Thử lại các giá trị x tìm được có thỏa phương trình ban đầu hay không? Sau đó kết luận nghiệm

Hoặc $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{dx^2 + ex + f} \Leftrightarrow \begin{cases} ax^2 + bx + c \geq 0 \text{ hoặc chọn } dx^2 + ex + f \geq 0 \\ ax^2 + bx + c = dx^2 + ex + f \end{cases}$

Câu 1: Giải phương trình $\sqrt{2x^2 - 4x - 2} = \sqrt{x^2 - x - 2}$.

Câu 2: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{3x^2 - 6x + 1} = \sqrt{-2x^2 - 9x + 1}$;

b) $\sqrt{2x^2 - 3x - 5} = \sqrt{x^2 - 7}$.

2. Phương trình dạng: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = dx + e$

Để giải phương trình:

Ta làm như sau: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = dx + e$

Bước 1: Bình phương hai vế, rút gọn rồi giải phương trình bậc 2 hoặc bậc nhất.

Bước 2: Thử lại các giá trị x tìm được có thỏa phương trình ban đầu hay không? Sau đó kết luận nghiệm

Hoặc $\sqrt{ax^2 + bx + c} = dx + e \Leftrightarrow \begin{cases} dx + e \geq 0 \\ ax^2 + bx + c = (dx + e)^2 \end{cases}$

Câu 3: Giải phương trình $\sqrt{2x^2 - 5x - 9} = x - 1$

Câu 4: Giải các phương trình sau:

b) $\sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - x$

b) $\sqrt{3x^2 - 13x + 14} = x - 3$

Câu 5: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{3x^2 - 4x - 1} = \sqrt{2x^2 - 4x + 3}$;

b) $\sqrt{x^2 + 2x - 3} = \sqrt{-2x^2 + 5}$;

c) $\sqrt{2x^2 + 3x - 3} = \sqrt{-x^2 - x + 1}$;

d) $\sqrt{-x^2 + 5x - 4} = \sqrt{-2x^2 + 4x + 2}$.

Câu 6: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{6x^2 + 13x + 13} = 2x + 4$;

b) $\sqrt{2x^2 + 5x + 3} = -3 - x$;

c) $\sqrt{3x^2 - 17x + 23} = x - 3$;

d) $\sqrt{-x^2 + 2x + 4} = x - 2$.

Câu 7: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x - 1} = x - 3$;

b) $\sqrt{-x^2 + 9x - 5} = x$;

c) $\sqrt{3x^2 + 6x + 3} = 2x + 1$;

d) $\sqrt{2x^2 - 3x + 1} = x - 1$;

e) $\sqrt{3 - 3x - x^2} = x$;

f) $\sqrt{3x^2 - 4x + 4} = 3x + 2$.

Câu 8: Giải các phương trình sau:

a) $(x^2 - 4x + 3)\sqrt{x - 2} = 0$;

b) $(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x - 3} = 0$.

Câu 9: Giải các phương trình sau:

a) $(x+3)\sqrt{10-x^2} = x^2 - x - 12$;

b) $(x-1)\sqrt{5x+1} = x^2 - 1$.

Câu 10: Giải các phương trình sau:

a) $2\sqrt{x^2 - 8x} = x^2 - 8x - 3$;

b) $(x-1)(x-3) + 3\sqrt{x^2 - 4x + 5} - 2 = 0$;

c) $(x+4)(x+1) - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 6$;

d) $x^2 - 2x - 8 = 4\sqrt{(4-x)(x+2)}$;

e) $x(x+5) = 2\sqrt[3]{x^2 + 5x - 2} - 2$.

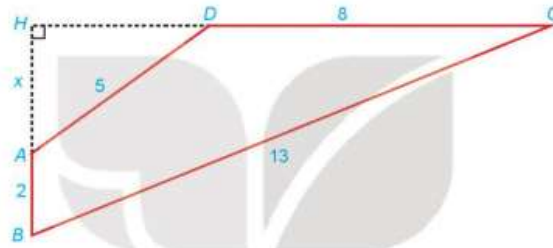
Câu 11: Tìm m để phương trình $(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x-m} = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

Câu 12: Tìm tham số m để phương trình $(x^2 - x)\sqrt{x-m} = 0$ chỉ có một nghiệm.

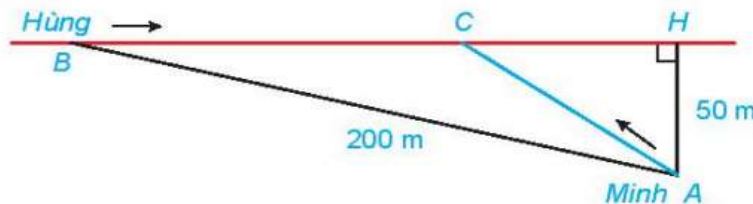
Câu 13: Tìm m để phương trình $\sqrt{x^2 - x + m} = \sqrt{x-1}$ có duy nhất một nghiệm.

Câu 14: Tìm m để phương trình $\sqrt{2x^2 - 2x + m} = x + 1$ có hai nghiệm phân biệt.

Câu 15: Cho tứ giác $ABCD$ có $AB \perp CD$; $AB = 2$; $BC = 13$; $CD = 8$; $DA = 5$. Gọi H là giao điểm của AB và CD và đặt $x = AH$. Hãy thiết lập một phương trình để tính độ dài x , từ đó tính diện tích tứ giác $ABCD$.



Câu 16: Hằng ngày bạn Hùng đều đón bạn Minh đi học tại một vị trí trên lề đường thẳng đến trường. Minh đứng tại vị trí A cách lề đường một khoảng 50m để chờ Hùng. Khi nhìn thấy Hùng đạp xe đến địa điểm B, cách mình một đoạn 200m thì Minh bắt đầu đi bộ ra lề đường để bắt kịp xe. Vận tốc đi bộ của Minh là 5km/h, vận tốc xe đạp của Hùng là 15km/h. Hãy xác định vị trí C trên lề đường (Hình vẽ) để hai bạn gặp nhau mà không bạn nào phải chờ người kia (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 17: Nghiệm của phương trình $\sqrt{2x-1} = \sqrt{3-x}$ là

A. $x = \frac{3}{4}$.

B. $x = \frac{2}{3}$.

C. $x = \frac{4}{3}$.

D. $x = \frac{3}{2}$.

Câu 18: Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{2x-3} = x-3$ là

A. $T = [2; 6]$.

B. $T = \emptyset$.

C. $T = \{6\}$.

D. $T = \{2; 6\}$.

Câu 19: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình và $\sqrt{x^2 - 3x + 2} = \sqrt{x+2}$ là

A. 3.

B. 4.

C. -1.

D. -3.

- Câu 20:** Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{3-x} = \sqrt{x+2}$ là
 A. $S = \emptyset$. B. $S = \left\{-2; \frac{1}{2}\right\}$. C. $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$. D. $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.
- Câu 21:** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 + 4x - 1} = x - 3$ là
 A. Vô số. B. 0. C. 1. D. 2.
- Câu 22:** Nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 - 7x + 10} = x - 4$ thuộc tập nào dưới đây?
 A. $(4; 5]$. B. $[5; 6)$. C. $(5; 6)$. D. $[5; 6]$.
- Câu 23:** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{2x^2 - 14x + x} = 3$ là
 A. Vô số. B. 0. C. 1. D. 2.
- Câu 24:** Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x-2}(x^2 - 4x + 3) = 0$ là
 A. $S = \{2; 3\}$. B. $S = \{2\}$. C. $S = \{1; 3\}$. D. $S = \{1; 2; 3\}$.
- Câu 25:** Phương trình $x(x^2 - 1)\sqrt{x-1} = 0$ có bao nhiêu nghiệm?
 A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.
- Câu 26:** Số nghiệm của phương trình $\frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-1}} = 0$ là
 A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.
- Câu 27:** Số nghiệm của phương trình $x(x^2 - 4)\sqrt{2x-3} = 0$ là
 A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.
- Câu 28:** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x-2}(x^2 - 3x + 2) = 0$ là
 A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.
- Câu 29:** Số nghiệm của phương trình $(x^2 - 16)\sqrt{3-x} = 0$ là
 A. 1. B. 3. C. 0. D. 2.
- Câu 30:** Tổng các nghiệm của phương trình $(x-3)\sqrt{2x+6} = x^2 - 9$ bằng
 A. 2. B. 3. C. 1. D. 7.
- Câu 31:** Phương trình $\sqrt{x^2 - 1}(\sqrt{2x+1} - x) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?
 A. 1. B. 4. C. 3. D. 2.
- Câu 32:** Phương trình $(x^2 - 6x)\sqrt{17 - x^2} = x^2 - 6x$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?
 A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.
- Câu 33:** Tìm tập hợp nghiệm của phương trình $\sqrt{3-x} = \sqrt{x+2} + 1$.
 A. $\{2\}$. B. $\{1; -2\}$. C. $\{-1; 2\}$. D. $\{-1\}$.
- Câu 34:** Số nghiệm nguyên của phương trình sau $\sqrt{x+3} - \sqrt{2x-1} = 1$ là:
 A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.
- Câu 35:** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{3x+1} - \sqrt{2-x} = 1$ là
 A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.
- Câu 36:** Số nghiệm của phương trình $x^2 + 2x + 2x\sqrt{x+3} = 6\sqrt{1-x} + 7$ là
 A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

