

§1. LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Lũy thừa với số mũ nguyên

Định nghĩa 1.1. Cho n là một số nguyên dương. Ta định nghĩa

✓ Với a là số thực tùy ý

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ thừa số } a}$$

✓ Với a là số thực khác 0

$$a^0 = 1; a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Trong biểu thức a^n , a gọi là **cơ số**, n gọi là **số mũ**.

Lũy thừa với số mũ nguyên có tính chất tương tự như lũy thừa với số mũ nguyên dương.

Tính chất 1.1. Với $a \neq 0, b \neq 0$ và m, n là các số nguyên, ta có

✓ $a^m \cdot a^n = a^{m+n};$

✓ $(ab)^n = a^n b^n;$

✓ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n};$

✓ $(a^m)^n = a^{mn};$

✓ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$

⚠ ✓ Nếu $a > 1$ thì $a^m > a^n$ khi và chỉ khi $m > n$.

✓ Nếu $0 < a < 1$ thì $a^m > a^n$ khi và chỉ khi $m < n$.

Ví dụ 1

Tính giá trị của biểu thức $A = \left(\frac{1}{2}\right)^{-8} \cdot 8^{-2} + (0,2)^{-4} \cdot 25^{-2}$.

👉 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{2}\right)^{-8} \cdot 8^{-2} + (0,2)^{-4} \cdot 25^{-2} \\ &= 2^8 \cdot \frac{1}{8^2} + \frac{1}{0,2^4} \cdot \frac{1}{25^2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= 2^8 \cdot \frac{1}{2^6} + \frac{1}{0,2^4 \cdot 5^4} \\
 &= 2^2 + \frac{1}{(0,2 \cdot 5)^4} \\
 &= 4 + 1 = 5.
 \end{aligned}$$

□

Ví dụ 2

Một số dương x được gọi là viết dưới dạng *kí hiệu khoa học* nếu $x = a \cdot 10^m$, ở đó $1 \leq a < 10$ và m là số nguyên. Hãy viết các số liệu sau dưới dạng kí hiệu khoa học

- a) Khối lượng của Trái Đất khoảng 5 980 000 000 000 000 000 000 kg;
- b) Khối lượng của hạt proton khoảng 0,000 000 000 000 000 000 000 001 67262 kg.

👉 Lời giải.

- a) Khối lượng của Trái Đất khoảng $5\,980\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 5,980 \cdot 10^{24}$ kg;
- b) Khối lượng của hạt proton khoảng $0,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,001\,67262 = 1,67262 \cdot 10^{-27}$ kg.

□

2. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ

Định nghĩa 1.2. Cho số thực a và số nguyên dương n . Số b được gọi là **căn bậc n** của số a nếu $b^n = a$.

! Khi n là số lẻ, mỗi số thực a chỉ có một căn bậc n và kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$. Căn bậc 1 của số a chính là a . Khi n là số chẵn, mỗi số thực dương có đúng hai căn bậc n là hai số đối nhau, giá trị dương kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$ (gọi là căn số học bậc n của a), giá trị âm kí hiệu là $-\sqrt[n]{a}$.

Ví dụ 3

Tính

- a) $\sqrt[3]{-64}$;
- b) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$.

👉 Lời giải.

$$a) \sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{(-4)^3} = -4.$$

$$b) \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{2}.$$

□

Tính chất 1.2. Giả sử n, k là các số nguyên dương, m là số nguyên. Khi đó

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab};$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}};$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m};$$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{khi } n \text{ lẻ;} \\ |a| & \text{khi } n \text{ chẵn;} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

Giả thiết các biểu thức ở trên đều có nghĩa.

Ví dụ 4

Tính

a) $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{-8};$

b) $\sqrt[3]{-3\sqrt{3}}.$

Lời giải.

a) $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{-8} = \sqrt[5]{4 \cdot (-8)} = \sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2.$

b) $\sqrt[3]{-3\sqrt{3}} = \sqrt[3]{-(\sqrt{3})^3} = \sqrt[3]{(-\sqrt{3})^3} = -\sqrt{3}.$

Định nghĩa 1.3. Cho số thực a dương và số hữu tỉ $r = \frac{m}{n}$, trong đó m là một số nguyên và n là số nguyên dương. Lũy thừa của a với số mũ r , kí hiệu a^r , xác định bởi

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

! Lũy thừa với số mũ hữu tỉ (của một số thực dương) có đầy đủ các tính chất như lũy thừa với số mũ nguyên.

Ví dụ 5

Tính

a) $16^{\frac{3}{2}};$

b) $8^{\frac{-2}{3}}.$

Lời giải.

a) $16^{\frac{3}{2}} = \sqrt{16^3} = \sqrt{(4^2)^3} = \sqrt{(4^3)^2} = 4^3 = 64.$

b) $8^{\frac{-2}{3}} = \sqrt[3]{8^{-2}} = \sqrt[3]{(2^3)^{-2}} = \sqrt[3]{(2^{-2})^3} = 2^{-2} = \frac{1}{4}.$

3. Lũy thừa với số mũ thực

Khái niệm 1.1. Cho a là số thực dương và α là một số vô tỉ. Xét dãy số hữu tỉ (r_n) mà $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \alpha$. Khi đó, dãy số (a^{r_n}) có giới hạn xác định và không phụ thuộc vào dãy số hữu tỉ (r_n) đã chọn. Giới hạn đó gọi là **lũy thừa của a với số mũ α** , kí hiệu là a^α .

$$a^\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{r_n}.$$

! Lũy thừa với số mũ thực (của một số dương) có đầy đủ tính chất như lũy thừa với số mũ nguyên.

4. Tính lũy thừa với số mũ thực bằng máy tính cầm tay

Tính	Bấm phím	Màn hình hiện	Kết quả
$\sqrt{20,15}$	$\sqrt{\square}$ 2 0 $\square$ 1 5 $=$	4.488875137	$\sqrt{20,15} \approx 4,4889$
$\sqrt[5]{320}$	SHIFT $x^{\square}$ 5 $\square$ 3 2 0 $=$	3.169786385	$\sqrt[5]{320} \approx 3,1698$
$15^{3,2}$	1 5 $x^{\square}$ 3 $\square$ 2 $=$	5800.855256	$15^{3,2} \approx 5800,8553$

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Tính giá trị biểu thức chứa lũy thừa

Cho a, b là các số thực dương, x, y là các số thực tùy ý, ta có

- ✔ $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ và $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$.
- ✔ $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$; $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$ và $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$.
- ✔ Nếu $a > 1$ thì $a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$
- ✔ Nếu $0 < a < 1$ thì $a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$

Ví dụ 1

Tính

- a) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$; b) $4^{\frac{3}{2}}$; c) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$; d) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}$.

👉 Lời giải.

a) Ta có $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 5^2 = 25$.

b) Ta có $4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = \sqrt{(2^2)^3} = \sqrt{(2^3)^2} = 2^3 = 8$.

c) Ta có $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{2^3}\right)^{-\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3 \cdot \frac{2}{3}} = 2^2 = 4$.

d) Ta có $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} = 16^{0,75} = 16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^{4 \cdot \frac{3}{4}} = 2^3 = 8$.

□

Ví dụ 2

Tính giá trị của biểu thức $A = \left(\frac{1}{2}\right)^{-8} \cdot 8^{-2} + (0,2)^{-4} \cdot 25^{-2}$.



👉 Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\right)^{-8} \cdot 8^{-2} + (0,2)^{-4} \cdot 25^{-2} &= 2^8 \cdot \frac{1}{8^2} + \frac{1}{0,2^4} \cdot \frac{1}{25^2} \\ &= 2^8 \cdot \frac{1}{2^6} + \frac{1}{0,2^4 \cdot 5^4} \\ &= 2^2 + \frac{1}{(0,2 \cdot 5)^4} \\ &= 4 + 1 = 5.\end{aligned}$$

Vậy $A = 5$. □

Ví dụ 3

Tính

a) $\sqrt[3]{-64}$;

b) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$.

👉 Lời giải.

a) Ta có $\sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{(-4)^3} = -4$.

b) Ta có $\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{2}$. □

Ví dụ 4

Tính

a) $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{-8}$;

b) $\sqrt[3]{-3\sqrt{3}}$.

👉 Lời giải.

a) Ta có $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{-8} = \sqrt[5]{4 \cdot (-8)} = \sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$.

b) Ta có $\sqrt[3]{-3\sqrt{3}} = \sqrt[3]{-(\sqrt{3})^3} = \sqrt[3]{(-\sqrt{3})^3} = -\sqrt{3}$. □

Ví dụ 5

Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{15^{3+\sqrt{2}}}{3^{1+\sqrt{2}} \cdot 5^{2+\sqrt{2}}}$?

👉 Lời giải.

Ta có

$$\frac{15^{3+\sqrt{2}}}{3^{1+\sqrt{2}} \cdot 5^{2+\sqrt{2}}} = \frac{3^{3+\sqrt{2}} \cdot 5^{3+\sqrt{2}}}{3^{1+\sqrt{2}} \cdot 5^{2+\sqrt{2}}} = 3^2 \cdot 5^1 = 45.$$

Vậy $A = 45$. □

**Dạng 2** Biến đổi, rút gọn biểu thức chứa lũy thừa

Áp dụng các công thức, tính chất ở dạng 1.

Ví dụ 1

Rút gọn biểu thức $P = \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x^3}}$, với $x > 0$.

$$P = x^{\frac{13}{12}}.$$

Lời giải.

$$\text{Ta có } P = \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x^3}} = \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot x^3}} = \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x^5}} = \sqrt{x \cdot x^{\frac{5}{3}}} = \sqrt{x^{\frac{13}{3}}} = x^{\frac{13}{6}}.$$

Ví dụ 2

Rút gọn biểu thức $B = \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x}$ với $x > 0$.

$$B = x^{\frac{4}{3}}.$$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot x^2} = x^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{4}{3}} = x^{\frac{1}{2} + \frac{4}{3}} = x^{\frac{11}{6}}.$$

Ví dụ 3

Cho hàm số $f(x) = \frac{2025^x}{45 + 2025^x}$, $x \in \mathbb{R}$. Hãy tính $M = f(a) + f(b-2)$, biết rằng $a + b = 3$.

$$M = 1.$$

Lời giải.

Vì $a + b = 3$ nên $b = 3 - a$. Khi đó

$$\begin{aligned} f(a) + f(b-2) &= f(a) + f(1-a) = \frac{2025^a}{45 + 2025^a} + \frac{2025^{1-a}}{45 + 2025^{1-a}} \\ &= \frac{2025^a}{45 + 2025^a} + \frac{2025}{45 \cdot 2025^a + 2025} \\ &= \frac{2025^a (45 \cdot 2025^a + 2025) + 2025 (45 + 2025^a)}{(45 + 2025^a) (45 \cdot 2025^a + 2025)} \\ &= \frac{45 \cdot 2025^{2a} + 2 \cdot 2025^{a+1} + 45 \cdot 2025}{2025^{a+1} + 45 \cdot 2025 + 45 \cdot 2025^{2a} + 2025^{a+1}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Dạng 3 So sánh các lũy thừa.

- ☑ Nếu $a > 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$.
- ☑ Nếu $0 < a < 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$.
- ☑ $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,718281 \dots$
- ☑ Để so sánh $\sqrt[n]{a}$ và $\sqrt[n]{b}$. Ta sẽ đưa 2 căn đã cho về cùng bậc n (với n là bội số chung của s_1 và s_2). Khi đó, hai số so sánh mới lần lượt là $\sqrt[n]{A}$ và $\sqrt[n]{B}$. Từ đó so sánh A và B và suy ra kết quả của $\sqrt[n]{a}$ và $\sqrt[n]{b}$.

Ví dụ 1

So sánh cặp số: $4^{-\sqrt{3}}$ và $4^{-\sqrt{2}}$.

$$4^{-\sqrt{3}} < 4^{-\sqrt{2}}.$$

Lời giải.

Ta có $4 > 1$ và $-\sqrt{3} < -\sqrt{2} \Rightarrow 4^{-\sqrt{3}} < 4^{-\sqrt{2}}$. □

Ví dụ 2

So sánh cặp số: $\left(\frac{1}{2}\right)^{1,4}$ và $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1,4} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}.$$

Lời giải.

Ta có $\frac{1}{2} < 1$ và $1,4 < \sqrt{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{1,4} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$. □

Ví dụ 3

So sánh hai số $\sqrt{17}$ và $\sqrt[3]{28}$.

$$\sqrt{17} > \sqrt[3]{28}.$$

Lời giải.

Ta có $\sqrt{17} = \sqrt[6]{17^3} = \sqrt[6]{4913}$ và $\sqrt[3]{28} = \sqrt[6]{28^2} = \sqrt[6]{784} \Rightarrow \sqrt{17} > \sqrt[3]{28}$. □

Ví dụ 4

So sánh hai số m, n nếu: $3,2^m < 3,2^n$.

$$m < n.$$

Lời giải.

$3,2 > 1$ suy ra $3,2^m < 3,2^n \Leftrightarrow m < n$. □

Ví dụ 5

So sánh hai số a, b nếu: $\left(\frac{1}{9}\right)^a < \left(\frac{1}{9}\right)^b$.

$$a > b.$$

Lời giải.

$\frac{1}{9} < 1$ suy ra $\left(\frac{1}{9}\right)^a < \left(\frac{1}{9}\right)^b \Leftrightarrow a > b$. □

Ví dụ 6

Có thể kết luận gì về cơ số a nếu

$$\text{a) } (a-1)^{-\frac{2}{3}} < (a-1)^{-\frac{1}{3}}; \quad \text{b) } (2a+1)^{-3} > (2a+1)^{-1}; \quad \text{c) } \left(\frac{1}{a}\right)^{-0,2} < a^2.$$

$$\text{a) } a > 2; \text{ b) } \begin{cases} a < -1 \\ -\frac{1}{2} < a < 0 \end{cases}; \text{ c) } a < 0.$$

Lời giải.

a) Ta có $-\frac{2}{3} < -\frac{1}{3}$ và $(a-1)^{-\frac{2}{3}} < (a-1)^{-\frac{1}{3}}$ suy ra $a-1 > 1 \Leftrightarrow a > 2$.



$$\text{b) Ta có } (2a+1)^{-3} > (2a+1)^{-1} \Leftrightarrow \frac{1}{(2a+1)^3} > \frac{1}{2a+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+1 < -1 \\ 0 < 2a+1 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -1 \\ -\frac{1}{2} < a < 0. \end{cases}$$

$$\text{c) Ta có } -\frac{1}{3} > -\frac{1}{2} \text{ và } (1-a)^{-\frac{1}{3}} > (1-a)^{-\frac{1}{2}} \text{ suy ra } 1-a > 1 \Leftrightarrow a < 0$$

□

Dạng 4 Điều kiện cho lũy thừa, căn thức.

a) Xét hàm số $y = \sqrt[a]{u}$. Khi đó:

- ✔ Nếu a lẻ thì hàm số xác định khi $u \in \mathbb{R}$.
- ✔ Nếu a chẵn thì hàm số xác định khi $u \geq 0$, hay $u \in [0; +\infty)$.

b) Xét hàm số $y = u^a$. Khi đó:

- ✔ Nếu a là số nguyên dương thì hàm số xác định khi $u \in \mathbb{R}$.
- ✔ Nếu a là số nguyên âm hoặc bằng 0 thì hàm số xác định khi $u \neq 0$, hay $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- ✔ Nếu a là số không nguyên thì hàm số xác định khi $u > 0$, hay $u \in (0; +\infty)$.

Ví dụ 1

Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2 + 2x - 3}$.

☞ $D = \mathbb{R}$.

☞ Lời giải.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ví dụ 2

Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt[4]{x-4}$.

☞ $D = [4; +\infty)$.

☞ Lời giải.

Điều kiện xác định: $x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$. Tập xác định: $D = [4; +\infty)$.

Ví dụ 3

Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt[6]{4-x^2}$.

☞ $D = [-2; 2]$.

☞ Lời giải.

Điều kiện xác định: $4-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$. Tập xác định: $D = [-2; 2]$.

Ví dụ 4

Tìm tập xác định của hàm số $y = (x^4 - 6x - 2)^7$.

☞ $D = \mathbb{R}$.

☞ Lời giải.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ví dụ 5

Tìm tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 2x - 3)^{-4}$.

☞ $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x^2 - 2x - 3 \neq 0 \iff \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 3 \end{cases}$. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$. $\square$

Ví dụ 6

Tìm tập xác định của hàm số $y = (1 - 2x)^{\sqrt{3}-1}$.

$D = (-\infty; \frac{1}{2})$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $1 - 2x > 0 \iff x < \frac{1}{2}$. Tập xác định: $D = (-\infty; \frac{1}{2})$. $\square$

Ví dụ 7

Tìm tập xác định của hàm số $y = \left(\frac{3-x}{x-2}\right)^{\sqrt{2}}$.

$D = (2; 3)$.

Lời giải.

Cách 1.

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} \frac{3-x}{x-2} > 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{cases} 3-x > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 3-x < 0 \\ x-2 < 0 \end{cases} \\ x \neq 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{cases} x < 3 \\ x > 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 3 \\ x < 2 \end{cases} \text{ (vô lý)} \end{cases} \iff 2 < x < 3.$$

Tập xác định: $D = (2; 3)$.

Cách 2.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} \frac{3-x}{x-2} > 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases}$. Để tìm x thoả mãn $\frac{3-x}{x-2} > 0$, ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$x-2$	-	0	+	+
$3-x$	+	+	0	-
$\frac{x-2}{3-x}$	-	0	+	-

Vậy $x \in (2; 3)$. Vậy tập xác định của hàm số là $D = (2; 3)$. $\square$

C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

Tính

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$;

b) $4^{\frac{3}{2}}$;

c) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

d) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}$.

Lời giải.



$$a) \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 5^2 = 25.$$

$$b) 4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = \sqrt{(2^2)^3} = \sqrt{(2^3)^2} = 2^3 = 8.$$

$$c) \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{-2}{3}} = \left(\frac{1}{2^3}\right)^{\frac{-2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3 \cdot \frac{2}{3}} = 2^2 = 4.$$

$$d) \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} = 16^{0,75} = 16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^{4 \cdot \frac{3}{4}} = 2^3 = 8.$$

**Bài 2**

Thực hiện phép tính

$$a) 27^{\frac{2}{3}} + 81^{-0,75} - 25^{0,5};$$

$$b) 4^{2-3\sqrt{7}} \cdot 8^{2\sqrt{7}}.$$

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned} 27^{\frac{2}{3}} + 81^{-0,75} - 25^{0,5} &= (3^3)^{\frac{2}{3}} + (3^4)^{-0,75} - (5^2)^{0,5} \\ &= 3^{3 \cdot \frac{2}{3}} + 3^{4 \cdot (-0,75)} - 5^{2 \cdot (0,5)} \\ &= 3^2 + 3^{-3} - 5^1 \\ &= \frac{109}{27}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 4^{2-3\sqrt{7}} \cdot 8^{2\sqrt{7}} &= (2^2)^{2-3\sqrt{7}} \cdot (2^3)^{2\sqrt{7}} \\ &= 2^{2(2-3\sqrt{7})} \cdot 2^{6\sqrt{7}} \\ &= 2^{4-6\sqrt{7}+6\sqrt{7}} \\ &= 16. \end{aligned}$$

**Bài 3**

Rút gọn các biểu thức sau

$$a) A = \frac{x^5 y^{-2}}{x^3 y} (x, y \neq 0);$$

$$b) B = \frac{x^2 y^{-3}}{(x^{-1} y^4)^{-3}} (x, y \neq 0).$$

Lời giải.

$$a) A = \frac{x^5 y^{-2}}{x^3 y} = x^2 y^{-3}.$$

$$b) B = \frac{x^2 y^{-3}}{(x^{-1} y^4)^{-3}} = \frac{x^2 y^{-3}}{x^3 y^{-12}} = x^{-1} y^9.$$



Bài 4

Cho x, y là các số thực dương. Rút gọn các biểu thức sau

$$\text{a) } A = \frac{x^{\frac{1}{3}}\sqrt{y} + y^{\frac{1}{3}}\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{y}};$$

$$\text{b) } B = \left(\frac{x^{\sqrt{3}}}{y^{\sqrt{3}-1}} \right)^{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{x^{-\sqrt{3}-1}}{y^{-2}}.$$

 **Lời giải.**

a)

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^{\frac{1}{3}}\sqrt{y} + y^{\frac{1}{3}}\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{y}} \\ &= \frac{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{6}} + y^{\frac{1}{6}}} \\ &= \frac{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{1}{6}} + y^{\frac{1}{6}}\right)}{x^{\frac{1}{6}} + y^{\frac{1}{6}}} \\ &= x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{x^{\sqrt{3}}}{y^{\sqrt{3}-1}} \right)^{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{x^{-\sqrt{3}-1}}{y^{-2}} \\ &= \frac{x^{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}}{y^{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}} \cdot \frac{x^{-\sqrt{3}-1}}{y^{-2}} \\ &= \frac{x^{3+\sqrt{3}}}{y^2} \cdot \frac{x^{-\sqrt{3}-1}}{y^{-2}} \\ &= \frac{x^{3+\sqrt{3}-\sqrt{3}-1}}{y^{2-2}} \\ &= x^2. \end{aligned}$$

□

Bài 5

Chứng minh rằng $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = 2$.

 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} &= \sqrt{3+2\sqrt{3}+1} - \sqrt{3-2\sqrt{3}+1} \\ &= \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} \\ &= \sqrt{3}+1 - (\sqrt{3}-1) \\ &= 2. \end{aligned}$$

□

**Bài 6**

Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy so sánh

a) $5^{6\sqrt{3}}$ và $5^{3\sqrt{6}}$;

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-4}{3}}$ và $\sqrt{2} \cdot 2^{\frac{2}{3}}$.

📌 **Lời giải.**

a) Ta có $6\sqrt{3} = \sqrt{6^2 \cdot 3} = \sqrt{108}$ và $3\sqrt{6} = \sqrt{3^2 \cdot 6} = \sqrt{54}$.
Do $3\sqrt{6} = \sqrt{54} < \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$ và cơ số $5 > 1$ nên $5^{3\sqrt{6}} < 5^{6\sqrt{3}}$.

b) Ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-4}{3}} = 2^{\frac{4}{3}}$ và $\sqrt{2} \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}} = 2^{\frac{7}{6}}$.

Do $\frac{7}{6} < \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ và cơ số $2 > 1$ nên $2^{\frac{7}{6}} < 2^{\frac{4}{3}}$ hay $\sqrt{2} \cdot 2^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-4}{3}}$.

□

Bài 7

Nếu một khoản tiền gốc P được gửi ngân hàng với lãi suất hằng năm r (r được biểu thị dưới dạng số thập phân), được tính lãi n lần trong một năm, thì tổng số tiền A nhận được (cả vốn lẫn lãi) sau N kì gửi cho bởi công thức sau:

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^N.$$

Hỏi nếu bác An gửi tiết kiệm số tiền 120 triệu đồng theo kì hạn 6 tháng với lãi suất không đổi là 5% một năm, thì số tiền thu được (cả vốn lẫn lãi) của bác An sau 2 năm là bao nhiêu?

📌 **Lời giải.**

Ta có 2 năm là 24 tháng ứng với $N = 4$ kì hạn.

Do kì hạn là 6 tháng nên mỗi năm được tính lãi $n = 2$ lần.

Vậy số tiền cả vốn lẫn lãi bác An nhận được sau 2 năm là $A = 120 \left(1 + \frac{0,05}{2}\right)^4 \approx 132,457$ triệu đồng.

□

Bài 8

Năm 2021, dân số của một quốc gia ở châu Á là 19 triệu người. Người ta ước tính rằng dân số của quốc gia này sẽ tăng gấp đôi sau 30 năm nữa. Khi đó dân số A (triệu người) của quốc gia đó sau t năm kể từ năm 2021 được ước tính bằng công thức $A = 19 \cdot 2^{\frac{t}{30}}$. Hỏi với tốc độ tăng dân số như vậy thì sau 20 năm nữa dân số của quốc gia này sẽ là bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến chữ số hàng triệu).

📌 **Lời giải.**

Dân số của quốc gia này sau 20 năm là $A = 19 \cdot 2^{\frac{20}{30}} \approx 30$ triệu người.

□





Bài 9

Tính

a) $\left(\frac{1}{256}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}}$; b) $\left(\frac{1}{49}\right)^{-1,5} - \left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}$; c) $(4^{3+\sqrt{3}} - 4^{\sqrt{3}-1}) \cdot 2^{-2\sqrt{3}}$.

Lời giải.

a) Ta có $\left(\frac{1}{256}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}} = (4^4)^{\frac{3}{4}} + (3^3)^{\frac{4}{3}} = 4^3 + 3^4 = 145$;

b) $\left(\frac{1}{49}\right)^{-1,5} - \left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{2}{3}} = (7^2)^{\frac{3}{2}} - (5^3)^{\frac{2}{3}} = 7^3 - 5^2 = 318$;

c) $(4^{3+\sqrt{3}} - 4^{\sqrt{3}-1}) \cdot 2^{-2\sqrt{3}} = (2^{6+2\sqrt{3}} - 2^{2\sqrt{3}-2}) \cdot 2^{-2\sqrt{3}} = 2^6 - 2^{-2} = \frac{255}{4}$.



Bài 10

Cho a, b là những số thực dương. Viết các biểu thức sau dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ

a) $a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a}$; b) $b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{b}$; c) $a^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{a}$; d) $\sqrt[3]{b} : b^{\frac{1}{6}}$.

Lời giải.

a) $a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{6}}$;

b) $b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{b} = b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{6}} = b^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = b$;

c) $a^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{a} = a^{\frac{4}{3}} : a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{4}{3} - \frac{1}{3}} = a$;

d) $\sqrt[3]{b} : b^{\frac{1}{6}} = b^{\frac{1}{3}} : b^{\frac{1}{6}} = b^{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}} = b^{\frac{1}{6}}$.



Bài 11

Rút gọn mỗi biểu thức sau

a) $\frac{a^{\frac{7}{3}} - a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{1}{3}}} - \frac{a^{\frac{5}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}} \quad (a > 0, a \neq 1)$; b) $\frac{(\sqrt[4]{a^3 b^2})^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12} b^6}}} \quad (a > 0, b > 0)$.

