

Chương 1

Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác

Câu 23. Mỗi khẳng định dưới đây đúng hay sai?

a) $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad.}$ b) $70^\circ = \frac{7}{18\pi} \text{ rad.}$ c) $108^\circ = \frac{3\pi}{5} \text{ rad.}$ d) $45^\circ 30' = \frac{91\pi}{360} \text{ rad.}$

Lời giải.

Ta có

a) $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad.}$

b) $70^\circ = 70 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{18} \text{ rad.}$

c) $108^\circ = 108 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{5} \text{ rad.}$

d) $45^\circ 30' = \left(45 + \frac{1}{2}\right)^\circ = 45,5^\circ = 45,5 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{91\pi}{360} \text{ rad.}$

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d đúng $\square$

Câu 24. Mỗi khẳng định dưới đây đúng hay sai?

a) $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$. b) $-\frac{7\pi}{4} \text{ rad} = -315^\circ$. c) $\pi \text{ rad} = 60^\circ$. d) $-5\pi \text{ rad} = -900^\circ$.

Lời giải.

Ta có

a) $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$.

b) $-\frac{7\pi}{4} \text{ rad} = \left(-\frac{7\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = -315^\circ$.

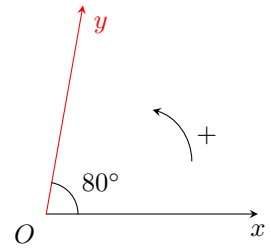
c) $\pi \text{ rad} = \left(\pi \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 180^\circ$.

d) $-5 \text{ rad} = \left(\frac{-5 \cdot 180}{\pi}\right)^\circ = \left(\frac{-5\pi \cdot 180}{\pi}\right)^\circ = -900^\circ$.

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 25.

Cho góc hình học xOy có số đo 80° (tham khảo hình vẽ). Các mệnh đề sau đúng hay sai?



- a) $\text{sđ}(Ox, Oy) = 80^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$. b) $\text{sđ}(Oy, Ox) = -80^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$.
 c) $\text{sđ}(Ox, Oy) = 100^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$. d) $\text{sđ}(Oy, Ox) = 100^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$.

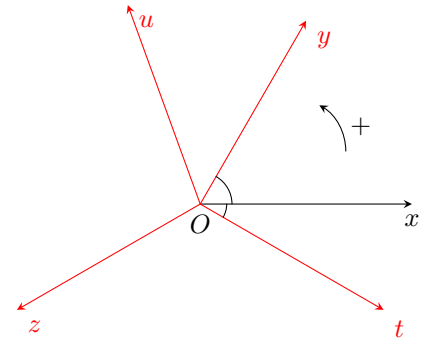
Lời giải.

- Các góc lượng giác tia đầu Ox , tia cuối Oy có số đo là $\text{sđ}(Ox, Oy) = 80^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$.
- Các góc lượng giác tia đầu Oy , tia cuối Ox có số đo là $\text{sđ}(Oy, Ox) = -80^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$.

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d sai □

Câu 26.

Cho các tia Ox, Oy, Oz, Ou, Ot như hình vẽ. Biết số đo các góc các góc hình học $\widehat{xOy} = 60^\circ$; $\widehat{xOz} = 150^\circ$; $\widehat{xOt} = 30^\circ$; $\widehat{xOu} = 110^\circ$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?



- a) $\text{sđ}(Ox, Oy) = 60^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$. b) $\text{sđ}(Ox, Oz) = 150^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$.
 c) $\text{sđ}(Ox, Ot) = 30^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$. d) $\text{sđ}(Ox, Ou) = 110^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có

- a) $\widehat{xOy} = 60^\circ \Rightarrow \text{sđ}(Ox, Oy) = 60^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$.
 b) $\widehat{xOz} = 150^\circ \Rightarrow \text{sđ}(Ox, Oz) = -150^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$.
 c) $\widehat{xOt} = 30^\circ \Rightarrow \text{sđ}(Ox, Ot) = -30^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$.
 d) $\widehat{xOu} = 110^\circ \Rightarrow \text{sđ}(Ox, Ou) = 110^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$.

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng □

Câu 27. Hãy cho biết tính đúng sai của mỗi khẳng định sau.

- a) Chu vi của đường tròn có bán kính R bằng $2\pi R$.
 b) Độ dài của một cung tròn có số đo 1 rad bằng bán kính R của cung tròn đó.
 c) Độ dài của một cung tròn có bán kính R , có số đo α rad bằng $R \cdot \alpha$.

d) Cung tròn có số đo π rad thì có độ dài bằng nửa chu vi của đường tròn tương ứng.

Lời giải.

Ta có

a) Chu vi của đường tròn bán kính R là $C = 2\pi R$.

b) Độ dài l của một cung tròn bán kính R , có số đo 1 rad là $l = R$.

c) Độ dài l của một cung tròn có bán kính R , có số đo α rad là $l = R \cdot \alpha$.

d) Cung tròn có số đo π rad thì có độ dài bằng nửa chu vi của đường tròn tương ứng.

Đáp án: a đúng | b đúng | c đúng | d đúng $\square$

Câu 28. Cho đường tròn có bán kính $R = 10$ cm. Hãy cho biết tính đúng sai của mỗi khẳng định sau.

a) Chu vi của đường tròn bằng 10π cm.

b) Cung trên đường tròn có số đo $\frac{\pi}{2}$ có độ dài bằng 5π cm.

c) Cung có số đo $\frac{\pi}{6}$ có độ dài bằng $l = \frac{5\pi}{3}$ cm .

d) Cung có độ dài $l = 4\pi$ cm có số đo bằng $\frac{\pi}{5}$.

Lời giải.

a) Chu vi của đường tròn là $C = 2\pi \cdot R = 20\pi$ cm.

b) Cung có số đo $\frac{\pi}{2}$ có độ dài $l = R \cdot \alpha = 10 \cdot \frac{\pi}{2} = 5\pi$ cm.

c) Cung có số đo $\frac{\pi}{6}$ có độ dài bằng $l = 10 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$ cm.

d) Cung có độ dài $l = 4\pi$ cm có số đo $\alpha = \frac{l}{R} = \frac{2\pi}{5}$.

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d sai $\square$

Câu 29.

Cho đường tròn lượng giác có điểm gốc là điểm A (tham khảo hình bên).

Mỗi khẳng định sau đúng hay sai?

a) Điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo $\frac{\pi}{4}$ nằm trên cung AB .

b) Điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo $-\frac{\pi}{3}$ nằm trên cung BA' .

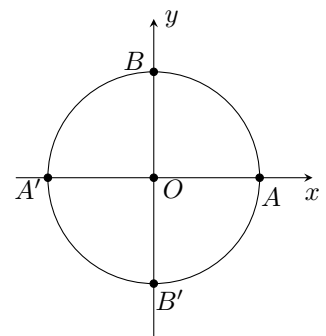
c) Điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo $\frac{4\pi}{5}$ nằm trên cung $A'B'$.

d) Điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo $-\frac{5\pi}{9}$ nằm trên cung $B'A$.

Lời giải.

a) Điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo $\frac{\pi}{4}$ nằm trên cung AB .

b) Điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo $-\frac{\pi}{3}$ nằm trên cung $B'A$.



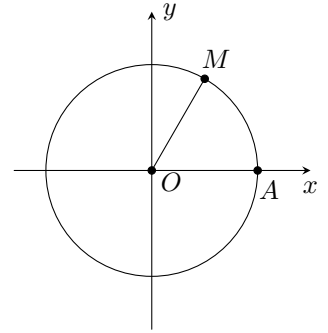
c) Điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo $\frac{4\pi}{5}$ nằm trên cung BA' .

d) Điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo $-\frac{5\pi}{9}$ nằm trên cung $A'B'$.

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d sai □

Câu 30.

Trên đường tròn lượng giác với điểm gốc là A . Điểm M thuộc đường tròn sao cho cung AM có số đo 60° (tham khảo hình vẽ bên). Gọi N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với điểm M qua gốc tọa độ, trục Oy và trục Ox , A' là điểm đối xứng với A qua gốc tọa độ O . Mỗi khẳng định dưới đây đúng hay sai?



a) Số đo của cung lượng giác AP bằng $120^\circ + k360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Số đo của cung lượng giác AQ bằng $-30^\circ + k360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) Số đo của cung lượng giác AA' bằng $180^\circ + k360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) Số đo của cung lượng giác AN bằng $120^\circ + k360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

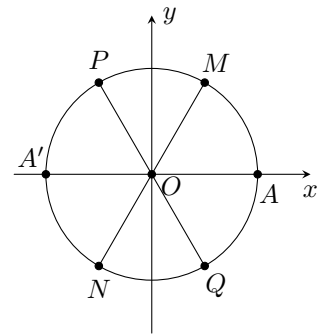
a) Ta có $\widehat{AOP} = 120^\circ$ nên số đo của cung lượng giác AP bằng $120^\circ + k360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Ta có $\widehat{AOQ} = 30^\circ$ nên số đo của cung lượng giác AQ bằng $-30^\circ + k360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) Ta có $\widehat{AOA'} = 180^\circ$ nên số đo của cung lượng giác AA' bằng $180^\circ + k360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) Ta có $\widehat{AON} = 120^\circ$ nên số đo của cung lượng giác AN bằng $-120^\circ + k360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.

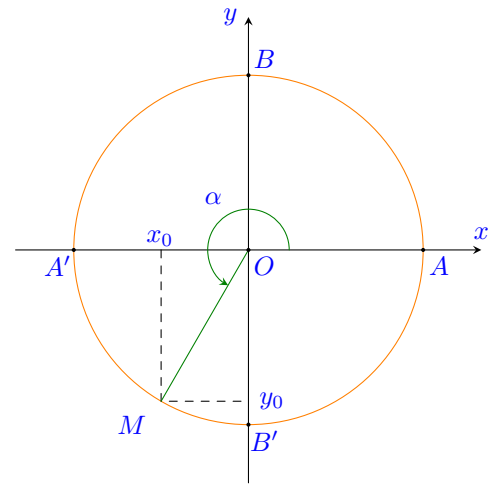
Đáp án: a đúng | b đúng | c đúng | d sai □



Câu 31.

Cho đường tròn lượng giác gốc A , gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo α (tham khảo hình vẽ). Mỗi khẳng định sau đúng hay sai?

- a) $\sin \alpha = x_0$. b) $\cos \alpha = y_0$.
 c) $\tan \alpha = \frac{x_0}{y_0}$. d) $\cot \alpha > 0$.

**Lời giải.**

Ta có

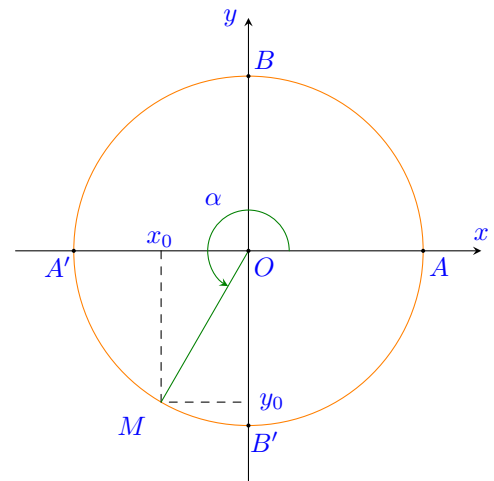
- a) $\sin \alpha = y_0$.
 b) $\cos \alpha = x_0$.
 c) $\tan \alpha = \frac{y_0}{x_0}$.
 d) Vì $x_0 < 0; y_0 < 0$ nên $\cot \alpha = \frac{x_0}{y_0} > 0$.

Đáp án: a sai | b sai | c sai | d đúng □

Câu 32.

Cho đường tròn lượng giác gốc A , gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo α (tham khảo hình vẽ). Với k là số nguyên, mỗi khẳng định sau đúng hay sai?

- a) $\sin(\alpha + k\pi) = \sin \alpha$. b) $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha$.
 c) $\tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha$. d) $\cot(\alpha + k\pi) = \cot \alpha$.

**Lời giải.**

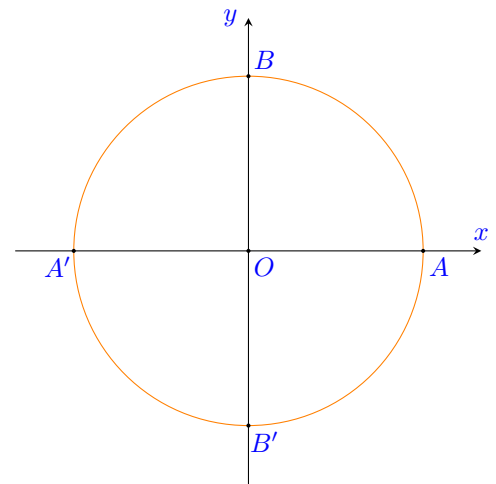
Ta có

- a) $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha$.
 b) $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha$.
 c) $\tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha$.
 d) $\cot(\alpha + k\pi) = \cot \alpha$.

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d đúng □

Câu 33.

Cho đường tròn lượng giác gốc A (tham khảo hình vẽ). Gọi M là điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo α . Biết rằng M không trùng với một trong các điểm A, A', B', B . Mỗi khẳng định sau đúng hay sai?



- a) Nếu M thuộc cung AB thì $\sin \alpha > 0$.
- b) Nếu M thuộc cung BA' thì $\cos \alpha < 0$.
- c) Nếu M thuộc cung $A'B'$ thì $\sin \alpha > 0$.
- d) Nếu M thuộc cung $B'A$ thì $\cos \alpha > 0$.

Lời giải.

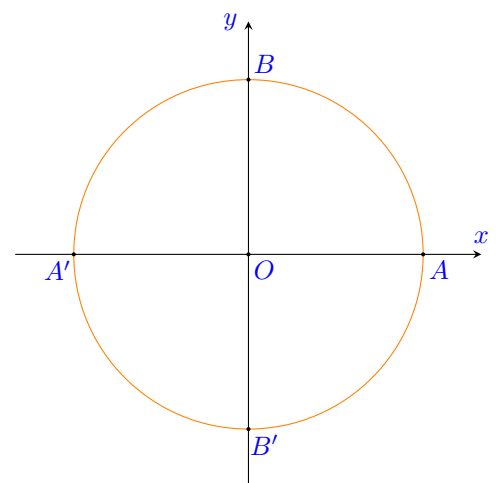
Ta có

- a) M thuộc cung AB thì $\sin \alpha > 0$.
- b) M thuộc cung BA' thì $\cos \alpha < 0$.
- c) M thuộc cung $A'B'$ thì $\sin \alpha < 0$.
- d) M thuộc cung $B'A$ thì $\cos \alpha > 0$.

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 34.

Cho đường tròn lượng giác gốc A (tham khảo hình vẽ). Gọi M là điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo α . Biết rằng M không trùng với một trong các điểm A, A', B', B , mỗi khẳng định sau đúng hay sai?



- a) Nếu M thuộc cung AB thì $\tan \alpha > 0$.
- b) Nếu M thuộc cung BA' thì $\cot \alpha < 0$.
- c) Nếu M thuộc cung $A'B'$ và $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ thì $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.
- d) Nếu M thuộc cung $B'A$ và $\tan \alpha = -2$ thì $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Ta có

- a) M thuộc cung AB thì $\tan \alpha > 0$.
- b) M thuộc cung BA' thì $\cot \alpha < 0$.
- c) Ta có $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$.

Vì M thuộc cung $A'B'$ nên $\sin \alpha < 0$, suy ra $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$.

d) Ta có $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{5}$.

Vì M thuộc cung $B'A$ nên $\cos \alpha > 0$, suy ra $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Đáp án: a sai | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 35. Cho góc lượng giác x sao cho các biểu thức đều có nghĩa. Mỗi đẳng thức sau đúng hay sai?

a) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

b) $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.

c) $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$.

d) $\tan x \cdot \cot x = 1$.

Lời giải.

Ta có

a) Ta có $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

b) Ta có $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.

c) Ta có $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$.

d) Ta có $\tan x \cdot \cot x = 1$.

Đáp án: a đúng | b đúng | c đúng | d đúng □

Câu 36. Mỗi khẳng định sau đúng hay sai?

a) Nếu $\sin x + \cos x = m$ thì $\sin x \cdot \cos x = \frac{m^2 - 1}{2}$.

b) Nếu $\sin x - \cos x = m$ thì $\sin x \cdot \cos x = \frac{1 - m^2}{2}$.

c) Nếu $\tan x + \cot x = m$ thì $\tan^2 x + \cot^2 x = m^2 - 2$.

d) Nếu $\tan x - \cot x = m$ thì $\tan^2 x + \cot^2 x = m^2 + 2$.

Lời giải.

Ta có

a) $\sin x + \cos x = m \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = m^2 \Leftrightarrow \sin x \cos x = \frac{m^2 - 1}{2}$.

b) $\sin x - \cos x = m \Rightarrow (\sin x - \cos x)^2 = m^2 \Leftrightarrow \sin x \cos x = \frac{1 - m^2}{2}$.

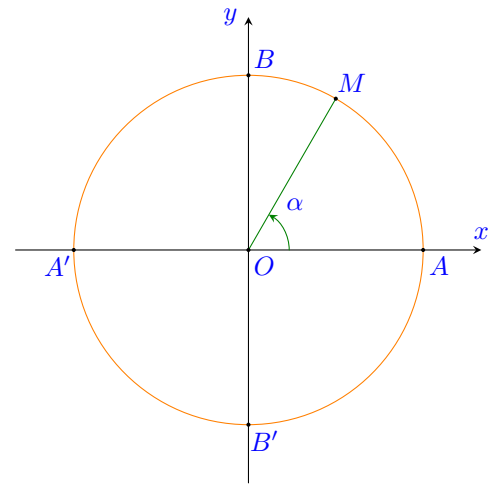
c) $\tan x + \cot x = m \Rightarrow (\tan x + \cot x)^2 = m^2 \Leftrightarrow \tan^2 x + \cot^2 x = m^2 - 2$.

d) $\tan x - \cot x = m \Rightarrow (\tan x - \cot x)^2 = m^2 \Leftrightarrow \tan^2 x + \cot^2 x = m^2 + 2$.

Đáp án: a đúng | b đúng | c đúng | d đúng □

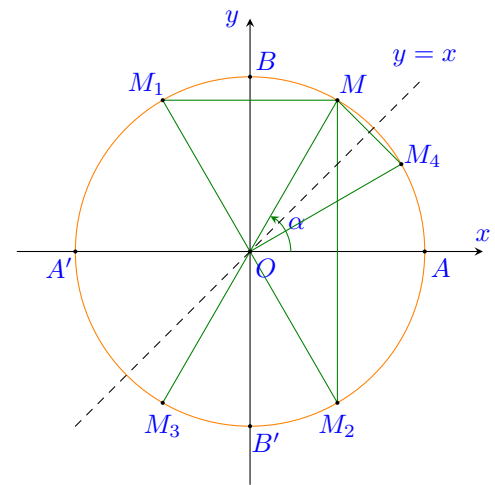
Câu 37.

Cho đường tròn lượng giác gốc A (tham khảo hình vẽ). Gọi M là điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo α . Mỗi khẳng định sau đúng hay sai?



- Nếu M_1 là điểm đối xứng với điểm M qua Oy thì M_1 là điểm biểu diễn góc có số đo $(\pi - \alpha)$.
- Nếu M_2 là điểm đối xứng với điểm M qua Ox thì M_2 là điểm biểu diễn góc có số đo $-\alpha$.
- Nếu M_3 là điểm đối xứng với điểm M qua O thì M_3 là điểm biểu diễn góc có số đo $(\pi + \alpha)$.
- Nếu M_4 là điểm đối xứng với điểm M qua đường thẳng $y = x$ thì M_4 là điểm biểu diễn góc có số đo $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

Lời giải.



- Nếu M_1 là điểm đối xứng với điểm M qua Oy thì $\widehat{M_1OA} = \pi - \alpha$ nên M_1 là điểm biểu diễn góc có số đo $(\pi - \alpha)$.
- Nếu M_2 là điểm đối xứng với điểm M qua Ox thì $\widehat{M_2OA} = \alpha$ nên M_2 là điểm biểu diễn góc có số đo $-\alpha$.
- Nếu M_3 là điểm đối xứng với điểm M qua O thì $\widehat{M_3OA} = (\pi - \alpha)$ nên M_3 là điểm biểu diễn góc có số đo $(\pi + \alpha)$.
- Nếu M_4 là điểm đối xứng với điểm M qua đường thẳng $y = x$ thì $\widehat{M_4OA} = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ nên M_4 là điểm biểu diễn góc có số đo $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

Đáp án: a đúng | b đúng | c đúng | d đúng □

Câu 38. Mỗi khẳng định sau đúng hay sai?

- $\sin\left(\frac{2024\pi}{7} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{7} - x\right)$.
- $\cos\left(-\frac{2024\pi}{9} - x\right) = \cos\left(\frac{8\pi}{9} + x\right)$.
- $\tan\left(\frac{2023\pi}{2} + 2\alpha\right) = -\cot 2\alpha$.
- $\cot\left(\alpha + \frac{2024\pi}{13}\right) = -\cot\left(\alpha + \frac{4\pi}{13}\right)$.

Lời giải.

Ta có

- $\sin\left(\frac{2024\pi}{7} - x\right) = \sin\left(288\pi + \pi + \frac{\pi}{7} - x\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{7} - x\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{7} - x\right)$.
- $\cos\left(-\frac{2024\pi}{9} - x\right) = \cos\left(-224\pi - \frac{8\pi}{9} - x\right) = \cos\left(-\frac{8\pi}{9} - x\right) = \cos\left(\frac{8\pi}{9} + x\right)$.
- $\tan\left(\frac{2023\pi}{2} + 2\alpha\right) = \tan\left(1011\pi + \frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) = -\cot 2\alpha$.

d) $\cot\left(\alpha + \frac{2024\pi}{13}\right) = \cot\left(\frac{9\pi}{13} + \alpha\right) = \cot\left[\pi - \left(\frac{4\pi}{13} - \alpha\right)\right] = -\cot\left(\frac{4\pi}{13} - \alpha\right).$

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d sai□

Câu 39. Mỗi khẳng định dưới đây đúng hay sai?

a) $\sin 7a \cdot \sin a + \cos 7a \cdot \cos a = \cos 6a.$

b) $\sin 2a \cdot \cos a - \cos 2a \cdot \sin a = \sin a.$

c) $\sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin a + \frac{1}{2} \cos a.$

d) Nếu $\tan \alpha = 2$ thì giá trị $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}.$

Lời giải.

a) Ta có $\sin 7a \cdot \sin a + \cos 7a \cdot \cos a = \cos(7a - a) = \cos 6a.$

b) Ta có $\sin 2a \cdot \cos a - \cos 2a \cdot \sin a = \sin(2a - a) = \sin a.$

c) Ta có $\sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right) = \sin a \cos \frac{\pi}{6} + \cos a \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin a + \frac{1}{2} \cos a.$

d) Ta có $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{2 - 1}{1 + 2 \cdot 1} = \frac{1}{3}.$

Đáp án: a đúng | b đúng | c đúng | d đúng □

Câu 40. Mỗi khẳng định dưới đây đúng hay sai?

a) $\sin(a + b) + \sin(a - b) = 2 \sin a \cos b.$

b) $\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \sin a \sin b.$

c) $\sin(a + b) - \sin(a - b) = 2 \cos a \sin b.$

d) $\cos(a + b) - \cos(a - b) = -2 \sin a \cos b.$

Lời giải.

a) $\sin(a + b) + \sin(a - b) = (\sin a \cos b + \cos a \sin b) + (\sin a \cos b - \cos a \sin b) = 2 \sin a \cos b.$

b) $\cos(a + b) + \sin(a - b) = (\cos a \cos b - \sin a \sin b) + (\cos a \cos b + \sin a \sin b) = 2 \cos a \cos b.$

c) $\sin(a + b) - \sin(a - b) = (\sin a \cos b + \cos a \sin b) - (\sin a \cos b - \cos a \sin b) = 2 \cos a \sin b.$

d) $\cos(a + b) - \cos(a - b) = (\cos a \cos b - \sin a \sin b) - (\cos a \cos b + \sin a \sin b) = -2 \sin a \sin b.$

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d đúng □

Câu 41. Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$. Mỗi khẳng định dưới đây đúng hay sai?

a) $\sin 2\alpha = \frac{6}{5}.$

b) $\cos 2\alpha = \frac{7}{25}.$

c) $\tan 2\alpha = -\frac{24}{7}.$

d) $\cot 2\alpha = -\frac{7}{24}.$

Lời giải.

a) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}.$

b) $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}.$

c) $\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = -\frac{24}{25} : \frac{7}{25} = -\frac{24}{7}.$

d) $\cot 2\alpha = \frac{1}{\tan 2\alpha} = -\frac{7}{24}.$

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d đúng □

Câu 42. Mỗi kết quả dưới đây đúng hay sai?

a) $\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} = \cos x + \sin x.$

b) $\frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} = \sin x - \cos x.$

c) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x.$

d) $\frac{\cos 2x + 1}{1 - \sin^2 x} = 1.$

Lời giải.

a) $\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} = \frac{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{\cos x - \sin x} = \cos x + \sin x.$

b) $\frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} = \frac{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{\sin x + \cos x} = \cos x - \sin x.$

c) $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x.$

d) $\frac{\cos 2x + 1}{1 - \sin^2 x} = \frac{(2\cos^2 x - 1) + 1}{\cos^2 x} = \frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x} = 2.$

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai □

Câu 43. Mỗi kết quả dưới đây đúng hay sai?

a) $\sin 3x + \sin x = \sin 4x.$

b) $\sin 3x - \sin x = \cos 2x \sin x.$

c) $\cos 3x + \cos x = 2 \cos 2x \cos x.$

d) $\cos 3x - \cos x = 2 \sin 2x \sin x.$

Lời giải.

a) $\sin 3x + \sin x = 2 \sin \frac{3x+x}{2} \cdot \cos \frac{3x-x}{2} = 2 \sin 2x \cos x.$

b) $\sin 3x - \sin x = 2 \cos \frac{3x+x}{2} \cdot \sin \frac{3x-x}{2} = 2 \cos 2x \sin x.$

c) $\cos 3x + \cos x = 2 \cos \frac{3x+x}{2} \cdot \cos \frac{3x-x}{2} = 2 \cos 2x \cos x.$

d) $\cos 3x - \cos x = -2 \sin \frac{3x+x}{2} \cdot \sin \frac{3x-x}{2} = -2 \sin 2x \sin x.$

Đáp án: a sai | b sai | c đúng | d sai □

Câu 44. Mỗi kết quả dưới đây đúng hay sai?

a) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = -\frac{\cos 2\alpha}{2} - \frac{1}{4}.$

b) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{\cos 2\alpha}{2} + \frac{1}{4}.$

c) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}.$

d) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{\sin 2\alpha}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$

Lời giải.

a) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{1}{2} \left(\cos 2\alpha + \cos \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{\cos 2\alpha}{2} - \frac{1}{4}.$

b) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{1}{2} \left(\cos 2\alpha - \cos \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{\cos 2\alpha}{2} + \frac{1}{4}.$

c) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{1}{2} \left(\sin 2\alpha + \sin \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}.$

d) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{2\pi}{3} - \sin 2\alpha \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sin 2\alpha}{2}.$

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d sai □

Câu 45. Mỗi khẳng định dưới đây đúng hay sai?

- a) Hàm số $y = \sin x$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- b) Hàm số $y = \cos x$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- c) Hàm số $y = \tan x$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- d) Hàm số $y = \cot x$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

- a) Hàm số $y = \sin x$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- b) Hàm số $y = \cos x$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- c) Hàm số $y = \tan x$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- d) Hàm số $y = \cot x$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d sai □

Câu 46. Mỗi khẳng định dưới đây đúng hay sai?