- Câu 37:** Tổng các nghiệm của phương trình $(x-1)\sqrt{10-x^2} = x^2 - 3x + 2$ bằng
 A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.
- Câu 38:** Biết phương trình $(x-2)\sqrt{x^2+2x+2} = 2x^2+x-10$ có 2 nghiệm phân biệt $x=2$ và $x = \frac{a+b\sqrt{3}}{3}; a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $S = a^2 + b^2$.
 A. 81. B. 90. C. 85. D. 91.
- Câu 39:** Nếu đặt $t = \sqrt{x-1}$ thì phương trình $x-2+\sqrt{x-1}=0$ trở thành phương trình nào trong các phương trình sau?
 A. $t^2+t-1=0$. B. $t^2+t=0$. C. $t^2+t-2=0$. D. $t^2-2t=0$.
- Câu 40:** Cho phương trình $\sqrt{x^2+3x+5}-2x^2-6x+5=0$. Nếu đặt $t = \sqrt{x^2+3x+5}$ thì phương trình đã cho trở thành phương trình nào dưới đây?
 A. $-2t^2-t+15=0$. B. $2t^2-t-15=0$. C. $t^2-t-5=0$. D. $-t^2+t+5=0$.
- Câu 41:** Tổng các nghiệm của phương trình $x^2-4\sqrt{x^2-3x+27}=3x-22$ bằng
 A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
- Câu 42:** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2-2x+5}=x^2-2x+3$ là
 A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.
- Câu 43:** Số nghiệm của phương trình $x^2-3x+86-19\sqrt{x^2-3x+16}=0$ là.
 A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.
- Câu 44:** Tích của các nghiệm của phương trình $3x^2+9x+5+2\sqrt{x^2+3x+3}=1$ bằng
 A. -2. B. 2. C. -3. D. 3.
- Câu 45:** Cho phương trình: $x^2+5x+2+2\sqrt{x^2+5x+10}=0$. Đặt $t = \sqrt{x^2+5x+10}$ thì phương trình trở thành phương trình nào sau đây?
 A. $t^2+2t-10=0$. B. $t^2+2t+2=0$. C. $t^2+2t-8=0$. D. $t^2+2t+8=0$.
- Câu 46:** Phương trình: $2x^2+5x-1=7\sqrt{x^3-1}$ có nghiệm là $a \pm \sqrt{b}$ thì $2a-b$ bằng
 A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.
- Câu 47:** Số nghiệm của phương trình $x^2-3x+86-19\sqrt{x^2-3x+16}=0$ là.
 A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.
- Câu 48:** Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $x^2+5x+2+2\sqrt{x^2+5x+10}=0$ là
 A. 5. B. 13. C. 10. D. 25.
- Câu 49:** Tổng các bình phương các nghiệm của phương trình $(x-1)(x-3)+3\sqrt{x^2-4x+5}-2=0$ là:
 A. 17. B. 4. C. 16. D. 8.
- Câu 50:** Biết phương trình $x^2+4x+3=(x+1)\sqrt{8x+5}+\sqrt{6x+2}$ có một nghiệm dạng $x=a+\sqrt{b}$ với $a, b > 0$. Tính $a+b$.
 A. 7. B. 5. C. 4. D. 6.
- Câu 51:** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(x-1)\sqrt{x-m}=0$ có hai nghiệm phân biệt.
 A. $m \in (-\infty; 1)$. B. $m \in (1; +\infty)$. C. $m \in [1; +\infty)$. D. $m \in (-\infty; 1]$.

- Câu 52:** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\frac{2(x-m)-x-m}{\sqrt{x+3}}=0$ có nghiệm.
A. $m \in (-\infty; -1)$. **B.** $m \in (-1; +\infty)$. **C.** $m \in [-1; +\infty)$. **D.** $m \in \mathbb{R}$.
- Câu 53:** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(x^2-4x)\sqrt{x-m}=0$ có ba nghiệm phân biệt.
A. $m \in (-\infty; 0)$. **B.** $m \in (0; +\infty)$. **C.** $m \in [0; +\infty)$. **D.** $m \in (-\infty; 0]$.
- Câu 54:** Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt{x^2-x+m}=\sqrt{x+1}$ có hai nghiệm phân biệt là
A. 4. **B.** 0. **C.** Vô số. **D.** 3.
- Câu 55:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt{2x+m}=x-1$ có 2 nghiệm phân biệt?
A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.
- Câu 56:** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sqrt{2x^2-2x-2m}=x-2$ có nghiệm.
A. $m \leq 1$. **B.** $m \in (1; +\infty)$. **C.** $m > 2$. **D.** $m \geq 2$.
- Câu 57:** Giá trị của tham số m để phương trình $\sqrt{2x^2-x-2m}=x+2$ có 2 nghiệm phân biệt là $m \in (a; b]$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $S = a + b$.
A. $S = -\frac{1}{8}$. **B.** $S = \frac{81}{8}$. **C.** $S = 5$. **D.** $S = \frac{41}{8}$.
- Câu 58:** Tìm tất cả các giá trị m để phương trình $\sqrt{x^2-2x+3m-2}=x+2$ có nghiệm.
A. $m \geq -2$. **B.** $m > -2$. **C.** $m > 2$. **D.** $m \geq 2$.
- Câu 59:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^2-4\sqrt{x^2+1}-(m-1)=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \sqrt{15})$?
A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 0.
- Câu 60:** Có bao nhiêu giá trị m nguyên để phương trình $4(\sqrt{x+3}+\sqrt{3-x})+2\sqrt{-x^2+9}+m-1=0$ có nghiệm?
A. 9. **B.** 11. **C.** 5. **D.** 10.
- Câu 61:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}+2\sqrt{4-x^2}+m=0$ có nghiệm?
A. 4. **B.** 5. **C.** Vô số. **D.** 10.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

I. MỘT SỐ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

Câu 1: Giải phương trình $\sqrt{2x^2-4x-2}=\sqrt{x^2-x-2}$.

Lời giải:

Bình phương hai vế của phương trình ta được: $2x^2-4x-2=x^2-x-2$

Sau khi thu gọn ta được $x^2-3x=0$

Từ đó tìm được $x=0$ hoặc $x=3$

Thay lần lượt hai giá trị này của x vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có $x=3$ thỏa mãn.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=3$.

Câu 2: Giải các phương trình sau:

c) $\sqrt{3x^2 - 6x + 1} = \sqrt{-2x^2 - 9x + 1}$

b) $\sqrt{2x^2 - 3x - 5} = \sqrt{x^2 - 7}$

Lời giải:

a) $\sqrt{3x^2 - 6x + 1} = \sqrt{-2x^2 - 9x + 1}$

Bình phương hai vế của phương trình ta được $3x^2 - 6x + 1 = -2x^2 - 9x + 1$.

Sau khi thu gọn ta được $5x^2 + 3x = 0$.

Từ đó tìm được $x = 0$ hoặc $x = -\frac{3}{5}$.

Thay lần lượt hai giá trị này của x vào phương trình đã cho, ta thấy $x = 0$ và $x = -\frac{3}{5}$ thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{0; -\frac{3}{5}\right\}$

b) $\sqrt{2x^2 - 3x - 5} = \sqrt{x^2 - 7}$

Bình phương hai vế của phương trình ta được $2x^2 - 3x - 5 = x^2 - 7$.

Sau khi thu gọn ta được $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Từ đó tìm được $x = 1$ hoặc $x = 2$.

Thay lần lượt hai giá trị này của x vào phương trình đã cho, ta thấy không có giá trị nào thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \emptyset$.