Lời giải.

a) Với $a > 0, a \neq 1$, ta có

$$\begin{aligned} & \frac{a^{\frac{7}{3}} - a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{1}{3}}} - \frac{a^{\frac{5}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}} \\ &= \frac{a^{\frac{1}{3}}(a^2 - 1)}{a^{\frac{1}{3}}(a - 1)} - \frac{a^{-\frac{1}{3}}(a^2 - 1)}{a^{-\frac{1}{3}}(a + 1)} \\ &= a + 1 - (a - 1) = 2. \end{aligned}$$

b) Với $a > 0, b > 0$, ta có

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}} \\ &= \frac{a^3b^2}{\sqrt[6]{a^{12}b^6}} \\ &= \frac{a^3b^2}{\sqrt[6]{(a^2b)^6}} \\ &= \frac{a^3b^2}{a^2b} = ab. \end{aligned}$$

□

Bài 12

Viết các số sau theo thứ tự tăng dần

a) $1^{1,5}; 3^{-1}; \left(\frac{1}{2}\right)^{-2};$

b) $2022^0; \left(\frac{4}{5}\right)^{-1}; 5^{\frac{1}{2}}.$

📌 **Lời giải.**

a) Ta có $1^{1,5} = 1; 3^{-1} = \frac{1}{3}; \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4.$

Sắp xếp theo thứ tự tăng dần sẽ là $3^{-1}; 1^{1,5}; \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}.$

b) $2022^0 = 1; \left(\frac{4}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{4}; 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}.$

Sắp xếp theo thứ tự tăng dần sẽ là $2022^0; \left(\frac{4}{5}\right)^{-1}; 5^{\frac{1}{2}}.$

□

Bài 13

Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy so sánh các số sau

a) $\sqrt{42}$ và $\sqrt[3]{51};$

b) $16^{\sqrt{3}}$ và $4^{3\sqrt{2}};$

c) $(0,2)^{\sqrt{16}}$ và $(0,2)^{\sqrt[3]{60}}.$

📌 **Lời giải.**

a) Ta có $\sqrt{42} = 42^{\frac{1}{2}}$ suy ra $42^3 = \left(42^{\frac{1}{2}}\right)^6$ và $\sqrt[3]{51} = 51^{\frac{1}{3}}$ suy ra $51^2 = \left(51^{\frac{1}{3}}\right)^6.$
Mà $42^3 > 51^2$ suy ra $\sqrt{42} > \sqrt[3]{51}.$

b) Ta có $16^{\sqrt{3}} = 4^{2\sqrt{3}}$ và $4^{3\sqrt{2}}.$
Do $(2\sqrt{3})^2 = 12$ và $(3\sqrt{2})^2 = 32$, nên $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}.$
Mặt khác cơ số $4 > 1$ nên $16^{\sqrt{3}} < 4^{3\sqrt{2}};$

c) Ta có $(\sqrt{16})^6 = 16^3, (\sqrt[3]{60})^6 = 60^2.$
Suy ra $\sqrt{16} > \sqrt[3]{60}$ mà cơ số $0,2 < 1$ nên $(0,2)^{\sqrt{16}} < (0,2)^{\sqrt[3]{60}}.$

□



Bài 14

Định luật thứ ba của Kepler về quỹ đạo chuyển động cho biết cách ước tính khoảng thời gian P (tính theo năm Trái Đất) mà một hành tinh cần để hoàn thành một quỹ đạo quay quanh Mặt Trời. Khoảng thời gian đó được xác định bởi một hàm số $P = d^{\frac{3}{2}}$, trong đó d là khoảng cách từ hành tinh đó đến Mặt Trời tính theo đơn vị thiên văn AU (1 AU là khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời, tức là 1 AU khoảng 93 000 000 dặm) (Nguồn: R.I.Charles et al., *Algebra 2*, Pearson). Hỏi Sao Hỏa quay quanh Mặt Trời thì mất bao nhiêu năm Trái Đất (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)? Biết khoảng cách từ Sao Hỏa đến Mặt Trời là 1,52 AU.

Lời giải.

Sao Hỏa quay quanh Mặt Trời thì mất thời gian $P = 1,52^{\frac{3}{2}} \approx 1,87$ AU. □

Bài 15

Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot 3^2 \cdot 12^0$.

b) $\left(\frac{1}{12}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$.

c) $(2^{-2} \cdot 5^2)^{-2} : (5 \cdot 5^{-5})$.

Lời giải.

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot 3^2 \cdot 12^0 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot 9 \cdot 1 = \frac{16}{9} \cdot 9 = 16$.

b) $\left(\frac{1}{12}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = 12 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 12 \cdot \frac{9}{4} = 27$.

c) $(2^{-2} \cdot 5^2)^{-2} : (5 \cdot 5^{-5}) = 2^4 \cdot 5^{-4} : 5^{-4} = 2^4 \cdot 1 = 16$. □

Bài 16

Viết các biểu thức sau dưới dạng một lũy thừa ($a > 0$)

a) $3 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[8]{3}$.

b) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$.

c) $\frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a}}{(\sqrt[5]{a})^3 \cdot a^{\frac{2}{5}}}$.

Lời giải.

a) $3 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[8]{3} = 3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{8}} = 3^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} = 3^{\frac{15}{8}}$.

b) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = \sqrt{a\sqrt{a \cdot a^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{a\sqrt{a^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt{a \cdot a^{\frac{3}{4}}} = \sqrt{a^{\frac{7}{4}}} = a^{\frac{7}{8}}$.

c) $\frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a}}{(\sqrt[5]{a})^3 \cdot a^{\frac{2}{5}}} = \frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{2}{5}}} = \frac{a^{\frac{13}{12}}}{a^1} = a^{\frac{1}{12}}$. □

**Bài 17**

Rút gọn các biểu thức sau ($a > 0, b > 0$):

a) $a^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{2}} a^{\frac{7}{6}}$.

b) $a^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{4}} : a^{\frac{1}{6}}$.

c) $\left(\frac{3}{2} a^{-\frac{3}{2}} b^{-\frac{1}{2}}\right) \left(-\frac{1}{3} a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2}}\right)$.

👉 **Lời giải.**

a) $a^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{2}} a^{\frac{7}{6}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{7}{6}} = a^2$.

b) $a^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{4}} : a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6}} = a^{\frac{3}{4}}$.

c) $\left(\frac{3}{2} a^{-\frac{3}{2}} b^{-\frac{1}{2}}\right) \left(-\frac{1}{3} a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) a^{-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = -\frac{1}{2} a^{-1} b$.

□

Bài 18

Với một chỉ vàng, giả sử người thợ lành nghề có thể dát mỏng thành lá vàng rộng 1 m^2 và dày khoảng $1,94 \cdot 10^{-7} \text{ m}$. Đồng xu 5 000 đồng dày $2,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. Cần chồng bao nhiêu lá vàng như trên để có độ dày bằng đồng xu loại 5 000 đồng? Làm tròn kết quả đến chữ số hàng trăm.

👉 **Lời giải.**

Số lá vàng cần chồng là

$$\frac{2,2 \cdot 10^{-3}}{1,94 \cdot 10^{-7}} \approx 11\,300.$$

□

Bài 19

Tại một xí nghiệp, công thức $P(t) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$ được dùng để tính giá trị còn lại (tính theo triệu đồng) của một chiếc máy sau thời gian t (tính theo năm) kể từ khi đưa vào sử dụng.

a) Tính giá trị còn lại của máy sau 2 năm; sau 2 năm 3 tháng.

b) Sau 1 năm đưa vào sử dụng, giá trị còn lại của máy bằng bao nhiêu phần trăm so với ban đầu?

👉 **Lời giải.**

a) Giá trị còn lại của máy sau $t = 2$ năm là $P = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \approx 315$.

Giá trị còn lại của máy sau 2 năm 3 tháng ($t = \frac{9}{4}$ năm) là $P = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{9}{4}} = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}} \approx 297$.

b) Ban đầu giá trị của máy là $P_0 = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 500$.



Giá trị còn lại của máy sau 1 năm sử dụng: $P = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 396,85$.

Suy ra $\frac{P}{P_0} = 79,37\%$.

□

Bài 20

Biết rằng $10^\alpha = 2$; $10^\beta = 5$. Tính $10^{\alpha+\beta}$; $10^{\alpha-\beta}$; $10^{2\alpha}$; $10^{-2\alpha}$; 1000^β ; $0,01^{2\alpha}$.

 **Lời giải.**

a) $10^{\alpha+\beta} = 10^\alpha \cdot 10^\beta = 2 \cdot 5 = 10$.

b) $10^{\alpha-\beta} = 10^\alpha : 10^\beta = \frac{2}{5}$.

c) $10^{2\alpha} = (10^\alpha)^2 = 2^2 = 4$.

d) $10^{-2\alpha} = \frac{1}{10^{2\alpha}} = \frac{1}{4}$.

e) $1000^\beta = (10^3)^\beta = (10^\beta)^3 = 5^3 = 125$.

f) $0,01^{2\alpha} = (10^{-2})^{2\alpha} = (10^\alpha)^{-4} = 2^{-4} = \frac{1}{16}$.

□

Bài 21

Biết rằng $4^\alpha = \frac{1}{5}$. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $16^a + 16^{-a}$.

b) $(2^\alpha + 2^{-\alpha})^2$.

 **Lời giải.**

a) $16^\alpha + 16^{-\alpha} = (4^\alpha)^2 + \frac{1}{(4^\alpha)^2} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{1}{25} + 25 = \frac{626}{25}$.

b) $(2^\alpha + 2^{-\alpha})^2 = 4^\alpha + 2 + 4^{-\alpha} = \frac{1}{5} + 2 + \frac{1}{\frac{1}{5}} = \frac{36}{5}$.

□

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM LẦN 1

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN – ĐỀ SỐ 1

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	(A) (B) (C) (D)	8	(A) (B) (C) (D)	15	(A) (B) (C) (D)	22	(A) (B) (C) (D)	29	(A) (B) (C) (D)
2	(A) (B) (C) (D)	9	(A) (B) (C) (D)	16	(A) (B) (C) (D)	23	(A) (B) (C) (D)	30	(A) (B) (C) (D)
3	(A) (B) (C) (D)	10	(A) (B) (C) (D)	17	(A) (B) (C) (D)	24	(A) (B) (C) (D)	31	(A) (B) (C) (D)
4	(A) (B) (C) (D)	11	(A) (B) (C) (D)	18	(A) (B) (C) (D)	25	(A) (B) (C) (D)	32	(A) (B) (C) (D)
5	(A) (B) (C) (D)	12	(A) (B) (C) (D)	19	(A) (B) (C) (D)	26	(A) (B) (C) (D)	33	(A) (B) (C) (D)
6	(A) (B) (C) (D)	13	(A) (B) (C) (D)	20	(A) (B) (C) (D)	27	(A) (B) (C) (D)	34	(A) (B) (C) (D)
7	(A) (B) (C) (D)	14	(A) (B) (C) (D)	21	(A) (B) (C) (D)	28	(A) (B) (C) (D)	35	(A) (B) (C) (D)

Câu 1

Cho $4^x + 4^{-x} = 14$, khi đó biểu thức $M = \frac{2 + 2^x + 2^{-x}}{7 - 2^x - 2^{-x}}$ có giá trị bằng

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) 3. (C) $\frac{3}{2}$. (D) 2.

👉 Lời giải.

Ta có $4^x + 4^{-x} = 14 \Leftrightarrow (2^x + 2^{-x})^2 - 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} = 14 \Leftrightarrow (2^x + 2^{-x})^2 = 16 \Rightarrow 2^x + 2^{-x} = 4$.

Vậy $M = \frac{2 + 2^x + 2^{-x}}{7 - 2^x - 2^{-x}} = \frac{2 + 4}{7 - 4} = 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2

Cho các số thực a, b, n, m ($a, b > 0$). Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $(a^m)^n = a^{m+n}$. (B) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
(C) $\frac{a^m}{a^n} = \sqrt[n]{a^m}$. (D) $(a + b)^m = a^m + b^m$.

👉 Lời giải.

Áp dụng lý thuyết sách giáo khoa.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3

Giá trị của biểu thức $A = 64^{\frac{1}{2}} \cdot 64^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{64}$ là

- (A) $A = \sqrt[36]{64}$. (B) $A = 2$. (C) $A = 64$. (D) $A = \sqrt{2}$.

👉 Lời giải.

Ta có $A = 64^{\frac{1}{2}} \cdot 64^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{64} = 8 \cdot 4 \cdot 2 = 64$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4

Đồ thị của hai hàm số $y = a^x$ và $y = \log_a x$ đối xứng nhau qua đường thẳng nào dưới đây?

- (A) $x = 0$. (B) $y = x$. (C) $y = -x$. (D) $y = 1$.

 **Lời giải.**

Dựa vào tính chất của đồ thị, ta có đồ thị hàm số $y = a^x$ và $y = \log_a x$ đối xứng nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất hay $y = x$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5

Tìm dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ của biểu thức $\sqrt[3]{a^5 \sqrt[4]{a}}$ (với $a > 0$).

- (A) $a^{\frac{7}{4}}$. (B) $a^{\frac{1}{4}}$. (C) $a^{\frac{4}{7}}$. (D) $a^{\frac{1}{7}}$.

 **Lời giải.**

$$\sqrt[3]{a^5 \sqrt[4]{a}} = a^{\frac{5}{3}} \cdot a^{\frac{1}{12}} = a^{\frac{7}{4}}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 6

Cho $(\sqrt{5} - 2)^a > (\sqrt{5} - 2)^b$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- (A) $a > b$. (B) $a < b$. (C) $a \leq b$. (D) $a \geq b$.

 **Lời giải.**

Ta có $\sqrt{5} - 2 < 1$, do đó nếu $(\sqrt{5} - 2)^a > (\sqrt{5} - 2)^b$ thì ta suy ra $a < b$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7

Cho $4^x + 4^{-x} = 14$. Khi đó giá trị của $\frac{1 + 2^x + 2^{-x}}{5 - 2^x + 2^{-x}}$ bằng

- (A) 4. (B) 6. (C) 5. (D) 9.

 **Lời giải.**

Ta có $4^x + 4^{-x} = 14 \implies 2^{2x} + 2.2^x.2^{-x} + 2^{-2x} = 16 \implies (2^x + 2^{-x})^2 = 16 \implies 2^x + 2^{-x} = 4$. Vậy giá trị của $\frac{1 + 2^x + 2^{-x}}{5 - 2^x + 2^{-x}} = \frac{1 + 4}{5 - 4} = 5$

Chọn đáp án (C) □

Câu 8

Rút gọn biểu thức $a^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1}$ ($a > 0$) ta được

- (A) a . (B) a^2 . (C) $a^{\sqrt{2}}$. (D) $a^{-\sqrt{2}}$.

 **Lời giải.**

Với $a > 0$. Ta có $a^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1} = a^{\sqrt{2}}(a)^{-\sqrt{2}+1} = a^{\sqrt{2}-\sqrt{2}+1} = a$.

Chọn đáp án (A) ☐**Câu 9**Cho $\pi^\alpha > \pi^\beta$ với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- (A) $\alpha > \beta$. (B) $\alpha < \beta$. (C) $\alpha = \beta$. (D) $\alpha \leq \beta$.

Lời giải.Do $\pi > 1$ nên từ $\pi^\alpha > \pi^\beta$ suy ra $\alpha > \beta$ theo tính chất của lũy thừa với số mũ thực.Chọn đáp án (A) ☐**Câu 10**Rút gọn biểu thức $P = \frac{(a^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1}}{a^{4-\sqrt{5}} \cdot a^{\sqrt{5}-2}}$ (với $a > 0$ và $a \neq 1$) ta được

- (A) $P = 2$. (B) $P = a^2$. (C) $P = 1$. (D) $P = a$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } P = \frac{(a^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1}}{a^{4-\sqrt{5}} \cdot a^{\sqrt{5}-2}} = \frac{a^{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}}{a^{4-\sqrt{5}+\sqrt{5}-2}} = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

Trắc nghiệm:

$$\text{Nhập vào máy tính: } \frac{(A^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1}}{A^{4-\sqrt{5}} \times A^{\sqrt{5}-2}}.$$

Sau đó bấm CALC thay một giá trị bất kì thỏa mãn $a > 0$ và $a \neq 1$ và các đáp án phải khác nhau. Ta chọn $A = 3$. Khi đó ta có kết quả.Chọn đáp án (C) ☐**Câu 11**Cho $(\sqrt{5}-1)^m \leq (\sqrt{5}-1)^n$. Khi đó

- (A) $n \geq m$. (B) $n \leq m$. (C) $m = n$. (D) $m > n$.

Lời giải.

$$\text{Do } \sqrt{5}-1 > 1 \text{ nên } (\sqrt{5}-1)^m \leq (\sqrt{5}-1)^n \Leftrightarrow n \geq m.$$

Chọn đáp án (A) ☐**Câu 12**Rút gọn biểu thức $P = (2-\sqrt{3})^{2017} \cdot (2+\sqrt{3})^{2018}$.

- (A) $P = 2 - \sqrt{3}$. (B) $P = 1$. (C) $P = -2 - \sqrt{3}$. (D) $P = 2 + \sqrt{3}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } (2-\sqrt{3}) \cdot (2+\sqrt{3}) = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 1.$$

Do đó:

$$P = (2-\sqrt{3})^{2017} \cdot (2+\sqrt{3})^{2018} = (2+\sqrt{3})^{-2017} \cdot (2+\sqrt{3})^{2018} = (2+\sqrt{3})^{-2017+2018} = 2+\sqrt{3}.$$

Chọn đáp án (D) ☐

Câu 13

Tính giá trị biểu thức $A = \left(\frac{1}{625}\right)^{-\frac{1}{4}} + 16^{\frac{3}{4}} - 2^{-2} \cdot 64^{\frac{1}{3}}$.

- (A) 14. (B) 12. (C) 11. (D) 10.

 **Lời giải.**

$$A = \left(\frac{1}{625}\right)^{-\frac{1}{4}} + 16^{\frac{3}{4}} - 2^{-2} \cdot 64^{\frac{1}{3}} = (5^{-4})^{-\frac{1}{4}} + (2^4)^{\frac{3}{4}} - 2^{-2} \cdot (2^6)^{\frac{1}{3}} = 5 + 2^3 - 1 = 12.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 14

Giá trị của biểu thức $P = 3^{1-\sqrt{2}} \cdot 3^{2+\sqrt{2}} \cdot 9^{\frac{1}{2}}$ bằng

- (A) 3. (B) 81. (C) 1. (D) 9.

 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } P = 3^{1-\sqrt{2}} \cdot 3^{2+\sqrt{2}} \cdot 9^{\frac{1}{2}} = 3^{1-\sqrt{2}+2+\sqrt{2}+1} = 3^4 = 81.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 15

Tập xác định của hàm số $y = (x-2)^{-3}$ là

- (A) $(2; +\infty)$. (B) $\mathbb{R}$. (C) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. (D) $(-\infty; 2)$.

 **Lời giải.**

Hàm số $y = (x-2)^{-3}$ xác định khi $x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 16

Cho biểu thức $\sqrt[5]{8\sqrt{2\sqrt[3]{2}}} = 2^{\frac{m}{n}}$, trong đó $\frac{m}{n}$ có dạng phân số tối giản. Gọi $P = m^2 + n^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $P \in (350; 360)$. (B) $P \in (360; 370)$. (C) $P \in (330; 340)$. (D) $P \in (340; 350)$.

 **Lời giải.**

$$\text{Ta có: } \sqrt[5]{8\sqrt{2\sqrt[3]{2}}} = \sqrt[5]{2^3 \sqrt{2\sqrt[3]{2}}} = 2^{\frac{3}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}} = 2^{\frac{11}{15}}.$$

$$\text{Suy ra: } m = 11, n = 15 \Rightarrow P = 11^2 + 15^2 = 346.$$

Vậy $P \in (340; 350)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17

Cho a, b là các số thực dương khác 1 và x, y là các số thực. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- (A) $a^x a^y = a^{x+y}$. (B) $\frac{a^x}{a^y} = a^{\frac{x}{y}}$. (C) $a^x b^y = (ab)^{x+y}$. (D) $(a^x)^y = a^{x+y}$.



Lời giải.

$$a^x a^y = a^{x+y}.$$

Chọn đáp án (A)



Câu 18

Cho $\pi^\alpha > \pi^\beta$ với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- (A) $\alpha > \beta$. (B) $\alpha < \beta$. (C) $\alpha = \beta$. (D) $\alpha \leq \beta$.

Lời giải.

Do $\pi > 1$ nên từ $\pi^\alpha > \pi^\beta$ suy ra $\alpha > \beta$ theo tính chất của lũy thừa với số mũ thực.

Chọn đáp án (A)



Câu 19

Cho a là một số thực khác 0, biểu thức $[(a^3 \cdot a^8) : (a^5 \cdot a^4)]^2$ bằng

- (A) a^2 . (B) a^8 . (C) a^6 . (D) a^4 .

Lời giải.

$$\text{Ta có } [(a^3 \cdot a^8) : (a^5 \cdot a^4)]^2 = (a^{11} : a^9)^2 = a^4.$$

Chọn đáp án (D)



Câu 20

Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}$ với $x > 0$.

- (A) $P = x^{\frac{1}{8}}$. (B) $P = x^2$. (C) $P = \sqrt{x}$. (D) $P = x^{\frac{2}{9}}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } P = x^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}.$$

Chọn đáp án (C)



Câu 21

Phát biểu nào sau đây là **sai**?

- (A) $e^3 > e^2$. (B) $0,5^3 > \left(\frac{1}{2}\right)^2$. (C) $(\sqrt{3})^2 < (\sqrt{3})^3$. (D) $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 < \left(\frac{\pi}{2}\right)^3$.

Lời giải.

Dựa vào tính chất của lũy thừa ta có $0,5^3 > \left(\frac{1}{2}\right)^2$ là mệnh đề sai do $a < 1$.

Chọn đáp án (B)



Câu 22

Số nào dưới đây nhỏ hơn 1?

- (A) e^π . (B) $(\sqrt{3})^e$. (C) π^e . (D) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{2}}$.

Lời giải.



Ta có $\frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{2}} < 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23

Nếu $(7 + 4\sqrt{3})^{a-1} < 7 - 4\sqrt{3}$ thì

- (A) $a < 1$. (B) $a > 1$. (C) $a > 0$. (D) $a < 0$.

 **Lời giải.**

$$(7 + 4\sqrt{3})^{a-1} < 7 - 4\sqrt{3} \Leftrightarrow (7 + 4\sqrt{3})^{a-1} < (7 + 4\sqrt{3})^{-1}.$$

Mà ta có $7 + 4\sqrt{3} > 1$ nên $(7 + 4\sqrt{3})^{a-1} < (7 + 4\sqrt{3})^{-1} \Leftrightarrow a - 1 < -1 \Leftrightarrow a < 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24

Tính giá trị biểu thức $K = 27^{\frac{1}{3}} - 16^{-\frac{1}{4}}$.

- (A) $-\frac{8}{3}$. (B) 6. (C) 2. (D) $\frac{5}{2}$.

 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} K &= 27^{\frac{1}{3}} - 16^{-\frac{1}{4}} \\ &= (3^3)^{\frac{1}{3}} - (2^4)^{-\frac{1}{4}} \\ &= 3^{3 \cdot \frac{1}{3}} - 2^{4 \cdot (-\frac{1}{4})} \\ &= 3^1 - 2^{-1} \\ &= 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 25

Cho biểu thức $P = x \cdot \sqrt[5]{x \sqrt[3]{x \sqrt{x}}}$ với $x > 0$. Mệnh nào dưới đây là mệnh đề đúng?

- (A) $P = x^{\frac{13}{10}}$. (B) $P = x^{\frac{2}{3}}$. (C) $P = x^{\frac{1}{2}}$. (D) $P = x^{\frac{3}{10}}$.

 **Lời giải.**

$$P = x \cdot \sqrt[5]{x \sqrt[3]{x \sqrt{x}}} = x \cdot \sqrt[5]{x \sqrt[3]{x \cdot x^{\frac{1}{2}}}} = x \cdot \sqrt[5]{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = x \cdot x^{\frac{3}{10}} = x^{\frac{13}{10}}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 26

Cho $a > 1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a} > 1$. (B) $a^{-\sqrt{3}} > \frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$. (C) $a^{\frac{1}{3}} > \sqrt{a}$. (D) $\frac{1}{a^{2016}} < \frac{1}{a^{2017}}$.

 **Lời giải.**



$\frac{1}{a^{\sqrt{5}}} = a^{-\sqrt{5}}$. Do $a > 1$ suy ra $a^{-\sqrt{3}} > a^{-\sqrt{5}}$.

Chọn đáp án (B)



Câu 27

Cho số thực a thỏa $a^3 > a^\pi$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $0 < a < 1$. (B) $a < 0$. (C) $a > 1$. (D) $a = 1$.

👉 **Lời giải.**

Trong đề bài có lũy thừa với số mũ thực, là a^π , nên $a > 0$.

Lại có: $3 < \pi$ mà $a^3 > a^\pi \Rightarrow 0 < a < 1$.

Chọn đáp án (A)



Câu 28

Cho a là một số thực dương, biểu thức $a^{(1-\sqrt{2})^2} \cdot a^{2(1+\sqrt{2})}$ bằng

- (A) a . (B) a^3 . (C) a^5 . (D) 1 .

👉 **Lời giải.**

Ta có $a^{(1-\sqrt{2})^2} \cdot a^{2(1+\sqrt{2})} = a^{1-2\sqrt{2}+2+2+2\sqrt{2}} = a^5$.

Chọn đáp án (C)



Câu 29

Cho biểu thức $P = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}$ với $x > 0$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- (A) $P = x$. (B) $P = x^{\frac{11}{6}}$. (C) $P = x^{\frac{7}{6}}$. (D) $x^{\frac{5}{6}}$.

👉 **Lời giải.**

Ta có $P = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{6}} = x$.

Chọn đáp án (A)



Câu 30

Rút gọn biểu thức $P = \frac{(a^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1}}{a^{4-\sqrt{5}} \cdot a^{\sqrt{5}-2}}$ (với $a > 0$ và $a \neq 1$) ta được

- (A) $P = 2$. (B) $P = a^2$. (C) $P = 1$. (D) $P = a$.

👉 **Lời giải.**

Ta có: $P = \frac{(a^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1}}{a^{4-\sqrt{5}} \cdot a^{\sqrt{5}-2}} = \frac{a^{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}}{a^{4-\sqrt{5}+\sqrt{5}-2}} = \frac{a^2}{a^2} = 1$.

Trắc nghiệm:

Nhập vào máy tính: $\frac{(A^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1}}{A^{4-\sqrt{5}} \times A^{\sqrt{5}-2}}$.

Sau đó bấm CALC thay một giá trị bất kì thỏa mãn $a > 0$ và $a \neq 1$ và các đáp án phải khác nhau.

Ta chọn $A = 3$. Khi đó ta có kết quả.

Chọn đáp án (C)



—HẾT—



§2. LÔGARIT

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm

Khái niệm 2.1. Cho a là một số thực dương khác 1 và M là một số thực dương. Số thực α để $a^\alpha = M$ được gọi là lôgarit cơ số a của M và kí hiệu là $\log_a M$.

$$\alpha = \log_a M \Leftrightarrow a^\alpha = M.$$

 Không có lôgarit của số âm và số 0. Cơ số của lôgarit phải dương và khác 1.

2. Một số tính chất

Tính chất 2.1. Với $0 < a \neq 1, M > 0$ và α là số thực tùy ý, ta có:

 $\log_a 1 = 0$

 $\log_a a = 1$

 $a^{\log_a M} = M$

 $\log_a a^\alpha = \alpha.$

Ví dụ 1

Tính

a) $\log_2 \frac{1}{8};$

b) $\log_{\sqrt{3}} 9.$

 **Lời giải.**

a) $\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3.$

b) $\log_{\sqrt{3}} 9 = \log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^4 = 4.$

□

Tính chất 2.2. Giả sử a là số thực dương khác 1, M và N là các số thực dương, α là số thực tùy ý. Khi đó:

 $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$

 $\log_a M^\alpha = \alpha \log_a M$

 $\log_a \left(\frac{M}{N} \right) = \log_a M - \log_a N$

Ví dụ 2

Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\log_4 2 + \log_4 32;$

b) $\log_2 80 - \log_2 5.$

 **Lời giải.**

a) $\log_4 2 + \log_4 32 = \log_4 (2 \cdot 32) = \log_4 64 = \log_4 4^3 = 3 \log_4 4 = 3.$

b) $\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2 \frac{80}{5} = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4 \log_2 2 = 4.$

□

3. Đổi cơ số của lôgarit

Với các cơ số lôgarit a và b bất kì ($0 < a \neq 1, 0 < b \neq 1$) và M là số thực dương tùy ý, ta luôn có:

$$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}.$$

Ví dụ 3

Không dùng máy tính cầm tay, hãy tính $\log_4 8$.