- a) Hàm số $y = \frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}$ có tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- b) Hàm số $y = x^2 - 3\cos x$ có tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- c) Hàm số $y = \frac{2023}{\sin x}$ có tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- d) Hàm số $y = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

- a) Hàm số xác định khi $1 + \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số trên là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

- b) Hàm số $y = x^2 - 3\cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

- c) Điều kiện xác định $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số trên là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

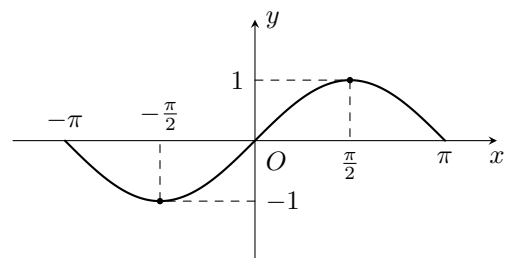
- d) Hàm số $y = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$ xác định khi $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số trên là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d đúng □

Câu 47.

Trên khoảng $(-\pi; \pi)$, đồ thị của hàm số $y = \sin x$ được cho như hình vẽ bên. Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai?



- a) Hàm số $y = \sin x$ nghịch biến trên khoảng $(-\pi; 0)$.
- b) Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- c) Hàm số $y = \sin x$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.
- d) Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $(0; \pi)$.

Lời giải.

- a) hàm số $y = \sin x$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.
- b) Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- c) Hàm số $y = \sin x$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.
- d) Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d sai ☐

Câu 48. Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai?

- a) Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
b) Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
c) Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
d) Hàm số $y = \cot x$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải.

Theo lý thuyết, ta có

- a) Hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
- b) Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
- c) Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
- d) Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d sai ☐

Câu 49. Mỗi khẳng định dưới đây đúng hay sai?

- a) Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ. b) Hàm số $y = \cot x$ là hàm số chẵn.
c) Hàm số $y = \sin x$ là hàm số chẵn. d) Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.

Lời giải.

- a) Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ.
b) Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ.
c) Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ.
d) Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng ☐

Câu 50. Mỗi khẳng định dưới đây đúng hay sai?

- a) Hàm số $y = \cos x$ có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ $O(0; 0)$.
- b) Hàm số $y = \sin x$ có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ $O(0; 0)$.
- c) Hàm số $y = \tan x$ có đồ thị đối xứng qua trục tung.
- d) Hàm số $y = \cot x$ có đồ thị đối xứng qua trục tung.

Lời giải.

- a) Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn nên có đồ thị đối xứng qua trục tung.
- b) Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ nên có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ $O(0; 0)$.
- c) Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ nên có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ $O(0; 0)$.
- d) Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ nên có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ $O(0; 0)$.

Đáp án: a sai | b đúng | c sai | d sai □

Câu 51. Mỗi khẳng định dưới đây đúng hay sai?

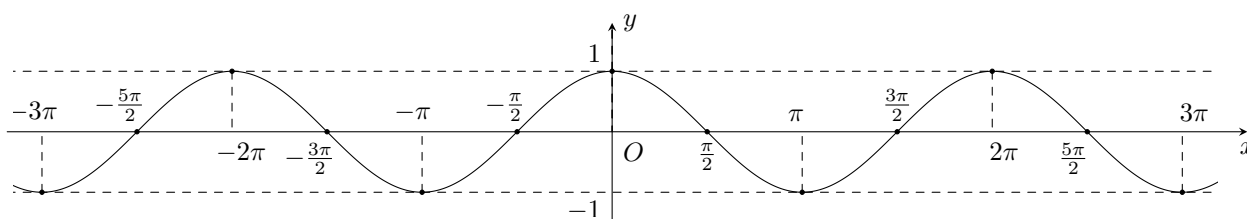
- a) Hàm số $y = \sin x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ là π .
- b) Hàm số $y = \cos x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ là 2π .
- c) Hàm số $y = \tan x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ là π .
- d) Hàm số $y = \cot x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ là π .

Lời giải.

- a) Hàm số $y = \sin x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ là 2π .
- b) Hàm số $y = \cos x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ là 2π .
- c) Hàm số $y = \tan x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ là π .
- d) Hàm số $y = \cot x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ là π .

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d đúng □

Câu 52. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau



Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai?

- a) Hàm số $y = f(x)$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ là $\frac{\pi}{2}$.
- b) Hàm số $y = f(x)$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ là π .
- c) Hàm số $y = f(x)$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ là 2π .

d) Hàm số $y = f(x)$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ là $\frac{3\pi}{2}$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số $y = f(x)$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ là 2π .

Đáp án: a sai | b sai | c đúng | d sai □

Câu 53. Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai?

- a) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin 2x$ bằng -1 .
- b) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2 \cos 2x$ bằng 2 .
- c) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \cos 2x$ bằng 2 .
- d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2 \sin 2x$ bằng -2 .

Lời giải.

a) Ta có $-1 \leq \sin 2x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin 2x$ bằng -1 .

b) Ta có $-2 \leq 2 \cos 2x \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2 \cos 2x$ bằng 2 .

c) Ta có $-1 \leq \cos 2x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \cos 2x$ bằng 1 .

d) Ta có $-2 \leq 2 \sin 2x \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2 \sin 2x$ bằng -2 .

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 54. Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai?

- a) Tập giá trị của hàm số $y = \sin x$ là $[-1; 1]$.
- b) Tập giá trị của hàm số $y = \cos x$ là $\mathbb{R}$.
- c) Tập giá trị của hàm số $y = \tan x$ là $\mathbb{R}$.
- d) Tập giá trị của hàm số $y = \cot x$ là $[-1; 1]$.

Lời giải.

a) Tập giá trị của hàm số $y = \sin x$ là $[-1; 1]$.

b) Tập giá trị của hàm số $y = \cos x$ là $[-1; 1]$.

c) Tập giá trị của hàm số $y = \tan x$ là $\mathbb{R}$.

d) Tập giá trị của hàm số $y = \cot x$ là $\mathbb{R}$.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai □

Câu 55. Trong các phương trình sau, phương trình nào tương đương với phương trình $x^2 = 9$?

a) $x - 3 = 0$.

b) $x^2 + \sqrt{x^2} = 9 + \sqrt{x^2}$.

c) $x^3 - 9x = 0$.

d) $|x| = 3$.

Lời giải.

Phương trình $x^2 = 9$ có tập nghiệm là $S = \{-3; 3\}$.

- Phương trình $x - 3 = 0$ có tập nghiệm là $S = \{3\}$ nên không tương đương với phương trình $x^2 = 9$.
- Do $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên phương trình $x^2 + \sqrt{x^2} = 9 + \sqrt{x^2}$ tương đương với $x^2 = 9$.
- Phương trình $x^3 - 9x = 0$ có tập nghiệm là $S = \{-3; 0; 3\}$ nên không tương đương với phương trình $x^2 = 9$.
- Phương trình $|x| = 3$ có tập nghiệm là $S = \{-3; 3\}$ nên tương đương với phương trình $x^2 = 9$.

Đáp án: a sai | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 56. Phép biến đổi nào sau đây là phép biến đổi tương đương?

a) $x + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1$.

b) $\sqrt{x+2} = x-4 \Leftrightarrow x+2 = (x-4)^2$.

c) $x(x+2) = x \Leftrightarrow x+2 = 1$.

d) $x + \sqrt{x-1} = x^2 \Leftrightarrow x = x^2 - \sqrt{x-1}$.

Lời giải.

- Phương trình $x + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$ xác định khi $x \neq 0$, do đó $x + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1$.
- $\sqrt{x+2} = x-4 \Leftrightarrow x+2 = (x-4)^2$ không là phép biến đổi tương đương, vì làm sinh ra nghiệm ngoại lai $x = 2$.
- $x(x+2) = x \Leftrightarrow x+2 = 1$ không là phép biến đổi tương đương vì làm mất nghiệm $x = 0$.
- $x + \sqrt{x-1} = x^2 \Leftrightarrow x = x^2 - \sqrt{x-1}$ là phép biến đổi tương đương vì không làm ảnh hưởng đến tập nghiệm của bài toán.

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng □

Câu 57. Phương trình nào dưới đây có nghiệm.

a) $\sin x = \frac{2017}{2018}$.

b) $\tan x = \frac{2018}{2017}$.

c) $\cos x = \frac{2018}{2017}$.

d) $\cot x = \frac{2017}{2018}$.

Lời giải.

Do $\frac{2018}{2017} > 1$ nên $\cos x = \frac{2018}{2017}$ vô nghiệm, các phương trình còn lại đều có nghiệm.

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 58. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

a) Phương trình $\cos x = \cos m$ có nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$.

b) Phương trình $\sin x = \sin m$ có nghiệm khi $m \in [-1; 1]$.

c) Phương trình $\cos 2x = \cos m$ có nghiệm khi $m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

d) Phương trình $\sin 2x = \sin m$ có nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Do $\sin m$ và $\cos m$ đều là các số thuộc đoạn $[-1; 1]$ nên phương trình $\cos x = \cos m$ và $\sin 2x = \sin m$ đều có nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng □

Câu 59. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

a) $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \pm \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x = \pm \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

c) $\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

d) $\cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha - k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

a) $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.

b) $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.

c) $\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

d) $\cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha - k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d sai □

Câu 60. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

a) $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ với } k \in \mathbb{Z}$.

b) $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, \text{ với } k \in \mathbb{Z}$.

c) $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi, \text{ với } k \in \mathbb{Z}$.

d) $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, \text{ với } k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, \text{ với } k \in \mathbb{Z}$ và $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, \text{ với } k \in \mathbb{Z}$.

Đáp án: a sai | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 61. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

a) $\sin x = \sin 15^\circ \Leftrightarrow x = \pm 15^\circ + k360^\circ; k \in \mathbb{Z}$.

b) $\sin x = \sin 15^\circ \Leftrightarrow \sin x = \cos 75^\circ$.

c) $\sin x = \sin 15^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15^\circ + k360^\circ \\ x = 165^\circ + k360^\circ \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$.

d) $\sin x = \sin 15^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15^\circ + k360^\circ \\ x = 165^\circ + k360^\circ \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

- Ta có $\sin x = \sin 15^\circ \Leftrightarrow \sin x = \cos 75^\circ$ vì $\cos 75^\circ = \sin 15^\circ$.

$$\bullet \sin x = \sin 15^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - 15^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15^\circ + k360^\circ \\ x = 165^\circ + k360^\circ \end{cases}; k \in \mathbb{Z}.$$

Đáp án: a sai | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 62. Tìm công thức nghiệm (theo đơn vị độ) của phương trình $\cot x = -1$, với ký hiệu $k \in \mathbb{Z}$.

a) $x = 45^\circ + k180^\circ$. b) $x = -45^\circ + k180^\circ$. c) $x = 45^\circ + k360^\circ$. d) $x = 135^\circ + k180^\circ$.

Lời giải.

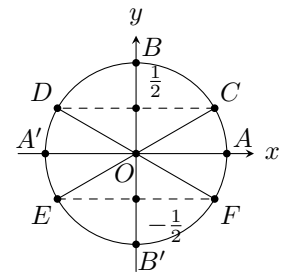
Ta có $\cot x = 1 \Leftrightarrow \cot x = \cot(-45^\circ) \Leftrightarrow x = -45^\circ + k180^\circ = 135^\circ + k180^\circ (k \in \mathbb{Z})$.

Đáp án: a sai | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 63.

Điểm nào trong hình bên biểu diễn nghiệm của phương trình $2 \sin x + 1 = 0$?

a) Điểm E . b) Điểm D . c) Điểm C . d) Điểm F .



Lời giải.

Các điểm biểu diễn nghiệm của phương trình $2 \sin x + 1 = 0$ là các điểm có tung độ bằng $-\frac{1}{2}$ và là các điểm E và F .

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng □

Câu 64. Cho phương trình $\sin x \cdot \sin 7x = \sin 3x \cdot \sin 5x$ (*), nhận xét nào sau đây là đúng?

- a) $x = k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình (*).
b) $x = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình (*).
c) Phương trình (*) tương đương với $\cos 6x - \cos 2x = 0$.
d) Phương trình (*) tương đương với $\sin 6x - \sin 2x = 0$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \sin x \cdot \sin 7x &= \sin 3x \cdot \sin 5x \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 6x - \cos 8x) &= \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 8x) \\ \Leftrightarrow \cos 6x &= \cos 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 2x + k2\pi \\ 6x = -2x + k2\pi \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{\pi}{2} \\ x = k\frac{\pi}{4} \end{cases} \\ \Leftrightarrow x &= k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Đáp án: a đúng | b đúng | c đúng | d sai □

Câu 65. Xét phương trình $3 \sin^2 x - 2 \cos x + 2 = 0$ (*), nhận xét nào sau đây là **sai**.

- a) $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình (*).
- b) $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình (*).
- c) Nghiệm của phương trình $\sin x = 0$ cũng là nghiệm của (*).
- d) Nghiệm của phương trình $\cos x = 1$ cũng là nghiệm của phương trình (*).

Lời giải.

Ta có $3 \sin^2 x - 2 \cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow 3 \cos^2 x + 2 \cos x - 5 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai □

Câu 66. Phương trình $4 \sin^4 x + 12 \cos^2 x - 7 = 0$ tương đương với phương trình nào dưới đây?

- a) $4 \sin^4 x - 12 \sin^2 x + 5 = 0.$
- b) $\cos 2x = 1.$
- c) $4 \cos^4 x - 4 \cos^2 x - 3 = 0.$
- d) $\cos 2x = 0.$

Lời giải.

Ta có $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ nên

$$\begin{aligned} 4 \sin^4 x + 12 \cos^2 x - 7 = 0 &\Leftrightarrow 4 \sin^4 x - 12 \sin^2 x + 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = \frac{5}{2} \\ \sin^2 x = \frac{1}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \cos 2x = 0. \end{aligned}$$

Ta có $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ nên

$$\begin{aligned} 4 \sin^4 x + 12 \cos^2 x - 7 = 0 &\Leftrightarrow 4 (1 - \cos^2 x)^2 + 12 \cos^2 x - 7 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4 \cos^4 x + 4 \cos^2 x - 3 = 0. \end{aligned}$$

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng □

Câu 67. Phương trình nào sau đây có tập nghiệm trùng với tập nghiệm của phương trình $3 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 5 \cos^2 x = 0$?

- a) $3 \cot^2 x + 2 \cot x - 5 = 0.$
- b) $5 \cot^2 x - 2 \cot x - 3 = 0.$
- c) $5 \tan^2 x - 2 \tan x - 3 = 0.$
- d) $3 \tan^2 x + 2 \tan x - 5 = 0.$

Lời giải.

- $\cos x = 0$, phương trình trở thành $3 = 0$ (vô lý).
 $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$, phương trình đã cho trở thành $3 \tan^2 x + 2 \tan x - 5 = 0$.
- $\sin x = 0$, phương trình trở thành $-5 = 0$ (vô lý).
 $\sin x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\sin^2 x$, phương trình đã cho trở thành $5 \cot^2 x - 2 \cot x - 3 = 0$.

Đáp án: a sai | b đúng | c sai | d đúng□

Câu 68. Gọi x_0 là nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $3\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x = 0$. Chọn khẳng định đúng?

- a) $x_0 \in \left(\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{3}\right)$. b) $x_0 \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$. c) $x_0 \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right)$. d) $x_0 \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} 3\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x &= 0 \\ \Leftrightarrow (3\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sin x - \cos x = 0 & (1) \\ \sin x + \cos x = 0 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Nhận xét $\cos x = 0$ không thỏa mãn. Khi đó

- (1) $\Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \arctan \frac{1}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.
- (2) $\Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Kết hợp hai trường hợp ta thấy nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình đã cho là $x_0 = \arctan \frac{1}{3} \Rightarrow x_0 \in \left(\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{6}\right)$.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai□

Câu 69. Phương trình $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$ tương đương với phương trình nào sau đây?

- a) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. b) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. c) $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$. d) $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Chia hai vế của phương trình cho 2, ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{3}\sin x + \cos x = 1 &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{3} \sin x + \cos \frac{\pi}{3} \cos x = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d sai□

Câu 70. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

- a) Phương trình $a\sin x + b\cos x = c$ có nghiệm khi $a^2 + b^2 < c^2$.
b) Phương trình $a\sin x + b\cos x = c$ có nghiệm khi $a^2 + b^2 \geq c^2 + 1$.
c) Phương trình $a\sin x + b\cos x = c$ có nghiệm khi $a^2 + b^2 \geq c^2$.
d) Phương trình $a\sin x + b\cos x = c$ có nghiệm khi $a^2 + b^2 > c^2$.

Lời giải.

Phương trình $a\sin x + b\cos x = c$ có nghiệm khi và chỉ khi $a^2 + b^2 \geq c^2$.

Ta có $a^2 + b^2 \geq c^2 + 1 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq c^2$, suy ra phương trình $a\sin x + b\cos x = c$ có nghiệm khi $a^2 + b^2 \geq c^2 + 1$.

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d đúng □

Chương 2

Dãy số. Cấp số cộng. Cấp số nhân

Câu 71. Cho dãy số (u_n) gồm $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$, với mọi số nguyên dương n . Xét tính đúng sai các mệnh đề sau

- a) Dãy số (u_n) là một dãy số hữu hạn.
- b) Số u_1 gọi là số hạng đầu.
- c) Số u_{n+1} được gọi là số hạng tổng quát của dãy số.
- d) Nếu $u_n < u_{n+1}$ thì dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng.

Lời giải.

- a) Dãy số (u_n) là một dãy số vô hạn. Do đó mệnh đề “Dãy số (u_n) là một dãy số hữu hạn” là mệnh đề sai.
- b) Số u_1 gọi là số hạng đầu.
- c) Số u_n được gọi là số hạng tổng quát của dãy số. Do đó mệnh đề “ u_{n+1} là số hạng tổng quát của dãy số” là mệnh đề sai.
- d) Nếu $u_n < u_{n+1}$ thì dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng

Đáp án: a sai | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 72. Cho dãy số (u_n) biết $u_1 = 2$ và $u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}^2}$ với mọi $n \geq 2$. Xét tính đúng sai các mệnh đề sau

- a) Năm số hạng đầu của dãy số (u_n) là $2; \sqrt{2}; 2\sqrt{2}; 2\sqrt{3}; 2\sqrt{4}$.
- b) Dãy số (u_n) là dãy vô hạn.
- c) Tích 6 số hạng đầu của dãy số là $S = 96\sqrt{35}$.
- d) Số hạng tổng quát $u_n = \sqrt{2(n+1)}$.

Lời giải.

- a) Năm số hạng đầu của dãy số (u_n) là $2; \sqrt{6}; 2\sqrt{2}; \sqrt{10}; 2\sqrt{3}$. Vậy mệnh đề “Năm số hạng đầu của dãy số (u_n) là $2; \sqrt{2}; 2\sqrt{2}; 2\sqrt{3}; 2\sqrt{4}$ ” là mệnh đề sai.
- b) Dãy số (u_n) là dãy vô hạn.

c) Sáu số hạng đầu của dãy số (u_n) là $2; \sqrt{6}; 2\sqrt{2}; \sqrt{10}; 2\sqrt{3}; \sqrt{14}$.

Tích 6 số hạng đầu của dãy số là $S = 96\sqrt{35}$.

Vậy mệnh đề “Tích 6 số hạng đầu của dãy số là $S = 96\sqrt{35}$ ” là mệnh đề đúng.

d) Ta có $u_1 = \sqrt{2(1+1)} = 2$ (đúng).

Giả sử với $n = k$, ta có $u_k = \sqrt{2(k+1)}$.

Xét $u_{k+1} = \sqrt{2(k+1+1)} = \sqrt{2(k+1)+2} = \sqrt{2+u_k^2}$ (đúng).

Vậy công thức số hạng tổng quát $u_n = \sqrt{2(n+1)}$ là mệnh đề đúng.

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d đúng □

Câu 73. Cho dãy số $u_n = 20 \sin \frac{n\pi}{2} + 21 \cos \frac{n\pi}{3}$. Xét tính đúng sai các mệnh đề sau

a) Dãy số được cho bởi phương pháp truy hồi.

b) Ba số hạng đầu của dãy số là $\frac{61}{2}; -\frac{21}{2}; -41$.

c) Tổng năm số hạng đầu của dãy số bằng 0.

d) $u_{n+12} = u_n$.

Lời giải.

a) Dãy được cho bởi công thức của số hạng tổng quát u_n .

Vậy “Dãy số được cho bởi phương pháp truy hồi” là mệnh đề sai.

b) Ba số hạng đầu của dãy số là $\frac{61}{2}; -\frac{21}{2}; -41$. Vậy mệnh đề “Ba số hạng đầu của dãy số là $\frac{61}{2}; -\frac{21}{2}; -41$ ” là mệnh đề đúng.

c) Năm số hạng đầu của dãy số là $\frac{61}{2}; -\frac{21}{2}; -41; -\frac{21}{2}; \frac{61}{2}$.

Suy ra tổng năm số hạng đầu của dãy số bằng -1 .

Vậy “Tổng năm số hạng đầu của dãy số bằng 0” là mệnh đề sai.

d) Ta có

$$\begin{aligned} u_{n+12} &= 20 \sin \frac{(n+12)\pi}{2} + 21 \cos \frac{(n+12)\pi}{3} = 20 \sin \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{12\pi}{2} \right) + 21 \cos \left(\frac{n\pi}{3} + \frac{12\pi}{3} \right) \\ &= 20 \sin \left(\frac{n\pi}{2} + 6\pi \right) + 21 \cos \left(\frac{n\pi}{3} + 4\pi \right) \\ &= 20 \sin \frac{n\pi}{2} + 21 \cos \frac{n\pi}{3} \\ &= u_n. \end{aligned}$$

Đáp án: a sai | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 74. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = 5n + 2, n \in \mathbb{N}^*$. Số 77 là số hạng của dãy.

b) Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = 2n - 3, n \in \mathbb{N}^*$. Số -3 không là số hạng của dãy.

c) Cho dãy số có công thức tổng quát là $u_n = 2^n$ thì số hạng thứ $n + 3$ bằng $2^3 + 2^n$.

d) Dãy số (u_n) thỏa mãn $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = n^2$. Khi đó $u_{12} = 23$.

Lời giải.

a) Ta có $5n + 2 = 77 \Leftrightarrow 5n = 75 \Leftrightarrow n = 15$ do đó mệnh đề “Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = 5n + 2, n \in \mathbb{N}^*$. Số 77 là số hạng của dãy” đúng.

b) Ta có $2n - 3 = -3 \Leftrightarrow n = 0$ (loại).

Mệnh đề “Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = 2n - 3, n \in \mathbb{N}^*$. Số -3 không là số hạng của dãy” đúng.

c) Mệnh đề “Cho dãy số có công thức tổng quát là $u_n = 2^n$ thì số hạng thứ $n + 3$ bằng $2^3 + 2^n$ ” sai.

d) Ta có $S_{12} = u_1 + u_2 + \dots + u_{11} + u_{12} = S_{11} + u_{12} \Rightarrow u_{12} = 12^2 - 11^2 = 23$.

Mệnh đề “Dãy số (u_n) thỏa mãn $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = n^2$. Khi đó $u_{12} = 23$ ” đúng.

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 75. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n+2}{2n+1}, \forall n \geq 1$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Số $\frac{5}{7}$ là số hạng thứ 3 của dãy.

b) Dãy số $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

c) Dãy số (u_n) là dãy số giảm.

d) Dãy số (u_n) là dãy số tăng.

Lời giải.

a) Ta có $(u_3) = \frac{5}{7}$ do đó mệnh đề “Số $\frac{5}{7}$ là số hạng thứ 3 của dãy” đúng.

b) Mệnh đề “Dãy số $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ ” đúng.

c) Ta có $u_{n+1} - u_n = \frac{n+3}{2n+3} - \frac{n+2}{2n+1} = \frac{-3}{(2n+1)(2n+3)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Do đó mệnh đề “Dãy số (u_n) là dãy số giảm” đúng.

d) Mệnh đề “Dãy số (u_n) là dãy số tăng” sai.

Đáp án: a đúng | b đúng | c đúng | d sai □

Câu 76. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Dãy số $u_n = (-1)^{2n+1} \cdot 3^n$ là dãy giảm.

b) Dãy số $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ là dãy không tăng.

c) Dãy số $u_n = 3n^2 - n^3$ là dãy không giảm.

d) Dãy số $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ là dãy tăng.

Lời giải.

a) $u_n = (-1)^{2n+1} \cdot 3^n = -3^n$ là dãy giảm suy ra mệnh đề “Dãy số $u_n = (-1)^{2n+1} \cdot 3^n$ là dãy giảm” đúng.

b) $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ là dãy giảm suy ra mệnh đề “Dãy số $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ là dãy không tăng” sai.

c) $u_n = 3n^2 - n^3$ không là dãy đơn điệu suy ra mệnh đề “Dãy số $u_n = 3n^2 - n^3$ là dãy không giảm” đúng.

d) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ là dãy giảm suy ra mệnh đề “Dãy số $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ là dãy tăng” sai.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai ☐

Câu 77. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Dãy số $u_n = \frac{n+3}{n+1}$ giảm.
b) Dãy số $u_n = \cos n$ giảm.
c) Dãy số $u_n = \frac{3^n}{n}$ tăng.
d) Dãy số $u_n = 25 - 10n - n^2$ không tăng không giảm.

Lời giải.

- a) Xét mệnh đề $u_n = \frac{n+3}{n+1}$, suy ra $u_n = 1 + \frac{2}{n+1}$ khi n tăng thì dãy số giảm, do đó mệnh đề “Dãy số $u_n = \frac{n+3}{n+1}$ giảm” đúng.
- b) Dãy số $u_n = \cos n$ có $u_2 > u_3 < u_4$ là dãy số không tăng không giảm nên mệnh đề “Dãy số $u_n = \cos n$ giảm” sai.
- c) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1} \cdot n}{3^n \cdot (n+1)} = \frac{3n}{n+1} = 3 - \frac{3}{n+1} \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} > 1, \forall n \geq 1$, do đó mệnh đề “Dãy số $u_n = \frac{3^n}{n}$ tăng” đúng.
- d) Xét mệnh đề $u_n = 25 - 10n - n^2$, suy ra $u_n = 25 - 10n - n^2 = -(n-5)^2$ là dãy số không tăng không giảm, do đó mệnh đề “Dãy số $u_n = 25 - 10n - n^2$ không tăng không giảm” đúng.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d đúng ☐

Câu 78. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

- a) Dãy số $u_n = \frac{1}{2^n}$ tăng.
- b) Dãy số $u_n = \frac{1}{n}$ không tăng.
- c) Dãy số $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$ giảm.
- d) Dãy số $u_n = \frac{n+5}{3n+1}$ tăng.

Lời giải.

- a) Xét dãy số (u_n) có $u_n = \frac{1}{2^n}$. Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1$, tức là $u_{n+1} < u_n$ cho nên dãy số (u_n) đã cho là dãy số giảm.
Mệnh đề “Dãy số $u_n = \frac{1}{2^n}$ tăng” sai.
- b) Xét dãy số (u_n) có $u_n = \frac{1}{n}$. Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} < 1$, tức là $u_{n+1} < u_n$ cho nên dãy số (u_n) đã cho là dãy số giảm.
Mệnh đề “Dãy số $u_n = \frac{1}{n}$ không tăng” đúng.
- c) Xét dãy số (u_n) có $u_n = \frac{n+5}{3n+1} = \frac{1}{3} + \frac{14}{3(3n+1)}$.
Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $u_{n+1} - u_n = \frac{14}{3(3n+4)} - \frac{14}{3(3n+1)} < 0$, tức là $u_{n+1} < u_n$ cho nên dãy số

(u_n) đã cho là dãy số giảm.

Mệnh đề “Dãy số $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$ giảm” đúng.

d) Xét dãy số (u_n) có $u_n = \frac{2n-1}{n+1} = 2 - \frac{3}{n+1}$.

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{n+1} - \frac{3}{n+2} > 0$, tức là $u_{n+1} > u_n$ cho nên dãy số (u_n) đã cho là dãy số tăng.

Mệnh đề “Dãy số $u_n = \frac{n+5}{3n+1}$ tăng” sai.