2. Phương trình dạng: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = dx + e$

Để giải phương trình:

Ta làm như sau: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = dx + e$

Bước 1: Bình phương hai vế, rút gọn rồi giải phương trình bậc 2 hoặc bậc nhất.

Bước 2: Thử lại các giá trị x tìm được có thỏa phương trình ban đầu hay không? Sau đó kết luận nghiệm

Hoặc $\sqrt{ax^2 + bx + c} = dx + e \Leftrightarrow \begin{cases} dx + e \geq 0 \\ ax^2 + bx + c = (dx + e)^2 \end{cases}$

Câu 3: Giải phương trình $\sqrt{2x^2 - 5x - 9} = x - 1$

Lời giải:

Bình phương hai vế của phương trình ta được:

$$2x^2 - 5x - 9 = x^2 - 2x + 1.$$

Sau khi thu gọn ta được $x^2 - 3x - 10 = 0$.

Từ đó tìm được $x = -2$ hoặc $x = 5$.

Thay lần lượt hai giá trị này của x vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có $x = 5$ thỏa mãn.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 5$.

Câu 4: Giải các phương trình sau:

d) $\sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - x$

b) $\sqrt{3x^2 - 13x + 14} = x - 3$

Lời giải:

c) Bình phương hai vế của phương trình ta được $2x^2 + x + 3 = 1 - 2x + x^2$

Sau khi thu gọn ta được $x^2 + 3x + 2 = 0$

Từ đó tìm được $x = -1$ hoặc $x = -2$

Thay lần lượt hai giá trị này của x vào phương trình đã cho, ta thấy $x = -1$ hoặc $x = -2$ thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{-1; -2\}$.

d) Bình phương hai vế của phương trình ta được $3x^2 - 13x + 14 = x^2 - 6x + 9$.

Sau khi thu gọn ta được $2x^2 - 7x + 5 = 0$.

Từ đó tìm được $x = 1$ hoặc $x = \frac{5}{2}$.

Thay lần lượt hai giá trị này của x vào phương trình đã cho, ta thấy không có giá trị nào thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \emptyset$.

***Chú ý: Một số dạng phương trình chứa ẩn dưới dấu căn khác**

$$1) \text{ Dạng: } \sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases} \quad 2) \text{ Dạng: } \sqrt{A} + \sqrt{B} = \sqrt{C} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0; B \geq 0 \\ A + B + 2\sqrt{AB} = C \end{cases}$$

$$3) \text{ Dạng: } \sqrt{A} + \sqrt{B} = \sqrt{C} + \sqrt{D}.$$

* Nếu $A+B = C+D$ (hoặc $A.B = C.D$) thì bình phương 2 vế ta được phương trình tương đương.

* Nếu $A+C = B+D$ (hoặc $A.C = B.D$) thì phải đưa phương trình về dạng:

$$\sqrt{A} - \sqrt{C} = \sqrt{D} - \sqrt{B}$$

sau đó bình phương hai vế, tìm nghiệm sau đó thử lại để chọn nghiệm.

$$4) \text{ Dạng: } \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{C}$$

* Lập phương hai vế ta được: $A + B + 3\sqrt[3]{AB}(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}) = C$.

Sau đó thay thế: $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{C}$ vào phương trình, ta được: $A + B + 3\sqrt[3]{ABC} = C$

Chú ý: Sự thay thế này có thể dẫn đến nghiệm ngoại lai, vì vậy phải thử lại nghiệm.

Câu 5: Giải các phương trình sau:

$$a) \sqrt{3x^2 - 4x - 1} = \sqrt{2x^2 - 4x + 3};$$

$$b) \sqrt{x^2 + 2x - 3} = \sqrt{-2x^2 + 5};$$

$$c) \sqrt{2x^2 + 3x - 3} = \sqrt{-x^2 - x + 1};$$

$$d) \sqrt{-x^2 + 5x - 4} = \sqrt{-2x^2 + 4x + 2}.$$

Lời giải:

$$a) \sqrt{3x^2 - 4x - 1} = \sqrt{2x^2 - 4x + 3}$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 4x - 1 = 2x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Thay lần lượt hai giá trị này của x vào phương trình đã cho, ta thấy cả hai đều thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{-2; 2\}$.

$$b) \sqrt{x^2 + 2x - 3} = \sqrt{-2x^2 + 5}$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 3 = -2x^2 + 5 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ x = -2 \end{cases}$$

Thay lần lượt hai giá trị này của x vào phương trình đã cho, ta thấy $x = \frac{4}{3}$ thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{ \frac{4}{3} \right\}$.

$$c) \sqrt{2x^2 + 3x - 3} = \sqrt{-x^2 - x + 1}$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 3x - 3 = -x^2 - x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = -2 \end{cases}$$

Thay lần lượt hai giá trị này của x vào phương trình đã cho, ta thấy cả hai giá trị này không thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \emptyset$.

$$d) \sqrt{-x^2 + 5x - 4} = \sqrt{-2x^2 + 4x + 2}$$

$$\Rightarrow -x^2 + 5x - 4 = -2x^2 + 4x + 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

Thay lần lượt hai giá trị này của x vào phương trình đã cho, ta thấy $x = 2$ thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{2\}$.

Câu 6: Giải các phương trình sau:

$$a) \sqrt{6x^2 + 13x + 13} = 2x + 4;$$

$$b) \sqrt{2x^2 + 5x + 3} = -3 - x;$$

$$c) \sqrt{3x^2 - 17x + 23} = x - 3;$$

$$d) \sqrt{-x^2 + 2x + 4} = x - 2.$$

Lời giải:

$$a) \sqrt{6x^2 + 13x + 13} = 2x + 4$$

$$\Rightarrow 6x^2 + 13x + 13 = 4x^2 + 16x + 16 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{33}}{4} \\ x = \frac{3 - \sqrt{33}}{4} \end{cases}$$

Thay lần lượt hai giá trị này của x vào phương trình đã cho, ta thấy cả hai đều thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{ \frac{3 \pm \sqrt{33}}{4} \right\}$

$$b) \sqrt{2x^2 + 5x + 3} = -3 - x$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 5x + 3 = 9 + 6x + x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

Thay lần lượt hai giá trị này của x vào phương trình đã cho, ta thấy cả hai giá trị này không thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \emptyset$

$$c) \sqrt{3x^2 - 17x + 23} = x - 3$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 17x + 23 = x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow 2x^2 - 11x + 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Thay lần lượt hai giá trị này của x vào phương trình đã cho, ta thấy $x = \frac{7}{2}$ thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{ \frac{7}{2} \right\}$

$$d) \sqrt{-x^2 + 2x + 4} = x - 2$$

$$\Rightarrow -x^2 + 2x + 4 = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Thay lần lượt hai giá trị này của x vào phương trình đã cho, ta thấy $x = 3$ thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{3\}$.

Câu 7: Giải các phương trình sau:

$$a) \sqrt{x-1} = x-3;$$

$$b) \sqrt{-x^2 + 9x - 5} = x;$$

$$c) \sqrt{3x^2 + 6x + 3} = 2x + 1;$$

$$d) \sqrt{2x^2 - 3x + 1} = x - 1;$$

$$e) \sqrt{3-3x-x^2} = x;$$

$$f) \sqrt{3x^2 - 4x + 4} = 3x + 2.$$

Lời giải:

$$a) \sqrt{x-1} = x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-1 = (x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \begin{cases} x = 5 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 5$.

$$b) \text{Ta có } \sqrt{-x^2 + 9x - 5} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ -x^2 + 9x - 5 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2 - 9x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{41}}{4}.$$

Vậy phương trình trên có 2 nghiệm.

$$c) \text{Ta có: } \sqrt{3x^2 + 6x + 3} = 2x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ 3x^2 + 6x + 3 = 4x^2 + 4x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x^2 - 2x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ \begin{cases} x = 1 - \sqrt{3} (l) \\ x = 1 + \sqrt{3} (n) \end{cases} \end{cases}$$

$$d) \sqrt{2x^2 - 3x + 1} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2x^2 - 3x + 1 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

$$e) \text{Ta có } \sqrt{3-3x-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 3-3x-x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2 + 3x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-3 + \sqrt{33}}{4}$$

Vậy phương trình trên chỉ có 1 nghiệm.

$$f) \text{Ta có: } \sqrt{3x^2 - 4x + 4} = 3x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 - 4x + 4 = (3x + 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{2}{3} \\ 6x^2 + 16x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{2}{3} \\ x = 0, x = -\frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{0\}$.

Câu 8: Giải các phương trình sau:

a) $(x^2 - 4x + 3)\sqrt{x-2} = 0$; b) $(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-3} = 0$.