👉 **Lời giải.**

$$\text{Ta có: } \log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2} = \frac{3}{2}.$$

□

Ví dụ 4

Chứng minh rằng:

a) Nếu a và b là hai số dương khác 1 thì $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$;

b) Nếu a là số dương khác 1, M là số dương và $\alpha \neq 0$, thì $\log_{a^\alpha} M = \frac{1}{\alpha} \log_a M$.

👉 **Lời giải.**

a) Theo công thức đổi cơ số, ta có: $\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$.

b) Theo công thức đổi cơ số, ta có: $\log_{a^\alpha} M = \frac{\log_a M}{\log_a a^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \log_a M$.

□

4. Lôgarit thập phân và lôgarit tự nhiên

Định nghĩa 2.1. Lôgarit cơ số 10 của một số dương M gọi là lôgarit thập phân của M , kí hiệu là $\log M$ hoặc $\lg M$ (đọc là lôc của M).

Ví dụ 5

Độ pH của một dung dịch hoá học được tính theo công thức:

$$\text{pH} = -\log [H^+].$$

trong đó $[H^+]$ là nồng độ (tính theo mol/lít) của các ion hydrogen. Giá trị pH nằm trong khoảng từ 0 đến 14. Nếu $\text{pH} < 7$ thì dung dịch có tính acid, nếu $\text{pH} > 7$ thì dung dịch có tính base, còn nếu $\text{pH} = 7$ thì dung dịch là trung tính.

a) Tính độ pH của dung dịch có nồng độ ion hydrogen bằng 0,01 mol/lít;

b) Xác định nồng độ ion hydrogen của một dung dịch có độ $\text{pH} = 7,4$.

👉 **Lời giải.**

- a) Khi $[H^+] = 0,01$, ta có: $pH = -\log 0,01 = -\log 10^{-2} = 2$.
- b) Nồng độ ion hydrogen trong dung dịch đó là $[H^+] = 10^{-7,4}$.

□

5. Số e và lôgarit tự nhiên

Bài toán lãi kép liên tục và số e

Định nghĩa 2.2.

$$e = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \approx 2,7183.$$

✔ Công thức lãi kép theo N kì hạn

Nếu đem gửi ngân hàng một số vốn ban đầu là P theo thể thức lãi kép với lãi suất hằng năm không đổi là r và chia mỗi năm thành m kì tính lãi thì sau t năm (tức là sau $tm = N$ kì hạn) số tiền thu được (cả vốn lẫn lãi) là

$$A_m = P \left(1 + \frac{r}{m}\right)^N.$$

✔ Công thức lãi kép liên tục

Với số vốn ban đầu là P , theo thể thức lãi kép liên tục, lãi suất hằng năm không đổi là r thì sau t năm, số tiền thu được cả vốn lẫn lãi sẽ là

$$A = Pe^{tr}.$$

Định nghĩa 2.3. Lôgarit cơ số e của một số dương M gọi là lôgarit tự nhiên của M , kí hiệu là $\ln M$ (đọc là lôgarit Nêpe của M).

Ví dụ 6

Biết thời gian cần thiết (tính theo năm) để tăng gấp đôi số tiền đầu tư theo thể thức lãi kép liên tục với lãi suất không đổi r mỗi năm được cho bởi công thức sau:

$$t = \frac{\ln 2}{r}.$$

Tính thời gian cần thiết để tăng gấp đôi một khoản đầu tư khi lãi suất là 6% mỗi năm (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

👉 Lời giải.

Ta có: $r = 6\% = 0,06$. Do đó thời gian cần thiết để tăng gấp đôi khoản đầu tư là

$$t = \frac{\ln 2}{r} = \frac{\ln 2}{0,06} \approx 11,6 \text{ (năm)}.$$

□

6. Tính lôgarit bằng máy tính cầm tay

Tính	Bấm phím	Màn hình hiện	Kết quả
$\log 6,52$	$\boxed{\log_{\square}} \boxed{1} \boxed{0} \boxed{\rightarrow} \boxed{6} \boxed{\cdot} \boxed{5} \boxed{2} \boxed{=}$	0.8142475957	$\log 6,52 \approx 0,8142$
$\ln 6,52$	$\boxed{\ln} \boxed{6} \boxed{\cdot} \boxed{5} \boxed{2} \boxed{=}$	1.874874376	$\ln 6,52 \approx 1,8749$
$\log_{14} 17$	$\boxed{\log_{\square}} \boxed{1} \boxed{4} \boxed{\rightarrow} \boxed{1} \boxed{7} \boxed{=}$	1.073570215	$\log_{14} 17 \approx 1,0736$



(làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ tư)

Ví dụ 7

Bác An gửi tiết kiệm ngân hàng 100 triệu đồng kì hạn 12 tháng, với lãi suất không đổi là 6% một năm. Khi đó sau n năm gửi thì tổng số tiền bác An thu được (cả vốn lẫn lãi) cho bởi công thức sau:

$$A = 100 \cdot (1 + 0,06)^n \text{ (triệu đồng).}$$

Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm, tổng số tiền bác An thu được là không dưới 150 triệu đồng?

Lời giải.

Ta có: $A = 100 \cdot (1 + 0,06)^n = 100 \cdot 1,06^n$.

Với $A = 150$, ta có: $100 \cdot 1,06^n = 150$ hay $1,06^n = 1,5$, tức là $n = \log_{1,06} 1,5 \approx 6,96$.

Vì gửi tiết kiệm kì hạn 12 tháng (tức là 1 năm) nên n phải là số nguyên.

Do đó ta chọn $n = 7$.

Vậy sau ít nhất 7 năm thì bác An nhận được số tiền không dưới 150 triệu đồng. □

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP**Dạng 1 Áp dụng tính chất để tính toán biểu thức chứa lôgarit**

Với số thực dương a khác 1, số thực dương b , ta có:

$$\log_a 1 = 0; \quad \log_a a = 1; \quad \log_a a^c = c; \quad a^{\log_a b} = b.$$

Ví dụ 1

Tính

a) $\log_5 \sqrt[3]{5};$

b) $4^{\log_2 7}.$

Lời giải.

a) $\log_5 \sqrt[3]{5} = \log_5 5^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3};$

b) $4^{\log_2 7} = (2^2)^{\log_2 7} = (2^{\log_2 7})^2 = 7^2 = 49.$ □

Ví dụ 2

Tính

a) $\log_4 \sqrt[5]{16};$

b) $36^{\log_6 8}.$

Lời giải.

a) $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4;$

b) $36^{\log_6 8} = (6^2)^{\log_6 8} = (6^{\log_6 8})^2 = 8^2 = 64.$ □

Ví dụ 3

Tính

a) $\log_2 \frac{1}{4};$

b) $9^{\log_3 5}.$

 **Lời giải.**

a) $\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2;$

b) $9^{\log_3 5} = (3^2)^{\log_3 5} = 3^{2 \log_3 5} = (3^{\log_3 5})^2 = 5^2 = 25.$

□

Ví dụ 4

Tính

a) $\log_3 \sqrt[3]{3};$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 8.$

 **Lời giải.**

a) $\log_3 \sqrt[3]{3} = \log_3 (3)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_3 3 = \frac{1}{3};$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 8 = \log_{2^{-1}} (2)^3 = -3 \log_2 2 = -3.$

□

Dạng 2 Áp dụng một số tính chất của phép tính lôgarit

Với ba số thực dương a, m, n và $a \neq 1$, ta có:

✔ $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n;$

✔ $\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n.$

Ví dụ 1

Tính

a) $\log_6 9 + \log_6 4;$

b) $\log_5 100 - \log_5 20.$

 **Lời giải.**

a) $\log_6 9 + \log_6 4 = \log_6 (9 \cdot 4) = \log_6 36 = 2;$

b) $\log_5 100 - \log_5 20 = \log_5 \frac{100}{20} = \log_5 5 = 1.$

□

Ví dụ 2

Tính

a) $\ln(\sqrt{5} + 2) + \ln(\sqrt{5} - 2);$

b) $\log 400 - \log 4;$

c) $\log_4 8 + \log_4 12 + \log_4 \frac{32}{3}.$

👉 **Lời giải.**

- a) $\ln(\sqrt{5} + 2) + \ln(\sqrt{5} - 2) = \ln((\sqrt{5} + 2) \cdot (\sqrt{5} - 2)) = \ln 1 = 0;$
- b) $\log 400 - \log 4 = \log \frac{400}{4} = \log 100 = 2;$
- c) $\log_4 8 + \log_4 12 + \log_4 \frac{32}{3} = \log_4 \left(8 \cdot 12 \cdot \frac{32}{3}\right) = \log_4 1024 = \log_4 4^5 = 5.$

□

Ví dụ 3

Tính giá trị các biểu thức sau:

- a) $\log_2 \frac{2}{3} + \log_2 12;$ b) $\log_3 (9^2 \cdot 3^2);$ c) $\log_5 \sqrt[3]{25}.$

👉 **Lời giải.**

- a) $\log_2 \frac{2}{3} + \log_2 12 = \log_2 \left(\frac{2}{3} \cdot 12\right) = \log_2 2^3 = 3 \log_2 2 = 3 \cdot 1 = 3.$
- b) $\log_3 (9^2 \cdot 3^2) = \log_3 9^2 + \log_3 3^2 = 2 \log_3 3^2 + 2 \log_3 3 = 2 \cdot 2 \log_3 3 + 2 = 4 + 2 = 6.$
- c) $\log_5 \sqrt[3]{25} = \log_5 25^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_5 5 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}.$

□

Ví dụ 4

Trong hóa học, độ pH của một dung dịch được tính theo công thức $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$, trong đó $[\text{H}^+]$ là nồng độ H^+ (ion hydro) tính bằng mol/L. Các dung dịch có pH bé hơn 7 thì có tính acid, có pH lớn hơn 7 thì có tính kiềm, có pH bằng 7 thì trung tính.

- a) Tính độ pH của dung dịch có nồng độ H^+ là 0,0001 mol/L. Dung dịch này có tính acid, hay kiềm hay trung tính?
- b) Dung dịch A có nồng độ H^+ gấp đôi nồng độ H^+ của dung dịch B.
Độ pH của dung dịch nào lớn hơn và lớn hơn bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn.

👉 **Lời giải.**

- a) $\text{pH} = -\log 0,0001 = -\log 10^{-4} = 4 \log 10 = 4.$
Do $4 < 7$ nên dung dịch có tính acid.
- b) Kí hiệu pH_A, pH_B lần lượt là độ pH của hai dung dịch A và B; $[\text{H}^+]_A, [\text{H}^+]_B$ lần lượt là nồng độ của hai dung dịch A và B. Ta có

$$\text{pH}_A = -\log[\text{H}^+]_A = -\log(2[\text{H}^+]_B) = -\log 2 - \log[\text{H}^+]_B = -\log 2 + \text{pH}_B.$$

Suy ra $\text{pH}_B - \text{pH}_A = \log 2 \approx 0,301.$

Vậy dung dịch B có độ pH lớn hơn và lớn hơn khoảng 0,301.

□

Ví dụ 5

Tính

a) $\log_5 4 + \log_5 \frac{1}{4}$;

b) $\log_2 28 - \log_2 7$;

c) $\log \sqrt{1000}$.

 **Lời giải.**

a) $\log_5 4 + \log_5 \frac{1}{4} = \log_5 4 + \log_5 4^{-1} = \log_5 4 + (-1) \log_5 4 = 0$;

b) $\log_2 28 - \log_2 7 = \log_2 \frac{28}{7} = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2 \log_2 2 = 2 \cdot 1 = 2$;

c) $\log \sqrt{1000} = \log 10^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log 10 = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$.

□

Dạng 3 Dạng toán liên quan đến đổi cơ số

Cho các số dương a, b, N với $a \neq 1, b \neq 1$, ta có

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}.$$

Đặc biệt, ta có

• $\log_a N = \frac{1}{\log_N a} \quad (N \neq 1)$;

• $\log_a^\alpha N = \frac{1}{\alpha} \log_a N \quad (\alpha \neq 0)$.

Ví dụ 1

Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\log_9 27$;

b) $\log_2 3 \cdot \log_3 \frac{1}{4}$.

 **Lời giải.**

a) $\log_9 27 = \log_3^2 3^3 = \frac{3}{2} \log_3 3 = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$;

b) $\log_2 3 \cdot \log_3 \frac{1}{4} = \log_3 2 \cdot \frac{\log_2 \frac{1}{4}}{\log_2 3} = \log_2 2^{-2} = -2 \log_2 2 = -2 \cdot 1 = -2$.

□

Ví dụ 2

Đặt $\log_2 3 = a, \log_2 5 = b$. Biểu thị $\log_9 10$ theo a và b .

 **Lời giải.**

$$\log_9 10 = \frac{\log_2 10}{\log_2 9} = \frac{\log_2 (2 \cdot 5)}{\log_2 3^2} = \frac{\log_2 2 + \log_2 5}{2 \log_2 3} = \frac{1 + b}{2a}.$$

□

**Ví dụ 3**

Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\log_{\frac{1}{4}} 8$;

b) $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 8$.

👉 **Lời giải.**

a) $\log_{\frac{1}{4}} 8 = \log_{2^{-2}} 2^3 = \frac{3}{-2} \log_2 2 = -\frac{3}{2} \cdot 1 = -\frac{3}{2}$;

b) $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 8 = \log_4 5 \cdot \frac{\log_4 6}{\log_4 5} \cdot \frac{\log_4 8}{\log_4 6} = \log_4 8 = \log_{2^2}(2^3) = \frac{3}{2} \log_2 2 = \frac{3}{2}$. □

Ví dụ 4

Đặt $\log_3 2 = a$, $\log_3 7 = b$. Biểu thị $\log_{12} 21$ theo a và b .

👉 **Lời giải.**

$$\log_{12} 21 = \frac{\log_3 21}{\log_3 12} = \frac{\log_3 3 + \log_3 7}{\log_3 3 + \log_3 4} = \frac{1 + b}{1 + 2a}.$$
 □

Ví dụ 5

Tính

a) $\log_9 3$.

b) $5^{\log_{125} 64}$.

👉 **Lời giải.**

a) $\log_9 3 = \log_{3^2} 3 = \frac{1}{2} \log_3 3 = \frac{1}{2}$;

b) $5^{\log_{125} 64} = 5^{\log_{5^3} 2^6} = 5^{\frac{6}{3} \log_5 2} = 5^{2 \log_5 2} = (5^{\log_5 2})^2 = 2^2 = 4$. □

Dạng 4 Bài toán thực tế, liên môn

Áp dụng công thức lãi kép, lãi kép liên tục, các công thức đề bài cho.

Ví dụ 1

Biết rằng khi độ cao tăng lên, áp suất không khí sẽ giảm và công thức áp suất dựa trên độ cao là $a = 15500 \cdot (5 - \log p)$ trong đó a là độ cao so với mực nước biển (tính bằng mét) và p là áp suất không khí (tính bằng pascal). Tính áp suất không khí ở đỉnh Everest có độ cao 8850 m so với mực nước biển.

👉 **Lời giải.**

Ta có

$$a = 15500 \cdot (5 - \log p) \Leftrightarrow 8850 = 15500 \cdot (5 - \log p) \Leftrightarrow 5 - \log p = \frac{8850}{15500} \Leftrightarrow \log p \approx 4,429 \Leftrightarrow p \approx 10^{4,429} \\ \Leftrightarrow p \approx 26855,44.$$

Vậy áp suất không khí ở đỉnh Everest có độ cao 8850 m so với mực nước biển là 26855,44 pascal. □

Ví dụ 2

Độ lớn M của một trận động đất theo thang Richter được tính theo công thức $M = \log \frac{A}{A_0}$, trong đó A là biên độ lớn nhất ghi được bởi máy đo địa chấn, A_0 là biên độ tiêu chuẩn được sử dụng để hiệu chỉnh độ lệch gây ra bởi khoảng cách của máy đo địa chấn so với tâm chấn ($A_0 = 1\mu m$).

a) Tính độ lớn của trận động đất có biên độ A bằng

i) $10^{5,1} A_0$;

ii) $65\,000 A_0$.

b) Một trận động đất tại địa điểm N có biên độ lớn nhất gấp ba lần biên độ lớn nhất của trận động đất tại địa điểm P . So sánh độ lớn của hai trận động đất.

Lời giải.

a) Độ lớn của trận động đất có biên độ A là

i) $10^{5,1} A_0 \Rightarrow M = \log \frac{10^{5,1} A_0}{A_0} = 5,1$;

ii) $65\,000 A_0 \Rightarrow M = \log \frac{65\,000 A_0}{A_0} = \log(65 \cdot 10^3) \approx 4,81$.

b) Gọi M_N và M_P lần lượt là độ lớn của các trận động đất tại địa điểm N và P .

Gọi A là biên độ lớn nhất ghi được bởi máy đo địa chấn tại địa điểm P . Ta có

$$M_P = \log \frac{A}{A_0}; \quad M_N = \log \frac{3A}{A_0} = \log 3 + \log \frac{A}{A_0}.$$

Do $\log 3 \approx 0,3 > 0$ nên $M_N > M_P$.

Ví dụ 3

Mức cường độ âm L đo bằng decibel (dB) của âm thanh có cường độ I (đo bằng oát trên mét vuông, kí hiệu là W/m^2) được định nghĩa như sau: $L(I) = 10 \log \frac{I}{I_0}$ trong đó $I_0 = 10^{-12} W/m^2$

là cường độ âm thanh nhỏ nhất mà tai người có thể phát hiện được (gọi là ngưỡng nghe).

Xác định mức cường độ âm của mỗi âm sau:

☑ Cuộc trò chuyện bình thường có cường độ $I = 10^{-7} W/m^2$.

☑ Giao thông thành phố đông đúc có cường độ $I = 10^{-3} W/m^2$.

Lời giải.

☑ Ta có cuộc trò chuyện bình thường có cường độ âm

$$L(I) = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} = 10 \cdot \log \frac{10^{-7}}{10^{-12}} = 50(\text{dB})$$

☑ Ta có giao thông thành phố đông đúc có cường độ âm

$$L(I) = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \cdot \log \frac{10^{-3}}{10^{-12}} = 90(\text{dB})$$

Ví dụ 4

Biết rằng khi độ cao tăng lên, áp suất không khí sẽ giảm và công thức áp suất dựa trên độ cao là $a = 15500 \cdot (5 - \log p)$ trong đó a là độ cao so với mực nước biển (tính bằng mét) và p là áp suất không khí (tính bằng pascal). Tính độ cao so với mực nước biển biết áp suất không khí ở nơi đang đứng là 2000 pascal.

Lời giải.

Ta có

$$a = 15500 \cdot (5 - \log p) \Leftrightarrow a = 15500 \cdot (5 - \log 2000) \Leftrightarrow a \approx 26334,04 \text{ m.}$$

□

Ví dụ 5

Bác An gửi tiết kiệm ngân hàng 100 triệu đồng kì hạn 12 tháng, với lãi suất không đổi là 6% một năm. Khi đó sau n năm gửi thì tổng số tiền bác An thu được (cả vốn lẫn lãi) cho bởi công thức sau:

$$A = 100 \cdot (1 + 0,06)^n \text{ (triệu đồng).}$$

Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm, tổng số tiền bác An thu được là không dưới 150 triệu đồng?

Lời giải.

Ta có $A = 100 \cdot (1 + 0,06)^n = 100 \cdot 1,06^n$.

Với $A = 150$, ta có $100 \cdot 1,06^n = 150 \Leftrightarrow 1,06^n = 1,5 \Leftrightarrow n \approx 6,96$.

Vì gửi tiết kiệm kỳ hạn 12 tháng nên n phải là số nguyên. Do đó chọn $n = 7$.

Vậy sau ít nhất 7 năm thì bác An được nhận số tiền ít nhất là 150 triệu đồng.

□

C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

Tính

a) $\log_2 2^{-13}$;

b) $\ln e^{\sqrt{2}}$;

c) $\log_8 16 - \log_8 2$;

d) $\log_2 6 \cdot \log_6 8$.

Lời giải.

a) $\log_2 2^{-13} = -13 \log_2 2 = -13$;

b) $\ln e^{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \ln e = \sqrt{2}$;

c) $\log_8 16 - \log_8 2 = \log_8 2 + \log_8 8 - \log_8 2 = 1$;

d) $\log_2 6 \cdot \log_6 8 = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 \log_2 2 = 3$.

□

Bài 2

Viết mỗi biểu thức sau thành lôgarit của một biểu thức (giả thiết các biểu thức đều có nghĩa):

a) $A = \ln \left(\frac{x}{x-1} \right) + \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) - \ln (x^2 - 1)$;

b) $B = 21 \log_3 \sqrt[3]{x} + \log_3 (9x^2) - \log_3 9$.

 Lời giải.

$$a) A = \ln \left(\frac{x}{x-1} \right) + \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) - \ln (x^2 - 1) = \ln \left[\frac{\frac{x}{x-1} \cdot \frac{x+1}{x}}{x^2 - 1} \right]$$

$$\text{Hay } A = \ln \left[\frac{x+1}{(x+1)(x-1)^2} \right] = -2 \ln(x-1);$$

$$b) B = 21 \log_3 \sqrt[3]{x} + \log_3 (9x^2) - \log_3 9 = \log_3 \frac{(\sqrt[3]{x})^{21} \cdot 9x^2}{9} = 9 \log_3 x.$$

□

Bài 3

Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) A = \log_{\frac{1}{3}} 5 + 2 \log_9 25 - \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{5};$$

$$b) B = \log_a M^2 + \log_{a^2} M^4.$$

 Lời giải.

$$a) A = \log_{\frac{1}{3}} 5 + 2 \log_9 25 - \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{5} = -\log_3 5 + 2 \log_3 5 + 2 \log_3 5 = 3 \log_3 5;$$

$$b) B = \log_a M^2 + \log_{a^2} M^4 = 2 \log_a M + \frac{4}{2} \log_a M = 4 \log_a M.$$

□

Bài 4

Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$a) A = \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8; \quad b) B = \log_2 2 \cdot \log_2 4 \cdots \log_2 2^n.$$

 Lời giải.

$$a) \text{ Áp dụng công thức } \log_a b \cdot \log_b c = \log_a c, \text{ ta được } A = \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3;$$

$$b) B = \log_2 2 \cdot \log_2 4 \cdots \log_2 2^n = \log_2 2^1 \cdot \log_2 2^2 \cdots \log_2 2^n = 1 \cdot 2 \cdots n = n!.$$

□

Bài 5

Tính:

$$a) \log_{12} 12^3;$$

$$b) \log_{0,5} 0,25;$$

$$c) \log_a a^{-3} (a > 0, a \neq 1).$$

 Lời giải.

$$a) \log_{12} 12^3 = 3;$$

$$b) \log_{0,5} 0,25 = \log_{0,5} 0,5^2 = 2;$$

$$c) \log_a a^{-3} = -3.$$

□

Bài 6

Tính:

- a) $8^{\log_2 5}$; b) $\left(\frac{1}{10}\right)^{\log 81}$; c) $5^{\log_{25} 16}$.

Lời giải.

- a) $8^{\log_2 5} = (2^3)^{\log_2 5} = (2^{\log_2 5})^3 = 5^3 = 125$;
 b) $\left(\frac{1}{10}\right)^{\log 81} = (10^{-1})^{\log 81} = (10^{\log 81})^{-1} = 81^{-1} = \frac{1}{81}$;
 c) $5^{\log_{25} 16} = 5^{\log_{5^2} 2^4} = 5^{2 \log_5 2} = (5^{\log_5 2})^2 = 2^2 = 4$.

□

Bài 7

Cho $\log_a b = 2$. Tính:

- a) $\log_a (a^2 b^3)$; b) $\log_a \frac{a\sqrt{a}}{b\sqrt[3]{b}}$; c) $\log_a (2b) + \log_a \left(\frac{b^2}{2}\right)$.

Lời giải.

- a) $\log_a (a^2 b^3) = \log_a a^2 + \log_a b^3 = 2 + 3 \log_a b = 8$;
 b) $\log_a \frac{a\sqrt{a}}{b\sqrt[3]{b}} = \log_a a\sqrt{a} - \log_a b\sqrt[3]{b} = \log_a a^{\frac{3}{2}} - \log_a b^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2} - \frac{4}{3} \log_a b = -\frac{7}{6}$;
 c) $\log_a (2b) + \log_a \left(\frac{b^2}{2}\right) = \log_a 2 + \log_a b + \log_a b^2 - \log_a 2 = \log_a b + 2 \log_a b = 3 \log_a b = 6$.

□

Bài 8

Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $a^3 b^2 = 100$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = 3 \log a + 2 \log b.$$

Lời giải.

Ta có: $a^3 b^2 = 100$.

Suy ra $\log a^3 b^2 = \log 100 \Leftrightarrow \log a^3 + \log b^2 = \log 10^2 \Leftrightarrow 3 \log a + 2 \log b = 2$.

Vậy $P = 2$.

□

Bài 9

Tính giá trị các biểu thức sau:

- a) $\log_2 16$; b) $\log_3 27$; c) $\log 1000$; d) $9^{\log_3 12}$.

- a) $\log_2 9 \cdot \log_3 4 = \log_2 9 \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 3} = \log_2 3^2 \cdot \frac{2 \log_2 2}{\log_2 3} = 2 \log_2 3 \cdot \frac{2 \cdot 1}{\log_2 3} = 2 \cdot 2 = 4;$
- b) $\log_{25} \frac{1}{\sqrt{5}} = \log_{5^2} (5^{-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \log_5 5 = -\frac{1}{4} \cdot 1 = -\frac{1}{4};$
- c) $\log_2 3 \cdot \log_9 \sqrt{5} \cdot \log_5 4 = \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 \sqrt{5}}{\log_2 9} \cdot \log_5 2^2 = \log_2 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_2 5}{2 \log_2 3} \cdot 2 \log_5 2 = \frac{1}{2} \log_2 5 \cdot \log_5 2 = \frac{1}{2}.$

□

Bài 13

Đặt $\log 2 = a$, $\log 3 = b$. Biểu thị các biểu thức sau theo a và b .

🔑 **Lời giải.**

- a) $\log_4 9 = \frac{\log 9}{\log 4} = \frac{\log 3^2}{\log 2^2} = \frac{2 \log 3}{2 \log 2} = \frac{b}{a};$
- b) $\log_6 12 = \frac{\log 12}{\log 6} = \frac{2 \log 2 + \log 3}{\log 2 + \log 3} = \frac{2a + b}{a + b};$
- c) $\log_5 6 = \frac{\log 6}{\log 5} = \frac{\log 2 + \log 3}{\log(2 + 3)}.$

Lại có $\log 2 = a \Rightarrow 10^a = 2$ và $\log 3 = b \Rightarrow 10^b = 3$. Do đó

$$\log_5 6 = \frac{\log 6}{\log 5} = \frac{\log 2 + \log 3}{\log 10 - \log 2} = \frac{a + b}{1 - a}.$$

□

Bài 14

- a) Nước cất có nồng độ H^+ là 10^{-7} mol/L. Tính nồng độ pH của nước cất.
- b) Một dung dịch có nồng độ H^+ gấp 20 lần nồng độ H^+ của nước cất. Tính pH của dung dịch đó.