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d sai □

Câu 79. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Dãy số $u_n = \pi$ tăng.

b) Dãy số $u_n = \frac{2023}{n}$ không tăng.

c) Dãy số $u_n = n^3$ tăng.

d) Dãy số $u_n = n!$ có $u_{n+1} = (n+1)u_n$.

Lời giải.

a) Mệnh đề “Dãy số $u_n = \pi$ tăng” sai.

b) Mệnh đề “Dãy số $u_n = \frac{2023}{n}$ không tăng” đúng.

c) Mệnh đề “Dãy số $u_n = n^3$ tăng” đúng.

d) Mệnh đề “Dãy số $u_n = n!$ có $u_{n+1} = (n+1)u_n$ ” đúng.

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d đúng □

Câu 80. Xét tính tăng giảm và bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n = n^3 + 2n + 1$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Dãy số tăng, bị chặn.

b) Dãy số giảm, bị chặn trên.

c) Dãy số giảm, bị chặn.

d) Dãy số tăng, bị chặn dưới.

Lời giải.

Ta có

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^3 + 2(n+1) + 1 - (n^3 + 2n + 1) = 3n^2 + 3n + 3 > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Nên (u_n) là dãy tăng.

Mặt khác, vì $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy (u_n) bị chặn dưới.

a) Mệnh đề “Dãy số tăng, bị chặn” sai.

b) Mệnh đề “Dãy số giảm, bị chặn trên” sai.

c) Mệnh đề “Dãy số giảm, bị chặn” sai.

d) Mệnh đề “Dãy số tăng, bị chặn dưới” đúng.

Đáp án: a sai | b sai | c sai | d đúng □

Câu 81. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{2n^2 + 3}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ tăng.
 b) Dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^{2n} \cdot (n^2 + 1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ không tăng không giảm.
 c) Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ không giảm.
 d) Dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n \cdot (n^2 + 4n + 1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ giảm.

Lời giải.

Xét lần lượt các dãy số

a) $u_n = \frac{1}{2n^2 + 3}$
 Ta có

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2(n+1)^2 + 3} - \frac{1}{2n^2 + 3} = \frac{1}{2n^2 + 4n + 5} - \frac{1}{2n^2 + 3} \\ &= \frac{-4n - 2}{(2n^2 + 4n + 5)(2n^2 + 3)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Do đó dãy số này là dãy giảm.

b) $u_n = (-1)^n \cdot (n^2 + 4n + 1)$

Dãy này là dãy đan dấu nên không tăng không giảm.

c) $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

Ta có $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{-2}{n(n+1)(n+2)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Do đó dãy số này là dãy giảm.

d) $u_n = (-1)^{2n} \cdot (n^2 + 1)$

Ta có

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (-1)^{2(n+1)} \cdot ((n+1)^2 + 1) - (-1)^{2n} \cdot (n^2 + 1) \\ &= n^2 + 2n + 2 - (n^2 + 1) = 2n + 1 > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Do đó dãy số này là dãy tăng.

Đáp án: a sai | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 82. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{n^2 + n}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) (u_n) bị chặn bởi $\frac{1}{2}$.
 b) (u_n) là dãy số giảm.
 c) (u_n) là dãy số tăng.
 d) 5 số hạng đầu của dãy là $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}$.

Lời giải.

Ta có $u_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và $u_n = \frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{n(n+1)}$ nên

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+2} < 1.$$

Do đó, dãy số đã cho là dãy số giảm và $u_n \leq u_1 = \frac{1}{2}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có 5 số hạng đầu của dãy là

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}.$$

- a) Mệnh đề “ (u_n) bị chặn bởi $\frac{1}{2}$ ” đúng.
 b) Mệnh đề “ (u_n) là dãy số giảm” đúng.
 c) Mệnh đề “ (u_n) là dãy số tăng” sai.
 d) Mệnh đề “5 số hạng đầu của dãy là $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}$ ” đúng.

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 83. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Cho dãy số (u_n) , với $u_n = 5^{n+1}$. Khi đó số hạng $u_{n-1} = 5^n$.
 b) Dãy số $u_n = \frac{\sqrt{2}}{2^n}$ là một dãy số tăng.
 c) Dãy số $u_n = -\sin n$ là một dãy số tăng.
 d) Dãy số $u_n = \frac{3 \sin n + 4 \cos n}{n+1}$ là một dãy số bị chặn.

Lời giải.

- a) Mệnh đề “Cho dãy số (u_n) , với $u_n = 5^{n+1}$. Khi đó số hạng $u_{n-1} = 5^n$ ” đúng.
 b) Mệnh đề “Dãy số $u_n = \frac{\sqrt{2}}{2^n}$ là một dãy số tăng” sai.
 c) Mệnh đề “Dãy số $u_n = -\sin n$ là một dãy số tăng” sai.
 d) Mệnh đề “Dãy số $u_n = \frac{3 \sin n + 4 \cos n}{n+1}$ là một dãy số bị chặn” đúng.

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng □

Câu 84. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Cho dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{n+1}$. Khi đó $u_8 = \frac{8}{9}$.
 b) Dãy số (u_n) biết $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = u_n + 2n - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ có $u_{20} = 362$.
 c) Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n} \end{cases}$. Số hạng tổng quát $u_n = n$.
 d) Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = 0$ và $u_{n+1} = n + u_n \forall n \geq 1$. Giá trị của $u_{218} = 23653$.

Lời giải.

- a) Mệnh đề “Cho dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{n+1}$. Khi đó $u_8 = \frac{8}{9}$ ” đúng.

b) Từ $u_{n+1} = u_n + 2n - 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = 2n - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Do đó

$$\begin{aligned} u_2 - u_1 &= 1 \\ u_3 - u_2 &= 3 \\ &\vdots \\ u_n - u_{n-1} &= 2(n-1) - 1 = 2n - 3 \end{aligned}$$

Cộng vế theo vế ta có $u_n - u_1 = 1 + 3 + \dots + 2n - 3 = (n-1)^2 \Rightarrow u_n = (n-1)^2 + 1$.

Vậy $u_{20} = 19^2 + 1 = 362$.

Mệnh đề “Dãy số (u_n) biết $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = u_n + 2n - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ có $u_{20} = 362$ ” đúng.

c) Mệnh đề “Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n} \end{cases}$. Số hạng tổng quát $u_n = n$ ” đúng.

d) Từ giả thiết, ta có $u_{n+1} - u_n = n \forall n \geq 1$.

Suy ra $u_{218} = (u_{218} - u_{217}) + (u_{217} - u_{216}) + \dots + (u_2 - u_1) + u_1 = 217 + 216 + \dots + 1 = \frac{217 \cdot 218}{2} = 23653$.

Mệnh đề “Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = 0$ và $u_{n+1} = n + u_n \forall n \geq 1$. Giá trị của $u_{218} = 23653$ ” đúng.

Đáp án: a đúng | b đúng | c đúng | d đúng □

Câu 85. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n+1}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Số hạng thứ 10 của dãy số là $\frac{-1}{11}$. b) Số hạng thứ 9 của dãy số là $\frac{1}{10}$.
c) Dãy số (u_n) là một dãy số giảm. d) Dãy số (u_n) bị chặn.

Lời giải.

Dễ thấy $|u_n| = \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên (u_n) là dãy số bị chặn.

Lại có $u_9 = \frac{1}{10}; u_{10} = \frac{-1}{11}; u_{11} = \frac{1}{12}; u_{12} = \frac{-1}{13}$ suy ra dãy (u_n) không phải là dãy số tăng cũng không phải là dãy số giảm.

Do đó đáp án “Dãy số (u_n) là một dãy số giảm” sai.

a) Mệnh đề “Số hạng thứ 10 của dãy số là $\frac{-1}{11}$ ” đúng.

b) Mệnh đề “Số hạng thứ 9 của dãy số là $\frac{1}{10}$ ” đúng.

c) Mệnh đề “Dãy số (u_n) là một dãy số giảm” sai.

d) Mệnh đề “Dãy số (u_n) bị chặn” đúng.

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 86. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Dãy số $u_n = n$ tăng.
- b) Dãy số $u_n = (-1)^n n$ không bị chặn.
- c) Dãy số $u_n = n$ bị chặn dưới không bị chặn trên.
- d) Dãy số $u_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ dãy số bị chặn.

Lời giải.

- a) Mệnh đề “Dãy số $u_n = n$ tăng” đúng.
- b) Mệnh đề “Dãy số $u_n = (-1)^n n$ không bị chặn” đúng.
- c) Mệnh đề “Dãy số $u_n = n$ bị chặn dưới không bị chặn trên” đúng.
- d) Mệnh đề “Dãy số $u_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ dãy số bị chặn” đúng.

Đáp án: a đúng | b đúng | c đúng | d đúng □

Câu 87. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{an - 1}{n + 2}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Dãy số tăng khi $a > -\frac{1}{2}$.
- b) Dãy số giảm khi $a = 0$.
- c) Dãy số bị chặn.
- d) Dãy số không tăng không giảm khi $a = -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } u_{n+1} - u_n = \frac{an + a - 1}{n + 3} - \frac{an - 1}{n + 2} = \frac{2a + 1}{(n + 2)(n + 3)}.$$

$$\text{Để dãy số } (u_n) \text{ tăng} \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow 2a + 1 > 0 \Leftrightarrow a > -\frac{1}{2}.$$

- a) Mệnh đề “Dãy số tăng khi $a > -\frac{1}{2}$ ” đúng.
- b) Mệnh đề “Dãy số giảm khi $a = 0$ ” đúng.
- c) Mệnh đề “Dãy số bị chặn” đúng.
- d) Mệnh đề “Dãy số không tăng không giảm khi $a = -\frac{1}{2}$ ” đúng.

Đáp án: a đúng | b đúng | c đúng | d đúng □

Câu 88. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 2n - 1$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Dãy số bị chặn dưới nhưng không bị chặn trên.
- b) Dãy số tăng.
- c) Dãy số vừa chặn dưới vừa bị chặn trên.
- d) Dãy số giảm.

Lời giải.

Ta có $u_{n+1} - u_n = [2(n + 1) - 1] - [2n - 1] = (2n + 1) - (2n - 1) = 2 > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy số đã cho là dãy số tăng, bị chặn dưới bởi $u_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ và không bị chặn trên.

- a) Mệnh đề “Dãy số bị chặn dưới nhưng không bị chặn trên” sai.
- b) Mệnh đề “Dãy số tăng” đúng.
- c) Mệnh đề “Dãy số vừa chặn dưới vừa bị chặn trên” đúng.
- d) Mệnh đề “Dãy số giảm” sai.

Đáp án: a sai | b đúng | c sai | d sai □

Câu 89. Dãy số có các số hạng cho bởi: $0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \dots$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Số hạng tổng quát của dãy là $u_n = \frac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.
- b) Số hạng tổng quát của dãy là $u_n = \frac{n-1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$.
- c) Dãy số tăng.
- d) Dãy số bị chặn trên bởi 1.

Lời giải.

- a) Mệnh đề “Số hạng tổng quát của dãy là $u_n = \frac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ ” sai.
- b) Mệnh đề “Số hạng tổng quát của dãy là $u_n = \frac{n-1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$ ” đúng.
- c) Mệnh đề “Dãy số tăng” đúng.
- d) Mệnh đề “Dãy số bị chặn trên bởi 1” đúng.

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d đúng □

Câu 90. Cho dãy số (u_n) , với $u_n = \sin \frac{\pi}{n+1}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Dãy số (u_n) không tăng không giảm.
- b) Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn.
- c) Dãy số (u_n) là một dãy số tăng.
- d) Số hạng thứ $n+1$ của dãy là $u_{n+1} = \sin \frac{\pi}{n+1}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } u_n = \sin \frac{\pi}{n+1} \Rightarrow u_{n+1} = \sin \frac{\pi}{(n+1)+1} = \sin \frac{\pi}{n+2}.$$

$$u_n = \sin \frac{\pi}{n+1} \Rightarrow -1 \leq u_n \leq 1 \Rightarrow (u_n) \text{ là dãy số bị chặn.}$$

$$u_{n+1} - u_n = \sin \frac{\pi}{n+2} - \sin \frac{\pi}{n+1} < 0 \quad \left(0 < \frac{\pi}{n+2} < \frac{\pi}{n+1} \leq \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow \text{dãy số } (u_n) \text{ giảm.}$$

- a) Mệnh đề “Dãy số (u_n) không tăng không giảm” sai.
- b) Mệnh đề “Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn” đúng.
- c) Mệnh đề “Dãy số (u_n) là một dãy số tăng” sai.
- d) Mệnh đề “Số hạng thứ $n+1$ của dãy là $u_{n+1} = \sin \frac{\pi}{n+1}$ ” sai.

Đáp án: a sai | b đúng | c sai | d sai □

Câu 91. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = 2^n$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Dãy số tăng.
- b) Dãy số không bị chặn trên.
- c) Dãy số bị chặn dưới.
- d) Số hạng tổng quát của dãy số là $u_{n+2} = 4 \cdot 2^n$.

Lời giải.

- a) Mệnh đề “Dãy số tăng” đúng.
- b) Mệnh đề “Dãy số không bị chặn trên” đúng.
- c) Mệnh đề “Dãy số bị chặn dưới” đúng.
- d) Mệnh đề “Số hạng tổng quát của dãy số là $u_{n+2} = 4 \cdot 2^n$ ” đúng.

Đáp án: a đúng | b đúng | c đúng | d đúng □

Câu 92. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = \sin \frac{n\pi}{3}$, với $n \geq 1$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Số hạng thứ 2 của dãy số là $u_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- b) Dãy số (u_n) là dãy số tăng.
- c) Dãy số (u_n) bị chặn.
- d) Dãy số (u_n) là dãy số giảm.

Lời giải.

Ta có, dãy số $u_n = \sin \frac{n\pi}{3}$ có $u_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, dãy không tăng không giảm, $-1 \leq \sin \frac{n\pi}{3} \leq 1$. Suy ra dãy số (u_n) bị chặn.

- a) Mệnh đề “Số hạng thứ 2 của dãy số là $u_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ” đúng.
- b) Mệnh đề “Dãy số (u_n) là dãy số tăng” sai.
- c) Mệnh đề “Dãy số (u_n) bị chặn” đúng.
- d) Mệnh đề “Dãy số (u_n) là dãy số giảm” sai.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai □

Câu 93. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = (-1)^n \cdot 5^{2n+5}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.
- b) Dãy số (u_n) bị chặn.
- c) Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.
- d) Dãy số (u_n) không bị chặn.

Lời giải.

Nếu n chẵn thì $u_n = 5^{2n+1} > 0$ tăng lên vô hạn (dương vô cùng) khi n tăng lên vô hạn nên dãy (u_n) không bị chặn trên.

Nếu n lẻ thì $u_n = -5^{2n+1} < 0$ giảm xuống vô hạn (âm vô cùng) khi n tăng lên vô hạn nên dãy (u_n) không bị chặn dưới.

Vậy dãy số đã cho không bị chặn.

a) Mệnh đề “Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên” sai.

b) Mệnh đề “Dãy số (u_n) bị chặn” sai.

c) Mệnh đề “Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới” sai.

d) Mệnh đề “Dãy số (u_n) không bị chặn” đúng.

Đáp án: a sai | b sai | c sai | d đúng ☐

Câu 94. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d , xét tính đúng sai các mệnh đề sau

- a) Số hạng tổng quát $u_n = u_1 + (n - 1)d$, với $n \geq 1$.
- b) Số hạng $u_{n+1} = u_n + (n - 1)d$, với $n \geq 1$.
- c) Tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng là $S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$.
- d) Số hạng tổng quát $u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$ với $n \geq 2$.

Lời giải.

- a) Số hạng tổng quát của cấp số cộng $u_n = u_1 + (n - 1)d$, với $n \geq 1$.

Vậy mệnh đề “Số hạng tổng quát $u_n = u_1 + (n - 1)d$, với $n \geq 1$ ” là mệnh đề đúng.

- b) Theo định nghĩa cấp số cộng thì $u_{n+1} = u_n + d$ với $n \geq 1$.

Vậy mệnh đề “Số hạng $u_{n+1} = u_n + (n - 1)d$, với $n \geq 1$ ” là mệnh đề sai.

- c) Tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng là $S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$.

Vậy mệnh đề “Tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng là $S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$,” là mệnh đề đúng.

- d) Ta có mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong dãy.

Vậy mệnh đề “Số hạng tổng quát $u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$ với $n \geq 2$ ” là mệnh đề đúng.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d đúng □

Câu 95. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d , xét tính đúng sai các mệnh đề sau

- a) Số hạng tổng quát $u_n = u_1 + d$, với $n \geq 1$.
- b) Số hạng $u_{n+1} = u_n + d$, với $n \in \mathbb{N}$.
- c) Tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng là $S_n = \frac{n[2u_1 + (n - 1)d]}{2}$.
- d) Số hạng tổng quát $u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$ với $n \geq 2$.

Lời giải.

- a) Số hạng tổng quát của cấp số cộng $u_n = u_1 + (n - 1)d$, với $n \geq 1$.

Vậy mệnh đề “Số hạng tổng quát $u_n = u_1 + d$, với $n \geq 1$ ” là mệnh đề sai.

- b) Theo định nghĩa cấp số cộng thì $u_{n+1} = u_n + d$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy mệnh đề “Số hạng $u_{n+1} = u_n + d$, với $n \in \mathbb{N}$ ” là mệnh đề sai.

- c) Tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng là $S_n = \frac{n[2u_1 + (n - 1)d]}{2}$.

Vậy mệnh đề “Tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng là $S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$,” là mệnh đề đúng.

d) Ta có mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cố số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong dãy.

Vậy mệnh đề “Số hạng tổng quát $u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$ với $n \geq 2$ ” là mệnh đề đúng.

Đáp án: a sai | b sai | c đúng | d đúng ☐

Câu 96. Cho cấp số cộng 1; 3; 5; 7; 9; 11. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Số hạng đầu u_1 bằng 1. b) Công sai của cấp số cộng bằng 3.
c) Số hạng thứ tư bằng 4. d) Tổng ba số hạng đầu bằng 9.

Lời giải.

- Ta có số hạng đầu u_1 bằng 1.
- Công sai của cấp số cộng bằng $3 - 1 = 2$.
- Số hạng thứ tư bằng 7.
- Tổng ba số hạng đầu bằng $1 + 3 + 5 = 9$.

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng ☐

Câu 97. Cho cấp số cộng 3; 6; 9; 12;.... Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Số hạng đầu u_1 bằng 3. b) Công sai của cấp số cộng bằng 6.
c) Số hạng thứ năm bằng 24. d) Số hạng tổng quát là $u_n = 3n$.

Lời giải.

- a) Ta có số hạng đầu u_1 bằng 3.
- b) Công sai của cấp số cộng bằng $6 - 3 = 3$.
- c) Ta có $u_4 = 12$ nên $u_5 = u_4 + d = 12 + 3 = 15$.
- d) Số hạng tổng quát $u_n = u_1 + (n - 1)d = 3 + (n - 1) \cdot 3 = 3n$.

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng ☐

Câu 98. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3 = 6$ và $u_{10} = 34$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) (u_n) có $u_1 = -2$ và công sai $d = 4$.
b) Tổng 10 số hạng đầu bằng 170.
c) Số hạng thứ năm bằng 14.
d) Số 70 là số hạng thứ 18.

Lời giải.

a) Ta có $\begin{cases} u_1 + 2d = 6 \\ u_1 + 9d = 34 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = -2 \\ d = 4. \end{cases}$

b) Ta có $S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)d}{2} \Rightarrow S_{10} = -2 \cdot 10 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 4}{2} = 172.$

c) Ta có $u_5 = u_1 + 4d = -2 + 4 \cdot 4 = 14$.

d) Giả sử 70 là số hạng thứ n của cấp số cộng.

$$\text{Ta có } n = \frac{u_n - u_1}{d} + 1 = \frac{70 - (-2)}{4} + 1 = 19.$$

Vậy số 70 là số hạng thứ 19 của cấp số cộng (u_n) .

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai □

Câu 99. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = 14$, $u_6 = 20$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Công sai của cấp số cộng bằng 3. b) Số hạng đầu u_1 bằng 4.
c) Số hạng thứ năm bằng 17. d) Số hạng tổng quát $u_n = 3n - 1$.

Lời giải.

a) Ta có $u_6 - u_4 = u_1 + 5d - u_1 - 3d = 2d = 6 \Rightarrow d = 3$.

b) Ta có $u_4 = u_1 + 3d \Leftrightarrow 14 = u_1 + 3 \cdot 3 \Leftrightarrow u_1 = 5$.

c) Ta có $u_5 = u_4 + d = 14 + 3 = 17$.

d) Số hạng tổng quát $u_n = u_1 + (n - 1)d = 5 + (n - 1) \cdot 3 = 3n + 2$.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai □

Câu 100. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1$, công sai $d = -2$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Số hạng thứ ba bằng -2 . b) Số -11 là số hạng thứ 6.
c) Số hạng tổng quát là $u_n = 1 - 2n$. d) Tổng 10 số hạng đầu bằng -80 .

Lời giải.

a) Ta có $u_3 = u_1 + 2d = 1 + 2 \cdot (-2) = -3$.

b) Giả sử -11 là số hạng thứ n của cấp số cộng.

$$\text{Ta có } n = \frac{u_n - u_1}{d} + 1 = \frac{-11 - 1}{-2} + 1 = 7.$$

Vậy số -11 là số hạng thứ 7 của cấp số cộng (u_n) .

c) Số hạng tổng quát $u_n = u_1 + (n - 1)d = 1 + (n - 1) \cdot (-2) = 3 - 2n$.

d) Ta có $S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$. Suy ra $S_{10} = 10 \cdot 1 + \frac{10(10-1) \cdot (-2)}{2} = -80$.

Đáp án: a sai | b sai | c sai | d đúng □

Câu 101. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1$, $u_2 = 3$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Công sai của cấp số cộng bằng 2. b) Số hạng thứ sáu bằng 11.
c) Số hạng tổng quát là $u_n = 2n + 1$. d) Tổng 20 số hạng đầu bằng 400.

Lời giải.

a) Ta có $d = u_2 - u_1 = 3 - 1 = 2$.

b) Ta có $u_6 = u_1 + 5d = 1 + 5 \cdot 2 = 11$

c) Số hạng tổng quát $u_n = u_1 + (n - 1)d = 1 + (n - 1) \cdot 2 = 2n - 1$.

d) Ta có $S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$. Suy ra $S_{20} = 20 \cdot 1 + \frac{20(20-1) \cdot 2}{2} = 400$.

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 102. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 = -1$, $u_3 = 2$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Công sai của cấp số cộng bằng 3. b) Số hạng thứ năm bằng 11.
c) Số hạng tổng quát là $u_n = 3n - 7$. d) Tổng 25 số hạng đầu bằng 900.

Lời giải.

a) Ta có $d = u_3 - u_2 = 2 - (-1) = 3$.

b) Ta có $u_5 = u_2 + 3d = -1 + 3 \cdot 3 = 8$.

c) Ta có $u_1 = u_2 - d = -1 - 3 = -4$.

Số hạng tổng quát $u_n = u_1 + (n - 1)d = -4 + (n - 1) \cdot 3 = 3n - 7$.

d) Ta có $S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$. Suy ra $S_{25} = 25 \cdot (-4) + \frac{25(25-1) \cdot 3}{2} = 800$.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai □

Câu 103. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 = -2$, công sai $d = 2$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Số hạng đầu u_1 bằng 4.
b) Số hạng u_7 bằng 8.
c) Số hạng tổng quát $u_n = 2n - 6$.
d) Tổng 20 số hạng đầu của cấp số cộng bằng 400.

Lời giải.

a) Ta có $u_2 - u_1 = d \Rightarrow u_1 = u_2 - d = -2 - 2 = -4$.

b) Ta có $u_7 = u_1 + 6d = -4 + 6 \cdot 2 = 8$.

c) Số hạng tổng quát $u_n = u_1 + (n - 1)d = -4 + (n - 1) \cdot 2 = 2n - 6$.

d) Ta có $S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$. Suy ra $S_{20} = 20 \cdot (-4) + \frac{20(20-1) \cdot 2}{2} = 300$.

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d sai □

Câu 104. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_5 = 15$, công sai $d = 3$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Số hạng đầu u_1 bằng 3.
b) Số hạng u_6 bằng 18.
c) Số hạng tổng quát $u_n = 3n$.
d) Tổng 30 số hạng đầu của cấp số cộng bằng 1180.

Lời giải.

a) Ta có $u_5 = u_1 + 4d \Leftrightarrow 15 = u_1 + 4 \cdot 3 \Leftrightarrow u_1 = 3$.

b) Ta có $u_6 = u_5 + d = 15 + 3 = 18$.

c) Số hạng tổng quát $u_n = u_1 + (n - 1)d = 3 + (n - 1) \cdot 3 = 3n$.

d) Ta có $S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$. Suy ra $S_{30} = 30 \cdot (-3) + \frac{30(30-1) \cdot 3}{2} = 1215$.

Đáp án: a đúng | b đúng | c đúng | d sai □

Câu 105. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -2$, $u_6 = 8$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Công sai d bằng 3.

b) Số hạng u_9 bằng 12.

c) Số hạng tổng quát $u_n = 2n - 4$.

d) Tổng 40 số hạng đầu của cấp số cộng bằng 1480.

Lời giải.

a) Ta có $u_6 = u_1 + 5d \Leftrightarrow 8 = -2 + 5 \cdot d \Leftrightarrow d = 2$.

b) Ta có $u_9 = u_1 + 8d = -2 + 8 \cdot 2 = 14$.

c) Số hạng tổng quát $u_n = u_1 + (n - 1)d = -2 + (n - 1) \cdot 2 = 2n - 4$.

d) Ta có $S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$. Suy ra $S_{40} = 40 \cdot (-2) + \frac{40(40-1) \cdot 2}{2} = 1480$.

Đáp án: a sai | b sai | c đúng | d đúng □

Câu 106. Cho cấp số cộng (u_n) biết $\begin{cases} u_3 + u_{10} = -31 \\ 2u_4 - u_9 = 7 \end{cases}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Cấp số cộng có $u_1 = -1$, công sai $d = 3$.

b) Số hạng u_3 bằng -5 .

c) Số hạng tổng quát $u_n = -3n + 4$.

d) Tổng 10 số hạng đầu của cấp số cộng bằng -125 .

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{cases} u_3 + u_{10} = -31 \\ 2u_4 - u_9 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d + u_1 + 9d = -31 \\ 2(u_1 + 3d) - (u_1 + 8d) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 11d = -31 \\ u_1 - 2d = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = -3. \end{cases}$$

b) Ta có $u_3 = u_1 + 2d = 1 + 2 \cdot (-3) = -5$.

c) Số hạng tổng quát $u_n = u_1 + (n - 1)d = 1 + (n - 1) \cdot (-3) = -3n + 4$.

d) Ta có $S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$. Suy ra $S_{10} = 10 \cdot 1 + \frac{10(10-1) \cdot (-3)}{2} = -125$.

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d đúng □

Câu 107. Cho cấp số cộng (u_n) biết $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Cấp số cộng có $u_1 = -1$, công sai $d = 3$.
- b) Số hạng u_4 bằng 8.
- c) Số hạng tổng quát $u_n = 3n - 2$.
- d) Tổng 15 số hạng đầu của cấp số cộng bằng 330.

Lời giải.

$$\text{a) Ta có } \begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d - u_1 - 2d + u_1 + 4d = 10 \\ u_1 + u_1 + 5d = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ 2u_1 + 5d = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3. \end{cases}$$

Vậy $u_1 = 1$ và $d = 3$.

b) Ta có $u_4 = u_1 + 3d = 1 + 3 \cdot 3 = 10$.

c) Số hạng tổng quát $u_n = u_1 + (n - 1)d = 1 + (n - 1) \cdot 3 = 3n - 2$.

d) Ta có $S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$. Suy ra $S_{15} = 15 \cdot 1 + \frac{15(15-1) \cdot 3}{2} = 330$.