Lời giải:

a) ĐK: $x \geq 2$.

$$pt \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 (l) \\ x = 3 (tm) \\ x = 2 (tm) \end{cases}$$

b) ĐK: $x \geq 3$.

$$Ta \text{ có: } (x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \Leftrightarrow x = 3. \\ x = 3 \end{cases}$$

Câu 9: Giải các phương trình sau:

a) $(x+3)\sqrt{10-x^2} = x^2 - x - 12$; b) $(x-1)\sqrt{5x+1} = x^2 - 1$.

Lời giải:

a) Điều kiện: $10 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}$.

$$Khi \text{ đó: } (x+3)\sqrt{10-x^2} = x^2 - x - 12$$

$$\Leftrightarrow (x+3)\sqrt{10-x^2} = (x+3)(x-4) \Leftrightarrow (x+3)(\sqrt{10-x^2} - x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ \sqrt{10-x^2} = x - 4 \end{cases}$$

Vì phương trình $\sqrt{10-x^2} = x - 4$ vô nghiệm với mọi x thoả $-\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}$.

Vậy $x = -3$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

b) ĐK: $x \geq -\frac{1}{5}$.

$$Phương \text{ trình } (x-1)\sqrt{5x+1} = x^2 - 1 \Leftrightarrow (x-1)(\sqrt{5x+1} - x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \sqrt{5x+1} = x + 1 (*) \end{cases}$$

$$Phương \text{ trình } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 5x+1 = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là: $x = 0; x = 1; x = 3$.

Câu 10: Giải các phương trình sau:

- a) $2\sqrt{x^2 - 8x} = x^2 - 8x - 3$; b) $(x-1)(x-3) + 3\sqrt{x^2 - 4x + 5} - 2 = 0$;
 c) $(x+4)(x+1) - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 6$; d) $x^2 - 2x - 8 = 4\sqrt{(4-x)(x+2)}$;
 e) $x(x+5) = 2\sqrt[3]{x^2 + 5x - 2} - 2$.

Lời giải:

a) Đặt $t = \sqrt{x^2 - 8x}$, $t \geq 0$. Pt: $2t = t^2 - 3 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 (L) \\ t = 3 (N) \end{cases}$.

Với $t = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 8x} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 8x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = -1 \end{cases}$.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình bằng 8.

b) $(x-1)(x-3) + 3\sqrt{x^2 - 4x + 5} - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 + 3\sqrt{x^2 - 4x + 5} - 2 = 0$

Đặt $\sqrt{x^2 - 4x + 5} = t (t \geq 0)$ ta được phương trình:

$t^2 - 2 + 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 (TM) \\ t = -4 (L) \end{cases}$

Với $t = 1$, ta được $\sqrt{x^2 - 4x + 5} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy tổng bình phương nghiệm của phương trình trên là 4.

c) Ta có $(x+4)(x+1) - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 6$

$\Leftrightarrow x^2 + 5x - 2 - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 0$.

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 5x + 2} (t \geq 0)$. Khi đó, phương trình trở thành: $t^2 - 4 - 3t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 (l) \\ t = 4 (n) \end{cases}$.

+) Với $t = 4$: $\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 4 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 2 = 16 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -7 \end{cases}$.

d) Đặt $t = \sqrt{-x^2 + 2x + 8} (t \geq 0)$, khi đó phương trình trở thành: $-t^2 = 4t \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -4 (L) \end{cases}$.

Với $t = 0$: $\sqrt{-x^2 + 2x + 8} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases}$.

e) Đặt $t = \sqrt[3]{x^2 + 5x - 2}$ ta được phương trình: $t^3 + 2 = 2t - 2 \Leftrightarrow t^3 - 2t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = -2$

Với $t = -2$: $\sqrt[3]{x^2 + 5x - 2} = -2 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -3 \end{cases}$.

Câu 11: Tìm m để phương trình $(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x - m} = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

Lời giải:

Phương trình tương đương: $\begin{cases} x \geq m \\ x = m \\ x^2 + 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ x = m \\ x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$.

Phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-3 \leq m < -1$.

Câu 12: Tìm tham số m để phương trình $(x^2 - x)\sqrt{x - m} = 0$ chỉ có một nghiệm.

Lời giải:

Điều kiện $x \geq m(1)$.

$$(x^2 - x)\sqrt{x - m} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ x - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = m \text{ (tm(1))} \end{cases}.$$

Phương trình luôn có nghiệm $x = m$. Để phương trình có nghiệm duy nhất thì $x = m \geq 1$.

Câu 13: Tìm m để phương trình $\sqrt{x^2 - x + m} = \sqrt{x - 1}$ có duy nhất một nghiệm.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \sqrt{x^2 - x + m} = \sqrt{x - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x^2 - x + m = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ m = -x^2 + 2x + 1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên $y = -x^2 + 2x + 1$ trên $[-1; +\infty)$:

x	-1	1	$+\infty$
y	-2	2	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \in (-\infty; -2) \cup \{2\}$.

Câu 14: Tìm m để phương trình $\sqrt{2x^2 - 2x + m} = x + 1$ có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải:

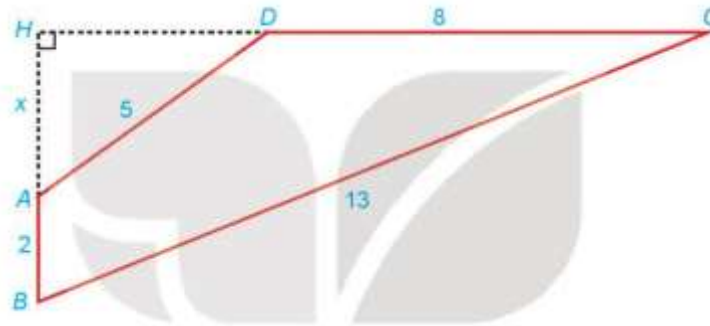
$$\text{Ta có: } \sqrt{2x^2 - 2x + m} = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 2x^2 - 2x + m = (x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ m = -x^2 + 4x + 1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên $y = -x^2 + 4x + 1$ trên $[-1; +\infty)$:

x	-1	2	$+\infty$
y	-4	5	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \in [-4; 5)$.

Câu 15: Cho tứ giác $ABCD$ có $AB \perp CD$; $AB = 2$; $BC = 13$; $CD = 8$; $DA = 5$. Gọi H là giao điểm của AB và CD và đặt $x = AH$. Hãy thiết lập một phương trình để tính độ dài x , từ đó tính diện tích tứ giác $ABCD$.



Lời giải:

+) Sử dụng định lý Pytago để tìm x .

Ta có: $HD = \sqrt{25 - x^2}$. Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ 25 - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 5 \quad (*)$

Xét tam giác vuông BHC , ta có $HB^2 + HC^2 = BC^2$

$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + (\sqrt{25 - x^2} + 8)^2 = 13^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + 25 - x^2 + 16\sqrt{25 - x^2} + 64 - 169 = 0$$

$$\Leftrightarrow 16\sqrt{25 - x^2} = 76 - 4x \Leftrightarrow 4\sqrt{25 - x^2} = 19 - x \quad (1)$$

Bình phương hai vế của phương trình ta được $16(25 - x^2) = 361 - 38x + x^2$

$$\text{Sau khi thu gọn ta được } 17x^2 - 38x - 39 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{-13}{17} \end{cases}$$

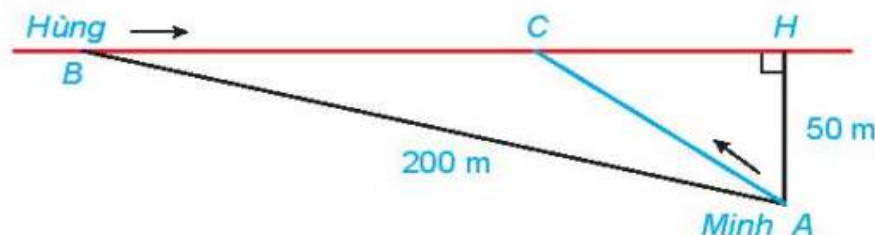
Thay lần lượt hai giá trị này của x vào phương trình (1) và kết hợp với điều kiện (*), ta thấy $x = 3$ thỏa mãn.

+) Để tính diện tích tứ giác $ABCD$, ta áp dụng công thức tính diện tích tam giác cho $\triangle BHC$, $\triangle AHD$.