🔑 **Lời giải.**

- a) Ta có $pH = -\log[H^+] = -\log 10^{-7} = 7.$
- b) Nồng độ H^+ của dung dịch là $20 \cdot 10^{-7}$ mol/L. Độ pH của dung dịch là

$$pH = -\log[20 \cdot 10^{-7}] \approx 5,7.$$

□

Bài 15

Trong nuôi trồng thủy sản, độ pH của môi trường nước sẽ ảnh hưởng đến sức khỏe và sự phát triển của thủy sản. Độ pH thích hợp cho nước trong đầm nuôi tôm sú là từ 7,2 đến 8,8 và tốt nhất là trong khoảng từ 7,8 đến 8,5. Phân tích nồng độ $[H^+]$ trong một đầm nuôi tôm sú, ta thu

được $[H^+] = 8 \cdot 10^{-8}$ (Nguồn: <https://nongnghiep.farmvina.com>). Hỏi độ pH của đầm đó có thích hợp cho tôm sú phát triển không?

 Lời giải.

Độ pH của đầm là: $pH = -\log [H^+] = -\log (8 \cdot 10^{-8}) \approx 7,1$.
Do vậy, độ pH của đầm không thích hợp cho tôm sú phát triển. □

Bài 16

Một vi khuẩn có khối lượng khoảng $5 \cdot 10^{-13}$ gam và cứ 20 phút vi khuẩn đó tự nhân đôi một lần (Nguồn: *Câu hỏi và bài tập vi sinh học*, NXB ĐHSP, 2008). Giả sử các vi khuẩn được nuôi trong các điều kiện sinh trưởng tối ưu và mỗi con vi khuẩn đều tồn tại trong ít nhất 60 giờ. Hỏi sau bao nhiêu giờ khối lượng do tế bào vi khuẩn này sinh ra sẽ đạt tới khối lượng của Trái Đất (lấy khối lượng của Trái Đất là $6 \cdot 10^{27}$ gam) (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

 Lời giải.

Số lần phân chia: $N = N_0 \cdot 2^n \Rightarrow n = \log_2 \left(\frac{N}{N_0} \right) = \log_2 \left(\frac{6 \cdot 10^{27}}{5 \cdot 10^{-13}} \right) = \log_2 (1,2 \cdot 10^{40}) \approx 133$.

Thời gian cần thiết là: $133 : 3 \approx 44,3$ giờ.

Vậy sau 45 giờ thì khối lượng do tế bào vi khuẩn này sinh ra sẽ đạt tới khối lượng của Trái Đất. □

Bài 17

Biết rằng khi độ cao tăng lên, áp suất không khí sẽ giảm và công thức tính áp suất dựa trên độ cao là

$$a = 15500(5 - \log p),$$

trong đó a là độ cao so với mực nước biển (tính bằng mét) và p là áp suất không khí (tính bằng pascal). Tính áp suất không khí ở đỉnh Everest có độ cao 8850 m so với mực nước biển.

 Lời giải.

Đỉnh Everest có độ cao 8850 m so với mực nước biển suy ra

$$8850 = 15500(5 - \log p) \Leftrightarrow \log p = \frac{1373}{310} \Leftrightarrow p = 26855,44 \text{ (pascal)}.$$

Áp suất không khí ở đỉnh Everest là $p = 26855,44$ (pascal). □

Bài 18

Mức cường độ âm L đo bằng decibel (dB) của âm thanh có cường độ I (đo bằng oát trên mét vuông, kí hiệu là W/m^2) được định nghĩa như sau:

$$L(I) = 10 \log \frac{I}{I_0},$$

trong đó $I_0 = 10^{-12} W/m^2$ là cường độ âm thanh nhỏ nhất mà tai người có thể phát hiện được (gọi là ngưỡng nghe). Xác định mức cường độ âm của mỗi âm sau:

- Cuộc trò chuyện bình thường có cường độ $I = 10^{-7} W/m^2$.
- Giao thông thành phố đông đúc có cường độ $I = 10^{-3} W/m^2$.

 Lời giải.

a) Cuộc trò chuyện bình thường có cường độ $I = 10^{-7} \text{ W/m}^2$ có mức cường độ âm là

$$L(I) = 10 \log \frac{10^{-7}}{10^{-12}} = 50 \text{ (dB)}.$$

b) Giao thông thành phố đông đúc có cường độ $I = 10^{-3} \text{ W/m}^2$ có mức cường độ âm là

$$L(I) = 10 \log \frac{10^{-3}}{10^{-12}} = 90 \text{ (dB)}.$$



D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM LẦN 1

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN – ĐỀ SỐ 1

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	(A) (B) (C) (D)	8	(A) (B) (C) (D)	15	(A) (B) (C) (D)	22	(A) (B) (C) (D)	29	(A) (B) (C) (D)
2	(A) (B) (C) (D)	9	(A) (B) (C) (D)	16	(A) (B) (C) (D)	23	(A) (B) (C) (D)	30	(A) (B) (C) (D)
3	(A) (B) (C) (D)	10	(A) (B) (C) (D)	17	(A) (B) (C) (D)	24	(A) (B) (C) (D)	31	(A) (B) (C) (D)
4	(A) (B) (C) (D)	11	(A) (B) (C) (D)	18	(A) (B) (C) (D)	25	(A) (B) (C) (D)	32	(A) (B) (C) (D)
5	(A) (B) (C) (D)	12	(A) (B) (C) (D)	19	(A) (B) (C) (D)	26	(A) (B) (C) (D)	33	(A) (B) (C) (D)
6	(A) (B) (C) (D)	13	(A) (B) (C) (D)	20	(A) (B) (C) (D)	27	(A) (B) (C) (D)	34	(A) (B) (C) (D)
7	(A) (B) (C) (D)	14	(A) (B) (C) (D)	21	(A) (B) (C) (D)	28	(A) (B) (C) (D)	35	(A) (B) (C) (D)

Câu 1

Giá trị của biểu thức $\log_4 25 + \log_2 1,6$ bằng

- (A) 5. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

 **Lời giải.**

Ta có $\log_4 25 + \log_2 1,6 = \log_2 5^2 + \log_2 \frac{8}{5} = \log_2 5 + \log_2 8 - \log_2 5 = \log_2 2^3 = 3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2

Cho các số thực a, b dương khác 1 thỏa mãn $a^{\frac{3}{4}} > a^{\frac{5}{6}}$ và $\log_b \frac{2}{3} < \log_b \frac{3}{4}$. Kết luận nào sau đây đúng?

- (A) $a > 1, b > 1$. (B) $a > 1, 0 < b < 1$.
(C) $0 < a < 1, b > 1$. (D) $0 < a < 1, 0 < b < 1$.

 **Lời giải.**

Vì $\begin{cases} \frac{3}{4} < \frac{5}{6} \\ a^{\frac{3}{4}} > a^{\frac{5}{6}} \end{cases}$ nên $0 < a < 1$; vì $\begin{cases} \frac{2}{3} < \frac{3}{4} \\ \log_b \frac{2}{3} < \log_b \frac{3}{4} \end{cases}$ nên $b > 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 3

Cho số thực $a > 0, a \neq 1$. Giá trị $\log_{a^2} \sqrt[4]{a^3}$ bằng

- (A) $\frac{5}{4}$. (B) $\frac{2}{3}$. (C) 2. (D) $\frac{3}{8}$.

 **Lời giải.**

Ta có $\log_{a^2} a^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 4

Cho các số thực dương a, x, y và $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$. (B) $\log_a(xy) = \log_a x \cdot \log_a y$.
(C) $\log_a(xy) = \log_a x - \log_a y$. (D) $\log_a(xy) = y \log_a x$.

📌 **Lời giải.**

Công thức lôgarit của một tích.

Chọn đáp án (A) ☐

Câu 5

Với a và b là hai số thực dương tùy ý, $\log(ab^2)$ bằng

- (A) $2 \log a + \log b$. (B) $\log a + 2 \log b$. (C) $2(\log a + \log b)$. (D) $\log a + \frac{1}{2} \log b$.

📌 **Lời giải.**

Ta có $\log(ab^2) = \log a + \log b^2 = \log a + 2 \log b$.

Chọn đáp án (B) ☐

Câu 6

Trong các số sau số nào lớn nhất?

- (A) $\log_2 5$. (B) $\log_4 15$. (C) $\log_3 8$. (D) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{6}$.

📌 **Lời giải.**

Ta có $\bullet \log_2 5 > \log_2 4 = 2$.

$\bullet \log_4 15 < \log_4 16 = 2 \Rightarrow \log_4 15 < \log_2 5$.

$\bullet \log_3 8 < \log_3 9 = 2 \Rightarrow \log_3 8 < \log_2 5$.

$\bullet \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{6} = \log_2 6 > \log_2 5$.

Chọn đáp án (D) ☐

Câu 7

Cho $0 < a \neq 1$ và x, y là hai số dương. Tìm mệnh đề đúng.

- (A) $\log_a(x + y) = \log_a x + \log_a y$. (B) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$.
(C) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x \cdot \log_a y$. (D) $\log_a(x + y) = \log_a x \cdot \log_a y$.

📌 **Lời giải.**

Với $0 < a \neq 1$ và x, y là hai số dương thì ta luôn có $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$.

Chọn đáp án (B) ☐

Câu 8

Với a, b, c là các số thực dương, a và c khác 1 và $\alpha \neq 0$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- (A) $\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$. (B) $\log_{a^\alpha} b = \alpha \log_a b$.
(C) $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$. (D) $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.



Lời giải.

$$\log_{a^a} b = \frac{1}{a} \log_a b.$$

Chọn đáp án (B)



Câu 9

Cho bốn số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a \neq 1, b \neq 1$ và $x^2 + y^2 = 1$. Biết rằng $\log_a(x + y) < 0$ và $\log_b(xy) < 0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A) $\begin{cases} a > 1 \\ b > 1 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < b < 1 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} a > 1 \\ 0 < b < 1 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ b > 1 \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $(x + y)^2 > x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x + y > 1$. Lại có $xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{1}{2} < 1$.

Từ giả thiết $\log_a(x + y) < 0 = \log_a 1$ và $x + y > 1$ suy ra $0 < a < 1$. Từ $\log_b(xy) < 0 = \log_b 1$ và $xy < 1$ suy ra $b > 1$. Vậy $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ b > 1 \end{cases}$.

Chọn đáp án (D)



Câu 10

Cho $0 < a \neq 1$ và x, y là hai số dương. Tìm mệnh đề đúng.

- (A) $\log_a(x + y) = \log_a x + \log_a y$. (B) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$.
(C) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x \cdot \log_a y$. (D) $\log_a(x + y) = \log_a x \cdot \log_a y$.

Lời giải.

Với $0 < a \neq 1$ và x, y là hai số dương thì ta luôn có $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$.

Chọn đáp án (B)



Câu 11

Cho các số thực dương a, b với $a \neq 1$ và $\log_a b > 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $\begin{cases} 0 < b < 1 < a \\ 1 < a, b \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 0 < b, a < 1 \\ 0 < b < 1 < a \end{cases}$ (C) $\begin{cases} 0 < a, b < 1 \\ 0 < a < 1 < b \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 0 < a, b < 1 \\ 1 < a, b \end{cases}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \log_a b > 0 \Leftrightarrow \log_a b > \log_a 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < b < 1 \\ 1 < a \\ 1 < b. \end{cases}$$

Chọn đáp án (D)



Câu 12

Cho a, b là các số thực dương khác 1. Mệnh đề nào sau đây là sai?

- (A) $\log_a b \log_b a = 1$. (B) $\log_{a^2} b^3 = \frac{2}{3} \log_a b$.
(C) $\log_a a^2 b = 2 + \log_a b$. (D) $\log_a \frac{b}{a} = \log_a b - 1$.

**Lời giải.**

Đáp án **B** sai vì $\log_{a^2} b^3 = \frac{3}{2} \log_a b$.

Chọn đáp án **(B)**

**Câu 13**

Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3 \left(\frac{3}{a} \right)$ bằng

(A) $1 - \log_3 a$.

(B) $3 - \log_3 a$.

(C) $\frac{1}{\log_3 a}$.

(D) $1 + \log_3 a$.

Lời giải.

Ta có $\log_3 \left(\frac{3}{a} \right) = \log_3 3 - \log_3 a = 1 - \log_3 a$.

Chọn đáp án **(A)**

**Câu 14**

Cho bốn số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a \neq 1, b \neq 1$ và $x^2 + y^2 = 1$. Biết rằng $\log_a(x + y) < 0$ và $\log_b(xy) < 0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) $\begin{cases} a > 1 \\ b > 1 \end{cases}$.

(B) $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < b < 1 \end{cases}$.

(C) $\begin{cases} a > 1 \\ 0 < b < 1 \end{cases}$.

(D) $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ b > 1 \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $(x + y)^2 > x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x + y > 1$. Lại có $xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{1}{2} < 1$.

Từ giả thiết $\log_a(x + y) < 0 = \log_a 1$ và $x + y > 1$ suy ra $0 < a < 1$. Từ $\log_b(xy) < 0 = \log_b 1$ và $xy < 1$ suy ra $b > 1$. Vậy $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ b > 1 \end{cases}$.

Chọn đáp án **(D)**

**Câu 15**

Cho a là một số thực dương khác 1 thỏa mãn $\log_4 \sqrt{a} = 5$. Tính $\log_a 2$.

(A) $\log_a 2 = \frac{1}{5}$.

(B) $\log_a 2 = 5$.

(C) $\log_a 2 = 20$.

(D) $\log_a 2 = \frac{1}{20}$.

Lời giải.

$$\log_4 \sqrt{a} = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \log_2 a = 5 \Leftrightarrow \log_2 a = 20.$$

Chọn đáp án **(C)**

**Câu 16**

Cho các số dương a, b, c, d . Biểu thức $M = \log \frac{a}{b} + \log \frac{b}{c} + \log \frac{c}{d} + \log \frac{d}{a}$ bằng

(A) 1.

(B) $\log \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \right)$.

(C) 0.

(D) 12.

Lời giải.

Ta có $M = \log \frac{a}{b} + \log \frac{b}{c} + \log \frac{c}{d} + \log \frac{d}{a} = \log \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{a} \right) = \log 1 = 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 17

Cho $a, b, c > 0, a \neq 1$ và số $\alpha \in \mathbb{R}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

(A) $\log_a(b - c) = \log_a \frac{b}{c}$.

(B) $\log_a a = 1$.

(C) $\log_a a^c = c$.

(D) $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$.

 **Lời giải.**

Với $a, b, c > 0, a \neq 1$ ta có

✓ $\log_a a = 1$.

✓ $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$.

✓ $\log_a a^c = c \log_a a = c$.

✓ $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 18

Tính giá trị biểu thức $B = \log_{\sqrt{2}} 4 + \log_5 \frac{1}{25}$.

(A) 2.

(B) 4.

(C) 6.

(D) 5.

 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} B &= \log_{\sqrt{2}} 4 + \log_5 \frac{1}{25} \\ &= \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^2 + \log_5 5^{-2} \\ &= 2 \cdot 2 \cdot \log_2 2 - 2 \log_5 5 \\ &= 4 - 2 = 2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 19

Cho $\ln x = 2$. Tính giá trị biểu thức $T = 2 \ln \sqrt{ex} - \ln \frac{e^2}{\sqrt{x}} + \ln 3 \cdot \log_3(ex^2)$.

(A) $T = 13$.

(B) $T = 12$.

(C) $T = 7$.

(D) $T = 21$.

 **Lời giải.**

Ta có $\ln x = 2 \Rightarrow x = e^2$. Khi đó

$$T = 2 \ln \sqrt{ex} - \ln \frac{e^2}{\sqrt{x}} + \ln 3 \cdot \log_3(ex^2) = \ln e^3 - \ln \frac{e^2}{e} + \ln e^5 = 3 - 1 + 5 = 7.$$

Chọn đáp án (C) □



Câu 20

Cho $a > 0$ và $a \neq 1$, khi đó $\log_a \sqrt[4]{a}$ bằng

- (A) 4. (B) $\frac{1}{4}$. (C) $-\frac{1}{4}$. (D) -4.

Lời giải.

Do $a > 0$ và $a \neq 1$ nên $\log_a \sqrt[4]{a} = \log_a a^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \log_a a = \frac{1}{4}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 21

Với a và b là hai số thực dương và $a \neq 1$, thì $\log_{a^2} b^6 - \log_a b^2$ bằng

- (A) $\log_a b$. (B) $\log_b a$. (C) 1. (D) $m = 0$.

Lời giải.

Ta có $\log_{a^2} b^6 - \log_a b^2 = \frac{6}{2} \log_a b - 2 \log_a b = \log_a b$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 22

Cho $\log 2 = a; \log 3 = b$. Tính $\log_6 90$ theo a, b .

- (A) $\frac{2b-1}{a+b}$. (B) $\frac{b+1}{a+b}$. (C) $\frac{2b+1}{a+b}$. (D) $\frac{2b+1}{a+2b}$.

Lời giải.

Ta có $\log_6 90 = \frac{\log 90}{\log 6} = \frac{\log(9 \cdot 10)}{\log(2 \cdot 3)} = \frac{\log 9 + \log 10}{\log 2 + \log 3} = \frac{2 \log 3 + 1}{\log 2 + \log 3} = \frac{2b+1}{a+b}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 23

Cho các số dương a, b, c và $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$. (B) $\log_a b + \log_a c = \log_a(b-c)$.
(C) $\log_a b + \log_a c = \log_a |b-c|$. (D) $\log_a b + \log_a c = \log_a(b+c)$.

Lời giải.

Ta có $\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$ (vì a, b, c dương và $a \neq 1$).

Chọn đáp án (A) □

Câu 24

Cho hai số thực dương a, b và $a \neq 1$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng?

- (A) $\log_{\sqrt{a}} ab = \frac{1}{2} + \log_{\sqrt{a}} \sqrt{b}$. (B) $2018 \log_a ab = 1 + \log_a b^{2018}$.
(C) $\log_a a^{2018} b = 2018 + \log_a b$. (D) $\log_a a^{2018} b = 2018 (1 + \log_a b)$.

Lời giải.

Với hai số thực dương a, b và $a \neq 1$, ta có

$$\log_a a^{2018} b = \log_a a^{2018} + \log_a b = 2018 + \log_a b.$$



Do đó, khẳng định $\log_a a^{2018}b = 2018 + \log_a b$ là khẳng định đúng.

Chọn đáp án (C)

Câu 25

Cho a, b là các số dương phân biệt khác 1 và thỏa mãn $ab = 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $\log_a b = 1$. (B) $\log_a(b+1) < 0$. (C) $\log_a b = -1$. (D) $\log_a(b+1) > 0$.

👉 Lời giải.

Ta có: $ab = 1 \Leftrightarrow b = a^{-1}$. Từ đó ta có: $\log_a b = \log_a a^{-1} = -1$.

Chọn đáp án (C)

Câu 26

Giá trị biểu thức $T = (e^3)^{\log_e 2}$ bằng

- (A) 9. (B) 8. (C) e. (D) 6.

👉 Lời giải.

Ta có $T = (e^3)^{\log_e 2} = (e^{\log_e 2})^3 = 2^3 = 8$.

Chọn đáp án (B)

Câu 27

Với a là số thực dương tùy ý $\log_3^2(a^2)$ bằng

- (A) $2 + \log_3^2 a$. (B) $4 \log_3^2 a$. (C) $2 \log_3^2 a$. (D) $4 + \log_3^2 a$.

👉 Lời giải.

Ta có $\log_3^2(a^2) = (2 \log_3 a)^2 = 4 \log_3^2 a$.

Chọn đáp án (B)

Câu 28

Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^3b^2 = 32$. Giá trị của $3 \log_2 a + 2 \log_2 b$ bằng

- (A) 5. (B) 2. (C) 32. (D) 4.

👉 Lời giải.

Ta có: $\log_2 a^3b^2 = \log_2 32 \Leftrightarrow 3 \log_2 a + 2 \log_2 b = 5$.

Chọn đáp án (A)

Câu 29

Xét tất cả các số thực dương a và b thỏa mãn $\log_3 a = \log_{\frac{1}{27}} \left(\frac{a}{b}\right)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $a^2 = b$. (B) $a^2b = 1$. (C) $a^4 = b^3$. (D) $a^4 = b$.

👉 Lời giải.



Ta có

$$\begin{aligned}\log_3 a &= \log_{\frac{1}{27}} \left(\frac{a}{b} \right) \Leftrightarrow \log_3 a = \log_{3^{(-3)}} \left(\frac{b}{a} \right)^{-1} \\ \Leftrightarrow \log_3 a &= \frac{1}{3} \log_3 \frac{b}{a} \Leftrightarrow \log_3 a^3 = \log_3 \frac{b}{a} \\ \Leftrightarrow a^4 &= b.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □**Câu 30**

Cho a, b là hai số thực dương và $ab \neq 1$ thỏa mãn $\log_{ab} a^2 = 3$. Tính giá trị của $\log_{ab} \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ bằng

(A) $\frac{3}{8}$.

(B) $\frac{3}{2}$.

(C) $\frac{8}{3}$.

(D) $\frac{2}{3}$.

📌 Lời giải.

$$\log_{ab} \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{1}{3} \log_{ab} \frac{a}{b} = \frac{1}{3} \log_{ab} \frac{a^2}{ab} = \frac{1}{3} (\log_{ab} a^2 - \log_{ab} ab) = \frac{1}{3} (3 - 1) = \frac{2}{3}.$$

Chọn đáp án (D) □

—HẾT—



§3. HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LOGARIT

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hàm số mũ

Định nghĩa 3.1. Cho số thực $a > 0$ và khác 1. Hàm số $y = a^x$ được gọi là hàm số mũ cơ số a .

Tính chất 3.1. Cho hàm số mũ $y = a^x$, trong đó $0 < a \neq 1$.

- Tập xác định của hàm số $y = a^x$ là $\mathbb{R}$;
- Tập giá trị của hàm số $y = a^x$ là $(0; +\infty)$.
- ✔ Khi $a > 1$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- ✔ Khi $0 < a < 1$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- ✔ Liên tục trên $\mathbb{R}$.
- ✔ Đồ thị luôn qua $(0; 1)$, $(1; a)$ và luôn nằm phía trên trục hoành.

Ví dụ 1

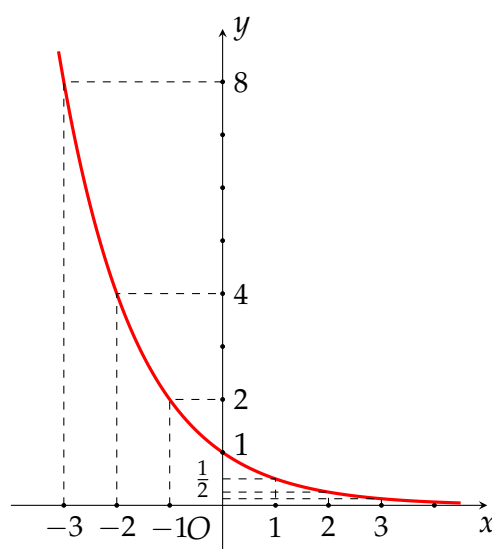
Vẽ đồ thị hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Lời giải.

Lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm như sau:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Từ đó, ta vẽ được đồ thị của hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ như Hình 6.2.



Hình 6.2



2. Hàm số logarit

Định nghĩa 3.2. Cho số thực $a > 0$ và khác 1. Hàm số $y = \log_a x$ được gọi là hàm số logarit cơ số a .

Tính chất 3.2. Cho hàm số logarit $y = \log_a x$, trong đó $0 < a \neq 1$.

- Tập xác định của hàm số $y = \log_a x$ là $(0; +\infty)$;
- Tập giá trị của hàm số $y = \log_a x$ là $\mathbb{R}$.
- ✔ Khi $a > 1$ thì hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$
- ✔ Khi $0 < a < 1$ thì hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.
- ✔ Liên tục trên $(0; +\infty)$.
- ✔ Đồ thị luôn qua $(1; 0)$, $(a; 1)$ và luôn nằm bên phải trục tung.

Ví dụ 2

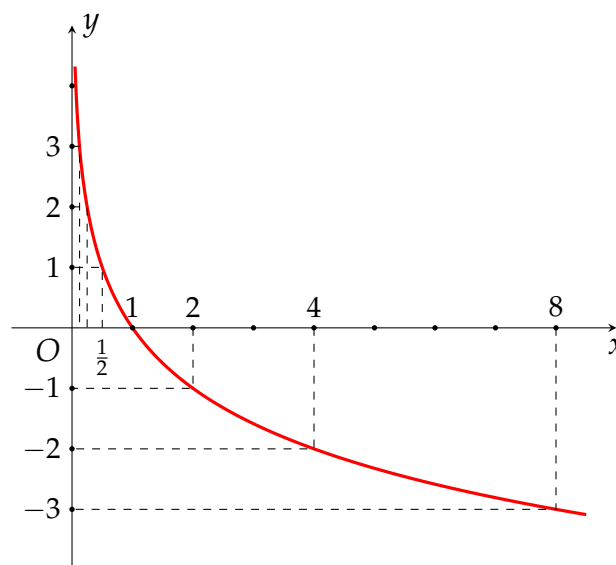
Vẽ đồ thị hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

🔗 Lời giải.

Lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm như sau:

x	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$y = \log_{\frac{1}{2}} x$	-3	-2	-1	0	1	2	3

Từ đó, ta vẽ được đồ thị của hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ như Hình 6.4.

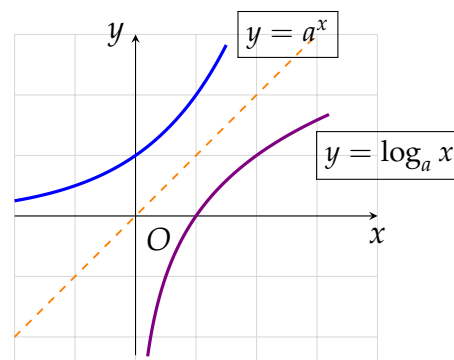


Hình 6.4



3. Liên hệ đồ thị của hai hàm số

Đồ thị hàm số $y = a^x$ và $y = \log_a x$ đối xứng nhau qua đường phân giác của góc phần tư (đường thẳng $y = x$) thứ nhất.



B MỘT SỐ DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Dạng 1 Đồ thị hàm số mũ, hàm số lôgarit

Ví dụ 1

Vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = 4^x$.