Đáp án: a sai | b sai | c đúng | d đúng □

Câu 108. Cho cấp số cộng (u_n) biết $\begin{cases} u_1 + u_6 = 10 \\ S_{15} = 165 \end{cases}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Cấp số cộng có số hạng đầu là số nguyên.
- b) Cấp số cộng có công sai là số hữu tỉ.
- c) Số hạng $u_{10} = \frac{44}{3}$.
- d) Tổng 20 số hạng đầu của cấp số cộng bằng $\frac{860}{3}$.

Lời giải.

$$\text{a) Ta có } \begin{cases} u_1 + u_6 = 10 \\ S_{15} = 165 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 5d = 10 \\ 2u_1 + 14d = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{5}{3} \\ d = \frac{4}{3}. \end{cases}$$

b) Do đó $u_{10} = u_1 + 9d = \frac{5}{3} + 9 \cdot \frac{4}{3} = \frac{44}{3}$.

c) Ta có $S_{20} = \frac{20}{2} (2u_1 + 19d) = 10 \left(\frac{10}{3} + \frac{76}{3} \right) = \frac{860}{3}$.

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d đúng □

Câu 109. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_1 + 2u_4 = -21$, $S_{10} = -195$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Cấp số cộng có số hạng đầu bằng 3.
- b) Cấp số cộng có công sai $d = 5$.
- c) Số hạng $u_{11} = -50$.

d) Tổng 25 số hạng đầu của cấp số cộng bằng -1500 .

Lời giải.

a) Ta có $u_1 + 2u_4 = -21 \Leftrightarrow u_1 + 2(u_1 + 3d) = -21 \Leftrightarrow 3u_1 + 6d = -21$. (1)

Mặt khác $S_{10} = -195 \Leftrightarrow \frac{10}{2} \cdot (2u_1 + 9d) = -195 \Leftrightarrow 2u_1 + 9d = -39$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $u_1 = 3$ và $d = -5$.

b) Do đó $u_{11} = u_1 + 10d = 1 + 10 \cdot (-5) = -49$.

c) Ta có $S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$. Suy ra $S_{25} = 25 \cdot 1 + \frac{25(25-1) \cdot (-5)}{2} = -1475$.

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d sai □

Câu 110. Cho cấp số cộng (u_n) biết $\begin{cases} u_3 + u_7 = 22 \\ u_9 - u_2 = 28 \end{cases}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Cấp số cộng có số hạng đầu bằng -5 .
- b) Cấp số cộng có công sai $d = -4$.
- c) Số hạng $u_5 = 11$.
- d) Tổng 15 số hạng đầu của cấp số cộng bằng 350.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{cases} u_3 + u_7 = 22 \\ u_9 - u_2 = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d + u_1 + 6d = 22 \\ u_1 + 8d - (u_1 + d) = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 8d = 22 \\ 7d = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -5 \\ d = 4. \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu $u_1 = -5$ và công sai $d = 4$.

b) Do đó $u_5 = u_1 + 4d = -5 + 4 \cdot 4 = 11$.

c) Ta có $S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$. Suy ra $S_{15} = 15 \cdot (-5) + \frac{15(15-1) \cdot 4}{2} = 345$.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai □

Câu 111. Cho cấp số cộng (u_n) biết $\begin{cases} u_7 - u_1 = 12 \\ 3u_3 - 2u_5 = 7 \end{cases}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Cấp số cộng có số hạng đầu là một số nguyên tố.
- b) Cấp số cộng có công sai $d = 2$.
- c) Số hạng $u_6 = 20$.
- d) Tổng 20 số hạng đầu của cấp số cộng bằng 500.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{cases} u_7 - u_1 = 12 \\ 3u_3 - 2u_5 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 6d - u_1 = 12 \\ 3u_1 + 6d - 2u_1 - 8d = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ u_1 - 2d = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ u_1 = 11. \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu $u_1 = 11$ và công sai $d = 2$.

b) Do đó $u_6 = u_1 + 5d = 11 + 5 \cdot 2 = 21$.

c) Ta có $S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$. Suy ra $S_{20} = 20 \cdot 11 + \frac{20(20-1) \cdot 2}{2} = 600$.

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d sai □

Câu 112. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 2$, $d = 4$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Số hạng u_2 bằng 6.
- b) Số hạng u_7 bằng 26.
- c) Số hạng tổng quát $u_n = 2n - 4$.
- d) Tổng $S = u_7 + u_9 + u_{11} + \dots + u_{2017} = 4070276$.

Lời giải.

a) Ta có $u_2 = u_1 + d = 2 + 4 = 6$.

b) Ta có $u_7 = u_1 + 6d = 2 + 6 \cdot 4 = 26$.

c) Ta có $u_n = u_1 + (n-1)d = 2 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 2$.

d) Các số $u_7, u_9, u_{11}, \dots, u_{2017}$ lập thành cấp số cộng có 1006 số hạng với số hạng đầu u_7 công sai là $2d$.

$$S = S_{1006} = \frac{1006}{2} [2u_7 + (1006-1)2d] = 503(2 \cdot 26 + 1005 \cdot 8) = 4070276.$$

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 113. Cho cấp số cộng (u_n) , biết $\begin{cases} u_1 + u_2 = 2 \\ u_5 - u_2 = 24 \end{cases}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Cấp số cộng có $u_1 = -2$.
- b) Cấp số cộng có công sai $d = 8$.
- c) Tổng của 100 số hạng đầu của (u_n) bằng 39000.
- d) Số 2021 là số hạng thứ 254 của (u_n) .

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{cases} u_1 + u_2 = 2 \\ u_5 - u_2 = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + d = 2 \\ 3d = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -3 \\ d = 8. \end{cases}$$

b) Ta có $S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$. Suy ra $S_{100} = 100 \cdot (-3) + \frac{100(100-1) \cdot 8}{2} = 39300$.

c) Giả sử 2021 là số hạng thứ n của cấp số cộng trên. Khi đó

$$\begin{aligned} u_n = 2021 &\Leftrightarrow u_1 + (n-1)d = 2021 \\ &\Leftrightarrow -3 + 8(n-1) = 2021 \Leftrightarrow n = 254. \end{aligned}$$

Vậy 2021 là số hạng thứ 254 của cấp số cộng trên.

Đáp án: a sai | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 114. Cho cấp số cộng (u_n) , biết $\begin{cases} u_2 - 3u_5 + 2u_7 = 3 \\ u_1 + 2u_4 - 2u_6 = -7 \end{cases}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Cấp số cộng có $u_1 = 5$.
- b) Cấp số cộng có công sai $d = -3$.
- c) Số hạng tổng quát của (u_n) là $u_n = 3n - 2$.
- d) Tổng của 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng bằng 670.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{cases} u_2 - 3u_5 + 2u_7 = 3 \\ u_1 + 2u_4 - 2u_6 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_1 + d) - 3(u_1 + 4d) + 2(u_1 + 6d) = 3 \\ u_1 + 2(u_1 + 3d) - 2(u_1 + 5d) = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 3 \\ u_1 = 5. \end{cases}$$

b) Ta có $u_n = u_1 + (n - 1)d = 5 + (n - 1) \cdot 3 = 3n + 2$.

c) Ta có $S_{20} = \frac{20}{2}(2u_1 + 19d) = 670$.

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 115. Cho cấp số cộng (u_n) , biết $\begin{cases} u_1 + 3u_5 = 28 \\ S_6 - u_3 = 29 \end{cases}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Cấp số cộng có $u_1 = -2$.
- b) Cấp số cộng có công sai $d = 3$.
- c) Số hạng tổng quát của (u_n) là $u_n = 3n + 1$.
- d) Tổng của 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng bằng 550.

Lời giải.

$$\text{a) Ta có } \begin{cases} u_1 + 3u_5 = 28 \\ S_6 - u_3 = 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3(u_1 + 4d) = 28 \\ (6u_1 + 15d) - (u_1 + 2d) = 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 7 \\ 5u_1 + 13d = 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -2 \\ d = 3. \end{cases}$$

b) Ta có $u_n = u_1 + (n - 1)d = -2 + (n - 1) \cdot 3 = 3n - 5$.

c) Ta có $S_{20} = \frac{20}{2}(2u_1 + 19d) = 550$.

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 116. Hãy cho biết tính đúng sai của mỗi mệnh đề dưới đây?

- a) Giá của một chiếc xe ô tô lúc mới mua là 680 triệu đồng. Cứ sau mỗi năm sử dụng, giá của chiếc xe ô tô giảm 55 triệu đồng. Giá còn lại của chiếc xe sau 5 năm sử dụng là 450 triệu đồng.

- b) Mai làm việc ở công ty X với mức lương năm đầu tiên là 60 triệu đồng. Sau mỗi năm lương của Mai được tăng thêm 5 triệu đồng. Tổng lương của Mai sau 20 năm làm việc ở công ty X là 2200 triệu đồng .
- c) Hùng đang tiết kiệm để mua một cây guitar. Trong tuần đầu tiên, anh ta để dành 42 đô la, và trong mỗi tuần tiếp theo, anh ta đã thêm 8 đô la vào tài khoản tiết kiệm của mình. Cây guitar Hùng cần mua có giá 400 đô la. Tuần thứ 46 thì anh ấy có đủ tiền để mua guitar đó.
- d) Người ta trồng 3003 cây theo hình một tam giác như sau: hàng thứ nhất có 1 cây, hàng thứ hai có 2 cây, hàng thứ ba có 3 cây, ... Có tất cả 77 hàng cây được trồng.

Lời giải.

- a) Giá của chiếc xe sau n năm là $u_n = 680 - 55(n - 1)$.
 Vậy sau 5 năm sử dụng giá của chiếc xe là $u_5 = 680 - 55(5 - 1) = 460$ (triệu đồng).
- b) Vì mỗi năm lương của Mai được tăng thêm 5 triệu đồng nên lương các năm của Mai là cấp số cộng với $u_1 = 60$ và $d = 5$.
 Vậy $S_{20} = 20u_1 + 5 \times \frac{20 \cdot 19}{2} = 2150$ triệu đồng.
- c) Gọi $u_1 = 8$ là số tiền mà Hùng để dành trong tuần thứ 2.
 $u_2 = 8$ là số tiền mà Hùng để dành trong tuần thứ 3.
 ...
 u_n là số tiền mà Hùng để dành trong tuần thứ $n + 1$.
 Ta có (u_n) là cấp số cộng có số hạng $u_1 = 8$ và công sai $d = 0$.
 Ta có $S_n = 42 + \frac{n(2u_1 + (n - 1)d)}{2} = 400 \Leftrightarrow n = 44,75$.
 Suy ra vào tuần thứ 46 thì anh ấy có đủ tiền để mua guitar đó.
- d) Theo đề ta có
 Hàng 1 có 1 cây.
 Hàng 2 có 2 cây.
 ...
 Hàng n có n cây.
 Với cách trồng theo hình thức này thì số cây của các hàng tuân theo cấp số cộng có $u_1 = 1$ và công sai $d = 1$.
 Giả sử 3003 cây trồng được n hàng, ta có
- $$S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)d}{2} \Leftrightarrow 3003 = n + \frac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow n^2 + n - 6006 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 77 \\ n = -78 \text{ (loại)}. \end{cases}$$
- Vậy $n = 77$.

Đáp án: a sai | b sai | c đúng | d đúng □

Câu 117. Hãy cho biết tính đúng sai của mỗi mệnh đề dưới đây?

- a) Ba số 2; 10; 50 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.
- b) Dãy số 0, -3, -9, -27, -81 là một cấp số nhân..
- c) Dãy số $u_n = 3^n$ là một cấp số nhân.
- d) Dãy số $u_n = n^2 - \frac{1}{4}$ là một cấp số nhân.

Lời giải.

- a) Ba số 2; 10; 50 theo thứ tự lập thành cấp số nhân có công bội $q = 5$.
- b) Dãy số 0, -3, -9, -27, -81 không là một cấp số nhân.
- c) Xét dãy (u_n) với $u_n = 3^n \Rightarrow u_{n+1} = 3^{n+1} = 3 \cdot 3^n = 3u_n$. Vậy $u_n = 3^n$ là cấp số nhân.
- d) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2 - \frac{1}{4}}{n^2 - \frac{1}{4}} = \frac{(n+1)^2 - \frac{1}{4}}{n^2 - \frac{1}{4}} = \frac{4n^2 + 8n + 3}{4n^2 - 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*,$ không là hằng số.
Vậy (u_n) không là cấp số nhân.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai □

Câu 118. Hãy cho biết tính đúng sai của mỗi mệnh đề dưới đây?

- a) Dãy số 1, -2, 4, -8, 16 là một cấp số nhân.
- b) Dãy số $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = -3u_n, n \geq 1 \end{cases}$ là một cấp số nhân.
- c) Dãy số $u_n = (-1)^n \cdot 2$ không là một cấp số nhân.
- d) Dãy số $u_n = 2^n + 2$ là một cấp số nhân.

Lời giải.

- a) Ta có 1, -2, 4, -8, 16 là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 1$, công bội $q = -2$.
- b) Dãy số $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = -3u_n, n \geq 1 \end{cases}$ là một cấp số nhân có công bội $q = \frac{u_{n+1}}{u_n} = -3$.
- c) Đặt $(u_n)_{n \geq 1}$ là dãy số -2; 2; -2; 2; ...
Ta có $u_{n+1} = -u_n, \forall n \geq 1$ nên (u_n) là cấp số nhân.
- d) Xét dãy số $u_n = 2^n + 2$, có $u_1 = 4, u_2 = 6, u_3 = 10$.
Suy ra $\frac{u_3}{u_2} = \frac{5}{3} \neq \frac{u_2}{u_1} = \frac{3}{2}$.
Vậy $u_n = 2^n + 2$ không phải cấp số nhân.

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d sai □

Câu 119. Hãy cho biết tính đúng sai của mỗi mệnh đề dưới đây?

- a) Cấp số nhân với $u_1 = 2; u_2 = 8$. Giá trị của công bội q bằng 4.
- b) Cấp số nhân $u_n = 3^{n-1}$ có công bội $q = 3$.

c) Cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và $u_6 = 486$ có công bội $q = 3$.

d) Một cấp số nhân có số $u_3 = 2$ và $u_6 = 54$ có công bội $q = -3$.

Lời giải.

a) Ta có $u_2 = u_1 \cdot q$. Suy ra $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{8}{2} = 4$.

Vậy công bội $q = 4$.

b) Ta thấy $u_{n+1} = 3u_n$ cho nên công bội của cấp số nhân là $q = 3$.

c) Ta có $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_6 = 486 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_1 \cdot q^5 = 486 \end{cases} \Rightarrow q^5 = 243 \Rightarrow q = 3$.

d) Ta có $\begin{cases} u_3 = 2 \\ u_6 = 54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q^2 = 2 \\ u_1 \cdot q^5 = 54 \end{cases} \Rightarrow q^3 = 27 \Leftrightarrow q = 3$.

Đáp án: a đúng | b đúng | c đúng | d sai $\square$

Câu 120. Hãy cho biết tính đúng sai của mỗi mệnh đề dưới đây?

a) Cho cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 = 200$ và $u_2 = -800$. Công bội của cấp số nhân đã cho là $q = 4$.

b) Cấp số nhân (u_n) có $u_5 = 6$, $u_6 = 2$. Công bội của cấp số nhân đó bằng 3.

c) Cho cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 = -2$. Tổng của hai số hạng đầu $S_2 = 6$. Cấp số nhân đó có công bội bằng 4.

d) Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_{10} = 8u_7 \\ u_1 + u_4 = 144 \end{cases}$. Công bội q của cấp số nhân (u_n) bằng 3.

Lời giải.

a) Ta có $q = \frac{u_2}{u_1} = -4$.

b) Ta có $q = \frac{u_6}{u_5} = \frac{1}{3}$.

c) Ta có $S_2 = u_1 + u_2 \Rightarrow u_2 = S_2 - u_1 = 8$.

Vậy công bội $q = \frac{u_2}{u_1} = -4$.

d) Ta có $u_{10} = 8u_7 \Leftrightarrow u_7 \cdot q^3 = 8u_7 \Leftrightarrow \begin{cases} u_7 = 0 \\ q = 3. \end{cases}$

Vậy $q = 3$.

Đáp án: a sai | b sai | c sai | d đúng $\square$

Câu 121. Hãy cho biết tính đúng sai của mỗi mệnh đề dưới đây?

a) Cho cấp số nhân $1, 3, 9, \dots$. Số hạng tổng quát của cấp số nhân đó là $u_n = 3^{n+1}$.

b) Cho dãy số có các số hạng đầu là $1; 5; 25; 125; 625; \dots$. Số hạng tổng quát của dãy số này là $u_n = 5^{n-1}$.

- c) Cho dãy số có các số hạng đầu là $\frac{1}{3}; \frac{1}{3^3}; \frac{1}{3^3}; \frac{1}{3^4}; \frac{1}{3^5}; \dots$. Số hạng tổng quát của dãy số là $u_n = \frac{1}{3^{n-1}}$.
- d) Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 10 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases} (n \in \mathbb{N}^*)$. Số hạng tổng quát của dãy số là $u_n = 10 \cdot 2^{n-1}$.

Lời giải.

- a) Nhận thấy dãy $1, 3, 9, \dots$ là một cấp số nhân với $u_1 = 1$ công bội $q = 3$.
Do đó số hạng tổng quát của dãy là $u_n = u_1 q^{n-1} = 3^{n-1}$.
- b) Ta thấy dãy số đã cho là một cấp số nhân với công bội $q = 5$ và $u_1 = 1$ nên số hạng tổng quát của dãy số này là $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 5^{n-1}$.
- c) Công thức số hạng tổng quát của dãy trên là $u_n = \frac{1}{3^n}$.
- d) Ta có $u_{n+1} = 2u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2$, suy ra dãy số (u_n) là một cấp số nhân với $u_1 = 10$ và công bội $q = 2$.
Do đó số hạng tổng quát là $u_n = 10 \cdot 2^{n-1}$.

Đáp án: a sai | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 122. Hãy cho biết tính đúng sai của mỗi mệnh đề dưới đây?

- a) Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 1, q = 2$. Giá trị u_4 bằng 8.
- b) Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -\frac{1}{2}$ và $u_2 = 1$. Giá trị u_{10} bằng 512.
- c) Cho cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 = 14$ và $u_2 = -28$. Giá trị u_3 bằng 56.
- d) Cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -3, \frac{u_8}{u_5} = 125$. Giá trị u_3 bằng -375 .

Lời giải.

- a) Ta có $u_4 = u_1 q^3 = 1 \cdot 2^3 = 8$.
- b) Cấp số nhân có công bội $q = \frac{u_2}{u_1} = -2$. Suy ra $u_{10} = u_1 q^9 = -\frac{1}{2} \cdot (-2)^9 = 256$.
- c) Ta có $u_1 u_3 = u_2^2 \Leftrightarrow u_3 = \frac{u_2^2}{u_1} = \frac{(-28)^2}{14} = 56$.
- d) Ta có $\frac{u_8}{u_5} = 125 \Leftrightarrow \frac{u_1 \cdot q^7}{u_1 \cdot q^4} = 125 \Leftrightarrow q^3 = 125 \Leftrightarrow q = 5$.
Vậy $u_3 = u_1 \cdot q^2 = -3 \cdot 5^2 = -75$.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai □

Câu 123. Hãy cho biết tính đúng sai của mỗi mệnh đề dưới đây?

- a) Cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3, q = 2$. Khi đó $u_2 = 6$.
- b) Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3, q = \frac{1}{2}$. Khi đó $u_5 = \frac{3}{32}$.
- c) Dãy số (u_n) là cấp số nhân có 10 số hạng. Biết số hạng đầu $u_1 = 7$ và công bội $q = -3$. Số hạng cuối của cấp số nhân bằng -19683 .

d) Cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -3$, $\frac{u_8}{u_5} = 125$. Khi đó $u_3 = -75$.

Lời giải.

a) Ta có $u_2 = u_1 q = 6$.

b) Ta có $u_5 = u_1 q^4 = \frac{3}{16}$.

c) Ta có $u_{10} = u_1 \cdot q^{10-1} = 7 \cdot (-3)^9 = -137781$.

d) Ta có $\frac{u_8}{u_5} = 125 \Leftrightarrow \frac{u_1 \cdot q^7}{u_1 \cdot q^4} = 125 \Leftrightarrow q^3 = 125 \Leftrightarrow q = 5$.

Vậy $u_3 = u_1 \cdot q^2 = -3 \cdot 5^2 = -75$.

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng □

Câu 124. Hãy cho biết tính đúng sai của mỗi mệnh đề dưới đây?

a) Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 1$ và công bội $q = 2$. Số hạng thứ 11 của (u_n) bằng 2048.

b) Cho cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 = 1$ và $u_2 = -2$. Khi đó $u_{10} = -512$.

c) Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_1 = -3$; $u_2 = 6$. Khi đó $u_5 = -48$.

d) Một cấp số nhân có số hạng đầu tiên bằng 2 và số hạng thứ tư bằng 54 thì số hạng thứ 6 bằng 162.

Lời giải.

a) Số hạng thứ 11 của (u_n) là $u_{11} = u_1 \cdot q^{10} = 1 \cdot 2^{10} = 1024$.

b) Vì (u_n) là cấp số nhân nên $q = \frac{u_2}{u_1} = -2$.

Vậy $u_{10} = u_1 \cdot q^9 = 1 \cdot (-2)^9 = -512$.

c) Ta có công bội $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{6}{-3} = -2$.

Suy ra $u_5 = u_1 \cdot q^4 = -3 \cdot (-2)^4 = -48$.

d) Ta có $u_4 = q^3 u_1 \Rightarrow q^3 = \frac{u_4}{u_1} = \frac{54}{2} = 27 \Rightarrow q = 3 \Rightarrow u_6 = q^5 u_1 = 3^5 \cdot 2 = 486$.

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d sai □

Câu 125. Hãy cho biết tính đúng sai của mỗi mệnh đề dưới đây?

a) Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$, $q = -2$. Số 192 là số hạng thứ bảy của cấp số nhân đã cho.

b) Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 1$, $q = 2$. Số 256 là số hạng thứ tám của cấp số nhân đã cho.

c) Cho cấp số nhân có $u_1 = -1$, $q = -\frac{1}{10}$. Số $\frac{1}{10^{51}}$ là số hạng thứ 52.

d) Cho cấp số nhân (u_n) : $u_1 = 1$, $q = 2$. Số 2048 là số hạng thứ 11 của cấp số nhân đã cho.

Lời giải.

a) Số hạng thứ n của cấp số nhân là $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \Leftrightarrow 3 \cdot (-2)^{n-1} = 192 \Rightarrow n = 7$.

Vậy số 192 đúng là số hạng thứ 7 của cấp số nhân đã cho.

b) Giả sử $u_n = 256$. Khi đó

$$u_1 q^{n-1} = 256 \Leftrightarrow 1 \cdot 2^{n-1} = 2^8 \Leftrightarrow n-1 = 8 \Leftrightarrow n = 9.$$

Vậy 256 là số hạng thứ 9.

c) Ta có $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \Leftrightarrow \frac{1}{10^{51}} = -1 \left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1} \Leftrightarrow -1 \left(-\frac{1}{10}\right)^{51} = -1 \left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1} \Leftrightarrow n = 52$.

d) Giả sử 2048 là số hạng thứ n ta có $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 1 \cdot 2^{n-1} = 2048 \Leftrightarrow n-1 = 11 \Leftrightarrow n = 12$.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai □

Câu 126. Hãy cho biết tính đúng sai của mỗi mệnh đề dưới đây?

a) Cho một cấp số nhân gồm 5 số hạng theo thứ tự là 4; 12; 36; x ; 324. Khi đó $x = 54$.

b) Cho cấp số nhân: $\frac{-1}{5}$; a ; $\frac{-1}{125}$. Giá trị của a là $a = \pm \frac{1}{25}$.

c) Với giá trị nào của x bằng 3, ba số $x+1$, $x+9$, $x+33$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.

d) Biết bốn góc của một tứ giác lồi tạo thành một cấp số nhân và góc lớn nhất bằng 27 lần góc nhỏ nhất. Tính tổng số đo của góc lớn nhất và góc nhỏ nhất bằng 254° .

Lời giải.

a) Công bội của cấp số nhân trên là $q = \frac{12}{4} = 3$. Suy ra $x = 36 \cdot q = 36 \cdot 3 = 108$.

b) Ta có $a^2 = \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{125}\right) = \frac{1}{625} \Leftrightarrow a = \pm \frac{1}{25}$.

c) Ba số $x+1$, $x+9$, $x+33$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân nên

$$(x+1)(x+33) = (x+9)^2 \Leftrightarrow x^2 + 34x + 33 = x^2 + 18x + 81 \Leftrightarrow 16x = 48 \Leftrightarrow x = 3.$$

Khi đó cấp số nhân là 4, 12, 36.

d) Gọi bốn góc của tứ giác lồi (từ bé đến lớn) lần lượt là x, qx, q^2x và q^3x (với $x > 0, q > 1$).

Theo giả thiết, ta có $q^3x = 27x \Rightarrow q^3 = 27 \Rightarrow q = 3$.

Ta có $x + 3x + 9x + 27x = 360^\circ \Rightarrow x = 9^\circ$.

Suy ra tổng số đo của góc lớn nhất và góc nhỏ nhất bằng $9^\circ + 27 \cdot 9^\circ = 252^\circ$.

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d sai □

Câu 127. Hãy cho biết tính đúng sai của mỗi mệnh đề dưới đây?

a) Với $x = 18$ thì các số 2; 6; x ; 54 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

b) Cho các số $x+2$; $x+14$; $x+50$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân. Khi đó x bằng 3.

c) Có hai giá trị nguyên dương của x để ba số 1, x , $x+2$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

d) Gọi S là tập các giá trị của x để ba số x ; 6; $x-1$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Khi đó $S = 0$.

Lời giải.

a) Để các số 2; 6; x ; 54 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân thì $\begin{cases} 2 \cdot x = 36 \\ 6 \cdot 54 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 18.$

b) Ta có $(x+2)(x+50) = (x+14)^2 \Leftrightarrow x^2 + 52x + 100 = x^2 + 28x + 196 \Leftrightarrow 24x = 96 \Leftrightarrow x = 4.$

c) Ta có

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow 1 \cdot (x+2) = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 & (\text{loại}) \\ x = 2 & (\text{nhận}). \end{cases}$$

d) Ba số x ; 6; $x-1$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân

$$\Leftrightarrow x(x-1) = 36 \Leftrightarrow x^2 - x - 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 - \sqrt{145}}{2} \\ x = \frac{1 + \sqrt{145}}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Do đó, } S = \left\{ \frac{1 - \sqrt{145}}{2}, \frac{1 + \sqrt{145}}{2} \right\}.$$

Tổng các phần tử của S bằng 1.

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d sai □

Câu 128. Hãy cho biết tính đúng sai của mỗi mệnh đề dưới đây?

- a) Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) , $u_1 = -3$ và công bội $q = -2$ bằng 1024.
- b) Cho dãy số (u_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 1$, công bội $q = 2$. Tổng ba số hạng đầu của cấp số nhân bằng 7.
- c) Một cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 2$, $u_2 = -2$. Tổng của 9 số hạng đầu của cấp số nhân đó bằng 1.
- d) Cho $S = 11 + 101 + 1001 + \dots + \underbrace{1000\dots01}_{(n-1) \text{ chữ số } 0}$. Khi đó $S = 10 \left(\frac{10^n - 1}{9} \right) + n$.

Lời giải.

a) Ta có $S_{10} = \frac{u_1(1 - q^{10})}{1 - q} = 1023.$

b) Tổng ba số hạng đầu của cấp số nhân có $u_1 = 1$ và $q = 2$ là $S_3 = \frac{u_1(1 - q^3)}{1 - q} = \frac{1 \cdot (1 - 2^3)}{1 - 2} = 7.$

c) Công bội của cấp số nhân đã cho là: $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{-2}{2} = -1.$

Tổng của 9 số hạng đầu của cấp số nhân đó là: $S_9 = 2 \cdot \frac{1 - (-1)^9}{1 - (-1)} = 2.$

d) Ta có

$$\begin{aligned} S &= (10 + 1) + (10^2 + 1) + (10^3 + 1) + \dots + (10^n + 1) \\ &= (10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n) + \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ số } 1} \\ &= 10 \left(\frac{10^n - 1}{9} \right) + n. \end{aligned}$$

Đáp án: a sai | b đúng | c sai | d sai□

Câu 129. Hãy cho biết tính đúng sai của mỗi mệnh đề dưới đây?

