

CHUYÊN ĐỀ 3: NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

BÀI 3: ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Nắm vững công thức tính diện tích hình phẳng, thể tích vật thể và thể tích khối tròn xoay.
- + Ghi nhớ các kiến thức cơ bản về phương trình đường thẳng, parabol, đường tròn và elip.
- + Nắm được định nghĩa, tính chất và các phương pháp tính tích phân.

❖ Kỹ năng

- + Hiểu rõ các ứng dụng của tích phân để vận dụng vào việc tính diện tích hình phẳng và thể tích của các vật thể, cũng như vật thể tròn xoay.
- + Lập được phương trình đường thẳng, parabol, đường tròn và elip để xử lý các bài toán liên quan.
- + Tính được diện tích hình phẳng, thể tích vật thể và thể tích khối tròn xoay trong các trường hợp cụ thể.

A. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

Hình phẳng giới hạn bởi một đường cong và trục hoành

Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (với $a < b$) được xác định theo công thức:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

Chú ý

Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên đoạn $[a; b]$ thì

$$S = \int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

• Nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = c$ thuộc khoảng $(a; b)$ thì

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^c |f(x)| dx + \int_c^b |f(x)| dx \\ &= \left| \int_a^c f(x) dx \right| + \left| \int_c^b f(x) dx \right| \end{aligned}$$

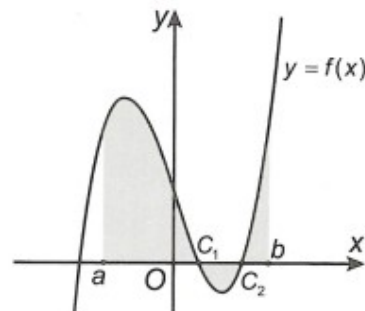
• Nếu phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm $c_1 < c_2$ thuộc khoảng $(a; b)$ thì

$$S = \int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_c^{c_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx \right| + \left| \int_{c_2}^b f(x) dx \right|$$

Hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong

Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $(C_1): y = f(x)$, $(C_2): y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (với $a < b$) được xác định theo công thức:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$



Phần tô màu đen chính là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (với $a < b$).

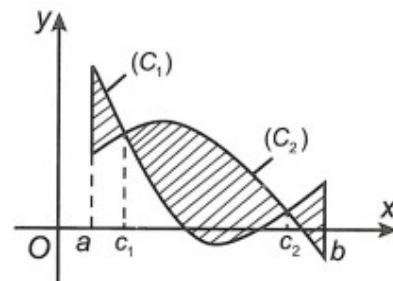
Đặc biệt:

• Nếu $f(x) \geq 0, \forall x \in [a; b]$ thì

$$S = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b f(x) dx$$

• Nếu $f(x) \leq 0, \forall x \in [a; b]$ thì

$$S = \int_a^b |f(x)| dx = - \int_a^b f(x) dx$$



Phần gạch chéo trong hình là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số

$$(C_1): y = f(x); (C_2): y = g(x)$$

liên tục trên đoạn $[a; b]$ và hai đường

thẳng $x=a, x=b$ (với $a < b$).

Đặc biệt:

◦ Nếu $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a; b]$ (đồ thị (C_1) nằm phía trên đồ thị (C_2)) thì ta

có:
$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

$$= \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

• Nếu $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a; b]$ (đồ thị (C_1) nằm phía dưới đồ thị (C_2)) thì ta

có:
$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

$$= - \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Chú ý

• Nếu phương trình $f(x) = g(x)$ vô nghiệm trên khoảng

$(a; b)$ thì
$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|.$$

• Nếu phương trình $f(x) = g(x)$ có nghiệm duy nhất $x=c$

thuộc $(a; b)$ thì
$$S = \int_a^c |f(x) - g(x)| dx + \int_c^b |f(x) - g(x)| dx$$

$$= \left| \int_a^c [f(x) - g(x)] dx \right| + \left| \int_c^b [f(x) - g(x)] dx \right|$$

• Nếu phương trình $f(x) = g(x)$ có hai nghiệm $c_1 < c_2$ thuộc

khoảng $(a; b)$ thì

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \left| \int_c^{c_1} [f(x) - g(x)] dx \right|$$

$$+ \left| \int_{c_1}^{c_2} [f(x) - g(x)] dx \right| + \left| \int_{c_2}^b [f(x) - g(x)] dx \right|$$