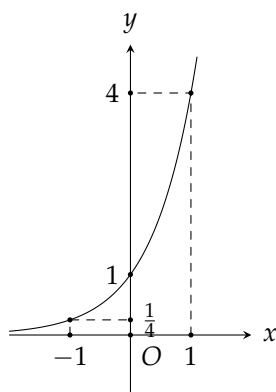
b) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

Lời giải.

a) Lập bảng giá trị của hàm số ta được

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$y = 4^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

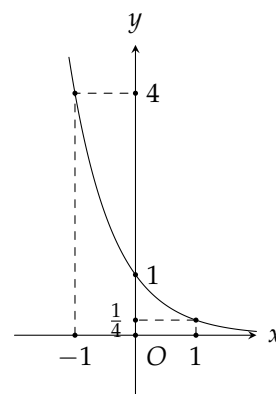
Đồ thị của hàm số $y = 4^x$ như bên dưới



b) Lập bảng giá trị của hàm số ta được

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Đồ thị của hàm số $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ như bên dưới



Ví dụ 2

Vẽ đồ thị các hàm số:

a) $y = \log x$.

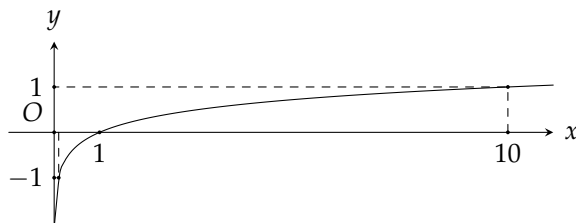
b) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.

👉 Lời giải.

a) Lập bảng giá trị của hàm số ta được

x	$\frac{1}{10}$	1	10
$y = \log x$	-1	0	1

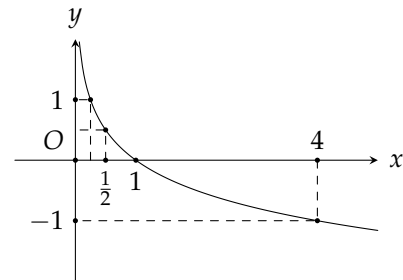
Đồ thị của hàm số $y = \log x$ như bên dưới



b) Lập bảng giá trị của hàm số ta được

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$y = \log_{\frac{1}{4}} x$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1

Đồ thị của hàm số $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ như bên dưới



Dạng 2

Tìm tập xác định của hàm số mũ và hàm số lôgarit

Ví dụ 1

Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y = \log_2(3 - 2x)$.

b) $y = \log_3(x^2 + 4x)$.

👉 Lời giải.

a) Hàm số $y = \log_2(3 - 2x)$ xác định khi $3 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$.

Vậy tập xác định của hàm số $y = \log_2(3 - 2x)$ là $\mathcal{D} = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$.

b) Hàm số $y = \log_3(x^2 + 4x)$ xác định khi $x^2 + 4x > 0 \Leftrightarrow x < -4 \vee x > 0$.

Vậy tập xác định của hàm số $y = \log_3(x^2 + 4x)$ là $\mathcal{D} = (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$.

Ví dụ 2

Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y = 12^x$;

b) $y = \log_5(2x - 3)$;

c) $y = \log_{\frac{1}{5}}(-x^2 + 4)$.

Lời giải.

a) Tập xác định của hàm số $y = 12^x$ là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

b) Điều kiện $2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$.

Vậy tập xác định của hàm số $y = \log_5(2x - 3)$ là $\mathcal{D} = \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

c) Điều kiện $-x^2 + 4 > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$.

Vậy tập xác định của hàm số $y = \log_{\frac{1}{5}}(-x^2 + 4)$ là $\mathcal{D} = (-2; 2)$.

Dạng 3 Một số bài toán thực tế

Ví dụ 1

Cường độ ánh sáng I dưới mặt biển giảm dần theo độ sâu theo công thức $I = I_0 \cdot a^d$, trong đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt nước biển, $a > 0$ là hằng số và d là độ sâu tính bằng mét tính từ mặt nước biển.

(Nguồn: <http://www.britannica.com/science/seawater/Optical-properties>)

a) Có thể khẳng định rằng $0 < a < 1$ không? Giải thích.

b) Biết rằng cường độ ánh sáng tại độ sâu 1m bằng $0,95I_0$. Tìm giá trị của a .

c) Tại độ sâu 20m, cường độ ánh sáng bằng bao nhiêu phần trăm so với I_0 ? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.)

Lời giải.

a) Do I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt nước biển là không đổi, nên cường độ ánh sáng I tỉ lệ thuận với hàm số a^d .

Do I giảm dần theo độ sâu, nên hàm số a^d nghịch biến, suy ra $0 < a < 1$.

b) Tại độ sâu 1m, ta có cường độ ánh sáng $I = 0,95I_0$, suy ra $0,95I_0 = I_0a^1 \Leftrightarrow a = 0,95$.

c) Tại độ sâu 20m, suy ra $d = 20$. Cường độ ánh sáng tại đó là $I = I_0a^d = I_0 \cdot 0,95^{20} \approx 0,4I_0$.
Vậy tại độ sâu 20m, cường độ ánh sáng tại đó bằng khoảng 40% so với I_0 .

Ví dụ 2

Công thức $h = -19,4 \cdot \log \frac{P}{P_0}$ là mô hình đơn giản cho phép tính độ cao h so với mặt nước biển của một vị trí trong không trung (tính bằng ki-lô-mét) theo áp suất không khí P tại điểm đó và

áp suất P_0 của không khí tại mặt nước biển (cùng tính bằng Pa - đơn vị áp suất, đọc là Pascal).

(Nguồn: <http://doi.org/10.1007/s40828-020-01111-6>)

- Nếu áp suất không khí ngoài máy bay bằng $\frac{1}{2}P_0$ thì máy bay đang ở độ cao nào?
- Áp suất không khí tại đỉnh của ngọn núi A bằng $\frac{4}{5}$ lần áp suất không khí tại đỉnh của ngọn núi B. Ngọn núi nào cao hơn và cao hơn bao nhiêu ki-lô-mét? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)

📌 Lời giải.

- Nếu áp suất ở ngoài máy bay là $\frac{1}{2}P_0$ thì độ cao của máy bay là

$$h = -19,4 \cdot \log \frac{\frac{1}{2}P_0}{P_0} = -19,4 \cdot \log \frac{1}{2} \approx 5,8\text{km}.$$

- Gọi áp suất lần lượt của hai ngọn núi A và B là P_A, P_B . Ta có $P_A = \frac{4}{5}P_B$.

$$\text{Độ cao của núi A và núi B là } \begin{cases} h_A = -19,4 \cdot \log \frac{P_A}{P_0} \\ h_B = -19,4 \cdot \log \frac{P_B}{P_0}. \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} h_A &= -19,4 \cdot \log \frac{P_A}{P_0} = -19,4 \cdot \log \frac{\frac{4}{5}P_B}{P_0} \\ &= -19,4 \cdot \left(\log \frac{4}{5} + \log \frac{P_B}{P_0} \right) = -19,4 \cdot \log \frac{4}{5} + h_B \approx h_B + 1,9. \end{aligned}$$

Vậy núi A cao hơn núi B 1,9km.



C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

Vẽ đồ thị các hàm số sau:

$$\text{a) } y = 3^x;$$

$$\text{b) } y = \left(\frac{1}{3}\right)^x.$$

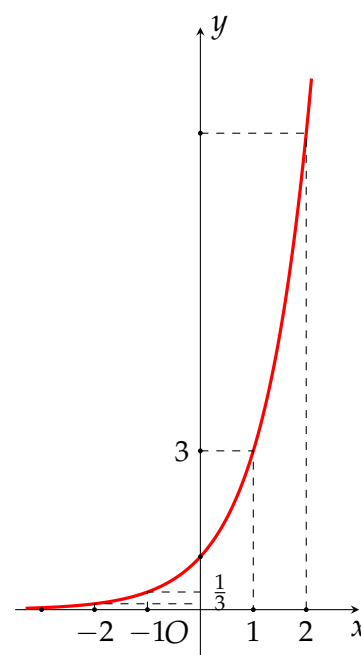
📌 Lời giải.

- Vẽ đồ thị hàm số $y = 3^x$.

Lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm như sau:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 3^x$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27

Từ đó, ta vẽ được đồ thị của hàm số $y = 3^x$ như hình bên.

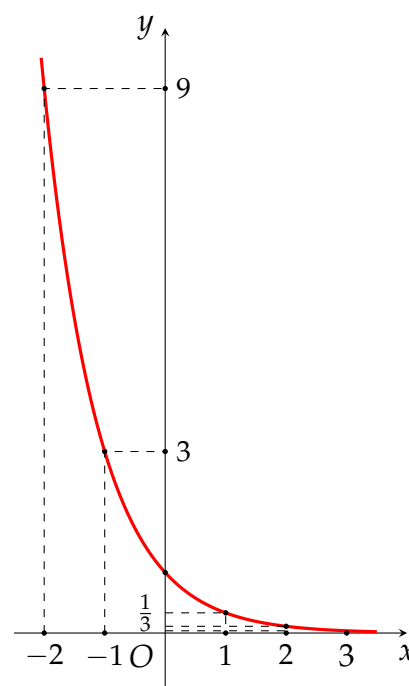


b) Vẽ đồ thị hàm số $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm như sau:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 3^x$	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$

Từ đó, ta vẽ được đồ thị của hàm số $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ như hình bên.



Bài 2

Vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \log x$;

b) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

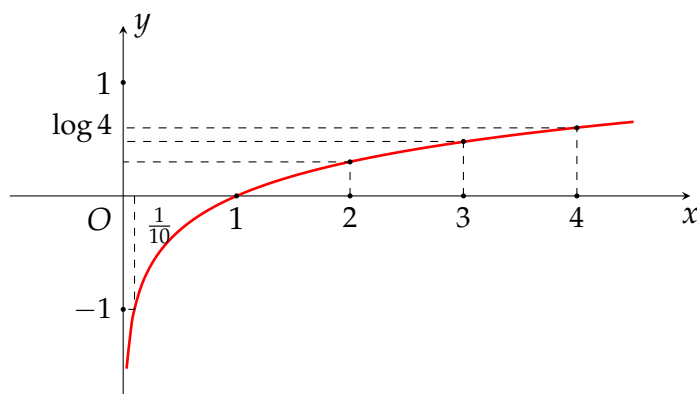
Lời giải.

a) Vẽ đồ thị hàm số $y = \log x$.

Lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm như sau:

x	$\frac{1}{10}$	1	2	3	4
$y = \log x$	-1	0	$\log 2$	$\log 3$	$\log 4$

Từ đó, ta vẽ được đồ thị của hàm số $y = \log x$ như hình bên dưới.

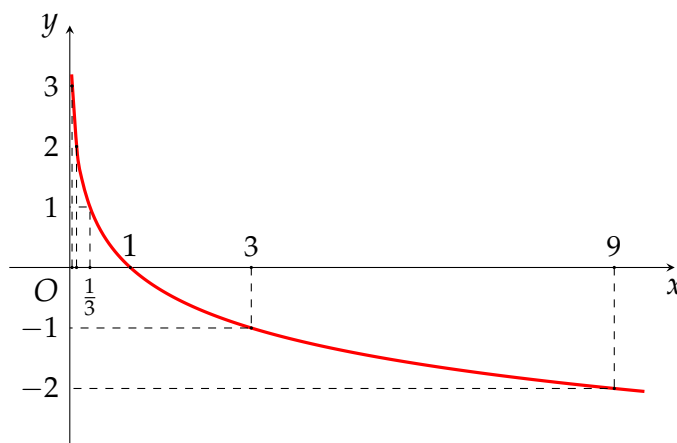


b) Vẽ đồ thị hàm số $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

Lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm như sau:

x	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$y = \log_{\frac{1}{3}} x$	3	2	1	0	-1	-2

Từ đó, ta vẽ được đồ thị của hàm số $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ như hình bên dưới.



Bài 3

Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \log |x + 3|$;

b) $y = \ln(4 - x^2)$.

Lời giải.

a) Hàm số xác định khi và chỉ khi $x + 3 \neq 0$ hay $x \neq -3$.
Suy ra tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

- b) Hàm số xác định khi và chỉ khi $4 - x^2 > 0$ hay $-2 < x < 2$.
Suy ra tập xác định $\mathcal{D} = (-2; 2)$.

Bài 4

Giả sử một chất phóng xạ bị phân rã theo cách sao cho khối lượng $m(t)$ của chất còn lại (tính bằng kilôgam) sau t ngày được cho bởi hàm số $m(t) = 13e^{-0,0015t}$.

- Tìm khối lượng của chất đó tại thời điểm $t = 0$.
- Sau 45 ngày khối lượng chất đó còn lại là bao nhiêu?

 **Lời giải.**

- a) $m(0) = 13e^0 = 13$ (kilôgam).
b) $m(45) = 13e^{-0,015 \cdot 45} \approx 6,62$ (kilôgam).

Bài 5

Trong một nghiên cứu, một nhóm học sinh được cho xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ còn nhớ bao nhiêu phần trăm danh sách đó sau mỗi tháng. Giả sử sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó được tính theo công thức $M(t) = 75 - 20 \ln(t + 1)$, $0 \leq t \leq 12$ (đơn vị: %). Hãy tính khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó sau 6 tháng.

 **Lời giải.**

Khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó sau 6 tháng là

$$M(6) = 75 - 20 \ln(6 + 1) \approx 36,1\%.$$

Bài 6

Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

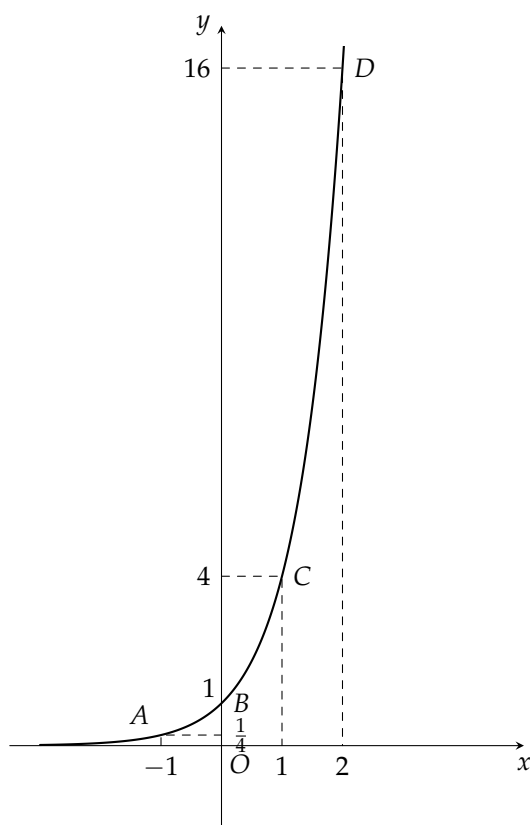
- a) $y = 4^x$; b) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.

 **Lời giải.**

- a) Vì hàm số $y = 4^x$ có cơ số $4 > 1$ nên ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$y = 4^x$		$0 \nearrow 1 \nearrow +\infty$	

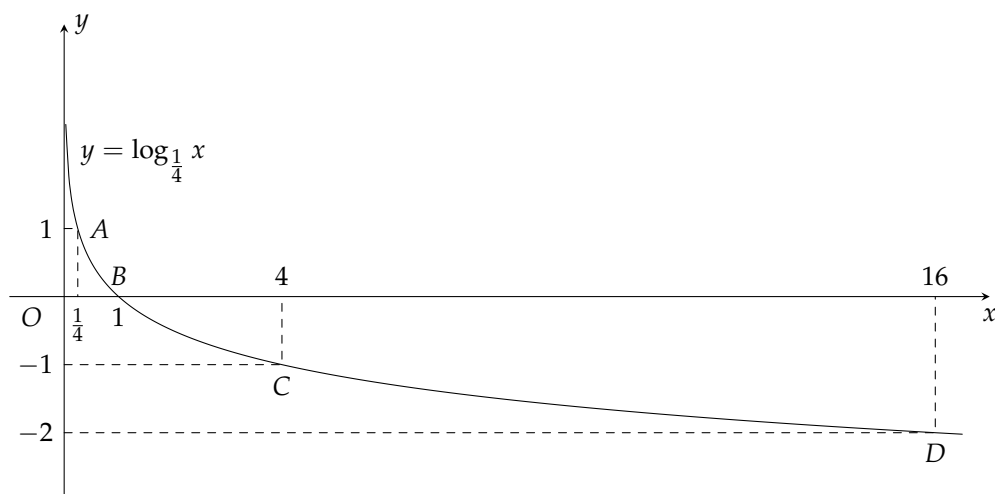
Đồ thị của hàm số $y = 4^x$ là một đường cong liền nét đi qua các điểm $A\left(-1; \frac{1}{4}\right)$, $B(0; 1)$, $C(1; 4)$, $D(2; 16)$.



b) Vì hàm số $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ có cơ số $\frac{1}{4} < 1$ nên ta có bảng biến thiên như sau

x	0	1	$+\infty$
$y = \log_{\frac{1}{4}} x$	$+\infty$	0	$-\infty$

Đồ thị của hàm số $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ là một đường cong liền nét đi qua các điểm $A\left(\frac{1}{4}; 1\right)$, $B(1; 0)$, $C(4; -1)$, $D(16; -2)$.





Bài 7

Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến, hàm số nào nghịch biến trên khoảng xác định của hàm số đó? Vì sao?

a) $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$; b) $y = \left(\frac{\sqrt[3]{26}}{3}\right)^x$; c) $y = \log_{\pi} x$; d) $y = \log_{\frac{\sqrt{15}}{4}} x$.

Lời giải.

a) Vì $0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ nên hàm số $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

b) Vì $0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ nên hàm số $y = \left(\frac{\sqrt[3]{26}}{3}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

c) Vì $\pi > 1$ nên hàm số $y = \log_{\pi} x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

d) Vì $0 < \frac{\sqrt{15}}{4} < 1$ nên hàm số $y = \log_{\frac{\sqrt{15}}{4}} x$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Bài 8

Ta coi năm lấy làm mốc để tính dân số của một vùng (hoặc một quốc gia) là năm 0. Khi đó, dân số của quốc gia đó ở năm thứ t là hàm số theo biến t được cho bởi công thức: $S = A \cdot e^{rt}$. Trong đó A là dân số của vùng (hoặc quốc gia) đó ở năm 0 và r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm (Nguồn: Giải tích 12, NXBGD Việt Nam, 2021). Biết rằng dân số Việt Nam năm 2021 ước tính là 98564407 người và tỉ lệ tăng dân số 0,93%/năm (Nguồn: <https://danso.org/viet-nam>). Giả sử tỉ lệ tăng dân số hằng năm là như nhau tính từ năm 2021, nêu dự đoán dân số Việt Nam năm 2030 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải.

Dân số Việt Nam vào năm 2030 là

$$S = A \cdot e^{rt} = 98564407 \cdot e^{0,93\% \cdot 9} \approx 107169341 \text{ (người)}.$$

Bài 9

Các nhà tâm lí học sử dụng mô hình hàm số mũ để mô phỏng quá trình học tập của một học sinh như sau: $f(t) = c(1 - e^{-kt})$, trong đó c là tổng số đơn vị kiến thức học sinh phải học, k (kiến thức/ngày) là tốc độ tiếp thu của học sinh, t (ngày) là thời gian học và $f(t)$ là số đơn vị kiến thức học sinh đã học được (Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson). Giả sử một em học sinh phải tiếp thu 25 đơn vị kiến thức mới. Biết rằng tốc độ tiếp thu của em học sinh là $k = 0,2$. Hỏi em học sinh sẽ nhớ được (khoảng) bao nhiêu đơn vị kiến thức mới sau 2 ngày? Sau 8 ngày?

Lời giải.

Số đơn vị kiến thức mới em học sinh sẽ nhớ sau 2 ngày là

$$f(2) = 25(1 - e^{-0,2 \cdot 2}) \approx 8,24 \text{ (đơn vị)}.$$



Số đơn vị kiến thức mới em học sinh sẽ nhớ sau 8 ngày là

$$f(8) = 25(1 - e^{-0,2 \cdot 8}) \approx 19,95 \text{ (đơn vị)}.$$



Bài 10

Chỉ số hay độ pH của một dung dịch được tính theo công thức: $\text{pH} = -\log [\text{H}^+]$. Phân tích nồng độ ion hydrogen $[\text{H}^+]$ trong hai mẫu nước sông, ta có kết quả sau: Mẫu 1: $[\text{H}^+] = 8 \cdot 10^{-7}$; Mẫu 2: $[\text{H}^+] = 2 \cdot 10^{-9}$. Không dùng máy tính cầm tay, hãy so sánh độ pH của hai mẫu nước trên.

📌 Lời giải.

Hàm số $\text{pH} = -\log [\text{H}^+]$ có $a = 10 > 1$ nên nghịch biến trên $(0; +\infty)$.
Vì $8 \cdot 10^{-7} > 2 \cdot 10^{-9}$ nên độ pH của mẫu 1 bé hơn độ pH của mẫu 2.



Bài 11

Một người gửi 10 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất 6%/năm. Giả sử qua các năm thì lãi suất không thay đổi và người đó không gửi thêm tiền vào mỗi năm. Để biết sau y (năm) thì tổng số tiền cả vốn và lãi có được là x (đồng), người đó sử dụng công thức $y = \log_{1,06} \left(\frac{x}{10} \right)$. Hỏi sau bao nhiêu năm thì người đó có được tổng số tiền cả vốn và lãi là 15 triệu đồng? 20 triệu đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

📌 Lời giải.

Người đó có được tổng số tiền cả vốn lẫn lãi là 15 triệu đồng sau

$$y = \log_{1,06} \left(\frac{15}{10} \right) \approx 7 \text{ (năm)}.$$

Người đó có được tổng số tiền cả vốn lẫn lãi là 20 triệu đồng sau

$$y = \log_{1,06} \left(\frac{20}{10} \right) \approx 12 \text{ (năm)}.$$



Bài 12

So sánh các cặp số sau:

a) $1,3^{0,7}$ và $1,3^{0,6}$.

b) $0,75^{-2,3}$ và $0,75^{-2,4}$.

📌 Lời giải.

a) Do $1,3 > 1$ nên hàm số $y = 1,3^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà $0,7 > 0,6$ nên $1,3^{0,7} > 1,3^{0,6}$.

b) Do $0,75 < 1$ nên hàm số $y = 0,75^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Mà $-2,3 > -2,4$ nên $0,75^{-2,3} < 0,75^{-2,4}$.



Bài 13

Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y = \log_2(3 - 2x)$.

b) $y = \log_3(x^2 + 4x)$.

 **Lời giải.**

a) Hàm số $y = \log_2(3 - 2x)$ xác định khi $3 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$.

Vậy tập xác định của hàm số $y = \log_2(3 - 2x)$ là $\mathcal{D} = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$.

b) Hàm số $y = \log_3(x^2 + 4x)$ xác định khi $x^2 + 4x > 0 \Leftrightarrow x < -4 \vee x > 0$.

Vậy tập xác định của hàm số $y = \log_3(x^2 + 4x)$ là $\mathcal{D} = (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$.

□

Bài 14

So sánh các cặp số sau:

a) $\log_\pi 0,8$ và $\log_\pi 1,2$.

b) $\log_{0,3} 2$ và $\log_{0,3} 2,1$.

 **Lời giải.**

a) Hàm số $y = \log_\pi x$ có cơ số $\pi > 1$ nên đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Mà $0,8 < 1,2$ nên $\log_\pi 0,8 < \log_\pi 1,2$.

b) Hàm số $y = \log_{0,3} x$ có cơ số $0,3 < 1$ nên nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Mà $2 < 2,1$ nên $\log_{0,3} 2 > \log_{0,3} 2,1$.

□

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM LẦN 1

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN – ĐỀ SỐ 1

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	(A) (B) (C) (D)	8	(A) (B) (C) (D)	15	(A) (B) (C) (D)	22	(A) (B) (C) (D)	29	(A) (B) (C) (D)
2	(A) (B) (C) (D)	9	(A) (B) (C) (D)	16	(A) (B) (C) (D)	23	(A) (B) (C) (D)	30	(A) (B) (C) (D)
3	(A) (B) (C) (D)	10	(A) (B) (C) (D)	17	(A) (B) (C) (D)	24	(A) (B) (C) (D)	31	(A) (B) (C) (D)
4	(A) (B) (C) (D)	11	(A) (B) (C) (D)	18	(A) (B) (C) (D)	25	(A) (B) (C) (D)	32	(A) (B) (C) (D)
5	(A) (B) (C) (D)	12	(A) (B) (C) (D)	19	(A) (B) (C) (D)	26	(A) (B) (C) (D)	33	(A) (B) (C) (D)
6	(A) (B) (C) (D)	13	(A) (B) (C) (D)	20	(A) (B) (C) (D)	27	(A) (B) (C) (D)	34	(A) (B) (C) (D)
7	(A) (B) (C) (D)	14	(A) (B) (C) (D)	21	(A) (B) (C) (D)	28	(A) (B) (C) (D)	35	(A) (B) (C) (D)

Câu 1

Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \log_3(3 - x)$.

- (A) $\mathcal{D} = (3; +\infty)$. (B) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. (C) $\mathcal{D} = (-\infty; 3)$. (D) $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

👉 Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow 3 - x > 0 \Leftrightarrow x < 3$. Suy ra, $\mathcal{D} = (-\infty; 3)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2

Một người gửi vào ngân hàng 500 triệu đồng với lãi suất 0,6% một tháng, sau mỗi tháng lãi suất được nhập vào vốn. Hỏi sau một năm người đó rút tiền thì tổng số tiền người đó nhận được là bao nhiêu?

- (A) $500 \cdot 1,006$ (triệu đồng). (B) $500 \cdot 1,06^{12}$ (triệu đồng).
(C) $500 \cdot (1 + 12 \cdot 0,006)^{12}$ (triệu đồng). (D) $500 \cdot 1,006^{12}$ (triệu đồng).

👉 Lời giải.

Công thức lãi suất $A(1 + x\%)^n = 500 \cdot (1 + 0,6\%)^{12} = 500 \cdot 1,006^{12}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3

Đồ thị hàm số $y = a^x + 1$ có một đường tiệm cận là

- (A) $y = 1$. (B) $y = -1$. (C) $y = 0$. (D) $x = 0$.

👉 Lời giải.

Đồ thị (C) của hàm số $y = a^x$ chỉ có một đường tiệm cận ngang $y = 0$.

Mà đồ thị (C') của hàm số $y = a^x + 1$ có được bằng cách tịnh tiến (C) lên một đơn vị.

Nên (C') chỉ có một đường tiệm cận ngang $y = 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 4

Hàm số $y = 2^{x^2-x}$ có đạo hàm là

- (A) $(x^2 - x) \cdot 2^{x^2-x-1}$.
 (B) $(2x - 1) \cdot 2^{x^2-x}$.
 (C) $2^{x^2-x} \cdot \ln 2$.
 (D) $(2x - 1) \cdot 2^{x^2-x} \cdot \ln 2$.

 **Lời giải.**

Ta có $y' = (x^2 - x)' \cdot 2^{x^2-x} \cdot \ln 2 = (2x - 1) \cdot 2^{x^2-x} \cdot \ln 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5

Giả sử cứ sau một năm diện tích rừng của nước ta giảm x phần trăm diện tích hiện có. Hỏi sau đây 4 năm diện tích rừng của nước ta sẽ là bao nhiêu phần trăm diện tích hiện nay?

- (A) $(1 - x)^4$.
 (B) $1 - \frac{4x}{100}$.
 (C) $1 - \left(\frac{x}{100}\right)^4$.
 (D) $\left(1 - \frac{x}{100}\right)^4$.