Ta có $HB = 5$, $HC = 12$, $HA = 3$, $HD = 4$.

$$S_{ABCD} = S_{BHC} - S_{AHD} = \frac{1}{2} \cdot HB \cdot HC - \frac{1}{2} \cdot HA \cdot HD = \frac{1}{2} (5 \cdot 12 - 3 \cdot 4) = 24.$$

Câu 16: Hằng ngày bạn Hùng đều đón bạn Minh đi học tại một vị trí trên lề đường thẳng đến trường. Minh đứng tại vị trí A cách lề đường một khoảng $50m$ để chờ Hùng. Khi nhìn thấy Hùng đạp xe đến địa điểm B , cách mình một đoạn $200m$ thì Minh bắt đầu đi bộ ra lề đường để bắt kịp xe. Vận tốc đi bộ của Minh là $5km/h$, vận tốc xe đạp của Hùng là $15km/h$. Hãy xác định vị trí C trên lề đường (Hình vẽ) để hai bạn gặp nhau mà không bạn nào phải chờ người kia (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Lời giải:

Vận tốc của bạn Minh: $v_1 = 5(km/h)$.

Vận tốc của bạn Hùng: $v_2 = 15(km/h)$.

Áp dụng định lý Pithago vào tam giác vuông AHB : $BH = \sqrt{(0,2)^2 - (0,05)^2} = \frac{\sqrt{15}}{20} (km)$

Gọi $BC = x(km)$, $x > 0$.

Suy ra: $CH = \frac{\sqrt{15}}{20} - x$, $x \leq \frac{\sqrt{15}}{20}$.

Ta cần xác định vị trí điểm C để Minh và Hùng gặp nhau mà không bạn nào phải chờ người kia

Nghĩa là: ta cần tìm x để thời gian hai bạn di chuyển đến C là bằng nhau.

Thời gian Hùng đi từ B đến C là: $t_2 = \frac{S_{BC}}{v_2} = \frac{x}{15}(h)$.

Quãng đường AC mà Minh đã đi là: $AC = \sqrt{CH^2 + AH^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{15}}{20} - x\right)^2 + (0,05)^2}$

Thời gian Minh đã đi từ A đến C là: $t_1 = \frac{S_{AC}}{v_1} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{15}}{20} - x\right)^2 + (0,05)^2}}{5}(h)$.

Theo yêu cầu bài toán: $\frac{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{15}}{20} - x\right)^2 + (0,05)^2}}{5} = \frac{x}{15}$

Bình phương 2 vế: $\frac{\left(\frac{\sqrt{15}}{20} - x\right)^2 + (0,05)^2}{25} = \frac{x^2}{225}$

$\Leftrightarrow 9\left(\frac{3}{80} - \frac{\sqrt{15}}{10}x + x^2\right) + \frac{9}{400} = x^2 \Leftrightarrow 8x^2 - \frac{9\sqrt{15}}{10}x + \frac{9}{25} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx 0,3 \\ x \approx 0,1 \end{cases}$

Vì $0 < x \leq \frac{\sqrt{15}}{20} \approx 0,19$ nên $x \approx 0,1$ thỏa mãn.

Vậy hai bạn Minh và Hùng di chuyển đến vị trí C cách điểm B một đoạn $x \approx 0,1(km) = 100(m)$.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 17: Nghiệm của phương trình $\sqrt{2x-1} = \sqrt{3-x}$ là

A. $x = \frac{3}{4}$.

B. $x = \frac{2}{3}$.

C. $x = \frac{4}{3}$.

D. $x = \frac{3}{2}$.

Lời giải:

Thay các nghiệm x vào phương trình thấy $x = \frac{4}{3}$ là nghiệm.

Câu 18: Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{2x-3} = x-3$ là

A. $T = [2; 6]$.

B. $T = \emptyset$.

C. $T = \{6\}$.

D. $T = \{2; 6\}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } \sqrt{2x-3} = x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 2x-3 = (x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 8x + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x = 2 \Leftrightarrow x = 6 \\ x = 6 \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $T = \{6\}$.

Câu 19: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình và $\sqrt{x^2-3x+2} = \sqrt{x+2}$ là

A. 3.

B. 4.

C. -1.

D. -3.

Lời giải:

$$\text{Ta có } \sqrt{x^2-3x+2} = \sqrt{x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2-3x+2 = x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2-4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{0; 4\}$ nên tổng các nghiệm là 4.

Câu 20: Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{3-x} = \sqrt{x+2}$ là

A. $S = \emptyset$.

B. $S = \left\{-2; \frac{1}{2}\right\}$.

C. $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

D. $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \sqrt{3-x} = \sqrt{x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 3-x = x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Câu 21: Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2+4x-1} = x-3$ là

A. Vô số.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \sqrt{x^2+4x-1} = x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x^2+4x-1 = x^2-6x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x = 1 \end{cases} \text{ (vô nghiệm).}$$

Câu 22: Nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2-7x+10} = x-4$ thuộc tập nào dưới đây?

A. $(4; 5]$.

B. $[5; 6]$.

C. $(5; 6)$.

D. $[5; 6]$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \sqrt{x^2-7x+10} = x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 \geq 0 \\ x^2-7x+10 = (x-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6 \in [5; 6].$$

Câu 23: Số nghiệm của phương trình $\sqrt{2x^2-14x} + x = 3$ là

A. Vô số.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2 - 14x} + x = 3 &\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 14x} = 3 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ 2x^2 - 14x = (3 - x)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ 2x^2 - 14x = 9 - 6x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x^2 - 8x - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ \begin{cases} x = 9 \text{ (loại)} \\ x = -1 \text{ (nhận)} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = -1. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = -1$.

Câu 24: Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x-2}(x^2 - 4x + 3) = 0$ là

- A.** $S = \{2; 3\}$. **B.** $S = \{2\}$. **C.** $S = \{1; 3\}$. **D.** $S = \{1; 2; 3\}$.

Lời giải:

Điều kiện: $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ (*).

Với điều kiện (*), phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

So với điều kiện (*) chỉ có $x = 2$, $x = 3$ thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{2; 3\}$.

Câu 25: Phương trình $x(x^2 - 1)\sqrt{x-1} = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

- A.** 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải:

Điều kiện $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

$$\text{Ta có } x(x^2 - 1)\sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy $S = \{1\}$.

Câu 26: Số nghiệm của phương trình $\frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-1}} = 0$ là

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải:

Điều kiện $x \geq 3$.

$$\text{Khi đó pt} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ \sqrt{x-3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases} \text{ Kết hợp với điều kiện suy ra phương trình có nghiệm}$$

duy nhất $x = 3$.

Câu 27: Số nghiệm của phương trình $x(x^2 - 4)\sqrt{2x-3} = 0$ là

- A.** 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải:

$$\text{Ta có } x(x^2 - 4)\sqrt{2x - 3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x = 0 \\ x = \pm 2 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = 2 \end{cases}.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 28: Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x-2}(x^2 - 3x + 2) = 0$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải:

Điều kiện xác định: $x \geq 2$ (*)

$$\text{Ta có: } \sqrt{x-2}(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \text{ (T/M)} \\ x=1 \text{ (KTM)} \\ x=2 \text{ (T/M)} \end{cases} \Leftrightarrow x=2$$

Vậy phương trình (1) có một nghiệm $x = 2$.

Câu 29: Số nghiệm của phương trình $(x^2 - 16)\sqrt{3-x} = 0$ là

A. 1.

B. 3.

C. 0.

D. 2.

Lời giải:

+ Điều kiện $x \leq 3$ (*).

$$\text{Phương trình } (x^2 - 16)\sqrt{3-x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 16 = 0 \\ \sqrt{3-x} = 0 \end{cases}.$$

+ $x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -4 \end{cases}$ so sánh điều kiện (*) suy ra $x = -4$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

+ $\sqrt{3-x} = 0 \Leftrightarrow x = 3$ thỏa mãn điều kiện (*) suy ra $x = 3$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Câu 30: Tổng các nghiệm của phương trình $(x-3)\sqrt{2x+6} = x^2 - 9$ bằng

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 7.

Lời giải:

Điều kiện xác định của phương trình: $2x+6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$

$$\text{Ta có } (x-3)\sqrt{2x+6} = x^2 - 9 \Leftrightarrow (x-3)(\sqrt{2x+6} - x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \sqrt{2x+6} = x+3 \end{cases}$$

$$\text{Giải phương trình } \sqrt{2x+6} = x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 2x+6 = (x+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x^2 + 4x + 3 = 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases} \\ x = -3 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x = 1, x = 3, x = -3$.