- a) Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 4, u_4 = 32$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân là 2048.
- b) Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 5$, công bội $q = -\frac{1}{3}$. Tổng 5 số hạng đầu của cấp số nhân đó bằng $\frac{305}{81}$.
- c) Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2, q = 4$. Tổng của 5 số hạng đầu tiên bằng 682.
- d) Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = -6; u_6 = -486$. Biết $u_3 > 0$. Khi đó giá trị của tổng $S = u_4 + u_5 + \dots + u_{12}$ bằng -265720 .

Lời giải.

- a) Do $u_4 = u_1 q^3 \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$.
 Vậy $S_{10} = u_1 \frac{q^{10} - 1}{q - 1} = 4 \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 4092$.
- b) Ta có $S_5 = u_1 \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1} = 5 \cdot \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^5 - 1}{\left(-\frac{1}{3}\right) - 1} = \frac{305}{81}$.
- c) Ta có $S_5 = \frac{u_1(1 - q^5)}{1 - q} = 682$.
- d) Ta có $\frac{u_6}{u_2} = 81 = \frac{u_1 \cdot q^5}{u_1 \cdot q} = q^4 \Rightarrow q = \pm 3$.
 Vì $u_2 < 0, u_3 > 0 \Rightarrow q = -3$. Ta cũng suy ra $u_5 = 162, u_4 = -54$.
 Vậy $S = u_4 + u_5 + \dots + u_{12} = u_4 \cdot \frac{q^9 - 1}{q - 1} = -54 \cdot \frac{(-3)^9 - 1}{-3 - 1} = -265734$.

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d sai□

Câu 130. Hãy cho biết tính đúng sai của mỗi mệnh đề dưới đây?

- a) Cho hai số dương a và b không vượt quá 10 sao cho $a - b; 2; b$ theo thứ tự tạo thành một cấp số cộng và $a + b; 3a - 2b; 5a$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Khi đó $a + b = 8$.
- b) Cho ba số a, b, c là ba số liên tiếp của một cấp số cộng có công sai là 2. Nếu tăng số thứ nhất thêm 1, tăng số thứ hai thêm 1 và tăng số thứ ba thêm 3 thì được ba số mới là ba số liên tiếp của một cấp số nhân. Khi đó $a + b + c = 9$.
- c) Các số nguyên dương x, y thỏa mãn ba số $x; 2y; 2x + 3y - 1$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng và ba số $x; y - 1; 8$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Khi đó $x^2 + 2y$ bằng 14.
- d) Ba số x, y, z theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân có công bội khác 1. Đồng thời chúng lần lượt là số hạng đầu, số hạng thứ hai và số hạng thứ năm của một cấp số cộng, biết rằng tổng của chúng là 26. Tích của ba số đó bằng 264.

Lời giải.

- a) Vì $a - b; 2; b$ theo thứ tự tạo thành một cấp số cộng nên $2 - (a - b) = b - 2 \Leftrightarrow a = 4$.

Vì $a + b$; $3a - 2b$; $5a$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân nên

$$\frac{3a - 2b}{a + b} = \frac{5a}{3a - 2b} \Leftrightarrow \frac{12 - 2b}{4 + b} = \frac{20}{12 - 2b} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ b = 16 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Vậy $S = a + b = 4 + 1 = 5$.

b) Do a, b, c là ba số liên tiếp của một cấp số cộng có công sai là 2 nên $b = a + 2, c = a + 4$.

$a + 1, a + 3, a + 7$ là ba số liên tiếp của một cấp số nhân $\Leftrightarrow (a + 1)(a + 7) = (a + 3)^2 \Leftrightarrow a = 1$.

Với $a = 1$, ta có $\begin{cases} b = 3 \\ c = 5 \end{cases}$.

Suy ra $a + b + c = 9$.

c) Áp dụng tính chất cấp số cộng và cấp số nhân ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + (2x + 3y - 1) = 4y \\ 8x = (y - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 1 \\ 8x = (3x - 2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 1 \\ 9x^2 - 20x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{9} \\ y = -\frac{1}{3} \text{ (loại)} \\ x = 2 \\ y = 5. \end{cases}$$

Khi $x = 2$ và $y = 5$ thì $x^2 + 2y = 14$.

d) Do x, y, z theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân có công bội khác 1 nên $x \neq y \neq z$.

Do x, y, z theo thứ tự đó là số hạng đầu, số hạng thứ hai và số hạng thứ năm của một cấp số cộng nên ta gọi $y = x + d, z = x + 4d$ ($d \neq 0$).

Theo bài ra ta có

$$\begin{cases} x(x + 4d) = (x + d)^2 \\ 3x + 5d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2dx = d^2 \\ 3x + 5d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = d \\ 3x + 5d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ d = 4. \end{cases}$$

Suy ra $x = 2, y = 6$ và $z = 18$. Vậy $x \cdot y \cdot z = 216$.

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d sai □

Câu 131. Hãy cho biết tính đúng sai của mỗi mệnh đề dưới đây?

- a) Người ta thiết kế một cái tháp gồm 10 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích bề mặt của tầng 1 bằng $\frac{2}{3}$ diện tích đế tháp. Biết diện tích mặt đế tháp là $6144m^2$. Diện tích mặt trên cùng bằng $6m^2$.
- b) Bảo tàng Hà Nội được xây dựng gồm hai tầng hầm và bốn tầng nổi. Bốn tầng nổi được dùng để trưng bày rất nhiều những hiện vật có giá trị. Diện tích sàn tầng nổi thứ nhất xấp xỉ $12000m^2$. Biết rằng mỗi tầng nổi tiếp theo có diện tích bằng $\frac{4}{3}$ diện tích tầng nổi ngay dưới nó. Tổng diện tích mặt sàn (làm tròn đến hàng đơn vị) của bốn tầng nổi dùng để trưng bày hiện vật của bảo tàng bằng $77778m^2$.

- c) Một hãng taxi X áp dụng mức giá đối với khách hàng theo hình thức bậc thang như sau: mỗi bậc áp dụng cho 10 km. Bậc 1 (áp dụng cho 10 km đầu) có giá 10.000 đồng / 1 km, giá mỗi km ở các bậc tiếp theo giảm 5% so với giá của bậc trước đó. Bạn Toàn thuê hãng taxi X đó để đi hết quãng đường 42 km. Số tiền (kết quả làm tròn đến hàng nghìn) mà bạn Toàn phải trả là 387000 đồng.
- d) Anh A vào làm ở công ty X với mức lương ban đầu 10 triệu đồng/tháng. Nếu hoàn thành tốt nhiệm vụ thì cứ sau 6 tháng làm việc, mức lương của anh lại được tăng thêm 20%. Bắt đầu từ tháng thứ 24 kể từ khi vào làm công ty X, tiền lương mỗi tháng của anh nhiều hơn 20 triệu đồng? (biết rằng trong suốt thời gian làm ở công ty X anh A luôn hoàn thành tốt nhiệm vụ).

Lời giải.

- a) Gọi u_n là diện tích của tầng tháp thứ n .

Ta có (u_n) là cấp số nhân với $u_1 = \frac{2}{3} \cdot 6144 = 4096$ và $q = \frac{1}{2}$.

Từ đó diện tích mặt trên cùng (tầng thứ 10) là $u_{10} = u_1 \cdot q^{n-1} = 4096 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 8\text{m}^2$.

- b) Ta có diện tích sàn tầng nổi thứ nhất là $S_1 = 12000 \text{ m}^2$.

Suy ra diện tích sàn tầng nổi thứ hai là $S_2 = \frac{4}{3}S_1 = \frac{4}{3} \cdot 12000 = 16000 \text{ m}^2$.

Diện tích sàn tầng nổi thứ ba là $S_3 = \frac{4}{3}S_2 = \frac{4}{3} \cdot 16000 = \frac{64000}{3} \text{ m}^2$.

Diện tích sàn tầng nổi thứ tư là $S_4 = \frac{4}{3}S_3 = \frac{4}{3} \cdot \frac{64000}{3} = \frac{256000}{9} \text{ m}^2$.

Vậy tổng diện tích mặt sàn của bốn tầng nổi là $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \approx 77778 \text{ m}^2$.

- c) Gọi T_1 là giá của mỗi km ở bậc 1.

T_2 là giá của mỗi km ở bậc 2.

T_3 là giá của mỗi km ở bậc 3.

T_4 là giá của mỗi km ở bậc 4.

T_5 là giá của mỗi km ở bậc 5.

Ta thấy, dãy $T_n (1 \leq n \leq 5)$ là một cấp số nhân, với số hạng đầu $T_1 = 10000$ và công bội $q = \frac{95}{100}$.

Số tiền mà bạn Toàn phải trả trong 40 km đầu là

$$10(T_1 + T_2 + T_3 + T_4) = 10 \cdot \frac{T_1(1 - q^4)}{1 - q} \approx 371000 \text{ đồng}.$$

Số tiền mà bạn Toàn phải trả trong 2 km cuối là

$$2 \cdot T_5 = 2 \cdot T_1 \cdot q^4 \approx 16000 \text{ đồng}.$$

Vậy, tổng số tiền bạn Toàn phải trả là $371000 + 16000 = 387000$ đồng.

- d) Gọi n là số chu kỳ (một chu kỳ là 6 tháng). Khi đó lương một tháng của anh A sau n chu kỳ là $T = A(1 + r)^n$ với $A = 10000000$ đồng, $r = 0,2$.

Trước hết ta tìm n để $T = A(1 + r)^n > 20000000 \Leftrightarrow n > \log_{1+r} 2 = \log_{1,2} 2 \approx 3,8$.

Tức là để lương của anh A nhiều hơn 20 triệu thì phải từ 3 chu kỳ trở lên.

Xét $n = 3$ (sau 18 tháng) thì lương của anh A là $T = A(1 + r)^n = 10000000 \cdot 1,2^3 = 17280000$.

Xét $n = 4$ (sau 24 tháng) thì lương của anh A là $T = A(1 + r)^n = 10000000 \cdot 1,2^3 = 20736000$.
Vậy sau ít nhất 25 tháng thì tiền lương mỗi tháng của anh A nhiều hơn 20 triệu đồng.

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d sai□

Chương 3

Giới hạn. Hàm số liên tục

Câu 132. Mỗi mệnh đề dưới đây đúng hay sai?

- a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$, với $|q| < 1$.
- b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$, với $|q| > 1$.
- c) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}$ là cấp số nhân lùi vô hạn.
- d) Cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = 1$, công bội $q = -\frac{1}{3}$ có tổng bằng $\frac{3}{4}$.

Lời giải.

- a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$, với $|q| < 1$.
- b) Với $q > 1$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$; với $q < -1$ thì không tồn tại $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$.
- c) Dãy số $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}$ có hữu hạn số hạng nên không phải là cấp số nhân lùi vô hạn.
- d) Tổng cấp số nhân lùi vô hạn là $S = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$.

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng □

Câu 133. Mỗi mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- a) Cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = 1$, công bội $q = -\frac{1}{2}$ có tổng $S = 2$.
- b) Cấp số nhân lùi vô hạn có tổng $S = 4$, công bội $q = \frac{1}{2}$ có số hạng đầu $u_1 = 1$.
- c) Cấp số nhân lùi vô hạn có tổng $S = -6$, số hạng đầu $u_1 = -3$ có công bội $q = \frac{1}{2}$.
- d) Số thập phân vô hạn tuần hoàn $1,0202(02)$ viết dưới dạng phân thức là $\frac{101}{99}$.

Lời giải.

Cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu u_1 , công bội q có tổng $S = \frac{u_1}{1 - q}$. Suy ra $u_1 = (1 - q) \cdot S$,
 $q = 1 - \frac{u_1}{S}$.

- a) Cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = 1$, công bội $q = -\frac{1}{2}$ có tổng $S = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$.

b) Cấp số nhân lùi vô hạn có tổng $S = 4$, công bội $q = \frac{1}{2}$ có số hạng đầu $u_1 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot 4 = 2$.

c) Cấp số nhân lùi vô hạn có tổng $S = -6$, số hạng đầu $u_1 = -3$ có công bội $q = 1 - \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$.

d) Ta có $1,0202(02) = 1 + \frac{2}{10^2} + \frac{2}{10^4} + \cdots + \frac{2}{10^{2n}} + \cdots = 1 + \frac{\frac{2}{10^2}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{101}{99}$.

Đáp án: a sai | b sai | c đúng | d đúng □

Câu 134. Mỗi kết quả giới hạn dưới đây đúng hay sai?

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty$.

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^2 - n + 2) = -\infty$.

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + 2n - 1}{n+3} = +\infty$.

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + 3^n}{2^n + 1} = 1$.

Lời giải.

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = +\infty$, vì $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 > 0$.

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^2 - n + 2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(-1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right) = -\infty$,
vì $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right) = -1 < 0$.

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + 2n - 1}{n+3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \left(2 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}{n \left(1 + \frac{3}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \frac{2 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{3}{n}} = +\infty$,
vì $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{3}{n}} = 2 > 0$.

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + 3^n}{2^n + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right)}{2^n \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = +\infty$,
vì $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = 1 > 0$.

Đáp án: a đúng | b đúng | c đúng | d sai □

Câu 135. Mỗi kết quả giới hạn dưới đây đúng hay sai?

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n+2} + 2^n}{3^{n+1} + 1} = +\infty$.

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{2 + n - n^3} = +\infty$.

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n^3 + n^2 + 2}{n+5} = +\infty$.

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 2} + n) = +\infty$.

Lời giải.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n+2} + 2^n}{3^{n+1} + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9 \cdot 3^n + 2^n}{3 \cdot 3^n + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{3 + \left(\frac{1}{3}\right)^n} = 3.$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{2 + n - n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \sqrt[3]{\frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^2} - 1} = -\infty,$$

vì $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^2} - 1} = -1 < 0$.

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n^3 + n^2 + 2}{n + 5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 \left(-1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^3}\right)}{n \left(1 + \frac{5}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \cdot \frac{-1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^3}}{1 + \frac{5}{n}} = -\infty,$$

vì $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^3}}{1 + \frac{5}{n}} = -1 < 0$.

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 2} + n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} + 1 \right) = +\infty,$$

vì $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} + 1 \right) = 2 > 0$.

Đáp án: a sai | b sai | c sai | d đúng □

Câu 136. Mỗi kết quả giới hạn dưới đây đúng hay sai?

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) = 0.$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) = 1.$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 - 4n} - n) = -2.$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n - \sqrt{4n^2 + n}) = 0.$$

Lời giải.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{n} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}\right)} = 0.$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \right)} = 0.$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 - 4n} - n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-4n}{\sqrt{n^2 - 4n} + n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-4}{\sqrt{1 - \frac{4}{n}} + 1} = -2.$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n - \sqrt{4n^2 + n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n}{2n + \sqrt{4n^2 + n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2 + \sqrt{4 + \frac{1}{n^2}}} = -\frac{1}{4}.$$

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai □

Câu 137. Mỗi kết quả giới hạn dưới đây đúng hay sai?

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}) = 2.$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n - \sqrt{n^2 - 1}) = -1.$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n}}{n+2} = 0.$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2+2} - n) = 0.$$

Lời giải.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \left(\sqrt{1+\frac{3}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n}} \right)} = 0.$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n - \sqrt{n^2+1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n \left(1 + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} \right)} = 0.$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n}}{n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{(\sqrt{n+3} + \sqrt{n})(n+2)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{n\sqrt{n}}}{\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}} + \sqrt{n} \right) \left(1 + \frac{2}{n} \right)} = 0.$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2+2} - n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+2} + n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}} + 1} = 1.$$

Đáp án: a sai | b sai | c đúng | d sai □

3.1 Giới hạn của dãy số

Câu 1. Mỗi kết quả giới hạn dưới đây đúng hay sai?

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+3}{2n-1} = 2.$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2+3}{n^2+1} = 2.$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2+n+3}{3-n^2} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+3}{n^2+2} = 0.$$

Lời giải.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+3}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \left(2 + \frac{3}{n} \right)}{n \left(2 - \frac{1}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{3}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = 1.$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2+3}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \left(2 + \frac{3}{n^2} \right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 2.$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2+n+3}{3-n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \left(2 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} \right)}{n^2 \left(\frac{3}{n^2} - 1 \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}{\frac{3}{n^2} - 1} = -2.$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+3}{n^2+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \left(\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} \right)}{n^2 \left(1 + \frac{2}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^2}} = 0.$$

Đáp án: a sai | b đúng | c sai | d đúng□

Câu 2. Cho các dãy số (a_n) , (b_n) , (c_n) với $a_n = 1 - 2n$, $b_n = n^2 + n + 1$, $c_n = -n^3 + 2n + 1$, $d_n = 2 - 3n^2$. Mỗi kết quả giới hạn dưới đây đúng hay sai?

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{c_n} = 0$. c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{d_n} = -\frac{1}{2}$. d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d_n}{c_n} = 0$.

Lời giải.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - 2n}{n^2 + n + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{2}{n} \right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^2} - \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = 0.$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{c_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - 2n}{-n^3 + 2n + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 \left(\frac{1}{n^3} - \frac{2}{n^2} \right)}{n^3 \left(-1 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^3} - \frac{2}{n^2}}{-1 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}} = 0.$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{d_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + n + 1}{2 - 3n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left(\frac{2}{n^2} - 3 \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2} - 3} = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d_n}{c_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 - 3n^2}{-n^3 + 2n + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 \left(\frac{2}{n^3} - \frac{3}{n} \right)}{n^3 \left(-1 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{n^3} - \frac{3}{n}}{-1 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}} = 0.$$

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d đúng□

Câu 3. Mỗi kết quả giới hạn sau đúng hay sai?

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 2}) = 0.$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x) = 1.$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x^2 + 2x} - x) = 2.$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} + x) = 2.$

Lời giải.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x + \sqrt{x^2 + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}\right)} = 0.$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1} = 1.$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x^2 + 2x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{2 + \frac{2}{x}} - 1 \right) = +\infty, \text{ vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{2 + \frac{2}{x}} - 1 \right) = \sqrt{2} - 1 > 0.$

d)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-x \sqrt{1 + \frac{2}{x}} - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{-\sqrt{1 + \frac{2}{x}} - 1} = -1. \end{aligned}$$

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d sai □

Câu 4. Mỗi kết quả giới hạn sau đúng hay sai?

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+2}}{x-1} = 1.$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2} = -\frac{1}{4}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{\sqrt{x+7}-3} = 6.$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = 2.$

Lời giải.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x+2} + 2} = \frac{1}{4}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{\sqrt{x+7}-3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(\sqrt{x+7}+3)}{x+7-9} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(\sqrt{x+7}+3)}{-(2-x)} = -6.$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+1} + 1) = 2.$

Đáp án: a sai | b sai | c sai | d đúng □

Câu 5. Mỗi kết quả giới hạn sau đúng hay sai?

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty.$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{|x^2 - x|} = \frac{1}{2}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{|x-2|} = -\infty.$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x^2 - x|}{x^2} = +\infty.$

Lời giải.

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$, vì $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ và $|x| > 0$ khi $x \neq 0$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{|x^2 - x|} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{|x - 1|} = +\infty$, vì $\lim_{x \rightarrow 1} |x - 1| = 0$ và $|x - 1| > 0$ khi $x \neq 1$.
- c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - x}{|x - 2|} = -\infty$, vì $\lim_{x \rightarrow 2} (1 - x) = -1 < 0$, $\lim_{x \rightarrow 2} |x - 2| = 0$ và $|x - 2| > 0$ khi $x \neq 2$.
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x^2 - x|}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x - 1|}{|x|} = +\infty$, vì $\lim_{x \rightarrow 0} |x - 1| = 1 > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ và $|x| > 0$ khi $x \neq 0$.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d đúng $\square$

Câu 6. Mỗi kết quả giới hạn sau đúng hay sai?

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - x|}{(x - 1)^2} = +\infty$. b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = 1$.
- c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 3x + 2} = -\infty$. d) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3} \right) \frac{1}{(x - 3)^3} = -\infty$.

Lời giải.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - x|}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x|}{|x - 1|} = +\infty$, vì $\lim_{x \rightarrow 1} |x| = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1} |x - 1| = 0$ và $|x - 1| > 0$ với mọi $x \neq 1$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$.

- Với $x > 0$, ta được $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$;
- Với $x < 0$, ta được $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$.

Do đó không tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2}$.

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)^2}{(x + 2)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x + 1} = 0$.

d) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3} \right) \frac{1}{(x - 3)^3} = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{3 - x}{3x} \cdot \frac{1}{(x - 3)^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(-\frac{1}{3x} \cdot \frac{1}{(x - 3)^2} \right) = -\infty$;

Vì $\lim_{x \rightarrow 3} \left(-\frac{1}{3x} \right) = -\frac{1}{9} < 0$ và $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x - 3)^2} = +\infty$

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng $\square$

3.2 Giới hạn của hàm số

Câu 1. Mỗi kết quả giới hạn dưới đây đúng hay sai?

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 2) = 1$. b) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - x) = 1$. c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x + 2} = \frac{3}{5}$. d) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 - 1} = 3$.

Lời giải.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 2) = 1 - 2 = -1$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - x) = 1^2 - 1 = 0$.

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x+2} = \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}.$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3}.$$

Đáp án: a sai | b sai | c đúng | d sai □

Câu 2. Cho các hàm số $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 5$, $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 0$. Mỗi kết quả giới hạn dưới đây đúng hay sai?

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow x_0} (g(x) - f(x)) = -3.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2}{5}.$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{g(x)} = 0.$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow x_0} (g(x) \cdot h(x)) = 0.$$

Lời giải.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow x_0} (g(x) - f(x)) = 5 - 2 = 3.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2}{5}.$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{0}{5} = 0.$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow x_0} (g(x) \cdot h(x)) = 5 \cdot 0 = 0.$$

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d đúng □

Câu 3. Mỗi kết quả giới hạn sau đúng hay sai?

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3} = 8.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 - x} = 2.$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 4} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 + x} = \frac{1}{2}.$$

Lời giải.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 5)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 5) = 8.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x - 1} = -1.$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x - 4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 2}{x - 4} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(2x + 1)}{(x + 1)x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + 1}{x} = 1.$$

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai □

Câu 4. Mỗi kết quả giới hạn sau đúng hay sai?

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} = 4.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + 3)^3 - 27}{x} = 27.$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{2x^2 - 2x} = 3.$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2x^2 + x - 21} = \frac{6}{13}.$$

Lời giải.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 2x + 4) = 12.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3)^3 - 27}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 9x^2 + 27x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 9x + 27) = 27.$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{2x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{2x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{2x} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2x^2 + x - 21} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(2x+7)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{2x+7} = \frac{6}{13}.$$

Đáp án: a sai | b đúng | c sai | d đúng□

Đáp án: a sai | b sai | c sai | d đúng□

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 5]$ và $f(1) = 2$, $f(5) = 10$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau?

- a) Phương trình $f(x) = 6$ vô nghiệm.
- b) Phương trình $f(x) = 7$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(1; 5)$.
- c) Phương trình $f(x) = 2$ có hai nghiệm $x = 1$, $x = 5$.
- d) Phương trình $f(x) = 7$ vô nghiệm.

Lời giải.

Vì hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 5]$ và $f(1) = 2$, $f(5) = 10$ nên phương trình $f(x) = a$ với $a \in (2; 10)$ luôn có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1; 5)$.

- a) Vì $6 \in (2; 10)$ nên phương trình $f(x) = 6$ có nghiệm.
- b) Vì $7 \in (2; 10)$ nên phương trình $f(x) = 7$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(1; 5)$.
- c) Do $f(1) = 2 \neq 0$, $f(5) = 10 \neq 0$ nên $x = 1$, $x = 5$ không là nghiệm của phương trình.
- d) Phương trình $f(x) = 7$ có nghiệm do $7 \in (2; 10)$.

Đáp án: a sai | b đúng | c sai | d sai□

Câu 8. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau?

- a) Phương trình $x^4 + mx^2 - 2mx - 2 = 0$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m .
- b) Phương trình $3x^6 - 3x^3 + 5x - 2 = 0$ **không** có nghiệm thuộc khoảng $(-2; 2)$.
- c) Phương trình $x^3 - 3x + 1 = 0$ có ba nghiệm phân biệt.
- d) Phương trình $m(x - 1)^2(x - 2) + 2x - 3 = 0$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m .

Lời giải.

- a) Hàm số $f(x) = x^4 + mx^2 - 2mx - 2$ liên tục trên đoạn $[0; 2]$, có $f(0) \cdot f(2) = -2 \cdot 14 = -28 < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; 2)$ với mọi m hay phương trình $x^4 + mx^2 - 2mx - 2 = 0$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m .

- b) Hàm số $g(x) = 3x^6 - 3x^3 + 5x - 2$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$, có $g(0) \cdot g(1) = -2 \cdot 3 = -6 < 0$ nên phương trình $g(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$ hay phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(-2; 2)$.

- c) Hàm số $h(x) = x^3 - 3x + 1$ liên tục trên các đoạn $[-2; 0]$, $[0; 1]$, $[1; 2]$ và có $h(-2) = -1$, $h(0) = 1$, $h(1) = -1$, $h(2) = 3$.

Do $h(-2) \cdot h(0) < 0$, $h(0) \cdot h(1) < 0$, $h(1) \cdot h(2) < 0$ nên phương trình $h(x) = 0$ có ba nghiệm $x_1 \in (-2; 0)$, $x_2 \in (0; 1)$, $x_3 \in (1; 2)$ là ba nghiệm phân biệt.

Mặt khác phương trình $h(x) = 0$ là phương trình bậc ba nên có không quá ba nghiệm.

Vậy phương trình $h(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

d) Hàm số $p(x) = m(x-1)^2(x-2) + 2x - 3$ liên tục trên đoạn $[1; 2]$, có $p(1) \cdot p(2) = (-1) \cdot 1 = -1 < 0$ nên phương trình $p(x) = 0$ luôn có nghiệm thuộc khoảng $(1; 2)$ với mọi m hay phương trình $m(x-1)^2(x-2) + 2x - 3 = 0$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m .

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d đúng ☐

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$. Hãy cho biết tính đúng sai của mỗi khẳng định sau?

- a) Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.
b) Hàm số gián đoạn tại $x = -1$.
c) Hàm số liên tục trong khoảng $(-3; 1)$.
d) Hàm số liên tục trên khoảng $(-3; -1)$.

Lời giải.

Đây là hàm phân thức hữu tỉ có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Do đó

- Hàm số không liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số gián đoạn tại $x = -1$.
- Hàm số không liên tục trong khoảng $(-3; 1)$ vì $-1 \in (-3; 1)$.
- Hàm số liên tục trên khoảng $(-3; -1)$.

Đáp án: a sai | b đúng | c sai | d đúng ☐

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ x - 3m & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$. Hãy cho biết tính đúng sai của mỗi khẳng định sau?

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$.
b) Hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty; 0)$.
c) Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi $m = -1$.
d) Hàm số không xác định tại $x = 1$.

Lời giải.

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 3)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 3) = 4.$
- b) Khi $x \in (-\infty; 0)$ thì $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$. Hàm số phân thức hữu tỉ liên tục trên từng khoảng xác định nên nó liên tục trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- c) Với $m = -1$. Ta có $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ 4 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.
- d) Ta có $f(1) = 1 - 3m$. Do đó hàm số xác định tại $x = 1$.

Đáp án: a đúng | b đúng | c đúng | d sai ☐

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = 2x^3 - x^2 + 1$. Hãy cho biết tính đúng sai của mỗi khẳng định sau?

- a) Hàm số xác định tại $x_0 = -2$.
b) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -11$.
c) Hàm số gián đoạn tại $x_0 = 2$.
d) Hàm số liên tục tại $x_0 = -2$.