 **Lời giải.**

Diện tích rừng lúc đầu là S , diện tích rừng sau 4 năm là S_0 ; $x\% = \frac{x}{100}$. Ta có

$$S = S_0 \left(1 - \frac{x}{100}\right)^4 = S_0 \left(1 - \frac{x}{100}\right)^4 \Leftrightarrow \frac{S}{S_0} = \left(1 - \frac{x}{100}\right)^4.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 6

Tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \ln \frac{3x+6}{1-x}$ là

- (A) $\mathcal{D} = (-2; 1)$.
 (B) $\mathcal{D} = (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.
 (C) $\mathcal{D} = [-2; 1)$.
 (D) $\mathcal{D} = (-\infty; -2] \cup (1; +\infty)$.

 **Lời giải.**

Điều kiện xác định: $\frac{3x+6}{1-x} > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 1$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = (-2; 1)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7

Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- (A) $y = \left(\frac{3}{\pi}\right)^x$.
 (B) $y = \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{e}\right)^x$.
 (C) $y = \log_7(x^4 + 5)$.
 (D) $y = \left(\frac{\sqrt{2018} - \sqrt{2015}}{10^{-1}}\right)^x$.

 **Lời giải.**

Ta có $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{e} > 1$ nên hàm số $y = \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{e}\right)^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8

Hàm số $y = \ln(-x^2 + 5x - 6)$ có tập xác định là:

- (A) $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$. (B) $(0; +\infty)$.
(C) $(-\infty; 0)$. (D) $(2; 3)$.

Lời giải.

Điều kiện để hàm số xác định là $-x^2 + 5x - 6 > 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9

Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \log_2(x^2 - 2x - 3)$.

- (A) $\mathcal{D} = (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$. (B) $\mathcal{D} = [-1; 3]$.
(C) $\mathcal{D} = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. (D) $\mathcal{D} = (-1; 3)$.

Lời giải.

$x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10

Tập xác định của hàm số $y = \log_{\sqrt{10}}(12 - x - x^2)$ là

- (A) $(-4; 3)$. (B) $(-3; 4)$.
(C) $[-4; 3]$. (D) $(-\infty; -4) \cup (3; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện $12 - x - x^2 > 0 \Leftrightarrow -4 < x < 3$.

Vậy tập xác định của hàm số là $(-4; 3)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 11

Bạn A gửi tiết kiệm số tiền 58000000 đồng tại một ngân hàng theo thể thức lãi kép. Sau 8 tháng bạn đó nhận được 61329000 đồng cả gốc lẫn lãi. Hỏi lãi suất hàng tháng của ngân hàng đó là bao nhiêu?

- (A) 0,6%. (B) 6%. (C) 0,7%. (D) 7%.

Lời giải.

Gọi lãi suất ngân hàng đó là r .

Ta có $58000000(1 + r)^8 = 61329000 \Leftrightarrow 1 + r = 1,007 \Rightarrow r = 0,007 = 0,7\%$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12

Tập xác định của hàm số $y = \log_3(-3x^2 + 23x - 20)$ có bao nhiêu giá trị nguyên?

- (A) 6. (B) 4. (C) 7. (D) 5.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $-3x^2 + 23x - 20 > 0 \Leftrightarrow 1 < x < \frac{20}{3}$.

Vậy tập xác định có tất cả 5 giá trị nguyên.

Chọn đáp án (D)

Câu 13

Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên tập xác định của nó?

(A) $y = \left(\frac{e}{2}\right)^x$.

(B) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}}\right)^x$.

(C) $y = \left(\frac{4}{\sqrt{3} + 2}\right)^x$.

(D) $y = \left(\frac{\pi + 3}{2\pi}\right)^x$.

Lời giải.

Cả 4 hàm số đã cho đều là hàm số mũ, ta thấy chỉ có hàm số $y = \left(\frac{\pi + 3}{2\pi}\right)^x$ có cơ số $\frac{\pi + 3}{2\pi} \in (0; 1)$ nên chỉ có hàm số $y = \left(\frac{\pi + 3}{2\pi}\right)^x$ nghịch biến trên tập xác định của nó.

Chọn đáp án (D)

Câu 14

Trong các hàm số sau đây, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

(A) $y = \left(\frac{2}{e}\right)^x$.

(B) $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$.

(C) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$.

(D) $y = 2^{-x}$.

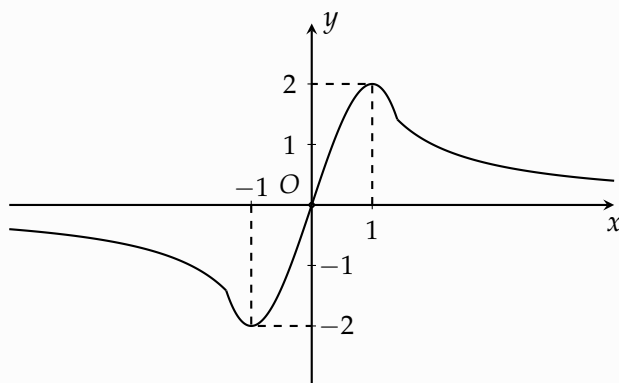
Lời giải.

Hàm số $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và có cơ số $\frac{\pi}{3} > 1$ nên hàm số $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 15

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình dưới



Biết rằng trục hoành là tiệm cận ngang của đồ thị. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = 4^{m+2\log_4 \sqrt{2}}$ có hai nghiệm phân biệt dương.

(A) $m > 1$.

(B) $0 < m < 1$.

(C) $m < 0$.

(D) $0 < m < 2$.

Lời giải.

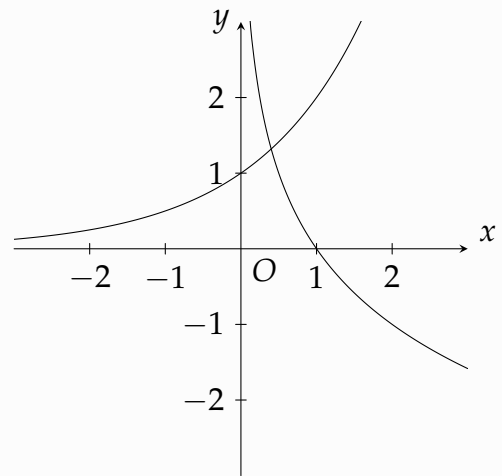
Số nghiệm của phương trình $f(x) = 4^{m+2\log_4 \sqrt{2}}$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 4^{m+2\log_4 \sqrt{2}}$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 4^{m+2\log_4 \sqrt{2}} < 2 \Leftrightarrow 2m + 4\log_4 \sqrt{2} < 1 \Leftrightarrow m < 0$.

Chọn đáp án **(C)****Câu 16**

Cho hai đồ thị $y = a^x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm khẳng định đúng.

- (A)** $0 < a < 1; 0 < b < 1$. **(B)** $a > 1; b > 1$.
(C) $a > 1; 0 < b < 1$. **(D)** $0 < a < 1; b > 1$.



📌 Lời giải.

Từ đồ thị suy ra:

Hàm số $y = a^x$ đồng biến trên tập xác định $\mathbb{R} \Rightarrow a > 1$;

Hàm số $y = \log_b x$ nghịch biến trên tập xác định $(0; +\infty) \Rightarrow 0 < b < 1$.

Vậy khẳng định đúng là $a > 1; 0 < b < 1$.

Chọn đáp án **(C)****Câu 17**

Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào nghịch biến trên tập số thực $\mathbb{R}$.

- (A)** $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. **(B)** $y = \left(\frac{2}{\pi}\right)^x$.
(C) $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$. **(D)** $y = \log_{\frac{\pi}{4}}(2x^2 + 1)$.

📌 Lời giải.

Hàm số $y = \left(\frac{2}{\pi}\right)^x$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ và cơ số $a = \frac{2}{\pi} < 1$ nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án **(B)****Câu 18**

Tính đạo hàm y' của hàm số $y = 7^{x+3}$.

- (A)** $y' = 7^{x+3}$. **(B)** $y' = 7^{x+2} \ln 7$. **(C)** $y' = 7^{x+3} \ln 7$. **(D)** $y' = \frac{7^x}{\ln 7}$.

📌 Lời giải.

Đạo hàm $y' = 7^{x+3} \ln 7$.

Chọn đáp án **(C)****Câu 19**

Trong các hàm số được cho dưới đây, hàm số nào có tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$?

- (A)** $y = \ln(x^2 - 1)$. **(B)** $y = \ln(1 - x^2)$. **(C)** $y = \ln(x + 1)^2$. **(D)** $y = \ln(x^2 + 1)$.





Lời giải.

Do $x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $y = \ln(x^2 + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (D)



Câu 20

Tập xác định của hàm số $y = \log_3(4 - x)$ là

- (A) $D = [4; +\infty)$. (B) $D = (-\infty; 4]$. (C) $D = (4; +\infty)$. (D) $D = (-\infty; 4)$.

Lời giải.

Hàm số $y = \log_3(4 - x)$ xác định khi $4 - x > 0 \Leftrightarrow x < 4$.

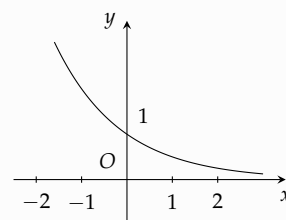
Chọn đáp án (D)



Câu 21

Đường cong ở hình bên là đồ thị của một hàm số được liệt kê trong bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- (A) $y = -x^2 + 2x + 1$. (B) $y = \log_{0,5} x$.
(C) $y = \frac{1}{2^x}$. (D) $y = 2^x$.



Lời giải.

Hàm số đã cho nghịch biến trên tập xác định, đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $(0; 1)$, nhận đường thẳng $x = 0$ làm tiệm cận ngang. Từ đó chỉ có hàm số $y = \frac{1}{2^x}$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (C)



Câu 22

Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \log(x^2 + 2x + 3)$.

- (A) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; -1\}$. (B) $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
(C) $\mathcal{D} = \emptyset$. (D) $\mathcal{D} = (-\infty; -2) \cup (-1; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số là $x^2 + 2x + 3 > 0$ (đúng $\forall x \in \mathbb{R}$).

Chọn đáp án (B)



Câu 23

Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- (A) $y = \log_3 x$. (B) $y = \log_5 \left(\frac{1}{x^2} \right)$. (C) $y = \left(\frac{1}{2} \right)^x$. (D) $y = 2018^x$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = 2018^x$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ và cơ số $a = 2018 > 1$. Do đó, hàm số $y = 2018^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (D)



Câu 24

Tập xác định của hàm số $y = \log_5 x$ là

- (A) $[0; +\infty)$. (B) $(0; +\infty)$. (C) $\mathbb{R}$. (D) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = (0; +\infty)$

Chọn đáp án (B)

Câu 25

Ông V gửi tiết kiệm 200 triệu đồng vào ngân hàng với hình thức lãi kép và lãi suất 7,2% một năm. Hỏi sau 5 năm ông V thu về số tiền (cả vốn lẫn lãi) gần nhất với số nào sau đây?

- (A) 283.145.000 đồng. (B) 283.155.000 đồng. (C) 283.142.000 đồng. (D) 283.151.000 đồng.

Lời giải.

Gọi T là tổng số tiền thu được sau 5 năm.

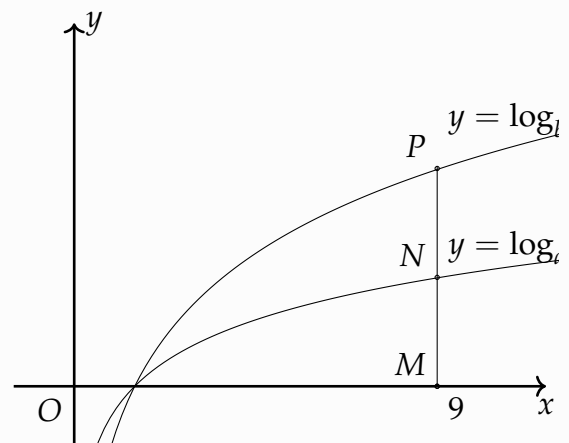
Khi đó $T = 200.000.000 \left(1 + \frac{7,2}{100}\right)^5 \approx 283.142.000$ đồng.

Chọn đáp án (C)

Câu 26

Cho hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị lần lượt là (C) và (C') (như hình vẽ bên). Đường thẳng $x = 9$ cắt trục hoành và các đồ thị (C) và (C') lần lượt tại M , N và P . Biết rằng $MN = NP$, hãy xác định biểu thức liên hệ giữa a và b

- (A) $a = b^2$. (B) $a = 9b$.
(C) $a = 3b$. (D) $a = b + 3$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị suy $a > b$ và N thuộc đồ thị $y = \log_a x$ và P thuộc đồ thị hàm số $y = \log_b x$. Do giả thiết suy ra $MN = \log_a 9$ và $MP = \log_b 9$. Vì $MN = NP$ suy ra $MP = 2MN$ nên

$$\log_b 9 = 2 \log_a 9 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_9 b} = \frac{2}{\log_9 a} \Leftrightarrow \log_9 a = 2 \log_9 b \Leftrightarrow \log_9 a = \log_9 b^2 \Leftrightarrow a = b^2.$$

Chọn đáp án (A)

—HẾT—

§4. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

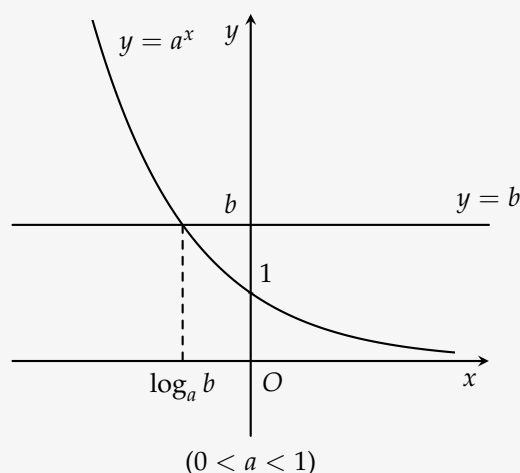
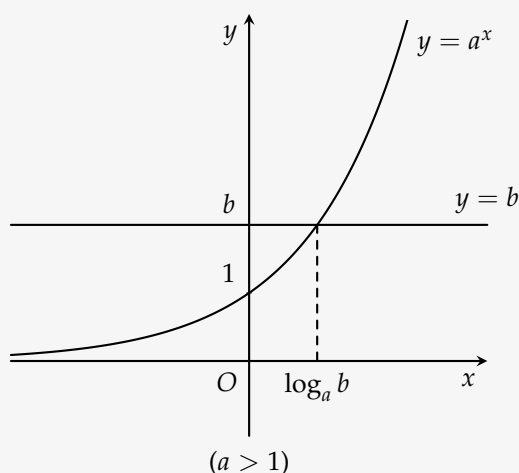
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình mũ

Định nghĩa 4.1. Phương trình mũ cơ bản có dạng $a^x = b$ với $0 < a \neq 1$.

- ✔ Nếu $b > 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.
- ✔ Nếu $b \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Minh họa bằng đồ thị



Giải phương trình mũ bằng cách đưa về cùng cơ số

Nếu $0 < a \neq 1$ thì $a^u = a^v \Leftrightarrow u = v$.

Ví dụ 1

Giải phương trình $3^{x+1} = \frac{1}{3^{1-2x}}$.

👉 **Lời giải.**

Đưa về phải về cơ số 3, ta có $\frac{1}{3^{1-2x}} = 3^{2x-1}$.

Từ đó phương trình trở thành $3^{x+1} = 3^{2x-1} \Leftrightarrow x+1 = 2x-1 \Leftrightarrow x=2$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$. □

Ví dụ 2

Giải phương trình $10^{x-1} = 2022$.

👉 **Lời giải.**

Lấy lôgarit thập phân hai vế của phương trình ta được $x-1 = \log 2022$ hay $x = 1 + \log 2022$

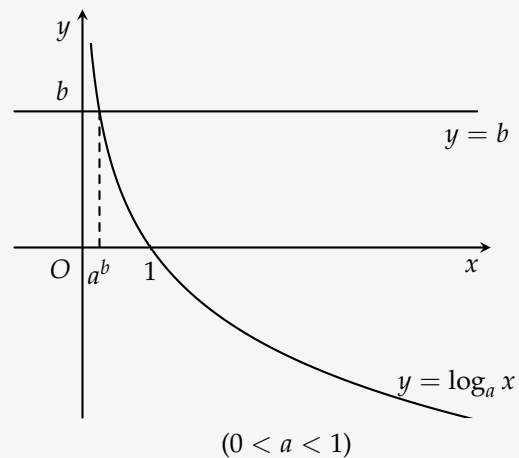
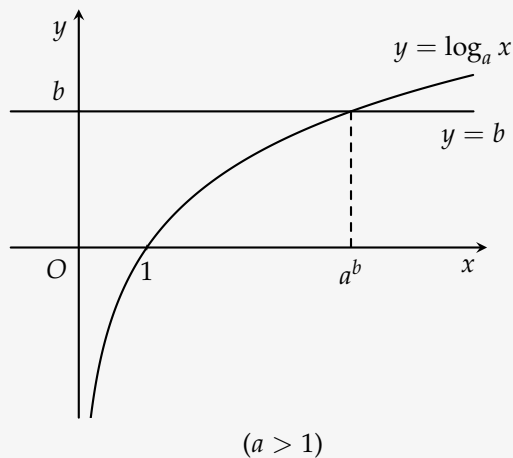
Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1 + \log 2022$. □

2. Phương trình lôgarit

Định nghĩa 4.2. Phương trình lôgarit cơ bản có dạng $\log_a x = b$ ($0 < a \neq 1$).

Phương trình lôgarit cơ bản $\log_a x = b$ có nghiệm duy nhất $x = a^b$.

Minh họa bằng đồ thị



Phương pháp giải phương trình lôgarit bằng cách đưa về cùng cơ số

Nếu $u, v > 0$ và $0 < a \neq 1$ thì $\log_a u = \log_a v \Leftrightarrow u = v$.

Ví dụ 3

Giải phương trình $4 + 3 \log(2x) = 16$.

Lời giải.

Điều kiện $2x > 0$ hay $x > 0$.

Phương trình trở thành $\log(2x) = 4$.

Từ đó $2x = 10^4$ hay $x = 5000$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 5000$. □

Ví dụ 4

Giải phương trình $\log_3(x+1) = \log_3(x^2-1)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x+1 > 0$ và $x^2-1 > 0$, tức là $x > 1$.

Phương trình trở thành $x+1 = x^2-1$ hay $x^2-x-2 = 0$.

Từ đó tìm được $x = -1$ và $x = 2$, nhưng chỉ có nghiệm $x = 2$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$. □

3. Bất phương trình mũ

Bất phương trình mũ cơ bản có dạng $a^x > b$ (hoặc $a^x \geq b, a^x < b, a^x \leq b$) với ($a > 0, a \neq 1$). Xét bất phương trình dạng $a^x > b$:

+ Nếu $b \leq 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $S = \mathbb{R}$.

+ Nếu $b > 0$ thì bất phương trình tương đương với $a^x > a^{\log_a b}$.

✓ Với $a > 1$, nghiệm của bất phương trình là $x > \log_a b$.

✓ Với $0 < a < 1$, nghiệm của bất phương trình $x < \log_a b$.

- !** a) Các bất phương trình mũ cơ bản còn lại được giải tương tự.
 b) Nếu $a > 1$ thì $a^u > a^v \Leftrightarrow u > v$.
 Nếu $0 < a < 1$ thì $a^u > a^v \Leftrightarrow u < v$.

Ví dụ 5

Giải bất phương trình $16^x > \frac{1}{8}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } 16^x > \frac{1}{8} \Leftrightarrow 2^{4x} > 2^{-3} \Leftrightarrow 4x > -3 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{4}.$$

4. Bất phương trình lôgarit

Bất phương trình lôgarit cơ bản có dạng $\log_a x > b$ (hoặc $\log_a x \geq b$, $\log_a x < b$, $\log_a x \leq b$) với $(a > 0, a \neq 1)$.

Xét bất phương trình dạng $\log_a x > b$:

- ✔ Nếu $a > 1$ thì nghiệm của bất phương trình là $x > a^b$.
- ✔ Với $0 < a < 1$ thì nghiệm của bất phương trình $0 < x < a^b$.

- !** a) Các bất phương trình lôgarit cơ bản còn lại được giải tương tự.
 b) Nếu $a > 1$ thì $\log_a u > \log_a v \Leftrightarrow u > v > 0$.
 Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a u > \log_a v \Leftrightarrow 0 < u < v$.

Ví dụ 6

Giải bất phương trình $\log_{0,3}(x+1) \leq \log_{0,3}(2x-1)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > \frac{1}{2}$.

Vì cơ số $0,3 < 1$ nên bất phương trình trở thành $x+1 \geq 2x-1$, từ đó tìm được $x \leq 2$.

Kết hợp điều kiện, ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là $\frac{1}{2} < x \leq 2$.

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Giải phương trình mũ

- ✔ Nếu $b > 0$ thì phương trình luôn có nghiệm duy nhất $a = \log_a b$.
- ✔ Nếu $b \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 1

Giải các phương trình sau

a) $2^x = \frac{1}{8}$.

b) $5 \cdot 10^x = 1$.

c) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = \frac{27^x}{3}$.

Lời giải.

a) $2^x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow 2^x = 2^{-3} \Leftrightarrow x = -3.$

b) $5 \cdot 10^x = 1 \Leftrightarrow 10^x = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x = \log \frac{1}{5} = -\log 5.$

c)

$$\left(\frac{1}{9}\right)^x = \frac{27^x}{3} \Leftrightarrow (3^{-2})^x = \frac{(3^3)^x}{3} \Leftrightarrow 3^{-2x} = 3^{3x-1}$$

$$\Leftrightarrow -2x = 3x - 1 \Leftrightarrow 5x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}.$$

□

Ví dụ 2

Giải các phương trình sau

a) $3^{x+2} = \sqrt[3]{9}.$

b) $2 \cdot 10^{2x} = 30.$

c) $4^{2x} = 8^{2x-1}.$

👉 Lời giải.

a) $3^{x+2} = \sqrt[3]{9} \Leftrightarrow x + 2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}.$

b) $2 \cdot 10^{2x} = 30 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \log_{10} 15.$

c) $4^{2x} = 8^{2x-1} \Leftrightarrow 2^{4x} = 2^{6x-3} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$

□

Dạng 2 Giải phương trình lôgarit

Phương trình $\log_a x = b$ ($a > 0, a \neq 1$) luôn có nghiệm duy nhất $x = a^b$.

Tổng quát, xét phương trình dạng

$$\log_a u(x) = \log_a v(x) \quad (a > 0, a \neq 1) \quad (1)$$

Để giải phương trình (1), trước hết cần đặt điều kiện có nghĩa: $u(x) > 0$ và $v(x) > 0$.

Khi đó, (1) được biến đổi thành phương trình

$$u(x) = v(x). \quad (2)$$

Sau khi giải phương trình (2), ta cần kiểm tra sự thoả mãn điều kiện. Nghiệm của phương trình (1) là những nghiệm của (2) thoả mãn điều kiện.

Ví dụ 1

Giải các phương trình sau

a) $\log_3 x = -2.$

b) $\log_2 (x^2 - 3) = \log_2 2x.$

👉 Lời giải.

a) Điều kiện: $x > 0$.

$$\log_3 x = -2 \Leftrightarrow x = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

b) Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 3 > 0 \\ 2x > 0 \end{cases} (*)$

Khi đó, phương trình đã cho trở thành $x^2 - 3 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 3 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$.
Thay lần lượt hai giá trị này vào (*), ta thấy chỉ có $x = 3$ thoả mãn.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 3$.

□

Ví dụ 2

Giải các phương trình sau

a) $\log_{\frac{1}{2}}(x - 2) = -2$.

b) $\log_2(x + 6) = \log_2(x + 1) + 1$.

👉 **Lời giải.**

a) Điều kiện: $x > 2$.

$$\log_{\frac{1}{2}}(x - 2) = -2 \Leftrightarrow x - 2 = 4 \Leftrightarrow x = 6.$$

b) Điều kiện: $\begin{cases} x > -6 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x > -1$.

$$\log_2(x + 6) = \log_2(x + 1) + 1 \Leftrightarrow \log_2(x + 6) = \log_2(2x + 2) \Leftrightarrow x + 6 = 2x + 2 \Leftrightarrow x = 4.$$

□

Dạng 3 Giải bất phương trình mũ

✔ Nếu $b \leq 0$ thì mọi $x \in \mathbb{R}$ đều là nghiệm của bất phương trình.

✔ Nếu $b > 0$ thì:

- Với $a > 1$, nghiệm của bất phương trình là $x > \log_a b$;
- Với $0 < a < 1$, nghiệm của bất phương trình là $x < \log_a b$.

Đặc biệt

✔ Tương tự như trên, ta nhận được kết quả về nghiệm của mỗi bất phương trình $a^x \geq b, a^x < b, a^x \leq b$ (các bất phương trình $a^x < b, a^x \leq b$ vô nghiệm nếu $b \leq 0$).

✔ Nếu $a > 1$ thì $a^{u(x)} > a^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) > v(x)$.
Nếu $0 < a < 1$ thì $a^{u(x)} > a^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) < v(x)$.

Ví dụ 1

Giải các bất phương trình sau

a) $10^x < 0,001$.

b) $0,4^x > 2$.

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 2 \cdot 4^{2x}$.

👉 **Lời giải.**

a) $10^x < 0,001 \Leftrightarrow 10^x < 10^{-3} \Leftrightarrow x < -3$ (do $10 > 1$).

b) $0,4^x > 2 \Leftrightarrow x < \log_{0,4} 2$ (do $0 < 0,4 < 1$).

c)

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^x &\geq 2 \cdot 4^{2x} \Leftrightarrow (2^{-1})^x \geq 2 \cdot (2^2)^{2x} \Leftrightarrow 2^x \geq 2^{1+4x} \\ \Leftrightarrow -x &\geq 1 + 4x \Leftrightarrow 5x \leq -1 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{5}. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 2

Giải các bất phương trình sau

a) $2^x > 16$.

b) $0,1^x \leq 0,001$.

c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} \geq \left(\frac{1}{25}\right)^x$.

👉 Lời giải.

a) $2^x > 16 \Leftrightarrow x > 4$.

b) $0,1^x \leq 0,001 \Leftrightarrow 0,1^x \leq 0,1^3 \Leftrightarrow x \geq 3$.

c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} \geq \left(\frac{1}{25}\right)^x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} \geq \left(\frac{1}{5}\right)^{2x} \Leftrightarrow x-2 \leq 2x \Leftrightarrow x \geq -2$.

□

Dạng 4

Giải bất phương trình lôgrit

✔ Với $a > 1$, nghiệm của (*) là $x > a^b$.

✔ Với $0 < a < 1$, nghiệm của (*) là $0 < x < a^b$.

Đặc biệt

✔ Nếu $a > 1$ thì $\log_a u(x) > \log_a v(x) \Leftrightarrow u(x) > v(x) > 0$.

✔ Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a u(x) > \log_a v(x) \Leftrightarrow 0 < u(x) < v(x)$.

Ví dụ 1

Giải các bất phương trình sau

a) $\log_2(2x-1) \leq 1$.

b) $\log_{\frac{1}{2}}(1-x) > \log_{\frac{1}{2}}(3x+2)$.