Tổng các nghiệm của phương trình là $1 + 3 - 3 = 1$.

Câu 31: Phương trình $\sqrt{x^2 - 1}(\sqrt{2x + 1} - x) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải:

$$+) \text{ Điều kiện } \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

$$+) \sqrt{x^2 - 1}(\sqrt{2x + 1} - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} = 0 \\ \sqrt{2x + 1} - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0(1) \\ \sqrt{2x + 1} = x(2) \end{cases}$$

$$\text{Giải (1): } x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1(n) \\ x = -1(l) \end{cases}$$

$$\text{Giải (2): } \sqrt{2x + 1} = x \Rightarrow 2x + 1 = x^2 \text{ (do } x \geq 1) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2}(n) \\ x = 1 - \sqrt{2}(l) \end{cases}$$

Vậy số nghiệm của phương trình là 2.

Câu 32: Phương trình $(x^2 - 6x)\sqrt{17 - x^2} = x^2 - 6x$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải:

$$(x^2 - 6x)\sqrt{17 - x^2} = x^2 - 6x \Leftrightarrow (x^2 - 6x)(\sqrt{17 - x^2} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x = 0 \\ 17 - x^2 \geq 0 \\ \sqrt{17 - x^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 0(TM) \\ x = 6(L) \end{cases} \\ |x| \leq \sqrt{17} \\ 17 - x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 4 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 33: Tìm tập hợp nghiệm của phương trình $\sqrt{3 - x} = \sqrt{x + 2} + 1$.

A. $\{2\}$.

B. $\{1; -2\}$.

C. $\{-1; 2\}$.

D. $\{-1\}$.

Lời giải:

$$\text{Đk: } -2 \leq x \leq 3$$

$$\sqrt{3 - x} = \sqrt{x + 2} + 1 \Leftrightarrow 3 - x = x + 3 + 2\sqrt{x + 2} \Leftrightarrow 3 - x - x - 3 = 2\sqrt{x + 2} \Leftrightarrow -2x = 2\sqrt{x + 2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ \begin{cases} x = -1. \\ x = 2 \end{cases} \end{cases}$$

Câu 34: Số nghiệm nguyên của phương trình sau $\sqrt{x + 3} - \sqrt{2x - 1} = 1$ là:

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải:

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{2x-1} = 1$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Khi đó phương trình } \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 1 + \sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow x+3 = 1 + 2\sqrt{2x-1} + 2x-1 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1} = -x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} -x+3 \geq 0 \\ 4(2x-1) = (-x+3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x^2 - 14x + 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Câu 35: Số nghiệm của phương trình $\sqrt{3x+1} - \sqrt{2-x} = 1$ là

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải:

$$\text{- Điều kiện: } \begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq x \leq 2.$$

$$\text{- PT } \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} = 1 + \sqrt{2-x} \Leftrightarrow [\sqrt{3x+1}]^2 = [1 + \sqrt{2-x}]^2 \Leftrightarrow 3x+1 = 1 + 2\sqrt{2-x} + 2-x$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2-x} = 4x-2 \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = 2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 2-x = (2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 2-x = 4x^2 - 4x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 4x^2 - 3x - 1 = 0 \end{cases} \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = 1$.

Câu 36: Số nghiệm của phương trình $x^2 + 2x + 2x\sqrt{x+3} = 6\sqrt{1-x} + 7$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải:

Điều kiện $-3 \leq x \leq 1$.

Phương trình

$$x^2 + 2x + 2x\sqrt{x+3} = 6\sqrt{1-x} + 7 \Leftrightarrow (x + \sqrt{x+3})^2 = (3 + \sqrt{1-x})^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{x+3} = 3 + \sqrt{1-x} \\ x + \sqrt{x+3} = -(3 + \sqrt{1-x}) \text{ VN} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 1-x + \sqrt{1-x} + 2 - \sqrt{x+3} \Leftrightarrow \sqrt{1-x} \left(\sqrt{1-x} + 1 + \frac{\sqrt{1-x}}{2 + \sqrt{x+3}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x} = 0 \text{ (do } \sqrt{1-x} + 1 + \frac{\sqrt{1-x}}{2 + \sqrt{x+3}} > 0, \forall x \in [-3; 1])$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn)}$$

Câu 37: Tổng các nghiệm của phương trình $(x-1)\sqrt{10-x^2} = x^2 - 3x + 2$ bằng

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải:

Điều kiện xác định $-\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}$

$$(x-1)\sqrt{10-x^2} = x^2 - 3x + 2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\sqrt{10-x^2} = (x-2)(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1(TM) \\ \sqrt{10-x^2} = x-2(*) \end{cases}$$

$$\text{Giải } (*): \sqrt{10-x^2} = x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 10-x^2 = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = 3(TM) \\ x = -1(L) \end{cases}$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình bằng 4.

Câu 38: Biết phương trình $(x-2)\sqrt{x^2+2x+2} = 2x^2+x-10$ có 2 nghiệm phân biệt $x=2$ và

$$x = \frac{a+b\sqrt{3}}{3}; a, b \in \mathbb{Z}. \text{ Tính } S = a^2 + b^2.$$

A. 81.

B. 90.

C. 85.

D. 91.

Lời giải:

Điều kiện của phương trình $x^2 + 2x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương

$$(x-2)\sqrt{x^2+2x+2} = (x-2)(2x+5) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \sqrt{x^2+2x+2} = 2x+5(*) \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5 \geq 0 \\ x^2+2x+2 = 4x^2+20x+25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{5}{2} \\ 3x^2+18x+23=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{5}{2} \\ x = \frac{-9 \pm 2\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-9+2\sqrt{3}}{3}. \text{ Suy ra } a = -9; b = 2 \Rightarrow S = 85.$$

Câu 39: Nếu đặt $t = \sqrt{x-1}$ thì phương trình $x-2+\sqrt{x-1}=0$ trở thành phương trình nào trong các phương trình sau?

A. $t^2+t-1=0$.

B. $t^2+t=0$.

C. $t^2+t-2=0$.

D. $t^2-2t=0$.

Lời giải:

Ta có: $x-2+\sqrt{x-1}=0 \Leftrightarrow (x-1)+\sqrt{x-1}-1=0$. Đặt $t = \sqrt{x-1} \Rightarrow t^2 = x-1$.

Vậy pt trở thành: $t^2+t-1=0$.

Câu 40: Cho phương trình $\sqrt{x^2+3x+5}-2x^2-6x+5=0$. Nếu đặt $t = \sqrt{x^2+3x+5}$ thì phương trình đã cho trở thành phương trình nào dưới đây?

A. $-2t^2-t+15=0$.

B. $2t^2-t-15=0$.

C. $t^2-t-5=0$.

D. $-t^2+t+5=0$.

Lời giải:

$$\sqrt{x^2 + 3x + 5} - 2x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3x + 5} - 2(x^2 + 3x) + 5 = 0$$

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 3x + 5} \geq 0$. Suy ra $t^2 = x^2 + 3x + 5 \Rightarrow x^2 + 3x = t^2 - 5$

Phương trình đã cho trở thành: $t - 2(t^2 - 5) + 5 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - t - 15 = 0$.

- Câu 41:** Tổng các nghiệm của phương trình $x^2 - 4\sqrt{x^2 - 3x + 27} = 3x - 22$ bằng
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải:

Điều kiện xác định: $x^2 - 3x + 27 \geq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{99}{4} \geq 0$ (luôn đúng).

Khi đó, ta có: $x^2 - 4\sqrt{x^2 - 3x + 27} = 3x - 22$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 22 - 4\sqrt{x^2 - 3x + 27} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 27 - 4\sqrt{x^2 - 3x + 27} - 5 = 0 \quad (1)$$

Đặt $\sqrt{x^2 - 3x + 27} = t \quad \left(t \geq \frac{3\sqrt{11}}{2}\right)$.

$$\text{Phương trình (1) trở thành: } t^2 - 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 & \left(\text{không tm } t \geq \frac{3\sqrt{11}}{2}\right) \\ t = 5 & \left(\text{tm } t \geq \frac{3\sqrt{11}}{2}\right) \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 5 \text{ ta có: } \sqrt{x^2 - 3x + 27} = 5 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 27 = 25 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình đã cho là 3.