Lời giải.

- a) Hàm số bậc hai có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên xác định tại $x_0 = -2$.
- b) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) = -19 \neq -11$.
- c) Hàm số bậc hai liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục tại $x_0 = 2$.
- d) Hàm số bậc hai liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục tại $x_0 = -2$.

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng □

Câu 12. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} & \text{nếu } x > 1 \\ -\sqrt{5 - x} & \text{nếu } x \leq 1 \end{cases}$. Hãy cho biết tính đúng sai của mỗi

khẳng định sau?

- a) Hàm số không xác định tại $x_0 = 1$. b) Hàm số liên tục tại $x_0 = 1$.
- c) Hàm số gián đoạn tại $x_0 = 1$. d) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$.

Lời giải.

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x - 3)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 3) = -2$.
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-\sqrt{5 - x}) = -2$.
- $f(1) = -\sqrt{5 - 1} = -2$.

Ta thấy $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2 = f(1)$.

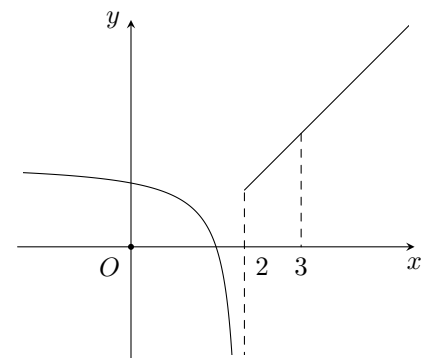
Vậy hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$.

Đáp án: a sai | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 13.

Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Hãy cho biết tính đúng sai của mỗi khẳng định sau?

- a) Hàm số liên tục trong khoảng $(2; 3)$.
- b) Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.
- c) Hàm số gián đoạn tại $x_0 = 2$.
- d) Hàm số liên tục tại $x_0 = 2$.

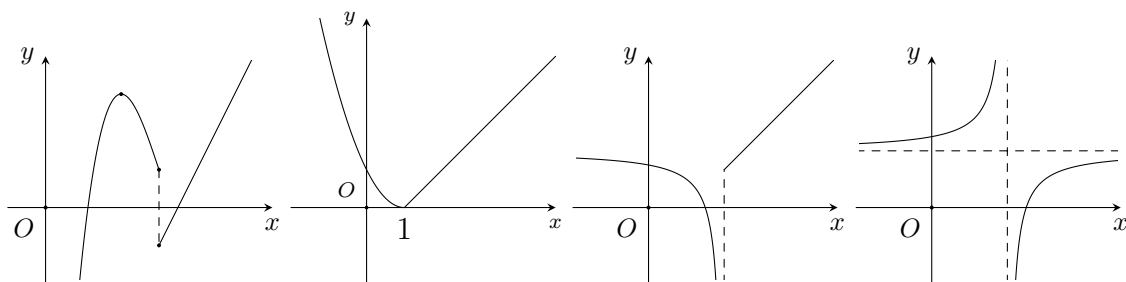


Lời giải.

Quan sát đồ thị ta thấy: Hàm số gián đoạn tại $x_0 = 2$. Do đó không liên tục trên $\mathbb{R}$.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai □

Câu 14. Cho bốn đồ thị của ba hàm số ở hình dưới đây. Hãy cho biết tính đúng sai của mỗi nhận xét về các hàm số?

Đồ thị $y = f(x)$ Đồ thị $y = g(x)$ Đồ thị $y = h(x)$ Đồ thị $y = k(x)$

- a) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập xác định của nó.
 b) Hàm số $y = g(x)$ liên tục trên tập xác định của nó.
 c) Hàm số $y = h(x)$ không liên tục trên tập xác định của nó.
 d) Hàm số $y = k(x)$ liên tục trên các khoảng xác định của nó.

Lời giải.

Quan sát đồ thị ta thấy

- Hàm số $y = f(x)$ không liên tục trên tập xác định (có một điểm gián đoạn).
- Hàm số $y = g(x)$ liên tục trên tập xác định $\mathbb{R}$.
- Hàm số $y = h(x)$ không liên tục trên tập xác định (có một điểm gián đoạn).
- Hàm số $y = k(x)$ liên tục trên các khoảng của tập xác định.

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d đúng $\square$

DỰ ÁN EX-ĐÚNG/SAI-2024

Câu 15. Với a, b là các số thực dương bất kì. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

b) $\log(3a) < 0$.

d) $\log_{2024} a^3 = 3 \log_{2024} a.$

d) Áp dụng công thức $\log_a b^M = M \log_a b$, ta có $\log_{2024} a^3 = 3 \log_{2024} a$.

d) $0 < a < 1, b > 1$.

d) Hàm số $y = \log_a x$ với $0 < a < 1$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

217

- Khi $0 < a < 1$ thì hàm số $y = a^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- Khi $a > 1$ thì hàm số $y = a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Xét hàm số $y = \log_a x$.

- Khi $0 < a < 1$ thì hàm số $y = \log_a x$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.
- Khi $a > 1$ thì hàm số $y = \log_a x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d sai □

Câu 18. Cho hàm số $f(x) = a^x$ và $g(x) = \log_a x$ với $0 < a < 1$.

- $f(x)$ đồng biến và $g(x)$ nghịch biến trên tập xác định.
- $f(x)$ và $g(x)$ nghịch biến trên tập xác định.
- $f(x)$ và $g(x)$ đồng biến trên tập xác định.
- $f(x)$ nghịch biến và $g(x)$ đồng biến trên tập xác định.

Lời giải.

Vì $0 < a < 1$ nên hàm số $f(x) = a^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và $g(x) = \log_a x$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Đáp án: a sai | b đúng | c sai | d sai □

Câu 19. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- Hàm số $y = \log x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.
- Hàm số $y = \pi^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \log_{\pi-3} x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.
- Hàm số $y = e^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

a) Vì $y = \log x$ có cơ số $10 > 1$ nên $y = \log x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

b) Vì $\pi > 1$ nên hàm số $y = \pi^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

c) Vì $\pi - 3 \in (0; 1)$ nên hàm số $y = \log_{\pi-3} x$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

d) Vì $e > 1$ nên hàm số $y = e^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng □

Câu 20. Cho hàm số $y = x^{2\pi-3}$ có tập xác định là $\mathcal{D}$. Khi đó ta có

- $(1; 2) \subset \mathcal{D}$.
- $\mathcal{D} \subset (1; 2)$.
- $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $(0; 3) \cup (7; +\infty) \subset \mathcal{D}$.

Lời giải.

Vì $2\pi - 3$ là số mũ không nguyên nên hàm số xác định khi $x > 0$.

Do đó tập xác định $\mathcal{D} = (0; +\infty)$.

Vậy $(1; 2) \subset \mathcal{D}$ và $(0; 3) \cup (7; +\infty) \subset \mathcal{D}$.

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng □

Câu 21. Cho tập hợp $\mathcal{D} = (3; 4)$ và các hàm số $f(x) = \frac{2024}{\sqrt{x^2 - 7x + 12}}$, $g(x) = \log_{x-3}(4 - x)$, $h(x) = 3^{x^2 - 7x + 12}$.

- a) $\mathcal{D}$ là tập hợp con của tập xác định của hàm số $g(x)$ và $h(x)$.
- b) $\mathcal{D}$ là tập hợp con của tập xác định của hàm số $h(x)$.
- c) $\mathcal{D}$ là tập hợp con của tập xác định của hàm số $f(x)$ và $f(x) + g(x)$.
- d) $\mathcal{D}$ là tập hợp con của tập xác định của hàm số $f(x) + h(x)$ và $h(x)$.

Lời giải.

- $f(x)$ xác định $\Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 > 0 \Leftrightarrow x < 3$ hoặc $x > 4$.
- $g(x)$ xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x - 3 \neq 1 \\ 4 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < x \neq 4 \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < 4$.
- $h(x)$ xác định $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Vậy $\mathcal{D}$ là tập hợp con của tập xác định của hàm số $g(x)$ và $h(x)$.

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d sai □

Câu 22. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Tập giá trị của hàm số $y = a^x$ là $(0; +\infty)$.
- b) Tập giá trị của hàm số $y = \log_a x$ là $(0; +\infty)$.
- c) Tập xác định của hàm số $y = \log_a x$ là $(0; +\infty)$.
- d) Tập xác định của hàm số $y = a^x$ là $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải.

Tập giá trị của hàm số $y = \log_a x$ là $(-\infty; +\infty)$.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d đúng □

Câu 23. Cho phương trình $3^{2x+5} = 3^{x+2} + 2$. Khi đặt $t = 3^{x+1}$, phương trình đã cho trở thành phương trình

a) $81t^2 - 3t - 2 = 0$.

b) $27t^2 - 3t - 2 = 0$.

c) $27t^2 + 3t + 2 = 0$.

d) $-81t^2 + 3t + 2 = 0$.

Lời giải.

Phương trình tương đương với $27 \cdot 3^{2(x+1)} - 3 \cdot 3^{x+1} - 2 = 0$ nên khi đặt $3^{x+1} = t$ thì phương trình trở thành $27t^2 - 3t - 2 = 0$.

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d sai □

Câu 24. Cho phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0$. Khi đó

a) Tổng các nghiệm của phương trình là $\frac{17}{2}$.

b) Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu.

c) Tích các nghiệm của phương trình là một số chẵn.

d) Tổng các nghiệm của phương trình 4.

Lời giải.

Ta có

$$\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0 \Leftrightarrow (\log_2 x + 1)(\log_2 x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = -1 \\ \log_2 x = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 8. \end{cases}$$

Suy ra, tổng các nghiệm của phương trình đã cho bằng $\frac{1}{2} + 8 = \frac{17}{2}$ và tích các nghiệm của phương trình đã cho bằng $\frac{1}{2} \cdot 8 = 4$.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai □

Câu 25. Các loài cây xanh trong quá trình quang hợp sẽ nhận được một lượng nhỏ cacbon 14 (một đồng vị của cacbon). Khi một bộ phận của cây nào đó bị chết thì hiện tượng quang hợp cũng ngưng và nó sẽ không nhận thêm cacbon 14 nữa. Lượng cacbon 14 của bộ phận đó sẽ phân hủy một cách chậm chạp, nó chuyển hóa thành nitơ 14. Gọi $P(t)$ là số phần trăm cacbon 14 còn lại trong một bộ phận của cây sinh trưởng từ t năm trước đây thì $P(t)$ được tính theo công thức $P(t) = 100 \cdot (0,5)^{\frac{t}{5750}} (\%)$. Phân tích một mẫu gỗ từ một công trình kiến trúc cổ, người ta thu được lượng cacbon 14 còn lại trong mẫu gỗ đó là 50%. Gọi a là niên đại của công trình kiến trúc.

a) $a > 5000$.

b) $a < 6000$.

c) $P(a) = 50$.

d) $P(a) = 75$.

Lời giải.

Ta có $P(t) = 100 \cdot (0,5)^{\frac{t}{5750}} = 50 \Leftrightarrow t = 5750$.

Vậy niên đại công trình kiến trúc là 5750 năm.

Đáp án: a đúng | b đúng | c đúng | d sai □

Câu 26. Để biết dung dịch có tính axit, tính bazơ hay trung tính, người ta dùng độ pH để xác định, biết $pH = -\log [H_3O^+]$. Trong đó, pH là chữ đầu của nhóm từ “potential of hydrogen” nghĩa là tiềm lực của hiđrô. Nếu $pH < 7$: dung dịch có tính axit; $pH > 7$: dung dịch có tính bazơ; $pH = 7$: dung dịch trung tính. Hỏi nếu bia có nồng độ ion hiđrô $[H_3O^+] = 0,00008$ thì

- a) Bia có tính axit. b) $pH > 7$. c) $pH \in (4; 5)$. d) $pH \in (2; 3)$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có độ pH của bia là $pH = -\log 0,00008 \approx 4,1 < 7$.

Do đó bia có tính axit.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai□

Câu 27. Xét bất phương trình $\log(x - 21) < 2 - \log x$.

- a) Điều kiện xác định của bất phương trình đã cho là $x > 0$.
 b) Tập nghiệm của bất phương trình đã cho có dạng $S = (a; b)$ thỏa mãn $a + b = 21$.
 c) Tập nghiệm của bất phương trình đã cho có dạng $S = (a; b)$ thỏa mãn $a \cdot b = 525$.
 d) Bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 21$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \log(x - 21) < 2 - \log x &\Leftrightarrow \log(x - 21) + \log x < 2 \\ &\Leftrightarrow \log [x(x - 21)] < 2 \Leftrightarrow x(x - 21) < 10^2 \\ &\Leftrightarrow -4 < x < 25. \end{aligned}$$

Kết với với điều kiện ta được tập nghiệm của bất phương trình là $S = (21; 25)$.

- a) Điều kiện xác định của bất phương trình là $x > 21$.
 b) Bất phương trình có tập nghiệm $S = (21; 25)$ và $21 + 25 = 46$.
 c) Bất phương trình có tập nghiệm $S = (21; 25)$ và $21 \cdot 25 = 525$.
 d) Bất phương trình có tập nghiệm $S = (21; 25)$.

Đáp án: a sai | b sai | c đúng | d sai□

Câu 28. Xét bất phương trình $\log_2 x < 1$.

- a) Tập nghiệm của bất phương trình có dạng $S = (a; b)$ thỏa mãn $5a + 2b = 4$.
 b) Bất phương trình đã cho chỉ có 1 nghiệm nguyên.
 c) Bất phương trình đã cho có ít nhất 2 nghiệm nguyên.
 d) Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình đã cho bằng 17.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$. Ta có

$$\log_2 x < 1 \Leftrightarrow \log_2 x < \log_2 2 \Leftrightarrow x < 2.$$

Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (0; 2)$.

Nghiệm nguyên của bất phương trình là $x = 1$.

Mặt khác ta có, $a = 0, b = 2 \Rightarrow 5a + 2b = 5 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 4$.

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d sai □

Câu 29. Gọi A, B lần lượt là tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 4$ và $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 2^{2x+1}$. Khi đó

- a) $A \cap B = (-3; -2)$. b) $A \cap B = \emptyset$. c) $A \cup B = \mathbb{R}$. d) $A \subset (-\infty; -2)$.

Lời giải.

Ta có

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x < 4 \Leftrightarrow 2^{-x} < 2^2 \Leftrightarrow -x < 2 \Leftrightarrow x > -2.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình trên là $A = (-2; +\infty)$.

Lại có

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 2^{2x+1} \Leftrightarrow 2^{-x} > 2^{2x+1} \Leftrightarrow -x > 2x+1 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{3}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình trên là $B = (-\infty; -3)$.

Khi đó

- $A \cap B = \emptyset$.
- $A \cup B = (-\infty; -3) \cup (-2; +\infty)$.
- $A \not\subset (-\infty; -2)$.

Đáp án: a sai | b đúng | c sai | d sai □

Câu 30. Xét phương trình $\log_2 x + \log_4 x = 1$.

- a) Nghiệm của phương trình là một số hữu tỉ. b) Nghiệm của phương trình là một số vô tỉ.
c) Nghiệm của phương trình là các số âm. d) Các nghiệm của phương trình đều dương.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$. Ta có

$$\log_2 x + \log_4 x = 1 \Leftrightarrow \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \log_2 x = 1 \Leftrightarrow \log_2 x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{2}{3}}.$$

So sánh điều kiện, ta được nghiệm của phương trình là $x = 2^{\frac{2}{3}}$.

Đáp án: a sai | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 31. Giả sử $x = a$ là nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} = 2^{3x}$. Khi đó

- a) $a > 1$. b) $a < 1$. c) $a^2 = \frac{1}{4}$. d) $a^3 = 27$.

Lời giải.

Ta có

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} = 2^{3x} \Leftrightarrow 2^{-2x+1} = 2^{3x} \Leftrightarrow -2x+1 = 3x \Leftrightarrow 5x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{1}{5}$.

Đáp án: a sai | b đúng | c sai | d sai □

Câu 32. Gọi A, B lần lượt là tập nghiệm của các bất phương trình $e^{2x} < e^{x+6}$ (1) và $\pi^{3x} \geq \pi^{x-4}$ (2). Khi đó

- a) $A \cap B = [-2; 6)$.
- b) $A \subset [\pi; +\infty)$.
- c) $A \cup B = (-2; 6]$.
- d) Tập xác định của hai bất phương trình trên là $\mathcal{D} = (-\infty; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có

$$e^{2x} < e^{x+6} \Leftrightarrow 2x < x + 6 \Leftrightarrow x < 6.$$

Khi đó $A = (-\infty; 6)$.

Lại có

$$\pi^{3x} \geq \pi^{x-4} \Leftrightarrow 3x \geq x - 4 \Leftrightarrow x \geq -2.$$

Khi đó $B = [-2; +\infty)$.

- a) $A \cap B = (-\infty; 6) \cap [-2; +\infty) = [-2; 6)$.
- b) Lấy $1 \in A$. Nhận thấy $1 \notin [\pi; +\infty)$. Do đó $A \not\subset [\pi; +\infty)$.
- c) $A \cup B = (-\infty; 6) \cup [-2; +\infty)$.
- d) Vì các bất phương trình có cơ số dương nên tập xác định của các bất phương trình trên là $\mathbb{R}$.

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng □

Câu 33. Cho bất phương trình $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{6-5x}{2+5x}} \geq \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$. Khi đó

- a) Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình là -3 .
- b) Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình là -2 .
- c) Bất phương trình đã cho có 2 nghiệm nguyên.
- d) Tập nghiệm của bất phương trình là tập con của tập hợp $[-2; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{6-5x}{2+5x}} \geq \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \Leftrightarrow \frac{6-5x}{2+5x} \geq -2 \Leftrightarrow \frac{10+5x}{2+5x} \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x < \frac{-2}{5}.$$

Bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \left[-2; -\frac{2}{5}\right)$.

- Các nghiệm nguyên của bất phương trình là $x = -2, x = -1$. Khi đó tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình là $-2 + (-1) = -3$.

- Ta có $S = \left[-2; -\frac{2}{5}\right) \subset [-2; +\infty)$.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d đúng $\square$

Câu 34. Xét bất phương trình $\log_{0,5} x > \log_{0,5}(3x + 4)$.

- Điều kiện xác định của bất phương trình đã cho là $x > -\frac{3}{4}$.
- Điều kiện xác định của bất phương trình đã cho là $x > 0$.
- Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (0; +\infty)$.
- Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (-2; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$. Khi đó ta có

$$\log_{0,5} x > \log_{0,5}(3x + 4) \Leftrightarrow x < 3x + 4 \Leftrightarrow x > -2.$$

Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (0; +\infty)$.

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d sai $\square$

Chương 7

Đạo hàm

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)$. Hãy chỉ ra tính đúng, sai của các khẳng định sau?

- a) $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. b) $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.
- c) $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. d) $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x + x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Đặt $h = \Delta x = x - x_0 \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Vậy chỉ có khẳng định $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x + x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$ sai, các khẳng định còn lại đúng.

Đáp án: a đúng | b đúng | c đúng | d sai □

Câu 36. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau

- a) Hàm số không liên tục tại $x = 0$. b) Hàm số không có đạo hàm tại $x = -1$.
- c) Hàm số có đạo hàm tại $x = 2$. d) Hàm số không liên tục tại $x = 2$.

Lời giải.

- Xét các giới hạn $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2) = 0. \end{cases}$

Vì $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ nên hàm số không liên tục tại $x = 0$.

- Với $x < 0$, $f(x) = -x^2 \Rightarrow$ do đó với $x = -1$, hàm số có đạo hàm tại điểm đó.
- Với $x \geq 0$, $f(x) = x^2 - 1 \Rightarrow$. Do đó tại điểm $x = 2$, hàm số liên tục và có đạo hàm tại điểm đó.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai □

Câu 37. Cho hàm số $f(x) = x^2 + 2x$, có Δx là số gia của đối số tại $x = 1$, Δy là số gia tương ứng của hàm số. Khi đó, các khẳng định sau đúng hay sai?

$$\text{a) } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x + 2.$$

$$\text{b) } \Delta y = (\Delta x)^2 + 4\Delta x.$$

$$\text{c) } \Delta y - 4\Delta x = (\Delta x)^2 - 2\Delta x - 3.$$

$$\text{d) } 2\Delta y - 6\Delta x = 2(\Delta x)^2 + 2\Delta x.$$

Lời giải.

Ta có

$$\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) = (1 + \Delta x)^2 + 2(1 + \Delta x) - (1 + 2) = (\Delta x)^2 + 4\Delta x.$$

$$\Rightarrow 2\Delta y - 6\Delta x = 2(\Delta x)^2 + 2\Delta x.$$

Đáp án: a sai | b đúng | c sai | d đúng□

Câu 38. Các khẳng định dưới đây đúng hay sai?

a) Số gia của hàm số $y = x^3 + x^2 + 1$ tại điểm x_0 ứng với số gia $\Delta x = 1$ là $\Delta y = 3x_0^2 + 5x_0 + 3$.

b) Số gia của hàm số $y = \frac{x^2}{2}$ tại điểm $x_0 = -1$ ứng với số gia Δx là $\Delta y = \frac{1}{2}[(\Delta x)^2 - \Delta x]$.

c) Gọi Δx là số gia của đối số tại x và Δy là số gia tương ứng của hàm số $y = x^3 + 1$. Khi đó $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 - 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^3$.

d) Tỷ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $f(x) = 2x(x - 1)$ theo x và Δx là $4x + 2 \cdot \Delta x - 2$.

Lời giải.

$$\text{a) } \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x_0 + 1) - f(x_0) = [(x_0 + 1)^3 + (x_0 + 1)^2 + 1] - (x_0^3 + x_0^2 + 1) = 3x_0^2 + 5x_0 + 2.$$

$$\text{b) } \Delta y = f(-1 + \Delta x) - f(-1) = \frac{(-1 + \Delta x)^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}[(-1 + \Delta x)^2 - 1] = \frac{1}{2}(\Delta x)^2 - \Delta x.$$

$$\begin{aligned} \text{c) Ta có: } \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) \\ &= (x + \Delta x)^3 + 1 - (x^3 + 1) \\ &= 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot \Delta^2 x + \Delta^3 x \\ &= \Delta x(3x^2 + 3x \cdot \Delta x + \Delta^2 x). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + \Delta^2 x = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

$$\text{d) Ta có: } f(x) = 2x(x - 1) = 2x^2 - 2x.$$

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) \\ &= 2(x + \Delta x)^2 - 2 \cdot (x + \Delta x) - (2x^2 - 2x) \\ &= 2x^2 + 4x \cdot \Delta x + 2(\Delta x)^2 - 2x - 2\Delta x - 2x^2 + 2x \\ &= 4x \cdot \Delta x + 2(\Delta x)^2 - 2\Delta x. \\ \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= 4x + 2 \cdot \Delta x - 2. \end{aligned}$$

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng□

Câu 39. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau

- a) Hàm số $y = x^2 + x + 1$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $y' = 2x + 1$.
 b) Đạo hàm của hàm số $y = x^3 - 2x^2 + \frac{5}{x} + 7$ là $y' = x^2 - 2x - \frac{5}{x^2}$.
 c) Một hàm số có đạo hàm $y' = 3x^2 - \frac{1}{x^2}$ là $y = \frac{x^4 + 1}{x}$.
 d) Một hàm số có đạo hàm bằng $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ là $f(x) = \sqrt{x}$.

Lời giải.

a) Ta có $y' = (x^2 + x + 1)' = 2x + 1$.

b) Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
 Ta có $y' = 3x^2 - 4x - \frac{5}{x^2}$.

c) Ta có $y = \frac{x^4 + 1}{x} = x^3 + \frac{1}{x} \Rightarrow y' = 3x^2 - \frac{1}{x^2}$.

d) Ta có $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d đúng □

Câu 40. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x+1}$, các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) $f'(3) = \frac{1}{4}$. b) $f'(0) = \frac{1}{2}$. c) $f'(2) = \frac{1}{6}$. d) $f'(8) = \frac{1}{18}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

a) $f'(3) = \frac{1}{4}$.

b) $f'(0) = \frac{1}{2}$.

c) $f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

d) $f'(8) = \frac{1}{6}$.

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d sai □

Câu 41. Cho hàm số $y = \frac{x}{x+1}$ có đồ thị (C) . Hãy xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau

- a) Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(-2; 2)$ là 1.
 b) Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x = 1$ là $\frac{1}{2}$.
 c) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $A(0, 0)$ là $y = x$.
 d) Đồ thị (C) có phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = -1$.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{1}{(x+1)^2}$.

a) Từ $M(-2; 2) \Rightarrow x_0 = -2 \Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến là $y'(-2) = 1$.

b) Với $x = 1$, tiếp tuyến có hệ số góc là $y'(1) = \frac{1}{4}$.

c) Từ $A(0, 0) \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \Rightarrow y'(x_0) = 1 \\ y_0 = 0. \end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến là $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 = x$.

d) Hàm số không xác định tại điểm $x = -1$ nên đồ thị hàm số không có tiếp tuyến tại điểm đó.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai □

Câu 42. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau

a) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^2 - x - 2$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là $2x - y = 0$.

b) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 5x + 1$ tại điểm có tung độ bằng 1 là $5x - y + 1 = 0$.

c) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ tại điểm $A(-2; 3)$ là $y = 2x + 1$.

d) Hệ số góc nhỏ nhất của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 9x - 5$ là 6.

Lời giải.

a) Gọi M là tiếp điểm của tiếp tuyến và đồ thị hàm số. Theo giả thiết ta có $M(1; -2)$.

Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M .

Ta có $y' = 2x - 1 \Rightarrow k = y'(1) = 1$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 1(x - 1) - 2 \Leftrightarrow x - y - 3 = 0$.

b) Ta có $y' = 6x^2 + 5$.

Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Theo giả thiết có $y_0 = 1 \Rightarrow 2x_0^3 + 5x_0 + 1 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 0$.

Hệ số góc của tiếp tuyến là $k = y'(0) = 5$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 5(x - 0) + 1 \Leftrightarrow 5x - y + 1 = 0$.

c) $y' = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{2}{(x+1)^2}; y'(-2) = 2$.

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm $A(-2; 3)$ là $y = 2(x - (-2)) + 3 \Leftrightarrow y = 2x + 7$.

d) Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 9 = 3(x - 1)^2 + 6 \geq 6$.

Dấu “=” xảy ra khi $x = 1$ và hệ số góc nhỏ nhất là 6.

Đáp án: a sai | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 43. Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 2$ có đồ thị là (C) . Khi đó, các khẳng định sau đây đúng hay sai?

a) Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) có hệ số góc $k = -9$ là $y - 16 = -9(x + 3)$.

b) Số phương trình tiếp tuyến có hệ số góc $k = 0$ là 2.

- c) Với $k < -9$ thì đồ thị (C) luôn có phương trình tiếp tuyến.
 d) Với $k > -9$ thì đồ thị (C) có 1 phương trình tiếp tuyến.

Lời giải.

Gọi $M\left(x_0; \frac{x_0^3}{3} + 3x_0^2 - 2\right)$ là tiếp điểm.

Ta có $k = f'(x_0) \Leftrightarrow x_0^2 + 6x_0 = k (*)$.

- $k = -9 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = f(x_0) = 16$.

Vậy phương trình tiếp tuyến là $y - 16 = -9(x + 3)$.

- Với $k = 0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -6 \end{cases} \Rightarrow$ có 2 phương trình tiếp tuyến có hệ số góc $k = 0$.
- Để đồ thị (C) có phương trình tiếp tuyến thì phương trình $x_0^2 + 6x_0 = k$ phải có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow k \geq -9$.
- Để đồ thị (C) có 1 phương trình tiếp tuyến duy nhất thì phương trình $x_0^2 + 6x_0 = k$ phải có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow k = -9$.

$$\Leftrightarrow x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = f(x_0) = 16$$

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d sai □

Câu 44. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau

- a) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 2$ (C) mà có hệ số góc lớn nhất là $y = 3x - 1$.
 b) Tiếp tuyến với đồ thị (C): $y = x^3 - 3x^2 - 2$ song song với đường thẳng (d): $y = 9x + 3$ có phương trình là $y = 9x - 29$.
 c) Số các phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ song song với đường thẳng $y = -3x + 15$ là 2.
 d) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 2$ (C) có tiếp tuyến có hệ số góc $k = -9$ là $y = -9(x + 3)$.