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA

Ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng

Hình phẳng giới hạn bởi một đường cong và trục hoành

Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (với $a < b$) được xác định theo công thức:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

Hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong

Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $(C_1): y = f(x)$, $(C_2): y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (với $a < b$) được xác định theo công thức: $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Tính diện tích hình phẳng

Bài toán 1: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị bởi một đường cong

 Phương pháp giải

$$\text{Xét hình phẳng } (H): \begin{cases} (C): y = f(x) \\ Ox: y = 0 \\ x = a \\ x = b (a < b) \end{cases}$$

Khi đó diện tích hình phẳng (H) là:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

Trong loại 1 này, nếu thiếu cận a hoặc b thì ta đi tìm bằng cách giải phương trình $f(x) = 0$.

Ví dụ: Gọi diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(C): y = \frac{-3x-1}{x-1}$ và hai trục tọa độ là S .

Tính S .

Hướng dẫn giải

Hoàn thành giao điểm của (C) và trục hoành là nghiệm của phương trình:

$$\frac{-3x-1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$$

Do đó diện tích hình phẳng là

$$\begin{aligned} S &= \left| \int_{-\frac{1}{3}}^0 \frac{-3x-1}{x-1} dx \right| = \left| \int_{-\frac{1}{3}}^0 \left(3 + \frac{4}{x-1} \right) dx \right| \\ &= \left(3x + 4 \ln|x-1| \right) \Big|_{-\frac{1}{3}}^0 = 4 \ln \frac{4}{3} - 1 \end{aligned}$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (x-2)^2 - 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ bằng

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{7}{3}$

Hướng dẫn giải

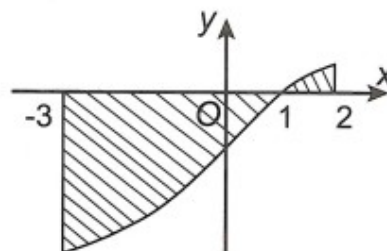
Ta có $S = \int_1^2 \left| (x-2)^2 - 1 \right| dx = \int_1^2 |x^2 - 4x + 3| dx$

Vì phương trình $x^2 - 4x + 3$ không có nghiệm trên $(1; 2)$ nên $S = \left| \int_1^2 (x^2 - 4x + 3) dx \right| = \frac{2}{3}$

Chọn A.

Lưu ý: Các phần tính tích phân, học sinh có thể sử dụng máy tính bỏ túi để kiểm tra kết quả.

Ví dụ 2: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -3$, $x = 2$ (như hình vẽ



bên). Đặt $a = \int_{-3}^1 f(x) dx$, $b = \int_1^2 f(x) dx$.

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $S = a + b$.

B. $S = a - b$.

C. $S = -a - b$.

D. $S = b - a$.

Hướng dẫn giải

Ta có $S = \int_{-3}^1 |f(x)| dx + \int_1^2 |f(x)| dx = -\int_{-3}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = -a + b$

Chọn D.

Ví dụ 3: Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{\ln x}{x^2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = \pi \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$.

B. $S = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$.

C. $S = \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x^2} \right)^2 dx$.

D. $S = \pi \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x^2} \right)^2 dx$.

Hướng dẫn giải

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{\ln x}{x^2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e$ là:

$S = \int_1^e \left| \frac{\ln x}{x^2} \right| dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$ vì $\frac{\ln x}{x^2} > 0$, $\forall x \in (1; e)$

Chọn B.

Ví dụ 4: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = \ln x$, $y = 1$ và đường thẳng $x = 1$ bằng

A. e^2 .

B. $e + 2$.

C. $2e$.

D. $e - 2$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = \ln x$, $y = 1$ và đường thẳng $x = 1$ là:

$$S = \int_1^e |\ln x - 1| dx = \left| \int_1^e (\ln x - 1) dx \right| = \left| x(\ln x - 1) \Big|_1^e - \int_1^e dx \right| = \left| 1 - x \Big|_1^e \right| = e - 2$$

Chọn D.