- Câu 42:** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 - 2x + 5} = x^2 - 2x + 3$ là
A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải:

Ta có: $x^2 - 2x + 5 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Đặt $t = x^2 - 2x + 5$, ta có phương trình trở thành $\sqrt{t} = t - 2$

$$\sqrt{t} = t - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 2 \\ t = (t - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 2 \\ t^2 - 5t + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 2 \\ \begin{cases} t = 1 \Rightarrow t = 4 \\ t = 4 \end{cases} \end{cases}$$

Khi đó $4 = x^2 - 2x + 5 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Thử lại ta thấy $x = 1$ thỏa mãn.

Suy ra phương trình đã cho có một nghiệm.

- Câu 43:** Số nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 86 - 19\sqrt{x^2 - 3x + 16} = 0$ là.
A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải:

$$\text{Phương trình } x^2 - 3x + 86 - 19\sqrt{x^2 - 3x + 16} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 16 - 19\sqrt{x^2 - 3x + 16} + 70 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2 - 3x + 16}, t \geq 0. \text{ Khi đó } (*) \Rightarrow t^2 - 19t + 70 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 14(n) \\ t = 5(n) \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 14: \sqrt{x^2 - 3x + 16} = 14 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 180 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ x = -12 \end{cases}.$$

$$\text{Với } t = 5: \sqrt{x^2 - 3x + 16} = 5 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{3 - 3\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

- Câu 44:** Tích của các nghiệm của phương trình $3x^2 + 9x + 5 + 2\sqrt{x^2 + 3x + 3} = 1$ bằng
A. -2. **B.** 2. **C.** -3. **D.** 3.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } 3x^2 + 9x + 5 + 2\sqrt{x^2 + 3x + 3} = 1 \Leftrightarrow 3(x^2 + 3x + 3) + 2\sqrt{x^2 + 3x + 3} - 5 = 0.$$

$$\text{Đặt } \sqrt{x^2 + 3x + 3} = t; t \geq 0.$$

$$\text{Khi đó phương trình trở thành: } 3t^2 + 2t - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{5}{3} (L) \end{cases}.$$

$$\text{Với } t = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 3x + 3} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 3 = 1 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy tích các nghiệm là } x_1 \cdot x_2 = (-1) \cdot (-2) = 2.$$

- Câu 45:** Cho phương trình: $x^2 + 5x + 2 + 2\sqrt{x^2 + 5x + 10} = 0$. Đặt $t = \sqrt{x^2 + 5x + 10}$ thì phương trình trở thành phương trình nào sau đây?
A. $t^2 + 2t - 10 = 0$. **B.** $t^2 + 2t + 2 = 0$. **C.** $t^2 + 2t - 8 = 0$. **D.** $t^2 + 2t + 8 = 0$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } x^2 + 5x + 10 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2 + 5x + 10} \quad (t > 0).$$

$$\Rightarrow t^2 = x^2 + 5x + 10 \text{ phương trình đã cho trở thành } t^2 + 2t - 8 = 0.$$

- Câu 46:** Phương trình: $2x^2 + 5x - 1 = 7\sqrt{x^3 - 1}$ có nghiệm là $a \pm \sqrt{b}$ thì $2a - b$ bằng
A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải:

$$\text{Điều kiện: } x \geq 1.$$

$$\text{Ta có } 2x^2 + 5x - 1 = 7\sqrt{x^3 - 1} \Leftrightarrow 2(x^2 + x + 1) + 3(x - 1) = 7\sqrt{(x - 1)(x^2 + x + 1)} \quad (1)$$

Với $x = 1$ ta thấy không thỏa mãn (1) nên không phải là nghiệm.

Với $x \neq 1$ ta có:

$$(1) \Leftrightarrow 2(x^2 + x + 1) + 3(x - 1) = 7\sqrt{(x - 1)(x^2 + x + 1)} \Leftrightarrow 2\frac{x^2 + x + 1}{x - 1} - 7\sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x - 1}} + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x-1}} = \frac{1}{2} \\ \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x-1}} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+x+1}{x-1} = \frac{1}{4} \\ \frac{x^2+x+1}{x-1} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+3x+5=0 \\ x^2-8x+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4 \pm \sqrt{6}.$$

Suy ra $a = 4$ và $b = 6$. Do đó, $2a - b = 2.4 - 6 = 2$.

Câu 47: Số nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 86 - 19\sqrt{x^2 - 3x + 16} = 0$ là.

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải:

Phương trình $x^2 - 3x + 86 - 19\sqrt{x^2 - 3x + 16} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 16 - 19\sqrt{x^2 - 3x + 16} + 70 = 0 (*)$

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 3x + 16}$, $t \geq 0$. Khi đó $(*) \Rightarrow t^2 - 19t + 70 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 14 (n) \\ t = 5 (n) \end{cases}$

Với $t = 14 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 16} = 14 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 180 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ x = -12 \end{cases}$.

Với $t = 5 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 16} = 5 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3+3\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{3-3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Câu 48: Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $x^2 + 5x + 2 + 2\sqrt{x^2 + 5x + 10} = 0$ là

A. 5.

B. 13.

C. 10.

D. 25.

Lời giải:

Điều kiện xác định $x^2 + 5x + 10 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Khi đó phương trình $\Leftrightarrow x^2 + 5x + 10 + 2\sqrt{x^2 + 5x + 10} - 8 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 5x + 10} = 2 \\ \sqrt{x^2 + 5x + 10} = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 5x + 10} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = -2 \end{cases}$.

Vậy $x_1^2 + x_2^2 = 2^2 + 3^2 = 13$.

Câu 49: Tổng các bình phương các nghiệm của phương trình $(x-1)(x-3) + 3\sqrt{x^2 - 4x + 5} - 2 = 0$ là:

A. 17.

B. 4.

C. 16.

D. 8.

Lời giải:

Ta có $(x-1)(x-3) + 3\sqrt{x^2 - 4x + 5} - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 + 3\sqrt{x^2 - 4x + 5} - 4 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 5} = 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Câu 50: Biết phương trình $x^2 + 4x + 3 = (x+1)\sqrt{8x+5} + \sqrt{6x+2}$ có một nghiệm dạng $x = a + \sqrt{b}$ với $a, b > 0$. Tính $a + b$.

A. 7.

B. 5.

C. 4.

D. 6.

Lời giải:

$$\begin{aligned}
 x^2 + 4x + 3 &= (x+1)\sqrt{8x+5} + \sqrt{6x+2} \quad (\text{điều kiện: } x \geq -\frac{1}{3}) \\
 &\Leftrightarrow (x+1)[\sqrt{8x+5} - (x+2)] + [\sqrt{6x+2} - (x+1)] \\
 &\Leftrightarrow \frac{(x+1)(-x^2+4x+1)}{\sqrt{8x+5} + (x+2)} + \frac{-x^2+4x+1}{\sqrt{6x+2} + x+1} = 0 \\
 &\Leftrightarrow (-x^2+4x+1) \left(\frac{x+1}{\sqrt{8x+5} + (x+2)} + \frac{1}{\sqrt{6x+2} + x+1} \right) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+4x+1=0 \\ \frac{x+1}{\sqrt{8x+5} + (x+2)} + \frac{1}{\sqrt{6x+2} + x+1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+\sqrt{5} \\ x=2-\sqrt{5} \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Câu 51: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(x-1)\sqrt{x-m}=0$ có hai nghiệm phân biệt.

- A.** $m \in (-\infty; 1)$. **B.** $m \in (1; +\infty)$. **C.** $m \in [1; +\infty)$. **D.** $m \in (-\infty; 1]$.

Lời giải:

Điều kiện: $x - m \geq 0 \Leftrightarrow x \geq m$.

$$\text{Phương trình} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=m \end{cases}.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m < 1$.

Câu 52: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\frac{2(x-m)-x-m}{\sqrt{x+3}}=0$ có nghiệm.

- A.** $m \in (-\infty; -1)$. **B.** $m \in (-1; +\infty)$. **C.** $m \in [-1; +\infty)$. **D.** $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải:

Điều kiện: $x > -3$.

$$\text{Với } x > -3; \text{ phương trình } \frac{2(x-m)-x-m}{\sqrt{x+3}}=0 \Leftrightarrow 2(x-m)-x-m=0 \Leftrightarrow x=3m.$$

Để phương trình có nghiệm thì $3m > -3 \Leftrightarrow m > -1 \Leftrightarrow m \in (-1; +\infty)$.

Câu 53: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(x^2-4x)\sqrt{x-m}=0$ có ba nghiệm phân biệt.

- A.** $m \in (-\infty; 0)$. **B.** $m \in (0; +\infty)$. **C.** $m \in [0; +\infty)$. **D.** $m \in (-\infty; 0]$.