Lời giải.

- a) Ta có $y' = -3x^2 + 6x = -3(x - 1)^2 + 3 \leq 3$; với $x = 1$ thì $y' = 3$.

Nên hệ số góc lớn nhất của tiếp tuyến là $k = 3$.

Phương trình tiếp tuyến $y = 3(x - 1) + 4 \Leftrightarrow y = 3x + 1$.

- b) $y' = 3x^2 - 6x$.

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình $3x^2 - 6x = 9 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3. \end{cases}$

Với $x = -1$ ta có $y = -6$ phương trình tiếp tuyến là $y + 6 = 9(x + 1) \Leftrightarrow y = 9x + 3$.

Với $x = 3$ ta có $y = -2$ phương trình tiếp tuyến là $y + 2 = 9(x - 3) \Leftrightarrow y = 9x - 29$.

c) Gọi $M(x_0; y_0)$, $x_0 \neq 1$ là tiếp điểm $y' = -\frac{3}{(x-1)^2}$.

Đồ thị hàm số song song với $y = -3x + 15$ nên ta có $f'(x_0) = -3 \Leftrightarrow -\frac{3}{(x_0-1)^2} = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 2. \end{cases}$

• Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -1 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $y = -3x - 1$.

• Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 5 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $y = -3x + 11$.

d) Ta có $y' = x^2 + 6x$.

Vì tiếp tuyến có hệ số góc $k = -9$ nên $y' = -9 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = -3$.

Với $x = -3 \Rightarrow y = 16$. Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y - 16 = -9(x + 3)$.

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d sai □

Câu 45. Cho hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ có đồ thị (C) . Khi đó, các khẳng định sau đúng hay sai?

a) Số tiếp tuyến đi qua điểm $M(-1; -9)$ là 2.

b) Số tiếp tuyến đi qua điểm $O(0; 0)$ là 3.

c) Số tiếp tuyến đi qua điểm $N(0; 1)$ là 2.

d) Tồn tại điểm mà viết được 4 phương trình tiếp tuyến với (C) đi qua điểm đó.

Lời giải.

Ta có $y' = 12x^2 - 12x$.

Gọi $A(a; 4a^3 - 6a^2 + 1) \in (C)$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại A là $y = (12a^2 - 12a)(x - a) + 4a^3 - 6a^2 + 1$ (*).

• Vì tiếp tuyến đi qua $M(-1; -9)$ nên

$$-9 = (12a^2 - 12a)(-1 - a) + 4a^3 - 6a^2 + 1 \Leftrightarrow (a + 1)(4a^2 - a - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = \frac{5}{4}. \end{cases}$$

Vậy có 2 tiếp tuyến đi qua điểm $M(-1; -9)$.

• Vì tiếp tuyến đi qua $O(0; 0)$ nên $-8a^3 + 6a^2 + 1 = 0$. Phương trình này có 1 nghiệm nên có 1 tiếp tuyến đi qua điểm $O(0; 0)$.

• Vì tiếp tuyến đi qua $N(0; 1)$ nên $-8a^3 + 6a^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \frac{3}{4} \end{cases}$. Vậy có 2 tiếp tuyến đi qua điểm $N(0; 1)$.

• Ta có phương trình (*) là bậc ba nên có tối đa 3 nghiệm. Do đó, có tối đa 3 tiếp tuyến có thể tìm được.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai□

Câu 46. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau

- a) Có hai tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-2}{x-1}$ (C) đi qua điểm $A(9; 0)$. Tích hệ số góc của hai tiếp tuyến đó bằng $\frac{9}{64}$.
- b) Qua điểm $A(0; 2)$ có thể kẻ được 3 tiếp tuyến tới đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$.
- c) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$. Trong tất cả các tiếp tuyến của đồ thị hàm số, tiếp tuyến có hệ số góc k nhỏ nhất là $k = 3$.
- d) Phương trình tiếp tuyến d đi qua điểm $A(-6; 5)$ và tiếp xúc với đồ thị (C): $y = \frac{x+2}{x-2}$ là $y = -x - 1$ và $y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$.

Lời giải.

- a) Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $y' = \frac{-1}{(x-1)^2}$.

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ $A(x_0 \neq 1)$.

Phương trình tiếp tuyến là $y = \frac{-1}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{3x_0-2}{x_0-1}$.

Tiếp tuyến qua $A \Leftrightarrow \frac{x_0-9}{(x_0-1)^2} + \frac{3x_0-2}{x_0-1} = 0 \Leftrightarrow x_0-9 + (3x_0-2)(x_0-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = \frac{7}{3} \end{cases}$

Hai hệ số góc của hai tiếp tuyến kẻ từ A là $y'(-1) \cdot y'\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{9}{64}$.

- b) Gọi d là đường thẳng qua điểm $A(0; 2)$, suy ra $(d): y = kx + 2$

d tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 2x^2 + 2 = kx + 2(1) \\ k = 4x^3 - 4x(2) \end{cases}$

Thay (2) vào (1) ta có $x^4 - 2x^2 + 2 = (4x^3 - 4x)x + 2 \Leftrightarrow 3x^4 - 2x^2 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2(3x^2 - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{\sqrt{6}}{3} \end{cases}$$

Vậy từ $A(0; 2)$ có thể kẻ được ba tiếp tuyến tới đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$.

- c) Ta có $k = f'(x) = 3x^2 - 6x = 3(x^2 - 2x + 1) - 3 = 3(x-1)^2 - 3 \geq -3 \Rightarrow k_{\min} = -3$.

- d) Ta có $y' = -\frac{4}{(x-2)^2}$.

Gọi $A(a; b)$ là tọa độ tiếp điểm. Phương trình tiếp tuyến d tại A là $y = \frac{-4}{(a-2)^2}(x-a) + \frac{a+2}{a-2}$.

Vì $A(-6; 5) \in d \Leftrightarrow 5 = \frac{-4}{(a-2)^2}(-6-a) + \frac{a+2}{a-2} \Leftrightarrow 4a^2 - 24a = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 6 \end{cases}$

- Với $a = 0$, phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -x - 1$.
- Với $a = 6$, phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -\frac{1}{4}(x-6) + 2 = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$.

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d đúng □

a) Giá trị của $f''(1)$ bằng 6.

b) $f''(-5) > 0$.

c) $3f''(2) - 10 = 2$.

d) $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

- $f''(1) = 6$.
- $f''(-5) = -30 < 0$.
- $3f''(2) - 10 = 3 \cdot 6 \cdot 2 - 10 = 26 \neq 2$.
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 6x > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

a) Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x}{x - 1}$ là $y'' = \frac{-2}{(x - 1)^3}$.

b) Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$. Giá trị $f''(1)$ bằng 2.

c) Cho hàm số $f(x) = \cos x + 3x^2$. Khi đó $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6$.

d) Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = -\frac{1}{x}$ là $y'' = \frac{2}{x^3}$.

a) Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 6$. Nghiệm của bất phương trình $f''(x) \leq f'(x) - 1$ là $x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$.

b) Cho hai hàm số $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$ và $g(x) = 3 + 10x - 7x^2$. Số nghiệm của phương trình $f''(x) + g'(x) = 0$ là 1.

c) Cho hàm số $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$. Bất phương trình $y'' < 0$ có nghiệm là $x \in (-\infty; 1) \setminus \{0\}$.

d) Cho hàm số $y = \sin 5x$. Tỉ số $\frac{y''}{y} = 1$.

$$f''(x) \leq f'(x) - 1 \Leftrightarrow 6x - 6 \leq 3x^2 - 6x + 4 - 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 3. \end{cases}$$

b) $f'(x) = 4x^3 - 8x$, $f''(x) = 12x^2 - 8$, $g'(x) = 10 - 14x$.

$$f''(x) + g'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 8 + 10 - 14x = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 14x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{6} \end{cases}.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm.

c) $y' = 15x^4 - 20x^3 + 3$, $y'' = 60x^3 - 60x^2$.

$$y'' < 0 \Leftrightarrow 60x^2(x - 1) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}.$$

d) $y' = 5 \cos 5x$, $y'' = -25 \sin 5x \Rightarrow \frac{y''}{y} = -25$.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai □

Câu 50. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau

a) Cho hàm số $y = \sin 2x$. Khi đó $4y + y'' = 2$.

b) Cho hàm số $y = x \cdot \sin x$. Ta luôn có $xy'' - 2y' + xy = -2 \sin x$.

c) Cho hàm số $y = x \cos 2x$. Khi đó $xy'' + 2(\cos 2x - y') + 4xy = 0$.

d) Cho hàm số $f(x) = \cos x + 3x^2$. Số nghiệm của phương trình $f(x) + f''(x) = 0$ là 2.

Lời giải.

a) $y = \sin 2x \Rightarrow y' = 2 \cos 2x$.

Ta có $y'' = -4 \sin 2x = -4y \Leftrightarrow 4y + y'' = 0$.

b) Ta có $y' = \sin x + x \cos x \Rightarrow y'' = 2 \cos x - x \sin x = 2 \cos x - y$.

Khi đó $xy'' - 2y' + xy = x(2 \cos x - y) - 2(\sin x + x \cos x) + xy = -2 \sin x$.

c) $y = x \cos 2x$; $y' = (x \cos 2x)' = \cos 2x - 2x \sin 2x$.

$y'' = (\cos 2x - 2x \sin 2x)' = -2 \sin 2x - 2(\sin 2x + 2x \cos 2x) = -4 \sin 2x - 4x \cos 2x$.

Ta có $xy'' + 2(\cos 2x - y') + 4xy = -4x \sin 2x - 4x^2 \cos 2x + 4x \sin 2x + 4x^2 \cos 2x = 0$.

d) Ta có $f'(x) = -\sin x + 6x$ và $f''(x) = -\cos x + 6$.

$\Rightarrow f(x) + f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6 = 0$ (vô nghiệm).

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d sai □

Chương 8

Quan hệ vuông góc trong không gian

Câu 51. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, đáy $ABCD$ có tâm là O . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ được có thể tính bởi công thức nào sau đây?

a) $V_{S.ABCD} = \frac{1}{6} \cdot SO \cdot AC \cdot BD.$

b) $V_{S.ABCD} = \frac{1}{6} \cdot SA \cdot AC \cdot BD.$

c) $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot AB^2.$

d) $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot AB^2.$

Lời giải.

a) Từ giả thuyết suy ra $SO \perp (ABCD).$

$ABCD$ là hình vuông nên $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD.$

Khi đó thể tích của khối chóp $ABCD$ là

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{6} \cdot SO \cdot AC \cdot BD.$$

b) $V_{S.ABCD} = \frac{1}{6} \cdot SA \cdot AC \cdot BD$ là sai

c) Từ giả thuyết suy ra $SO \perp (ABCD).$

$ABCD$ là hình vuông nên $S_{ABCD} = AB^2.$

Khi đó thể tích của khối chóp $ABCD$ là

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot AB^2.$$

d) $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot AB^2$ là sai.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai □

Câu 52. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O , $AB = a$, $AD = 2a$. Biết SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ được có thể tính bởi công thức nào sau đây?

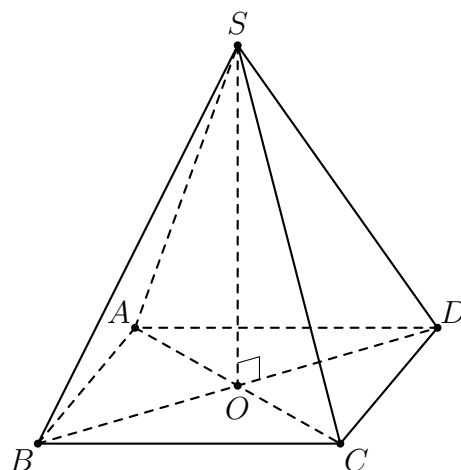
a) $V = \frac{1}{3} SA \cdot AB \cdot AC.$

b) $V = \frac{1}{3} SA \cdot AB \cdot AD.$

c) $V = \frac{1}{6} \cdot SA \cdot BD \cdot AC.$

d) $V = \frac{1}{6} \cdot SA \cdot BD^2 \cdot \sin \widehat{AOB}.$

Lời giải.



a) $V = \frac{1}{3}SA \cdot AB \cdot AC$ là sai, vì $AB \cdot AC \neq S_{ABCD}$.

b) Từ giả thuyết suy ra $SA \perp (ABCD)$.

$ABCD$ là hình chữ nhật nên $S_{ABCD} = AB \cdot AD$.

Khi đó thể tích của khối chóp $ABCD$ là

$$V = \frac{1}{3}SA \cdot AB \cdot AD.$$

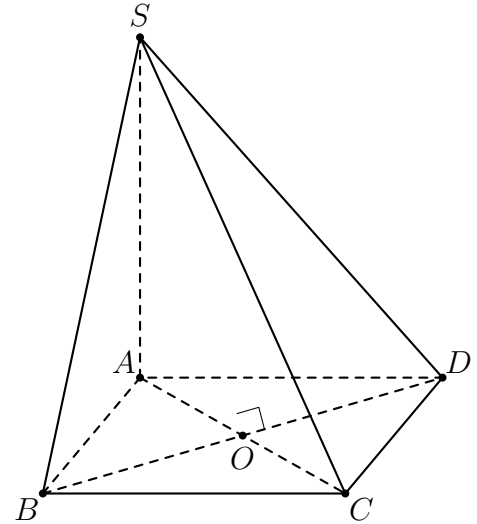
c) $V = \frac{1}{6} \cdot SA \cdot BD \cdot AC$ sai vì $\frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \neq S_{ABCD}$.

d) Từ giả thuyết suy ra $SA \perp (ABCD)$.

$ABCD$ là hình chữ nhật nên $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot BD^2 \cdot \sin \widehat{AOB}$.

Khi đó thể tích của khối chóp $ABCD$ là

$$V = \frac{1}{6} \cdot SA \cdot BD^2 \cdot \sin \widehat{AOB}.$$



Đáp án: a sai | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 53. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ được có thể tính bởi công thức nào sau đây?

a) $V = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AA' \cdot AB^2$.

b) $V = \frac{1}{2} \cdot AA' \cdot AB^2$.

c) $V = BB' \cdot S_{A'B'C'}$.

d) $V = AB \cdot S_{BCC'B'}$.

Lời giải.

a) Từ giả thuyết suy ra $AA' \perp (ABC)$.

ABC là tam giác đều nên $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB^2$.

Khi đó thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$$V = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AA' \cdot AB^2.$$

b) $V = \frac{1}{2} \cdot AA' \cdot AB^2$ là sai

c) Từ giả thuyết suy ra $BB' \perp (A'B'C')$.

Khi đó thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$$V = BB' \cdot S_{A'B'C'}.$$

d) $V = AB \cdot S_{BCC'B'}$ là sai, vì AB không phải là đường cao và

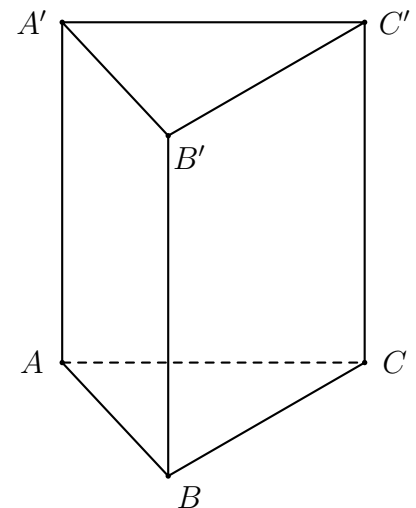
$BCC'B'$ cũng không là đáy của lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai □

Câu 54. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại B . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ được có thể tính bởi công thức nào sau đây?

a) $V = \frac{1}{2} \cdot AA' \cdot AB \cdot BC$.

b) $V = \frac{1}{2} \cdot AA' \cdot AB \cdot AC$.



c) $V = \frac{1}{2} \cdot CC' \cdot A'B' \cdot B'C'.$

d) $V = AA' \cdot AB \cdot BC.$

Lời giải.

a) Từ giả thuyết suy ra $AA' \perp (ABC).$

ABC là tam giác vuông nên $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC.$

Khi đó thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$$V = \frac{1}{2} \cdot AA' \cdot AB \cdot BC.$$

b) $V = \frac{1}{2} \cdot AA' \cdot AB \cdot AC$ là sai, vì $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC$ không bằng diện tích đáy khối lăng trụ $ABCA'B'C'.$

c) Từ giả thuyết suy ra $CC' \perp (A'B'C').$

$A'B'C'$ là tam giác vuông nên $S_{A'B'C'} = \frac{1}{2} \cdot A'B' \cdot B'C'.$

Khi đó thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$$V = \frac{1}{2} \cdot CC' \cdot A'B' \cdot B'C'.$$

d) $V = AA' \cdot AB \cdot BC$ là sai, vì $AB \cdot BC$ không bằng diện tích đáy khối lăng trụ $ABCA'B'C'.$

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai□

Câu 55. Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi với tâm hai đáy là $O, O'.$ Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ được có thể tính bởi công thức nào sau đây?

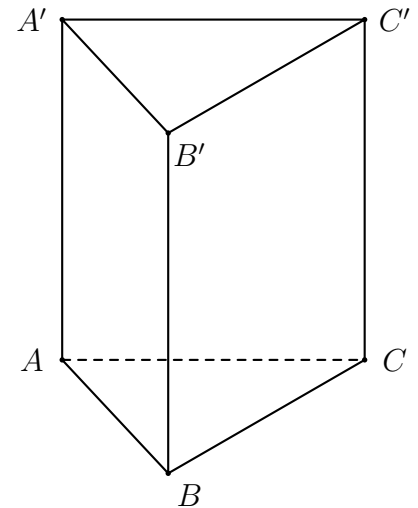
a) $V = \frac{1}{2} \cdot AA' \cdot AC \cdot BD.$

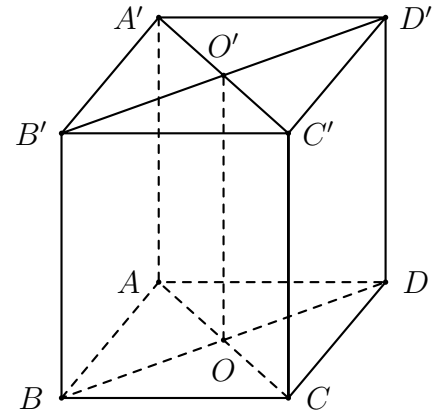
b) $V = \frac{1}{2} \cdot AA' \cdot AB \cdot AD.$

c) $V = \frac{1}{2} \cdot OO' \cdot A'C' \cdot B'D'.$

d) $V = \frac{1}{2} \cdot OO' \cdot AB \cdot AD.$

Lời giải.





a) Từ giả thuyết suy ra $AA' \perp (ABCD)$.

$ABCD$ là hình thoi nên $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD$.

Khi đó thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là

$$V = \frac{1}{2} \cdot AA' \cdot AC \cdot BD.$$

b) $V = \frac{1}{2} \cdot AA' \cdot AB \cdot AD$ là sai, vì $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD$ không bằng diện tích đáy khối lăng trụ trên.

c) Từ giả thuyết suy ra $OO' \perp (A'B'C'D')$.

Khi đó thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$$V = \frac{1}{2} \cdot OO' \cdot A'C' \cdot B'D'.$$

d) $V = \frac{1}{2} \cdot OO' \cdot AB \cdot AD$ là sai, vì $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD$ không bằng diện tích đáy khối lăng trụ trên.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai □

Câu 56. Hãy cho biết tính đúng sai của mỗi nhận xét về các hình vẽ dưới đây?

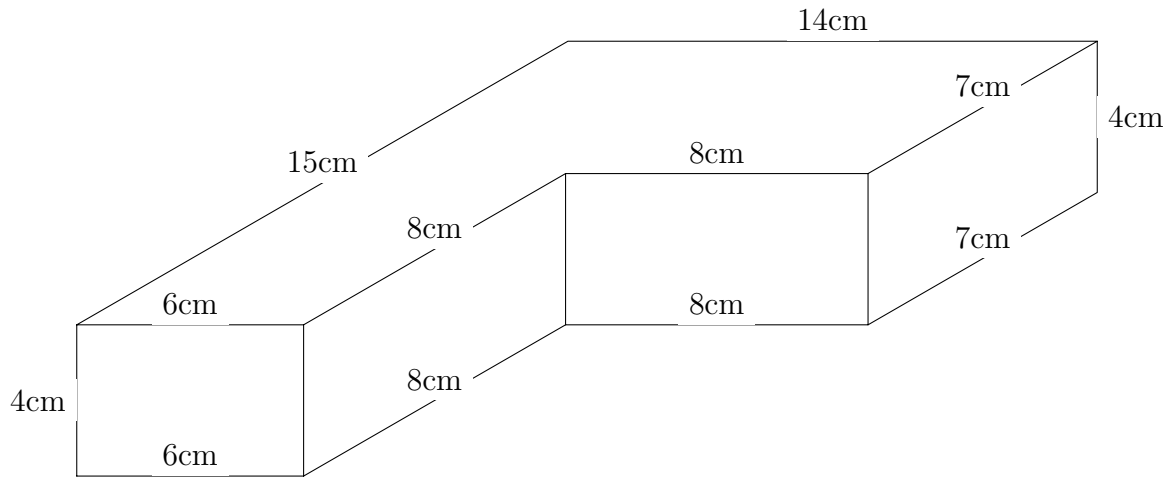
- a) Hai khối hộp chữ nhật có diện tích toàn phần bằng nhau thì có thể tích bằng nhau.
- b) Hai khối lăng trụ có diện tích đáy và chiều cao tương ứng bằng nhau thì có thể tích bằng nhau.
- c) Hai khối lập phương có diện tích toàn phần bằng nhau thì có thể tích bằng nhau.
- d) Hai khối chóp có diện tích đáy và chiều cao tương ứng bằng nhau thì có thể tích bằng nhau.

Lời giải.

- a) Sai, vì xét khối hộp chữ nhật có ba kích thước là 1, 1, $\frac{5}{2}$ và khối lập phương cạnh 1. Dễ thấy chúng có cùng diện tích toàn phần nhưng thể tích khác nhau.
- b) “Hai khối lăng trụ có diện tích đáy và chiều cao tương ứng bằng nhau thì có thể tích bằng nhau”, đúng vì thể tích khối lăng trụ bằng diện tích đáy nhân với chiều cao.
- c) “Hai khối lập phương có diện tích toàn phần bằng nhau thì có thể tích bằng nhau” đúng, vì khi đó chúng có cùng độ dài cạnh nên chúng có thể tích bằng nhau.
- d) “Hai khối chóp có diện tích đáy và chiều cao tương ứng bằng nhau thì có thể tích bằng nhau” đúng.

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d đúng □

Câu 57. Cho vật thể như hình vẽ bên. Thể tích vật thể đó bằng



a) 584 cm^3 .

b) 528 cm^3 .

c) 672 cm^3 .

d) 574 cm^3 .

Lời giải.

Ta chia vật thể làm hai hình hộp chữ nhật. Hình thứ nhất có cạnh đáy là hình chữ nhật có hai cạnh lần lượt là 6 cm và 8 cm, chiều cao bằng 4 cm. Hình thứ hai có cạnh đáy là hình chữ nhật có hai cạnh lần lượt là 14 cm và 7 cm, chiều cao bằng 4 cm.

Dễ dàng tính được thể tích của vật thể bằng thể tích của hai hình hộp chữ nhật cộng lại

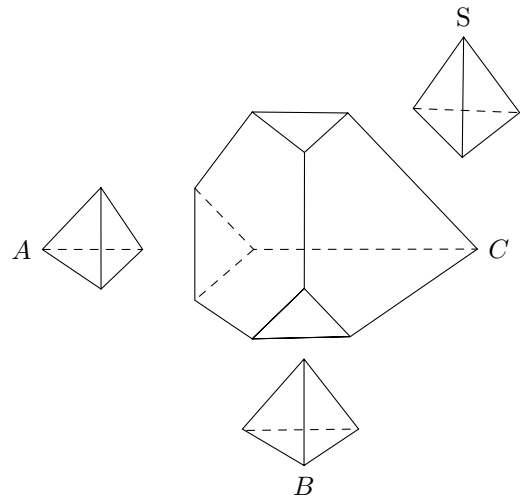
$$V_{\text{vật thể}} = 6 \cdot 8 \cdot 4 + 14 \cdot 7 \cdot 4 = 584 \text{ cm}^3.$$

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d sai □

Câu 58.

Cho một tứ diện đều $SABC$ có chiều cao h . Ở ba góc của tứ diện, người ta cắt đi các tứ diện đều bằng nhau có chiều cao x để khối đa diện còn lại có thể tích bằng một nửa thể tích khối tứ diện đều ban đầu. Tìm x .

a) $x = \frac{h}{\sqrt[3]{2}}$. b) $x = \frac{h}{\sqrt[3]{4}}$. c) $x = \frac{h}{\sqrt[3]{3}}$. d) $x = \frac{h}{\sqrt[3]{6}}$.

**Lời giải.**

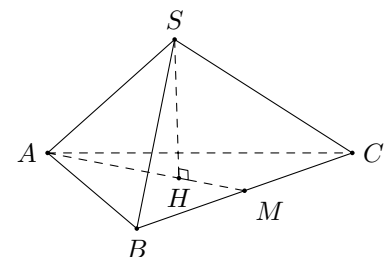
Giả sử tứ diện đều $SABC$ có độ dài các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của BC , H là trọng tâm $\triangle ABC$.

Do $SABC$ là tứ diện đều nên ta có $SH \perp (ABC)$, $SH = h$.

$$\text{Ta có } SH^2 = SA^2 - AH^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow a^2 = \frac{3}{2}SH^2 = \frac{3}{2}h^2$$

$$\Rightarrow V_{SABC} = \frac{1}{3}SH \cdot S_{SABC} = \frac{1}{3}h \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{\sqrt{3}}{8}h^3.$$

Áp dụng công thức thể tích trên đối với khối tứ diện đều chiều cao x ta có $V_x = \frac{\sqrt{3}}{8}x^3$.



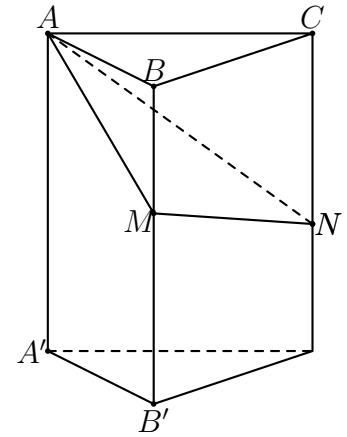
Theo bài ra, ta có $\frac{3V_x}{V_{SABC}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{x}{h}\right)^3 = \frac{1}{6} \Rightarrow x = \frac{h}{\sqrt[3]{6}}$.

Đáp án: a sai | b sai | c sai | d đúng □

Câu 59.

Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V . Gọi M là trung điểm của BB' , N là điểm trên cạnh CC' sao cho $CN = 3NC'$. Mặt phẳng (AMN) chia khối lăng trụ thành hai phần có thể tích V_1 và V_2 như hình vẽ. Mỗi kết quả dưới đây đúng hay sai?

- a) $\frac{V_2}{V} = \frac{5}{12}$. b) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{2}$. c) $\frac{V_1}{V} = \frac{5}{9}$. d) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}$.



Lời giải.

Gọi V là thể tích khối lăng trụ. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC . Ta có

$$\begin{aligned} V_{A.BMNC} &= \frac{1}{3} AH \cdot S_{BCNM} \\ &= \frac{1}{3} AH \cdot \frac{BM + CN}{2} \cdot BC \\ &= \frac{1}{3} AH \cdot \frac{5}{8} BB' \cdot BC \\ &= \frac{5}{12} V \end{aligned}$$

Vậy $V_2 = \frac{5}{12} V$.

Mặt khác, $V_1 + V_2 = V$ nên $V_1 = \frac{7}{12} V$.