👉 Lời giải.

a) Điều kiện: $2x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$.

Khi đó, do cơ số $2 > 1$ nên bất phương trình đã cho trở thành

$$2x-1 \leq 2^1 \Leftrightarrow 2x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $\frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{2}$.

b) Điều kiện: $\begin{cases} 1-x > 0 \\ 3x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < x < 1. (*)$

Khi đó, do cơ số $\frac{1}{2} < 1$ nên bất phương trình đã cho trở thành

$$1-x < 3x+2 \Leftrightarrow 4x > -1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{4}.$$

Kết hợp với điều kiện (*), ta được nghiệm của bất phương trình là $-\frac{1}{4} < x < 1$.

□

Ví dụ 2

Giải các bất phương trình sau

a) $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) < 2$.

b) $\log_5(x+2) \leq 1$.

Lời giải.

a) Điều kiện: $x > -1$.

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+1) < 2 \Leftrightarrow x+1 > \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Leftrightarrow x > -\frac{8}{9}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > -\frac{8}{9}$

b) Điều kiện $x > -2$.

$$\log_5(x+2) \leq 1 \Leftrightarrow x+2 \leq 5 \Leftrightarrow x \leq 3.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $-2 < x \leq 3$.

□

Dạng 5 Một số bài toán thực tế

Ví dụ 1

Nước chanh có độ pH bằng 2,4; giấm có độ pH bằng 3. Nước chanh có độ acid gấp bao nhiêu lần giấm (nghĩa là có nồng độ H^+ gấp bao nhiêu lần)? (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải.

Kí hiệu x, y lần lượt là nồng độ H^+ trong nước chanh và giấm.

Theo giả thiết, ta có $2,4 = -\log x$ và $3 = -\log y$.

Suy ra $x = 10^{-2,4}$ và $y = 10^{-3}$. Suy ra $\frac{x}{y} = \frac{10^{-2,4}}{10^{-3}} = 10^{0,6} \approx 3,98$.

Vậy nồng độ H^+ của nước chanh gấp 3,98 lần nồng độ H^+ của giấm.

□

Ví dụ 2

Nước uống đạt tiêu chuẩn phải có độ pH nằm trong khoảng từ 6,5 đến 8,5 (theo Quy chuẩn Việt Nam QCVN 01 : 2009/BYT). Nồng độ H^+ trong nước uống tiêu chuẩn phải nằm trong

Vậy sinh vật này sống cách đây khoảng 7200 năm. □

C

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

Giải các phương trình sau

a) $3^{x-1} = 27;$

c) $\sqrt{3}e^{3x} = 1;$

b) $100^{2x^2-3} = 0,1^{2x^2-18};$

d) $5^x = 3^{2x-1}.$

 **Lời giải.**

a) Ta có $3^{x-1} = 27 \Leftrightarrow 3^{x-1} = 3^3 \Leftrightarrow x-1 = 3 \Leftrightarrow x = 4.$

b) Ta có

$$\begin{aligned} 100^{2x^2-3} &= 0,1^{2x^2-18} \\ \Leftrightarrow 10^{2(2x^2-3)} &= 10^{-(2x^2-18)} \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 6 &= -2x^2 + 18 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

c) Ta có $\sqrt{3}e^{3x} = 1 \Leftrightarrow e^{3x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 3x = -\ln \sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \ln \sqrt{3}.$

d) Ta có

$$\begin{aligned} 5^x &= 3^{2x-1} \\ \Leftrightarrow \log_5 5^x &= \log_5 3^{2x-1} \\ \Leftrightarrow x &= (2x-1) \log_5 3 \\ \Leftrightarrow (2 \log_5 3 - 1) x &= \log_5 3 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\log_5 3}{2 \log_5 3 - 1} \\ \Leftrightarrow x &= \log_{\frac{5}{5}} 3. \end{aligned}$$

□

Bài 2

Giải các phương trình sau

a) $\log(x+1) = 2;$

c) $\ln x + \ln(x-1) = \ln 4x;$

b) $2 \log_4 x + \log_2(x-3) = 2;$

d) $\log_3(x^2 - 3x + 2) = \log_3(2x - 4).$

 **Lời giải.**

a) Ta có $\log(x+1) = 2 \Leftrightarrow x+1 = 10^2 \Leftrightarrow x = 99.$

b) Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$

Ta có

$$\begin{aligned} 2\log_4 x + \log_2(x - 3) &= 2 \\ \Leftrightarrow 2\log_{2^2} x + \log_2(x - 3) &= 2 \\ \Leftrightarrow \log_2 x + \log_2(x - 3) &= 2 \\ \Leftrightarrow \log_2 x(x - 3) &= 2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm $x = 4$.

c) Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$

Ta có

$$\begin{aligned} \ln x + \ln(x - 1) &= \ln 4x \\ \Leftrightarrow \ln x(x - 1) &= \ln 4x \\ \Leftrightarrow x^2 - x &= 4x \\ \Leftrightarrow x^2 - 5x &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm $x = 5$.

d) Điều kiện $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 0 \\ 2x - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$

Ta có

$$\begin{aligned} \log_3(x^2 - 3x + 2) &= \log_3(2x - 4) \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 &= 2x - 4 \\ \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm $x = 3$.

□

Bài 3

Giải các bất phương trình sau

a) $0,1^{2-x} > 0,1^{4+2x};$

c) $\log_3(x + 7) \geq -1;$

b) $2 \cdot 5^{2x+1} \leq 3;$

d) $\log_{0,5}(x + 7) \geq \log_{0,5}(2x - 1).$

📌 **Lời giải.**

a) Ta có $0,1^{2-x} > 0,1^{4+2x} \Leftrightarrow 2 - x < 4 + 2x \Leftrightarrow -3x < 2 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2};$

b) Ta có $2 \cdot 5^{2x+1} \leq 3 \Leftrightarrow 5^{2x+1} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x+1 \leq \log_5 \frac{3}{2} \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2} \left(\log_5 \frac{3}{2} - 1 \right)$;

c) Điều kiện: $x+7 > 0 \Leftrightarrow x > -7$.

Ta có $\log_3(x+7) \geq -1 \Leftrightarrow x+7 \geq 3^{-1} \Leftrightarrow x \geq -\frac{20}{3}$ (thỏa mãn điều kiện).

d) Điều kiện: $\begin{cases} x+7 > 0 \\ 2x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$.

Ta có $\log_{0,5}(x+7) \geq \log_{0,5}(2x-1) \Leftrightarrow x+7 \leq 2x-1 \Leftrightarrow x \geq 8$ (thỏa mãn điều kiện).

□

Bài 4

Bác Minh gửi tiết kiệm 500 triệu đồng ở một ngân hàng với lãi suất không đổi 7,5% một năm theo thể thức lãi kép kì hạn 12 tháng. Tổng số tiền bác Minh thu được (cả vốn lẫn lãi) sau n năm là:

$$A = 500 \cdot (1 + 0,075)^n \text{ (triệu đồng)}.$$

Tính thời gian tối thiểu gửi tiết kiệm để bác Minh thu được ít nhất 800 triệu đồng (cả vốn lẫn lãi).

Lời giải.

Ta cần tìm n sao cho

$$A \geq 800 \Leftrightarrow 500 \cdot (1 + 0,075)^n \geq 800 \Leftrightarrow (1,075)^n \geq \frac{8}{5} \Leftrightarrow n \geq \log_{1,075} \frac{8}{5} \approx 6,5.$$

Vậy sau khoảng 6,5 năm gửi tiết kiệm, bác Minh thu được ít nhất 800 triệu đồng.

□

Bài 5

Số lượng vi khuẩn ban đầu trong một mẻ nuôi cấy là 500 con. Người ta lấy một mẫu vi khuẩn trong mẻ nuôi cấy đó, đếm số lượng vi khuẩn và thấy rằng tỉ lệ tăng trưởng vi khuẩn là 40% mỗi giờ. Khi đó số lượng vi khuẩn $N(t)$ sau t giờ nuôi cấy được ước tính bằng công thức sau:

$$N(t) = 500e^{0,4t}.$$

Hỏi sau bao nhiêu giờ nuôi cấy, số lượng vi khuẩn vượt mức 80000 con?

Lời giải.

Kể từ lúc bắt đầu nuôi cấy, số lượng vi khuẩn vượt mức 80000 con ta có

$$500e^{0,4t} \geq 80000 \Leftrightarrow e^{0,4t} \geq 160 \Leftrightarrow 0,4t \geq \ln 160 \Leftrightarrow t \geq \frac{\ln 160}{0,4} \approx 13 \text{ (giờ)}.$$

Vậy sau khoảng 13 giờ nuôi cấy, số lượng vi khuẩn vượt mức 80000 con.

□

Bài 6

Giả sử nhiệt độ T (°C) của một vật giảm dần theo thời gian cho bởi công thức:

$$T = 25 + 70e^{-0,5t},$$

trong đó thời gian t được tính bằng phút.

a) Tìm nhiệt độ ban đầu của vật.



b) Sau bao lâu nhiệt độ của vật còn lại 30°C ?

📌 **Lời giải.**

a) Nhiệt độ ban đầu của vật là $T_0 = 25 + 70e^{-0,5 \cdot 0} = 95^\circ\text{C}$.

b) Nhiệt độ của vật còn lại 30°C , ta có

$$\begin{aligned} 30 &= 25 + 70e^{-0,5t} \Leftrightarrow 70e^{-0,5t} = 5 \Leftrightarrow e^{-0,5t} = \frac{1}{14} \\ &\Leftrightarrow -0,5t = \ln \frac{1}{14} \Leftrightarrow t \approx 5,3 \text{ (phút)}. \end{aligned}$$

□

Bài 7

Tính nồng độ ion hydrogen (tính bằng mol/lít) của một dung dịch có độ pH là 8.

📌 **Lời giải.**

Nồng độ ion hydrogen trong dung dịch đó là $[H^+] = 10^{-8}$.

□

Bài 8

Giải mỗi phương trình sau

a) $(0,3)^{x-3} = 1;$

b) $5^{3x-2} = 25;$

c) $9^{x-2} = 243^{x+1};$

d) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) = -3;$

e) $\log_5(3x-5) = \log_5(2x+1);$

f) $\log_{\frac{1}{7}}(x+9) = \log_{\frac{1}{7}}(2x-1).$

📌 **Lời giải.**

Ta có

a) $(0,3)^{x-3} = 1 \Leftrightarrow x-3 = \log_{0,3} 1 \Leftrightarrow x-3 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 3$.

b) $5^{3x-2} = 25 \Leftrightarrow 3x-2 = \log_5 25 \Leftrightarrow 3x-2 = 2 \Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}.$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{4}{3}.$

c) Ta có

$$\begin{aligned} 9^{x-2} &= 243^{x+1} \Leftrightarrow 3^{2(x-2)} = 3^{5(x+1)} \\ &\Leftrightarrow 2(x-2) = 5(x+1) \\ &\Leftrightarrow 2x-4 = 5x+5 \\ &\Leftrightarrow -3x = 9 \\ &\Leftrightarrow x = -3. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -3$.

d) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) = -3 \Leftrightarrow x+1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Leftrightarrow x+1 = 8 \Leftrightarrow x = 7.$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 7$.



e) $\log_5(3x - 5) = \log_5(2x + 1)$

Điều kiện: $\begin{cases} 3x - 5 > 0 \\ 2x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{3} \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{5}{3}.$

Phương trình đã cho $\log_5(3x - 5) = \log_5(2x + 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{3} \\ 3x - 5 = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{3} \\ x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 6$.

f) Phương trình $\log_{\frac{1}{7}}(x + 9) = \log_{\frac{1}{7}}(2x - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 9 > 0 \\ x + 9 = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -9 \\ x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow x = 10.$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 10$.

□

Bài 9

Giải mỗi bất phương trình sau

a) $3^x > \frac{1}{243};$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-7} \leq \frac{3}{2};$

c) $4^{x+3} \geq 32^x;$

d) $\log(x - 1) < 0;$

e) $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 1) \geq \log_{\frac{1}{2}}(x + 3);$

f) $\ln(x + 3) \geq \ln(2x - 8).$

 **Lời giải.**

Ta có

a) $3^x > \frac{1}{243} \Leftrightarrow x > \log_3 \frac{1}{243} \Leftrightarrow x > -5.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-5; +\infty)$.

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-7} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3x - 7 \geq \log_{\frac{2}{3}} \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3x \geq 6 \Leftrightarrow x \geq 2.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[2; +\infty)$.

c) $4^{x+3} \geq 32^x \Leftrightarrow 2^{2(x+3)} \geq 2^{5x} \Leftrightarrow 2(x+3) \geq 5x \Leftrightarrow -3x \geq -6 \Leftrightarrow x \leq 2.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty; 2]$.

d) $\log(x - 1) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 1 < 10^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(1; 2)$.

e) Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 1) \geq \log_{\frac{1}{2}}(x + 3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ 2x - 1 \leq x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x \leq 4.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left(\frac{1}{2}; 4\right]$.



$$f) \ln(x+3) \geq \ln(2x-8) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-8 > 0 \\ x+3 \geq 2x-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x \leq 11 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < x \leq 11.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(4; 11]$.



Bài 10

Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất là $x\%$ /năm ($x > 0$). Sau 3 năm, người đó rút được cả gốc và lãi là 119,1016 triệu đồng. Tìm x , biết rằng lãi suất không thay đổi qua các năm và người đó không rút tiền ra trong suốt thời gian gửi.

📌 Lời giải.

Gọi P_n là số tiền gốc và lãi nhận được sau n kì gửi.

P_0 là số tiền gửi ban đầu.

$x\%$ lãi suất.

Với $n = 3$ năm, $P_3 = 119,1016$ triệu; $P_0 = 100$ triệu, ta có

$$\begin{aligned} P_3 &= P_0(1+x)^3 \Leftrightarrow (1+x)^3 = \frac{P_3}{P_0} \Leftrightarrow 1+x = \sqrt[3]{\frac{P_3}{P_0}} \\ \Leftrightarrow x &= \sqrt[3]{\frac{P_3}{P_0}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{119,1016}{100}} - 1 = \frac{3}{50} = 0,06 = 6\% \end{aligned}$$

Vậy lãi suất gửi là 6% /năm



Bài 11

Sử dụng công thức tính mức cường độ âm L ở ví dụ 14, hãy tính mức cường độ âm mà tai người có thể nghe được, biết rằng tai người có thể nghe được âm với cường độ âm từ 10^{-12} W/m^2 đến 10 W/m^2 .

📌 Lời giải.

Ta có công thức mức cường độ âm $L = 10 \log \frac{I}{10^{-12}}$, trong đó I (đơn vị: W/m^2) là cường độ âm. Mức cường độ âm mà tai người có thể nghe được là

$$10 \log \frac{10^{-12}}{10^{-12}} < L < 10 \log \frac{10}{10^{-12}} \Leftrightarrow 0 < L < 130.$$

Vậy mức cường độ âm mà tai người nghe được từ 0 đến 130 dB.



Bài 12

Giải các phương trình sau

a) $5^{2x-1} = 25.$

b) $3^{x+1} = 9^{2x+1}.$

c) $10^{1-2x} = 100000.$

📌 Lời giải.

a) $5^{2x-1} = 25 \Leftrightarrow 5^{2x-1} = 5^2 \Leftrightarrow 2x-1 = 2 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$

b) $3^{x+1} = 9^{2x+1} \Leftrightarrow 3^{x+1} = 3^{4x+2} \Leftrightarrow x+1 = 4x+2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}.$



$$c) 10^{1-2x} = 100000 \Leftrightarrow 10^{1-2x} = 10^5 \Leftrightarrow 1 - 2x = 5 \Leftrightarrow x = -2.$$

□

Bài 13

Giải các phương trình sau. Làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn.

a) $3^{x+2} = 7.$

b) $3 \cdot 10^{2x+1} = 5.$

 **Lời giải.**

a) $3^{x+2} = 7 \Leftrightarrow x = \log_3 7 - 2 \approx -0,229.$

b) $3 \cdot 10^{2x+1} = 5 \Leftrightarrow 2x + 1 = \log \frac{5}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \left(\log \frac{5}{3} - 1 \right) \Leftrightarrow x \approx -0,389.$

□

Bài 14

Giải các phương trình sau

a) $\log_6(4x + 4) = 2.$

b) $\log_3 x - \log_3(x - 2) = 1.$

 **Lời giải.**

a) Điều kiện $x > -1.$

$$\log_6(4x + 4) = 2 \Leftrightarrow 4x + 4 = 6^2 \Leftrightarrow x = 8 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 8.$

b) Điều kiện $x > 2.$

$$\log_3 x - \log_3(x - 2) = 1 \Leftrightarrow \log_3 [x(x - 2)] = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (loại)} \\ x = 3 \text{ (thỏa mãn).} \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 3.$

□

Bài 15

Giải các bất phương trình sau

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \leq 9.$

b) $4^x > 2^{x-2}.$

 **Lời giải.**

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \leq 9 \Leftrightarrow 2x + 1 \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{2}.$

b) $4^x > 2^{x-2} \Leftrightarrow 2^{2x} > 2^{x-2} \Leftrightarrow 2x > x - 2 \Leftrightarrow x > -2.$

□

Bài 16

Giải các bất phương trình sau

a) $\log_2(x - 2) < 2$.

b) $\log(x + 1) \geq \log(2x - 1)$.

📌 **Lời giải.**

a) Điều kiện $x > 2$.

$$\log_2(x - 2) < 2 \Leftrightarrow x - 2 < 4 \Leftrightarrow x < 6.$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm của bất phương trình là $2 < x < 6$.

b) Điều kiện $x > \frac{1}{2}$.

$$\log(x + 1) \geq \log(2x - 1) \Leftrightarrow x + 1 \geq 2x - 1 \Leftrightarrow x \leq 2.$$

Kết hợp với điều kiện, ta có nghiệm của bất phương trình là $\frac{1}{2} < x \leq 2$.

□

Bài 17

Chất phóng xạ polonium-210 có chu kỳ bán rã là 138 ngày. Điều này có nghĩa là cứ sau 138 ngày, lượng polonium còn lại trong một mẫu chỉ bằng một nửa lượng ban đầu. Một mẫu 100 g có khối lượng polonium-210 còn lại sau t ngày được tính theo công thức $M(t) = 100 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{138}}$ (g).

(Nguồn: <https://pubchem.ncbi.nlm.nih.gov/element/Polonium#section=Atomic-Mass-Half-Life-and-Decay>)

a) Khối lượng polonium-210 còn lại bao nhiêu sau 2 năm?

b) Sau bao lâu thì còn lại 40 g polonium-210?

📌 **Lời giải.**

a) Đổi 2 năm = 730 ngày.

Khối lượng polonium-210 còn lại sau 2 năm là

$$M(t) = 100 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{730}{138}} \approx 2,556 \text{ g.}$$

b) $100 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{138}} = 40 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{138}} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow t = 138 \cdot \log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{5} \approx 182,4.$

Vậy cần 185 ngày để còn lại 40 g polonium-210.

□

Bài 18

Nhắc lại rằng, mức cường độ âm L được tính bằng công thức $L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0}\right)$ (dB), trong đó I

là cường độ của âm tính bằng W/m^2 và $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$.

(Nguồn: Vật lí 12, NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2017, trang 52)

- a) Một giáo viên đang giảng bài trong lớp học có mức cường độ âm là 50 dB. Cường độ âm của giọng nói giáo viên bằng bao nhiêu?
- b) Mức cường độ âm trong một nhà xưởng thay đổi trong khoảng từ 75 dB đến 90 dB. Cường độ âm trong nhà xưởng này thay đổi trong khoảng nào?

 Lời giải.

a) Ta có $L = 50 \Leftrightarrow 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) = 50 \Leftrightarrow \log \left(\frac{I}{I_0} \right) = 5 \Leftrightarrow I = I_0 \cdot 10^5 \Leftrightarrow I = 10^{-7} \text{ W/m}^2$.

Vậy cường độ âm của giọng nói giáo viên bằng 10^{-7} W/m^2 .

b) Ta có $75 < L < 90 \Leftrightarrow 7,5 < \log \left(\frac{I}{I_0} \right) < 9 \Leftrightarrow 10^{-2,5} < I < 10^{-3}$.

Vậy cường độ âm trong nhà xưởng này thay đổi trong khoảng từ $10^{-2,5} \text{ W/m}^2$ đến 10^{-3} W/m^2 .



D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM LẦN 1

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN – ĐỀ SỐ 1

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	(A) (B) (C) (D)	8	(A) (B) (C) (D)	15	(A) (B) (C) (D)	22	(A) (B) (C) (D)	29	(A) (B) (C) (D)
2	(A) (B) (C) (D)	9	(A) (B) (C) (D)	16	(A) (B) (C) (D)	23	(A) (B) (C) (D)	30	(A) (B) (C) (D)
3	(A) (B) (C) (D)	10	(A) (B) (C) (D)	17	(A) (B) (C) (D)	24	(A) (B) (C) (D)	31	(A) (B) (C) (D)
4	(A) (B) (C) (D)	11	(A) (B) (C) (D)	18	(A) (B) (C) (D)	25	(A) (B) (C) (D)	32	(A) (B) (C) (D)
5	(A) (B) (C) (D)	12	(A) (B) (C) (D)	19	(A) (B) (C) (D)	26	(A) (B) (C) (D)	33	(A) (B) (C) (D)
6	(A) (B) (C) (D)	13	(A) (B) (C) (D)	20	(A) (B) (C) (D)	27	(A) (B) (C) (D)	34	(A) (B) (C) (D)
7	(A) (B) (C) (D)	14	(A) (B) (C) (D)	21	(A) (B) (C) (D)	28	(A) (B) (C) (D)	35	(A) (B) (C) (D)

Câu 1

Giải bất phương trình $\log_2(3x - 1) > 3$.

- (A) $x > 3$. (B) $\frac{1}{3} < x < 3$. (C) $x < 3$. (D) $x > \frac{10}{3}$.

📌 Lời giải.

Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow 3x - 1 > 2^3 \Leftrightarrow 3x - 1 > 8 \Leftrightarrow x > 3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 2

Giải phương trình $\log_4(x - 1) = 3$.

- (A) $x = 63$. (B) $x = 65$. (C) $x = 80$. (D) $x = 82$.

📌 Lời giải.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow x - 1 = 4^3 \Leftrightarrow x - 1 = 64 \Leftrightarrow x = 65$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3

Một người vay ngân hàng 500 triệu đồng với lãi suất 1,2% một tháng để mua xe. Nếu mỗi tháng người đó trả ngân hàng 10 triệu đồng và thời điểm bắt đầu trả cách thời điểm vay là đúng một tháng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng thì người đó trả hết nợ ngân hàng? Biết rằng lãi suất không thay đổi.

- (A) 70 tháng. (B) 80 tháng. (C) 85 tháng. (D) 77 tháng.

📌 Lời giải.

Bài toán thuộc dạng bài toán vay vốn trả góp, có công thức tổng quát tính số tiền còn lại sau n tháng là

$$S = A(1 + r)^n - X \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

Từ giả thiết ta có

$$500(1 + 0,012)^n - 10 \frac{(1 + 0,012)^n - 1}{0,012} = 0 \Leftrightarrow n = 77.$$

Chọn đáp án (D)

Câu 4

Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất 12%/năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết nợ sau đúng 3 tháng kể từ ngày vay. Hỏi, theo cách đó, số tiền m mà ông A sẽ phải trả cho ngân hàng mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

(A) $m = \frac{(1,01)^3}{(1,01)^3 - 1}$ (triệu đồng).

(B) $m = \frac{100 \cdot (1,01)^3}{3}$ (triệu đồng).

(C) $m = \frac{100 \cdot (1,03)}{3}$ (triệu đồng).

(D) $m = \frac{120 \cdot (1,12)^3}{(1,12)^3 - 1}$ (triệu đồng).

Lời giải.

Lãi suất 1 tháng là 1%. Gọi số tiền trả mỗi tháng là m . Số tiền tháng 1 còn lại là: $100(1,01) - m$. Số tiền tháng 2 còn lại là: $(100(1,01) - m)(1,01) - m = 100(1,01)^2 - m(1,01) - m$. Số tiền tháng 3 còn lại là: $(100(1,01)^2 - m(1,01) - m)1,01 - m$. Để trả hết thì $(100(1,01)^2 - m(1,01) - m)1,01 - m = 0$
 $\Leftrightarrow m = \frac{(1,01)^3}{(1,01)^3 - 1}$ (triệu đồng).

Chọn đáp án (A)

Câu 5

Một người gửi số tiền M triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 0,7%/ tháng. Biết rằng nếu người đó không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi đó là lãi kép). Sau ba năm, người đó muốn lãnh được số tiền là 5 triệu đồng, nếu trong khoảng thời gian này không rút tiền ra và số lãi suất không đổi, thì người đó cần gửi số tiền M là

(A) 3 triệu 900 nghìn đồng.

(B) 3 triệu 800 nghìn đồng.

(C) 3 triệu 700 nghìn đồng.

(D) 3 triệu 600 nghìn đồng.

Lời giải.

Ta có 3 năm = 36 tháng, 3 số tiền người đó thu được cả gốc lẫn lãi là $T = M \left(1 + \frac{0,7}{100}\right)^{36} = 1,28M$. Theo giả thiết ta có $T = 5 \Rightarrow 1,28M = 5 \Leftrightarrow M = 3$ triệu 900 nghìn đồng.

Chọn đáp án (A)

Câu 6

Nghiệm của phương trình $2^{2x-1} = 2^x$ là

(A) $x = 2$.

(B) $x = -1$.

(C) $x = 1$.

(D) $x = -2$.

Lời giải.

Ta có $2^{2x-1} = 2^x \Leftrightarrow 2x - 1 = x \Leftrightarrow x = 1$.

Chọn đáp án (C)

**Câu 7**

Nghiệm của phương trình $3^{2x+1} = 27$ là

- (A) 2. (B) 1. (C) 5. (D) 4.

📌 **Lời giải.**

Ta có $3^{2x+1} = 27 \Leftrightarrow 3^{2x+1} = 3^3 \Leftrightarrow 2x + 1 = 3 \Leftrightarrow x = 1$.

Chọn đáp án (B)

**Câu 8**

Giải bất phương trình: $\log_{\frac{1}{5}}(2x - 3) > -1$

- (A) $x < 4$. (B) $x > \frac{3}{2}$. (C) $4 > x > \frac{3}{2}$. (D) $x > 4$.

📌 **Lời giải.**

Ta có $\log_{\frac{1}{5}}(2x - 3) > -1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ 2x - 3 < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2} < x < 4$.

Chọn đáp án (C)

**Câu 9**

Phương trình $2^{2x^2-4x+5} = 32$ có bao nhiêu nghiệm?

- (A) 3. (B) 0. (C) 1. (D) 2.

📌 **Lời giải.**

$2^{2x^2-4x+5} = 32 = 2^5 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 5 = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$

Chọn đáp án (D)

**Câu 10**

Tập hợp nghiệm của phương trình $\left(\frac{5}{6}\right)^{x^2+2x} = \left(\frac{6}{5}\right)^{x-4}$ là

- (A) $\{1; -4\}$. (B) $\emptyset$. (C) $\{1\}$. (D) $\{0; -4\}$.