Lời giải:

Điều kiện: $x - m \geq 0 \Leftrightarrow x \geq m$.

$$\text{Phương trình} \Rightarrow \begin{cases} x^2-4x=0 \\ x-m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \\ x=m \end{cases}.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m < 0$.

Câu 54: Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt{x^2-x+m}=\sqrt{x+1}$ có hai nghiệm phân biệt là

- A.** 4. **B.** 0. **C.** Vô số. **D.** 3.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \sqrt{x^2 - x + m} = \sqrt{x + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x^2 - x + m = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ m = -x^2 + 2x + 1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên $y = -x^2 + 2x + 1$ trên $[-1; +\infty)$:

x	-1	1	$+\infty$
y	-2	2	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \in [-2; 2) \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-2; -1; 0; 1\}$.

Câu 55: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt{2x + m} = x - 1$ có 2 nghiệm phân biệt?

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Lời giải:

$$\text{Ta có } \sqrt{2x + m} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 2x + m = (x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ m = x^2 - 4x + 1 \end{cases}$$

Xét hàm số $y = x^2 - 4x + 1$ trên nửa khoảng $[1; +\infty)$ ta được bảng biến thiên như sau

x	1	2	$+\infty$
y	-2	-3	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy để phương trình có 2 nghiệm phân biệt thì $-3 < m \leq -2$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ suy ra $m = -2$.

Câu 56: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sqrt{2x^2 - 2x - 2m} = x - 2$ có nghiệm.

A. $m \leq 1$.

B. $m \in (1; +\infty)$.

C. $m > 2$.

D. $m \geq 2$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \sqrt{2x^2 - 2x - 2m} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 2x^2 - 2x - 2m = (x - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 + 2x - 4 = 2m \end{cases} (*)$$

Xét hàm số $f(x) = x^2 + 2x - 4$, ($x \geq 2$)

BBT:

x	2	$+\infty$
$f(x)$	4	$+\infty$

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow (*)$ có nghiệm $x \geq 2 \Leftrightarrow 2m \geq 4 \Leftrightarrow m \geq 2$.

Câu 57: Giá trị của tham số m để phương trình $\sqrt{2x^2 - x - 2m} = x + 2$ có 2 nghiệm phân biệt là $m \in (a; b]$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $S = a + b$.

A. $S = -\frac{1}{8}$.

B. $S = \frac{81}{8}$.

C. $S = 5$.

D. $S = \frac{41}{8}$.

Lời giải:

Ta có $\sqrt{2x^2 - x - 2m} = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 2x^2 - x - 2m = (x + 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 2m = x^2 - 5x - 4 \end{cases}$.

Bảng biến thiên $y = x^2 - 5x - 4$ trên $[-2; +\infty)$:

x	-2	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
y	10	$-\frac{41}{4}$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -\frac{41}{4} < 2m \leq 10 \Leftrightarrow -\frac{41}{8} < m \leq 5$.

Suy ra $a = -\frac{41}{8}, b = 5$. Vậy $a + b = -\frac{1}{8}$.

Câu 58: Tìm tất cả các giá trị m để phương trình $\sqrt{x^2 - 2x + 3m - 2} = x + 2$ có nghiệm.

A. $m \geq -2$.

B. $m > -2$.

C. $m > 2$.

D. $m \geq 2$.

Lời giải:

Ta có $\sqrt{x^2 - 2x + 3m - 2} = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ x^2 - 2x + 3m - 2 = (x + 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 6x = 3m - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq -4 \\ 2x = m - 2 \end{cases}$

Phương trình đã cho có nghiệm khi chỉ khi $m - 2 \geq -4 \Leftrightarrow m \geq -2$.

Câu 59: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^2 - 4\sqrt{x^2 + 1} - (m - 1) = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \sqrt{15})$?

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 0.

Lời giải:

Ta có: $x^2 - 4\sqrt{x^2 + 1} - (m - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 - 4\sqrt{x^2 + 1} - m = 0$.

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 1}$.

Với $x \in (0; \sqrt{15})$ thì $t \in (1; 4)$.

Phương trình trở thành: $t^2 - 4t - m = 0 \Leftrightarrow m = t^2 - 4t$ (*).

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 4t$ với $t \in (1; 4)$.

Ta có BBT:

t	1	2	4
$f(t)$	-3	-4	0

Dựa vào BBT, suy ra phương trình đã cho có nghiệm thuộc khoảng $(0; \sqrt{15})$.

$\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có nghiệm thuộc khoảng $t \in (1; 4) \Leftrightarrow -4 \leq m < 0$.

Vậy các giá trị nguyên m thỏa là $m \in \{-4; -3; -2; -1\}$.

Câu 60: Có bao nhiêu giá trị m nguyên để phương trình $4(\sqrt{x+3} + \sqrt{3-x}) + 2\sqrt{-x^2+9} + m - 1 = 0$ có nghiệm?

A. 9.

B. 11.

C. 5.

D. 10.

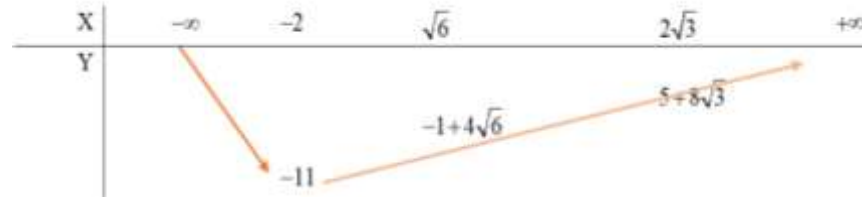
Lời giải:

Điều kiện: $-3 \leq x \leq 3$.

Đặt $t = \sqrt{x+3} + \sqrt{3-x} \Rightarrow t^2 = 6 + 2\sqrt{9-x^2} \Rightarrow \sqrt{9-x^2} = \frac{t^2-6}{2}$. Điều kiện: $\sqrt{6} \leq t \leq 2\sqrt{3}$.

Phương trình trở thành: $4t + 2\frac{t^2-6}{2} + m - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 4t + m - 7 = 0$ (*).

Xét hàm số $f(t) = t^2 + 4t - 7$, có bảng biến thiên



Phương trình (*) có nghiệm thỏa $\sqrt{6} \leq t \leq 2\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow -1 + 4\sqrt{6} \leq -m \leq 5 + 8\sqrt{3} \Leftrightarrow -5 - 8\sqrt{3} \leq m \leq 1 - 4\sqrt{6}$.

Vậy có 10 giá trị nguyên của m là $\{-18; -17; \dots; -10; -9\}$.

Câu 61: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} + 2\sqrt{4-x^2} + m = 0$ có nghiệm?

A. 4.

B. 5.

C. Vô số.

D. 10.

Lời giải:

Điều kiện: $-2 \leq x \leq 2$

Đặt $t = \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} \Rightarrow t^2 = 4 + 2\sqrt{(2-x)(2+x)} \geq 4 \Rightarrow t \geq 2$

Lại có: $2\sqrt{(2-x)(2+x)} \leq (2-x) + (2+x) = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(2-x)(2+x)} \leq 2$

$\Rightarrow t^2 = 4 + 2\sqrt{(2-x)(2+x)} \leq 8 \Rightarrow -2\sqrt{2} \leq t \leq 2\sqrt{2}$.

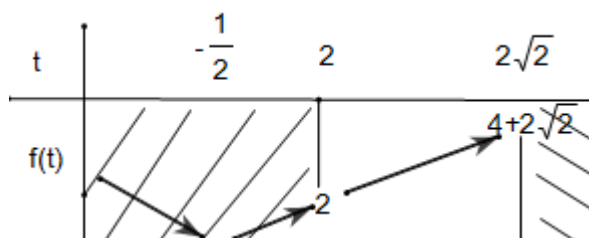
Suy ra $t \in [2; 2\sqrt{2}]$.

Phương trình trở thành: $t + t^2 - 4 + m = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 4 = -m(1)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ tìm m để phương trình (1) có nghiệm $t \in [2; 2\sqrt{2}]$

$\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $f(t) = t^2 + t - 4$ cắt đường thẳng $y = -m$ trong đoạn $[2; 2\sqrt{2}]$ (*)

Bảng biến thiên của $f(t) = t^2 + t - 4$ trên $[2; 2\sqrt{2}]$



Từ BBT ta có (*) $\Leftrightarrow 2 \leq m \leq 4 + 2\sqrt{2}$. Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{2; 3; 4; 5; 6\}$.

HẾT

Huế, 15h Ngày 30 tháng 01 năm 2023