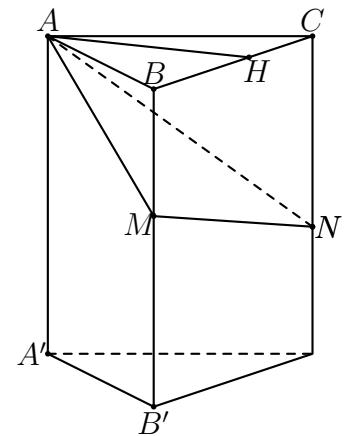
Tỉ số cần tìm là $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}$.

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng □

Câu 60. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi A', B' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB . Mỗi kết quả dưới đây đúng hay sai? Tính tỉ số thể tích $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}}$.

- a) $\frac{V_{C.ABB'A'}}{V_{C.A'B'S}} = 3$. b) $\frac{V_{C.ABB'A'}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{2}$. c) $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{3}$. d) $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}} = 4$.

Lời giải.



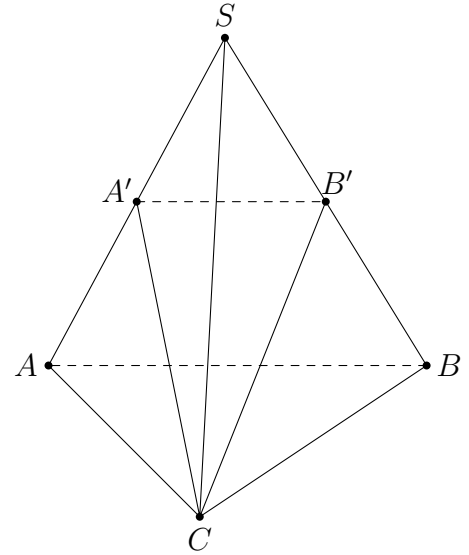
Ta có $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C}} = \frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SB}{SB'} = 4$. Khi đó

a) $\frac{V_{C.ABB'A'}}{V_{C.A'B'S}} = 3$ đúng.

b) $\frac{V_{C.ABB'A'}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{2}$ sai.

c) $\frac{V_{S.A'B'C}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{3}$ sai.

d) $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C}} = 4$ đúng.



Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng □

Câu 61. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, cạnh bên SA vuông góc đáy và có thể tích bằng $a^3\sqrt{3}$. Gọi α giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) . Mỗi kết quả dưới đây đúng hay sai?

a) $\alpha = 30^\circ$. b) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$. c) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. d) $\alpha = 60^\circ$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm BC . Ta có $AM \perp BC$.

Vì $AM \perp BC$ và $SA \perp BC$ nên $SM \perp BC$.

Mà $(SBC) \cap (ABC) = BC, AM \perp BC, SM \perp BC$ nên $((SBC), (ABC)) = \widehat{SMA}$.

Ta có $AM = a\sqrt{3}, SA = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{ABC}} = 3a$ nên $\tan \alpha = \frac{SA}{AM} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$.

Khi đó

a) $\alpha = 30^\circ$ sai.

b) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ đúng.

c) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sai.

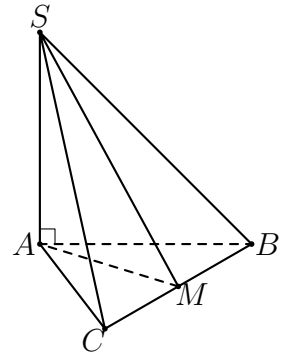
d) $\alpha = 60^\circ$ đúng.

Đáp án: a sai | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 62. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', BB' . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'M$ và CN .

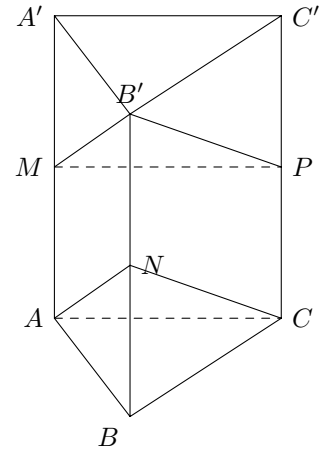
a) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. b) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. c) $\frac{a\sqrt{3}}{8}$. d) $a\sqrt{3}$.

Lời giải.



Gọi P là trung điểm của CC' . Khi đó

$$\begin{aligned} d(B'M, CN) &= d((B'MP), (ANC)) = \frac{V_{ACN.MPB'}}{S_{\Delta ANC}} \\ &= \frac{V_{ABC.A'B'C'} - V_{B'.A'MPC'} - V_{N.ABC}}{\frac{1}{2}AC \cdot \sqrt{AN^2 - \frac{AC^2}{4}}} \\ &= \frac{\frac{a^3\sqrt{3}}{4} - \frac{a^3\sqrt{3}}{12} - \frac{a^3\sqrt{3}}{24}}{\frac{1}{2}a \cdot \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$



Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d sai □

Câu 63. Một công ty sữa cần sản xuất các hộp đựng sữa dạng hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông, chứa được thể tích thực là 180ml. Chiều cao của hình hộp có thể là giá trị nào sau để nguyên liệu sản xuất vỏ hộp là ít nhất?

- a) $\sqrt[3]{180^2}$ cm. b) $\sqrt[3]{360}$ cm. c) $\sqrt[3]{180}$ cm. d) $\sqrt[3]{720}$ cm.

Lời giải.

Gọi chiều cao hình hộp là h , độ dài cạnh đáy là a .

Khi đó thể tích của khối hộp là $V = a^2 \cdot h = (a \cdot h) \cdot a = 180$.

Khi đó để nguyên liệu sản xuất vỏ hộp là ít nhất thì diện tích hình chữ nhật $a \cdot h$ phải lớn nhất.

Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng chu vi, hình vuông có diện tích lớn nhất nên $h = a$.

Vậy $V = a^2 \cdot h \Rightarrow 180 = h^3 \Rightarrow h = \sqrt[3]{180}$.

Đáp án: a sai | b sai | c đúng | d sai □

Câu 64. Một hồ bơi hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông cạnh bằng 50 m. Lượng nước trong hồ cao 1,5 m. Thể tích nước trong hồ có thể là

- a) 1875 m³. b) 2500 m³. c) 1250 m³. d) 3750 m³.

Lời giải.

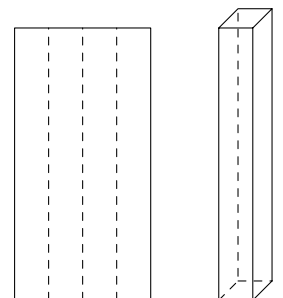
Thể tích nước $V = 1,5 \cdot 50^2 = 3750$ m³.

Đáp án: a sai | b sai | c sai | d đúng □

Câu 65.

Một tấm bìa hình chữ nhật có chiều dài 16 cm và chiều rộng 8 cm. Người ta gấp dọc theo chiều dài của nó thành 4 phần đều nhau để được 4 mặt xung quanh của một hình lăng trụ tứ giác đều (hình vẽ). Khi đó thể tích khối lăng trụ này bằng

- a) 64 cm³. b) 128 cm³. c) 32 cm³. d) 16 cm³.



Lời giải.

Khối lăng trụ tứ giác đều là lăng trụ đứng có đáy là hình vuông cạnh $\frac{8}{4} = 2$ cm, cạnh bên 16 cm.

Suy ra thể tích khối lăng trụ này là $V = 2^2 \cdot 16 = 64$ cm³.

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d sai□

Chương 9

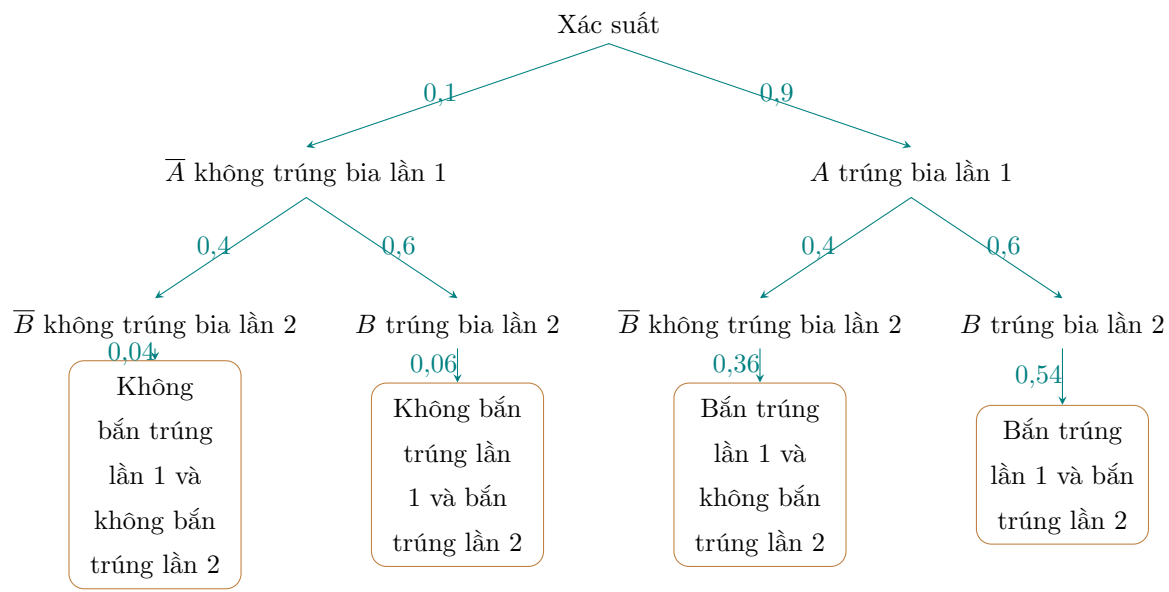
Xác suất

Câu 66. Một xạ thủ bắn lần lượt 2 viên đạn vào một bia. Xác suất trúng đích của viên thứ nhất và thứ hai lần lượt là 0,9 và 0,6. Biết rằng kết quả các lần bắn là độc lập với nhau. Khi đó, xác suất của biến cố

- a) “Cả 2 lần bắn đều trúng đích” là 0,04.
- b) “Cả 2 lần bắn đều không trúng đích” là 0,06.
- c) “Lần bắn thứ nhất trúng đích, lần bắn thứ hai không trúng đích” là 0,54.
- d) “Lần bắn thứ nhất không trúng đích, lần bắn thứ hai trúng đích” là 0,38.

Lời giải.

Gọi A là biến cố “Xạ thủ bắn viên đạn trúng bia lần thứ nhất”. Ta có $P(A) = 0,9$ và $P(\bar{A}) = 0,1$.
 Gọi B là biến cố “Xạ thủ bắn viên đạn trúng bia lần thứ hai”. Ta có $P(B) = 0,6$ và $P(\bar{B}) = 0,4$.
 Ta cũng có thể giải bài toán trên bằng cách sử dụng sơ đồ hình cây như sau:



Theo sơ đồ trên thì

- a) Xác suất cả 2 lần bắn đều trúng đích là 0,54.
- b) Xác suất cả 2 lần bắn đều không trúng đích là 0,04.

c) Xác suất lần bắn thứ nhất trúng đích, lần bắn thứ hai không trúng đích là 0,36.

d) Xác suất lần bắn thứ nhất không trúng đích, lần bắn thứ hai trúng đích là 0,06.

Đáp án: a sai | b sai | c sai | d sai □

Câu 67. Minh gieo 1 hạt đậu và 1 hạt ngô. Xác suất nảy mầm của hạt đậu và hạt ngô lần lượt là 0,7 và 0,6. Biết rằng sự nảy mầm của hai hạt này là độc lập. Sử dụng sơ đồ hình cây, xác suất của các biến cố

a) “Cả 2 hạt đều nảy mầm” là 0,42.

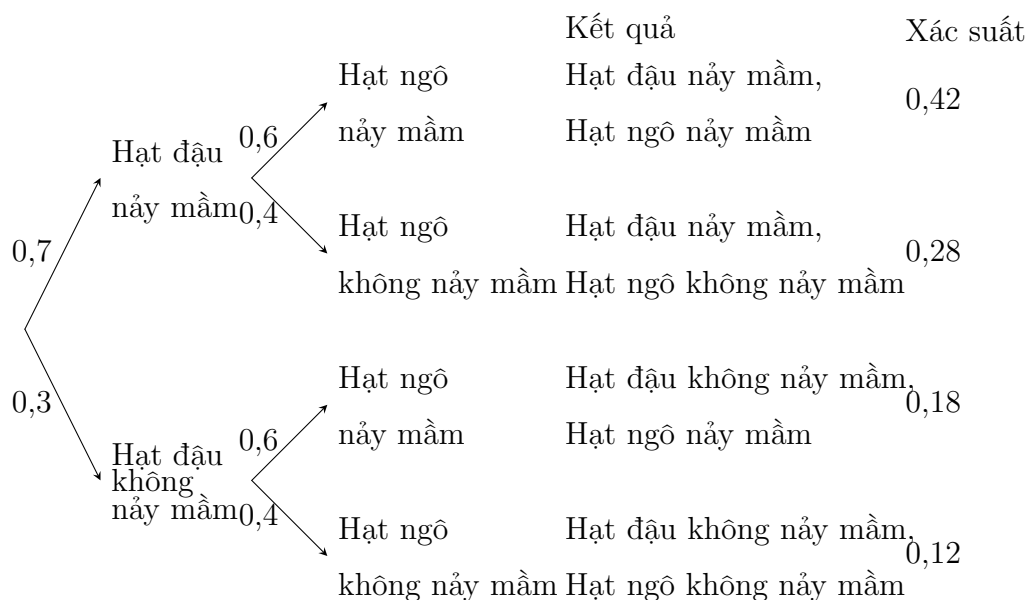
b) “Cả 2 hạt đều không nảy mầm” là 0,12.

c) “Hạt đậu nảy mầm, hạt ngô không nảy mầm” là 0,18.

d) “Hạt đậu không nảy mầm, hạt ngô nảy mầm” là 0,28.

Lời giải.

Ta có sơ đồ hình cây như sau:



a) Xác suất cả 2 hạt đều nảy mầm là 0,42.

b) Xác suất cả 2 hạt đều không nảy mầm là 0,12.

c) Xác suất hạt đậu nảy mầm, hạt ngô không nảy mầm là 0,28.

d) Xác suất hạt đậu không nảy mầm, hạt ngô nảy mầm là 0,18.

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d sai □

Câu 68. Cho A và B là hai biến cố độc lập. Biết $P(A) = 0,6$ và $P(B) = 0,8$. Khi đó

a) $P(AB) = 0,48$.

b) $P(\overline{A}B) = 0,32$.

c) $P(A\overline{B}) = 0,012$.

d) $P(\overline{A}\overline{B}) = 0,08$.

Lời giải.

a) Do A và B là hai biến cố độc lập nên

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0,48.$$

b) Vì $\bar{A}$ là biến cố đối của A nên $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0,4$. Do $\bar{A}$ và B độc lập nên

$$P(\bar{A}B) = P(\bar{A})P(B) = 0,32.$$

c) Vì $\bar{B}$ là biến cố đối của B nên $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0,2$. Do $\bar{B}$ và A độc lập nên

$$P(\bar{B}A) = P(\bar{B})P(A) = 0,12.$$

d) Vì $\bar{B}$ là biến cố đối của B nên $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0,2$. Do $\bar{A}$ và $\bar{B}$ độc lập nên

$$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = 0,08.$$

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d đúng $\square$

Câu 69. Hai bệnh nhân X và Y bị nhiễm Vì rút SARS-CoV-2. Biết rằng xác suất bị biến chứng nặng của bệnh nhân X là 0,1 và của bệnh nhân Y là 0,2. Khả năng bị biến chứng nặng của hai bệnh nhân là độc lập. Khi đó

- a) Xác suất của biến cố “Cả hai bệnh nhân đều bị biến chứng nặng” là 0,02.
- b) Xác suất của biến cố “Cả hai bệnh nhân đều không bị biến chứng nặng” là 0,7.
- c) Xác suất của biến cố “Bệnh nhân X bị biến chứng nặng, bệnh nhân Y không bị biến chứng nặng” là 0,08.
- d) Xác suất của biến cố “Bệnh nhân X không bị biến chứng nặng, bệnh nhân Y bị biến chứng nặng” là 0,08.

Lời giải.

Gọi A là biến cố “Bệnh nhân X bị biến chứng nặng”. Ta có $P(A) = 0,1$ và $P(\bar{A}) = 0,9$.

Gọi B là biến cố “Bệnh nhân Y bị biến chứng nặng”. Ta có $P(B) = 0,2$ và $P(\bar{B}) = 0,8$.

a) “Cả hai bệnh nhân đều bị biến chứng nặng”.

Ta thấy A và B là hai biến cố độc lập nên xác suất cả hai bệnh nhân đều bị biến chứng nặng là

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0,02.$$

b) “Cả hai bệnh nhân đều không bị biến chứng nặng”.

Do $\bar{A}$ và $\bar{B}$ độc lập nên xác suất cả hai bệnh nhân không bị biến chứng nặng là

$$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = 0,72.$$

c) “Bệnh nhân X bị biến chứng nặng, bệnh nhân Y không bị biến chứng nặng”.

Do A và $\bar{B}$ độc lập nên xác suất bệnh nhân X bị biến chứng nặng, bệnh nhân Y không bị biến chứng nặng là

$$P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B}) = 0,08.$$

d) “Bệnh nhân X không bị biến chứng nặng, bệnh nhân Y bị biến chứng nặng”.

Do $\bar{A}$ và B độc lập nên xác suất bệnh nhân X không bị biến chứng nặng, bệnh nhân Y bị biến chứng nặng là

$$P(B\bar{A}) = P(B)P(\bar{A}) = 0,18.$$

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d sai □

Câu 70. Gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất.

- A là biến cố “Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 5”.
- B là biến cố “Tích số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 6”.
- C là biến cố “Có ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 1 chấm”.

Khi đó

- | | |
|--|-------------------------------|
| a) $A = \{(1; 4); (4; 1); (2; 3); (3; 2)\}.$ | b) $AC = \{(1; 4); (4; 1)\}.$ |
| c) $AB = \{(2; 3)\}.$ | d) $BC = \{(1; 6); (6; 1)\}.$ |

Lời giải.

- Biến cố $A = \{(1; 4); (4; 1); (2; 3); (3; 2)\}.$
- Biến cố $B = \{(1; 6); (6; 1); (2; 3); (3; 2)\}.$
- Biến cố $C = \{(1; 6); (6; 1); (1; 5); (5; 1); (1; 4); (4; 1); (1; 3); (3; 1); (1; 2); (2; 1); (1; 1)\}.$

Khi đó,

- a) Biến cố $A = \{(1; 4); (4; 1); (2; 3); (3; 2)\}.$
- b) Biến cố $AC = \{(1; 4); (4; 1)\}.$
- c) Biến cố $AB = \{(2; 3); (3; 2)\}.$
- d) Biến cố $BC = \{(1; 6); (6; 1)\}.$

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d đúng □

Câu 71. Gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất

- A là biến cố “Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 5”.
- B là biến cố “Tích số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 6”.
- C là biến cố “Có ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 1 chấm”.
- D là biến cố “Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc thứ nhất là 3”.

Khi đó

- a) $D = \{(3; 1); (3; 2); (3; 3); (3; 4); (3; 5)\}.$

b) $AD = \{(3; 2)\}.$
- c) $BD = \{(3; 2)\}.$

d) $CD = \{(3; 1)\}.$

Lời giải.

- Biến cố $A = \{(1; 4); (4; 1); (2; 3); (3; 2)\}.$
- Biến cố $B = \{(1; 6); (6; 1); (2; 3); (3; 2)\}.$
- Biến cố $C = \{(1; 6); (6; 1); (1; 5); (5; 1); (1; 4); (4; 1); (1; 3); (3; 1); (1; 2); (2; 1); (1; 1)\}.$
- Biến cố $D = \{(3; 1); (3; 2); (3; 3); (3; 4); (3; 5); (3; 6)\}.$

Khi đó,

- a) Biến cố $D = \{(3; 1); (3; 2); (3; 3); (3; 4); (3; 5); (3; 6)\}.$
- b) Biến cố $AD = \{(3; 2)\}.$
- c) Biến cố $BD = \{(3; 2)\}.$
- d) Biến cố $CD = \{(3; 1)\}.$

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d đúng □

Câu 72. Chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương có hai chữ số. Xét biến cố A : “Số được viết ra là số chia hết cho 8” và biến cố B : “Số được viết ra là số chia hết cho 9”.

- a) Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = 89$.
 b) Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{11}{90}$.
 c) Xác suất của biến cố B là $P(B) = \frac{1}{9}$.
 d) Xác suất của biến cố hợp là $P(A \cup B) = \frac{1}{10}$.

Lời giải.

Trong 90 số có hai chữ số thì

- có 11 số chia hết cho 8,
- có 10 số chia hết cho 9,
- có 1 số chia hết cho cả 8 và 9.

a) Ta có $n(\Omega) = 90$.

b) Số các kết quả thuận lợi cho các biến cố A là $n(A) = 11$.

$$\text{Suy ra } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{11}{90}.$$

c) Số các kết quả thuận lợi cho các biến cố B là $n(B) = 9$.

$$\text{Suy ra } P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}.$$

d) Ta có $P(A) = \frac{11}{90}$, $P(B) = \frac{10}{90}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{90}$.

$$\text{Vậy } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{11}{90} + \frac{10}{90} - \frac{1}{90} = \frac{2}{9}.$$

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d sai □

Câu 73. Mai, Lan và 5 bạn cùng lớp xếp thành một hàng ngang theo thứ tự ngẫu nhiên. Gọi A là biến cố “Mai đứng ở đầu hàng”, B là biến cố “Lan đứng ở đầu hàng”. Khi đó

$$\text{a) } P(A) = \frac{1}{7}. \quad \text{b) } P(B) = \frac{2}{7}. \quad \text{c) } P(AB) = \frac{21}{21}. \quad \text{d) } P(A \cup B) = \frac{10}{21}.$$

Lời giải.

Số cách xếp 7 người thành một hàng ngang là $7!$.

a) Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{2 \cdot 6!}{7!} = \frac{2}{7}$.

b) Xác suất của biến cố B là $P(B) = \frac{2 \cdot 6!}{7!} = \frac{2}{7}$.

c) Xác suất của biến cố “Hai bạn Lan và Mai đứng ở hai đầu hàng” là

$$P(AB) = \frac{2 \cdot 5!}{7!} = \frac{1}{21}.$$

d) Xác suất của biến cố “Có ít nhất một trong hai bạn Mai và Lan đứng ở đầu hàng” là

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} - \frac{1}{21} = \frac{11}{21}.$$

Đáp án: a sai | b đúng | c đúng | d sai □

Câu 74. Một đội tình nguyện gồm 9 học sinh khối 10 và 7 học sinh khối 11. Chọn ra ngẫu nhiên 3 người trong đội. Xét

- A là biến cố “Cả 3 học sinh được chọn đều thuộc khối 10”
- B là biến cố “Cả 3 học sinh được chọn đều thuộc khối 11”.

a) Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = C_{16}^3$.

b) Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{C_9^3}{C_{16}^3}$.

c) Xác suất của biến cố B là $P(B) = \frac{C_7^3}{C_{16}^3}$.

d) Xác suất của biến cố “Cả 3 người được chọn học cùng một khối” là $\frac{17}{80}$.

Lời giải.

a) Ta có $n(\Omega) = C_{16}^3$.

b) Gọi A là biến cố “Cả 3 học sinh được chọn đều thuộc khối 10”.

$$\text{Khi đó, } P(A) = \frac{C_9^3}{C_{16}^3}.$$

c) B là biến cố “Cả 3 học sinh được chọn đều thuộc khối 11”.

$$\text{Khi đó, } P(B) = \frac{C_7^3}{C_{16}^3}.$$

d) $A \cup B$ là biến cố “Cả 3 người được chọn học cùng một khối”.

Do A và B là hai biến cố xung khắc nên $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

$$\text{Vậy, } P(A \cup B) = \frac{C_9^3 + C_7^3}{C_{16}^3} = \frac{17}{80}.$$

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng □

Câu 75. Một hộp có 12 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số $1, 2, 3, \dots, 12$; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên 1 chiếc thẻ trong hộp. Xét

- Biến cố A “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 3”.
- Biến cố B “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 5”.

a) Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = 12$.

b) Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{1}{3}$.

c) Xác suất của biến cố B là $P(B) = \frac{1}{6}$.

d) Xác suất của biến cố hợp là $P(A \cup B) = \frac{1}{18}$.

Lời giải.

- a) Không gian mẫu của phép thử trên có 12 phần tử, tức là $n(\Omega) = 12$.
- b) Số các kết quả thuận lợi cho các biến cố A là $n(A) = 4$.
Suy ra $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.
- c) Số các kết quả thuận lợi cho các biến cố B là $n(B) = 2$.
Suy ra $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.
- d) Trong các số $1, 2, 3, \dots, 12$, không có số nào chia hết cho cả 3 và 5.
Vì thế A, B là hai biến cố xung khắc.
Suy ra $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

Đáp án: a đúng | b đúng | c đúng | d sai □

Câu 76. Một hộp chứa 5 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi từ hộp. Gọi A là biến cố “Hai viên bi lấy ra đều có màu xanh”, B là biến cố “Hai viên bi lấy ra đều có màu đỏ”.

- a) Kết quả thuận lợi của biến cố A là 10.
b) Kết quả thuận lợi của biến cố A là 2.
c) $A \cup B$ là biến cố “Hai viên bi lấy ra có cùng màu”.
d) Kết quả thuận lợi cho biến cố $A \cup B$ là 13.

Lời giải.

- a) Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $C_5^2 = 10$.
b) Số kết quả thuận lợi cho biến cố B là $C_3^2 = 3$.
c) $A \cup B$ là biến cố “Hai viên bi lấy ra có cùng màu”.
d) Số kết quả thuận lợi cho biến cố $A \cup B$ là $C_5^2 + C_3^2 = 13$.

Đáp án: a đúng | b sai | c đúng | d đúng □

Câu 77. Cho hai biến cố A và B .

- a) Biến cố “ A hoặc B xảy ra”, kí hiệu là $A \cup B$ được gọi là **biến cố hợp** của A và B .
b) Biến cố $A \cup B$ xảy ra khi có ít nhất một trong hai biến cố A và B xảy ra.
c) Tập hợp mô tả biến cố $A \cap B$ là hợp của hai tập hợp mô tả biến cố A và biến cố B .
d) Biến cố A và biến cố B được gọi là xung khắc nếu A và B không đồng thời xảy ra.

Lời giải.

Cho hai biến cố A và B .

- a) Biến cố “ A hoặc B xảy ra”, kí hiệu là $A \cup B$ được gọi là **biến cố hợp** của A và B .
b) Biến cố $A \cup B$ xảy ra khi có ít nhất một trong hai biến cố A và B xảy ra.

- c) Tập hợp mô tả biến cố $A \cup B$ là hợp của hai tập hợp mô tả biến cố A và biến cố B .
- d) Biến cố A và biến cố B được gọi là xung khắc nếu A và B không đồng thời xảy ra.

Đáp án: a đúng | b đúng | c sai | d đúng $\square$

Câu 78. Cho hai biến cố A và B . Hãy cho biết tính đúng sai của các mệnh đề sau.

- a) Nếu $P(AB) \neq P(A)P(B)$ thì hai biến cố A và B không độc lập.
- b) Nếu hai biến cố A và B độc lập thì $P(AB) = P(A)P(B)$.
- c) Cho hai biến cố xung khắc A và B . Khi đó $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- d) Cho hai biến cố A và B . Khi đó $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Lời giải.

Cho hai biến cố A và B .

- a) Nếu $P(AB) \neq P(A)P(B)$ thì hai biến cố A và B không độc lập.
- b) Nếu hai biến cố A và B độc lập thì $P(AB) = P(A)P(B)$.
- c) Cho hai biến cố xung khắc A và B . Khi đó $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- d) Cho hai biến cố A và B . Khi đó $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Đáp án: a đúng | b đúng | c đúng | d đúng $\square$