📌 **Lời giải.**

Ta có

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{x^2+2x} = \left(\frac{6}{5}\right)^{x-4} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^{x^2+2x} = \left(\frac{5}{6}\right)^{4-x} \Leftrightarrow x^2 + 2x = 4 - x \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -4. \end{cases}$$

Chọn đáp án (A)

**Câu 11**

Nghiệm của phương trình $\log_2(3x - 1) - 1 = \log_2(x + 1)$ là

- (A) $x = \frac{3}{5}$. (B) $x = 3$. (C) $x = 1$. (D) $x = \frac{5}{3}$.

📌 **Lời giải.**



Ta có phương trình tương đương với

$$\log_2 \left(\frac{3x-1}{2} \right) = \log_2(x+1) \Leftrightarrow \frac{3x-1}{2} = x+1 > 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 12

Phương trình $\log_3(3x-2) = 3$ có nghiệm là

- (A) $\frac{25}{3}$. (B) $\frac{29}{3}$. (C) $\frac{11}{3}$. (D) 87.

 **Lời giải.**

Điều kiện $x > \frac{2}{3}$.

Ta có $\log_3(3x-2) = 3 \Leftrightarrow 3x-2 = 3^3 \Leftrightarrow x = \frac{29}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13

Nghiệm của phương trình $\log_3(2x-1) = 1$ là

- (A) $x = 5$. (B) $x = 1$. (C) $x = 2$. (D) $x = 4$.

 **Lời giải.**

Điều kiện xác định $2x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$.

Ta có $\log_3(2x-1) = 1 \Leftrightarrow 2x-1 = 3^1 \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa mãn).

Chọn đáp án (C) □

Câu 14

Tích các nghiệm của phương trình $(3+2\sqrt{2})^{x^2-x+2} = (3-2\sqrt{2})^{x^3-2}$ bằng

- (A) 0. (B) -2. (C) -1. (D) 1.

 **Lời giải.**

Ta có $(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}) = 1$.

$$\begin{aligned} (3+2\sqrt{2})^{x^2-x+2} &= (3-2\sqrt{2})^{x^3-2} \\ \Leftrightarrow (3+2\sqrt{2})^{x^2-x+2} &= \frac{1}{(3+2\sqrt{2})^{x^3-2}} \\ \Leftrightarrow (3+2\sqrt{2})^{x^2-x+2} &= (3+2\sqrt{2})^{-x^3+2} \\ \Leftrightarrow x^2-x+2 &= -x^3+2 \\ \Leftrightarrow x^3+x^2-x &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

**Câu 15**

Tìm nghiệm của phương trình $5^{2018x} = \sqrt{5^{2018}}$.

- (A) $x = 1 - \log_5 2$. (B) $x = -\log_5 2$. (C) $x = \frac{1}{2}$. (D) $x = 2$.

📌 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} 5^{2018x} = \sqrt{5^{2018}} &\Leftrightarrow 5^{2018x} = 5^{1009} \\ &\Leftrightarrow 2018x = 1009 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 16

Bạn A là sinh viên của một trường Đại học muốn vay tiền ngân hàng với lãi suất ưu đãi để trang trải kinh phí học tập từng năm. Đầu mỗi năm học, bạn ấy vay ngân hàng với số tiền 10 triệu đồng với lãi suất mỗi năm là 4%. Tính số tiền mà A nợ ngân hàng sau 4 năm, biết rằng trong 4 năm đó, ngân hàng không thay đổi lãi suất (kết quả làm tròn đến nghìn đồng).

- (A) 42 465 000. (B) 46 794 000. (C) 41 600 000. (D) 44 163 000.

📌 **Lời giải.**

Số tiền cần trả là $10 \cdot (1 + 4\%)^4 + 10 \cdot (1 + 4\%)^3 + 10 \cdot (1 + 4\%)^2 + 10 \cdot (1 + 4\%)^1 = 44\,163\,000$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17

Phương trình $5^{2x+1} = 125$ có nghiệm là

- (A) $x = \frac{3}{2}$. (B) $x = \frac{5}{2}$. (C) $x = 1$. (D) $x = 3$.

📌 **Lời giải.**

Ta có $5^{2x+1} = 125 \Leftrightarrow 5^{2x+1} = 5^3 \Leftrightarrow 2x + 1 = 3 \Leftrightarrow x = 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18

Cho phương trình $3^{x^2-3x+8} = 9^{2x-1}$, khi đó tập nghiệm của phương trình là

- (A) $S = \{2; 5\}$. (B) $S = \left\{ \frac{-5 - \sqrt{61}}{2}; \frac{-5 + \sqrt{61}}{2} \right\}$.
(C) $S = \left\{ \frac{5 - \sqrt{61}}{2}; \frac{5 + \sqrt{61}}{2} \right\}$. (D) $S = \{-2; -5\}$.

📌 **Lời giải.**

Ta có

$$3^{x^2-3x+8} = 9^{2x-1} \Leftrightarrow 3^{x^2-3x+8} = 3^{4x-2} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 8 = 4x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 5. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \{2; 5\}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19

Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất 12%/năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết nợ sau đúng 3 tháng kể từ ngày vay. Hỏi, theo cách đó, số tiền m mà ông A sẽ phải trả cho ngân hàng mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

(A) $m = \frac{(1,01)^3}{(1,01)^3 - 1}$ (triệu đồng).

(B) $m = \frac{100 \cdot (1,01)^3}{3}$ (triệu đồng).

(C) $m = \frac{100 \cdot (1,03)}{3}$ (triệu đồng).

(D) $m = \frac{120 \cdot (1,12)^3}{(1,12)^3 - 1}$ (triệu đồng).

 **Lời giải.**

Lãi suất 1 tháng là 1%.

Gọi số tiền trả mỗi tháng là m .

Số tiền tháng 1 còn lại là: $100(1,01) - m$.

Số tiền tháng 2 còn lại là: $(100(1,01) - m)(1,01) - m = 100(1,01)^2 - m(1,01) - m$.

Số tiền tháng 3 còn lại là: $(100(1,01)^2 - m(1,01) - m)1,01 - m$.

Để trả hết thì $(100(1,01)^2 - m(1,01) - m)1,01 - m = 0$

$$\Leftrightarrow m = \frac{(1,01)^3}{(1,01)^3 - 1} \text{ (triệu đồng).}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 20

Nghiệm của phương trình $3^{x+2} = 27$ là

(A) $x = -2$.

(B) $x = -1$.

(C) $x = 2$.

(D) $x = 1$.

 **Lời giải.**

Ta có

$$3^{x+2} = 27 \Leftrightarrow 3^{x+2} = 3^3 \Leftrightarrow x + 2 = 3 \Leftrightarrow x = 1.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 21

Tìm số nghiệm thực của phương trình $\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = 0$.

(A) 2.

(B) 0.

(C) 1.

(D) 3.

 **Lời giải.**

Điều kiện: $x > 1$. Ta có

$$\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2[(x+1)(x-1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{2} \text{ (loại } x = -\sqrt{2} \text{).}$$



Vậy phương trình có 1 nghiệm thực.

Chọn đáp án (C)



Câu 22

Tích các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1} - 36^x) = -2$ bằng

- (A) 5. (B) 0. (C) 1. (D) $\log_6 5$.

Lời giải.

Ta có: $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1} - 36^x) = -2 \Leftrightarrow 6^{x+1} - 36^x = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 6^x = 1 \\ 6^x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \log_6 5. \end{cases}$

Vậy tích các nghiệm của phương trình bằng 0.

Chọn đáp án (B)



Câu 23

Phương trình $\log_2(x - 1) = 1$ có nghiệm là

- (A) $x = \frac{1}{2}$. (B) $x = \frac{1}{3}$. (C) $x = 3$. (D) $x = 2$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 1$.

Phương trình tương đương $x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 3$.

Chọn đáp án (C)



Câu 24

Phương trình $\log_2^2 x + 4 \log_{\frac{1}{4}} x - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Giá trị $K = 2x_1x_2 - 3$ bằng

- (A) $K = 4$. (B) $K = 5$. (C) $K = 6$. (D) $K = 7$.

Lời giải.

Ta có: $PT \Leftrightarrow \log_2^2 x - 2 \log_2 x - 1 = 0$

Vì $ac = -1 < 0$ nên PT này có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$\log_2 x_1 + \log_2 x_2 = 2 \Rightarrow \log_2(x_1x_2) = 2 \Rightarrow x_1x_2 = 4$.

Khi đó $K = 2x_1x_2 - 3 = 5$.

Chọn đáp án (B)



Câu 25

Cho a là số thực dương khác 1. Tính $I = \log_{\sqrt{a}} a^5$.

- (A) $I = \frac{5}{2}$. (B) $I = 0$. (C) $I = -10$. (D) $I = 10$.

Lời giải.

$I = \log_{\sqrt{a}} a^5 = \log_{a^{\frac{1}{2}}} a^5 = 5 \cdot 2 \log_a a = 10$.

Chọn đáp án (D)



Câu 26

Tập nghiệm của bất phương trình $3^{4-x^2} \geq 27$ là

- (A) $[-1; 1]$. (B) $(-\infty; 1]$. (C) $[-\sqrt{7}; \sqrt{7}]$. (D) $[1; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $3^{4-x^2} \geq 27 \Leftrightarrow 3^{4-x^2} \geq 3^3 \Leftrightarrow 4 - x^2 \geq 3 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

Chọn đáp án (A)

Câu 27

Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $3^{2x} > 3^{x+4}$.

- (A) $S = (0; 4)$. (B) $S = (-\infty; 4)$. (C) $S = (4; +\infty)$. (D) $S = (-4; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $3^{2x} > 3^{x+4} \Leftrightarrow 2x > x + 4 \Leftrightarrow x > 4$.

Chọn đáp án (C)

Câu 28

Tập nghiệm của bất phương trình $\ln x^2 < 2 \ln(4x + 4)$ là

- (A) $\left(-\frac{4}{5}; +\infty\right)$. (B) $(-1; +\infty) \setminus \{0\}$. (C) $\left(-\frac{4}{5}; +\infty\right) \setminus \{0\}$. (D) $\left(-\frac{4}{3}; +\infty\right) \setminus \{0\}$.

Lời giải.

Ta có $\ln x^2 < 2 \ln(4x + 4) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \neq x > -1 \\ x^2 < (4x + 4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \neq x > -1 \\ 15x^2 + 32x + 16 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > -\frac{4}{5} \end{cases}$

Chọn đáp án (C)

Câu 29

Bất phương trình $\log_2(3x - 2) > \log_2(6 - 5x)$ có tập nghiệm là

- (A) $(-3; 1)$. (B) $\left(1; \frac{6}{5}\right)$. (C) $\left(\frac{1}{2}; 3\right)$. (D) $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(3x - 2) > \log_2(6 - 5x) \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 5x > 0 \\ 3x - 2 > 6 - 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{6}{5} \\ 8x > 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{6}{5} \\ x > 1 \end{cases}$

Chọn đáp án (B)

Câu 30

Tập nghiệm S của bất phương trình $3^{-3x} > 3^{-x+2}$ là

- (A) $S = (-1; 0)$. (B) $S = (-1; +\infty)$. (C) $S = (-\infty; 1)$. (D) $S = (-\infty; -1)$.

Lời giải.

Ta có: $3^{-3x} > 3^{-x+2} \Leftrightarrow -3x > -x + 2 \Leftrightarrow 2x < -2 \Leftrightarrow x < -1$.

Chọn đáp án (D)



Câu 31

Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-3) \geq \log_{\frac{1}{3}}(9-2x)$ là

- (A) $S = (3; 4)$. (B) $S = \left(3; \frac{9}{2}\right)$. (C) $S = (3; 4]$. (D) $S = \left[4; \frac{9}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-3) \geq \log_{\frac{1}{3}}(9-2x) \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \leq 9-2x \\ x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x \leq 4.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 32

Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \geq \log_{\frac{1}{2}}4$ là

- (A) $S = [7; +\infty)$. (B) $S = (3; 7]$. (C) $S = (-\infty; 7]$. (D) $S = [3; 7]$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \log_{\frac{1}{2}}(x-3) \geq \log_{\frac{1}{2}}4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 > 0 \\ x-3 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x \leq 7.$$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = (3; 7]$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 33

Tập nghiệm của bất phương trình $3^{3x} \leq 3^{x+2}$ là

- (A) $(-\infty; 1)$. (B) $[1; +\infty)$. (C) $(-\infty; 1]$. (D) $(0; 1]$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } 3^{3x} \leq 3^{x+2} \Leftrightarrow 3x \leq x+2 \Leftrightarrow x \leq 1.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 34

Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \geq \frac{1}{4}$.

- (A) $S = (-\infty; 3]$. (B) $S = [3; +\infty)$. (C) $S = (-\infty; 1]$. (D) $S = [1; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x-1 \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 3.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 35

Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+3x} \leq \frac{1}{4}$.

- (A) $S = [1; 2]$. (B) $S = (1; 2)$. (C) $S = (-\infty; 1)$. (D) $S = (2; +\infty)$.

 Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+3x} &\leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+3x} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow -x^2+3x &\geq 2 \Leftrightarrow -x^2+3x-2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 36

Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(x-2) \leq \log_3(x^2-3x+1)$ là

- (A) $[2; +\infty)$. (B) $(-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$.
(C) $[2; 3]$. (D) $[3; +\infty)$.

 Lời giải.

Điều kiện $\mathcal{D} = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$, ta có

$$\log_3(x-2) \leq \log_3(x^2-3x+1) \Leftrightarrow x-2 \leq x^2-3x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 3. \end{cases}$$

So với điều kiện ta được tập nghiệm là $[3; +\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 37

Tập hợp nào sau đây **không** thuộc tập hợp nghiệm của bất phương trình $4^x < 2^{x+1} + 3$?

- (A) $(-\infty; \log_2 3)$. (B) $(-\infty; 1)$. (C) $(1; \log_2 3)$. (D) $(1; 3)$.

 Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 4^x &< 2^{x+1} + 3 \\ \Leftrightarrow (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x - 3 &< 0 \\ \Leftrightarrow -1 < 2^x &< 3 \\ \Leftrightarrow x < \log_2 3. \end{aligned}$$

Khi đó ta có $2 \in (1; 3)$ nhưng $2 \notin (-\infty; \log_2 3)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 38

Tìm tập hợp nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{\pi}{4}}(x^2+1) < \log_{\frac{\pi}{4}}(2x+4)$.

- (A) $S = (-2; -1)$. (B) $S = (-2; +\infty)$.
(C) $S = (3; +\infty) \cup (-2; -1)$. (D) $S = (3; +\infty)$.

 Lời giải.



Điều kiện: $2x + 4 > 0 \Leftrightarrow x > -2$.

Khi đó bất phương trình trở thành

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &> 2x + 4 \quad (\text{do } \frac{\pi}{4} < 1 \text{ nên đổi chiều bất phương trình}) \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 &> 0 \\ \Leftrightarrow x &\in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty). \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện: $S = (3; +\infty) \cup (-2; -1)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 39

Giải bất phương trình $\log_3^2 x - 2\log_3(3x) - 1 < 0$ được tập nghiệm $S = (a; b)$ với a, b là hai số thực và $a < b$. Giá trị của biểu thức $3a + b$ bằng.

- (A) -3. (B) 3. (C) 11. (D) 28.

🔑 **Lời giải.**

$$\log_3^2 x - 2\log_3(3x) - 1 < 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x - 2\log_3 x - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 \leq \log_3 x \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq x \leq 27.$$

$$\text{Vậy } a = \frac{1}{3}, b = 27 \Rightarrow 3a + b = 28.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 40

Tập nghiệm S của bất phương trình $3^{-3x} > 3^{-x+2}$ là

- (A) $S = (-1; 0)$. (B) $S = (-1; +\infty)$. (C) $S = (-\infty; 1)$. (D) $S = (-\infty; -1)$.

🔑 **Lời giải.**

$$\text{Ta có: } 3^{-3x} > 3^{-x+2} \Leftrightarrow -3x > -x + 2 \Leftrightarrow 2x < -2 \Leftrightarrow x < -1.$$

Chọn đáp án (D) □

—HẾT—





§5. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

A BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1

Cho hai số thực dương x, y và hai số thực α, β tùy ý. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- (A) $x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta}$. (B) $x^\alpha \cdot y^\beta = (xy)^{\alpha+\beta}$. (C) $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha \cdot \beta}$. (D) $(xy)^\alpha = x^\alpha \cdot y^\alpha$.

👉 **Lời giải.**

Dựa vào tính chất của lũy thừa.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2

Rút gọn biểu thức $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}: x^{\frac{5}{8}} (x > 0)$ ta được

- (A) $\sqrt[4]{x}$. (B) $\sqrt{x}$. (C) $\sqrt[3]{x}$. (D) $\sqrt[5]{x}$.

👉 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}: x^{\frac{5}{8}} &= (x \cdot (x \cdot x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}: x^{\frac{5}{8}} = (x \cdot x^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{2}}: x^{\frac{5}{8}} \\ &= (x^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}}: x^{\frac{5}{8}} = x^{\frac{7}{8}}: x^{\frac{5}{8}} = \sqrt[4]{x}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 3

Cho hai số thực dương a, b với $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $\log_a (a^3 b^2) = 3 + \log_a b$. (B) $\log_a (a^3 b^2) = 3 + 2 \log_a b$.
(C) $\log_a (a^3 b^2) = \frac{3}{2} + \log_a b$. (D) $\log_a (a^3 b^2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \log_a b$.

👉 **Lời giải.**

Ta có $\log_a (a^3 b^2) = \log_a (a^3) + \log_a (b^2) = 3 + 2 \log_a b$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4

Cho bốn số thực dương a, b, x, y với $a, b \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- (A) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_b y$. (B) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.
(C) $\log_a \frac{1}{x} = \frac{1}{\log_a x}$. (D) $\log_a b \cdot \log_b x = \log_a x$.

👉 **Lời giải.**

Ta có $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$.

Chọn đáp án (C) □

**Câu 5**

Đặt $\log_2 5 = a, \log_3 5 = b$. Khi đó, $\log_6 5$ tính theo a và b bằng

- (A) $\frac{ab}{a+b}$. (B) $\frac{1}{a+b}$. (C) $a^2 + b^2$. (D) $a + b$.

📌 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \log_6 5 = \frac{1}{\log_5 6} = \frac{1}{\log_5 2 + \log_5 3} = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{ab}{a+b}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 6

Cho hàm số $y = 2^x$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- (A) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.
 (B) Tập giá trị của hàm số là $(0; +\infty)$.
 (C) Đồ thị của hàm số cắt trục Ox tại đúng một điểm.
 (D) Hàm số đồng biến trên tập xác định của nó.

📌 **Lời giải.**

Đồ thị của hàm số $y = 2^x$ nằm phía trên trục Ox nên không cắt trục Ox .

Chọn đáp án (C) □

Câu 7

Hàm số nào sau đây đồng biến trên tập xác định của nó?

- (A) $y = \log_{0,5} x$. (B) $y = e^{-x}$. (C) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. (D) $y = \ln x$.

📌 **Lời giải.**

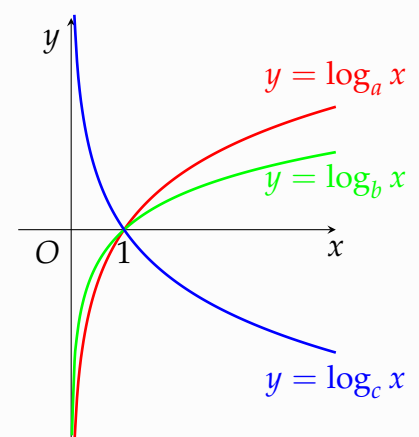
Hàm số $y = \ln x$ đồng biến trên tập xác định của nó vì có $a = e > 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8

Cho đồ thị ba hàm số $y = \log_a x, y = \log_b x$ và $y = \log_c x$ như hình bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A) $a > b > c$. (B) $b > a > c$.
 (C) $a > b > c$. (D) $b > c > a$.



📌 **Lời giải.**

Từ đồ thị suy ra $\begin{cases} a, b > 1 \\ 0 < c < 1 \end{cases}$.

Thay $x = a$ vào hai hàm số $y = \log_a x, y = \log_b x$ ta có $\log_a a > \log_b a \Leftrightarrow 1 > \log_b a \Leftrightarrow b > a$.

Chọn đáp án (B)



B BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1

Cho $0 < a \neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $B = \log_a \left(\frac{a^2 \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[4]{a}} \right) + a^{2 \log_a} \frac{\sqrt{105}}{30}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} B &= \log_a \left(\frac{a^2 \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[4]{a}} \right) + a^{2 \log_a} \frac{\sqrt{105}}{30} \\ &= \log_a (a^3 \cdot \sqrt[3]{a}) + \frac{105}{900} = \log_a \left(a^{\frac{10}{3}} \right) + \frac{7}{60} = \frac{10}{3} + \frac{7}{60} = \frac{69}{20}. \end{aligned}$$



Bài 2

Giải các phương trình sau:

a) $3^{1-2x} = 4^x$;

b) $\log_3(x+1) + \log_3(x+4) = 2$.

Lời giải.

a) Ta có $3^{1-2x} = 4^x \Leftrightarrow 3 = 36^x \Leftrightarrow x = \log_{36} 3$;

b) Điều kiện: $x > -1$.

Ta có

$$\begin{aligned} \log_3(x+1) + \log_3(x+4) &= 2 \Leftrightarrow \log_3[(x+1)(x+4)] = 2 \\ &\Leftrightarrow (x+1)(x+4) = 9 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 5x - 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-5 + 3\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-5 - 3\sqrt{5}}{2} \text{ (loại).} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \frac{-5 + 3\sqrt{5}}{2}$.



Bài 3

Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{4^x - 2^{x+1}}$;

b) $y = \ln(1 - \ln x)$.

Lời giải.

- a) Hàm số $y = \sqrt{4^x - 2^{x+1}}$ xác định khi và chỉ khi $4^x - 2^{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow 2^x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.
 Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = [1; +\infty)$.
- b) Hàm số $y = \ln(1 - \ln x)$ xác định khi và chỉ khi $1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < e$.
 Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = (0; e)$.

□

Bài 4

Lạm phát là sự tăng mức giá chung một cách liên tục của hàng hoá và dịch vụ theo thời gian, tức là sự mất giá trị của một loại tiền tệ nào đó. Chẳng hạn, nếu lạm phát là 5% một năm thì sức mua của 1 triệu đồng sau một năm chỉ còn là 950 nghìn đồng (vì đã giảm mất 5% của 1 triệu đồng, tức là 50000 đồng). Nói chung, nếu tỉ lệ lạm phát trung bình là $r\%$ một năm thì tổng số tiền P ban đầu, sau n năm số tiền đó chỉ còn giá trị là

$$A = P \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right)^n.$$

- a) Nếu tỉ lệ lạm phát là 8% một năm thì sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm sẽ còn lại bao nhiêu?
- b) Nếu sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm chỉ còn là 90 triệu đồng thì tỉ lệ lạm phát trung bình của hai năm đó là bao nhiêu?
- c) Nếu tỉ lệ lạm phát là 5% một năm thì sau bao nhiêu năm sức mua của số tiền ban đầu chỉ còn lại một nửa?

📌 Lời giải.

- a) Tỉ lệ lạm phát là 8% một năm thì sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm sẽ còn lại là

$$A = 100 \cdot \left(1 - \frac{8}{100}\right)^2 = \frac{2116}{25} = 84,65 \text{ (triệu đồng)}.$$

- b) Sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm chỉ còn là 90 triệu đồng thì tỉ lệ lạm phát trung bình $r\%$ của hai năm đó là

$$\begin{aligned} 90 &= 100 \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right)^2 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{r}{100}\right)^2 = \frac{9}{10} \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{r}{100} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow \frac{r}{100} = 1 - \frac{3}{\sqrt{10}} \\ &\Leftrightarrow r \approx 5,13\%. \end{aligned}$$

- c) Tỉ lệ lạm phát là 5% một năm, gọi n là số năm sức mua của số tiền ban đầu chỉ còn lại một nửa. Khi đó

$$\begin{aligned} P &= 2P \cdot \left(1 - \frac{5}{100}\right)^n \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{20}\right)^n = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{19}{20}\right)^n = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow n \approx 13,51 \text{ năm}. \end{aligned}$$

□



Bài 5

Giả sử quá trình nuôi cấy vi khuẩn tuân theo quy luật tăng trưởng tự do. Khi đó, nếu gọi N_0 là số lượng vi khuẩn ban đầu và $N(t)$ là số lượng vi khuẩn sau t giờ thì ta có:

$$N(t) = N_0 e^{rt},$$

trong đó r là tỉ lệ tăng trưởng vi khuẩn mỗi giờ. Giả sử ban đầu có 500 con vi khuẩn và sau 1 giờ tăng lên 800 con. Hỏi:

- Sau 5 giờ thì số lượng vi khuẩn là khoảng bao nhiêu con?
- Sau bao lâu thì số lượng vi khuẩn ban đầu sẽ tăng lên gấp đôi?

👉 Lời giải.

Ban đầu có 500 con vi khuẩn và sau 1 giờ tăng lên 800 con nên tỷ lệ tăng trưởng vi khuẩn trong mỗi giờ là:

$$800 = 500e^r \Leftrightarrow e^r = \frac{8}{5} \Leftrightarrow r = \ln \frac{8}{5}.$$

$$\text{a) Sau 5 giờ thì số lượng vi khuẩn là } N(t) = 500e^{5 \ln \frac{8}{5}} = \frac{131072}{25} = 5242 \text{ con.}$$

b) Gọi t là số giờ mà số lượng vi khuẩn ban đầu sẽ tăng lên gấp đôi.
Khi đó

$$2N_0 = N_0 e^{t \ln \frac{8}{5}} \Leftrightarrow \left(\frac{8}{5}\right)^t = 2 \Leftrightarrow t \approx 1,5 \text{ giờ.}$$



Bài 6

Vào năm 1938, nhà vật lý Frank Benford đã đưa ra một phương pháp để xác định xem một bộ số đã được chọn ngẫu nhiên hay đã được chọn theo cách thủ công. Nếu bộ số này không được chọn ngẫu nhiên thì công thức Benford sau sẽ được dùng ước tính xác suất P để chữ số d là chữ số đầu tiên của bộ số đó: $P = \log \frac{d+1}{d}$. (Theo F. Benford, The Law of Anomalous Numbers, Proc. Am. Philos. Soc. 78 (1938), 551 - 572). Chẳng hạn, xác suất để chữ số đầu tiên là 9 bằng khoảng 4,6% (thay $d = 9$ trong công thức Benford để tính P).

- Viết công thức tìm chữ số d nếu cho trước xác suất P .
- Tìm chữ số có xác suất bằng 9,7% được chọn.
- Tính xác suất để chữ số đầu tiên là 1.

👉 Lời giải.

a) Công thức tìm chữ số d nếu cho trước xác suất P là

$$P = \log \frac{d+1}{d} \Leftrightarrow \frac{1}{d} = 10^P - 1 \Leftrightarrow d = \frac{1}{10^P - 1}.$$

b) Thay vào công thức $d = \frac{1}{10^P - 1}$, ta có chữ số có xác suất bằng 9,7% được chọn là

$$d = \frac{1}{10^P - 1} = 4.$$



c) Thay vào công thức, ta có xác suất cần tìm là $P = \log \frac{1+1}{1} \approx 30,1\%$.