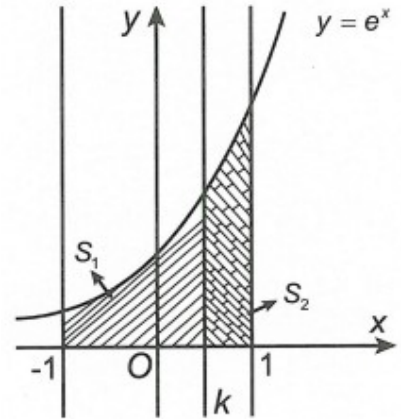
Ví dụ 5*: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x = -1$, $x = 1$. Với $k \in (-1; 1)$, đường thẳng $x = k$ chia hình phẳng (H) thành hai hình phẳng có diện tích lần lượt là S_1 và S_2 (như hình vẽ bên). Giá trị k để $S_1 = S_2$ là

A. $2 \ln 2 - 1$.

B. $2 \ln \left(e - \frac{1}{e} \right) - 1$.

C. $\ln \left(e + \frac{1}{e} \right) - \ln 2$.

D. $\ln 2$.



Hướng dẫn giải

Vì $e^x > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên ta có

$$S_1 = \int_{-1}^k e^x dx = e^x \Big|_{-1}^k = e^k - e^{-1} \quad \text{và} \quad S_2 = \int_k^1 e^x dx = e^x \Big|_k^1 = e - e^k$$

$$S_1 = S_2 \Leftrightarrow e^k - e^{-1} = e - e^k \Leftrightarrow 2e^k = e + \frac{1}{e} \Leftrightarrow e^k = \frac{1}{2} \left(e + \frac{1}{e} \right)$$

$$\Leftrightarrow k = \ln \frac{1}{2} \left(e + \frac{1}{e} \right) = \ln \left(e + \frac{1}{e} \right) - \ln 2$$

Chọn C.

Chú ý: $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$

Ví dụ 6*: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên $[-2; 6]$ như hình vẽ bên. Biết các miền A, B, $x = 2$ có diện tích lần lượt là 32; 2; 3.

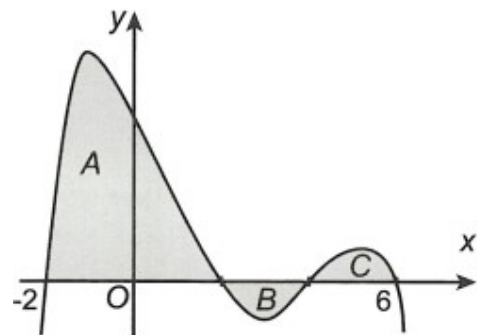
Tích phân $\int_{-2}^2 [f(2x+2) + 1] dx$ bằng

A. $\frac{45}{2}$.

B. 41.

C. 37.

D. $\frac{41}{2}$.



Hướng dẫn giải

Ta có $\int_{-2}^2 [f(2x+2)+1] dx = \int_{-2}^2 f(2x+2) dx + 4$

Xét $I_1 = \int_{-2}^2 f(2x+2) dx$.

Đặt $t = 2x+2 \Rightarrow dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$

Đổi cận: $x = -2 \Rightarrow t = -2$; $x = 2 \Rightarrow t = 6$.

Suy ra $I_1 = \frac{1}{2} \int_{-2}^6 f(t) dt$.

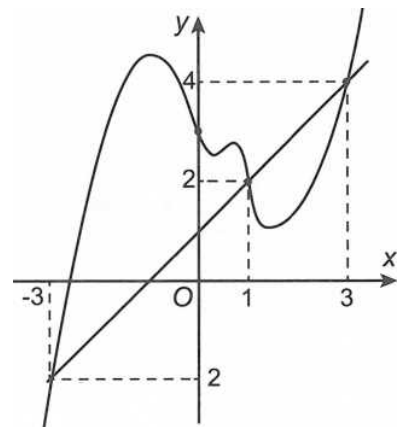
Gọi x_1 ; x_2 là các hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$

với trục hoành ($-2 < x_1 < x_2 < 6$). Ta có

$$I_1 = \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^{x_1} f(t) dt + \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt + \int_{x_2}^6 f(t) dt \right) = \frac{1}{2} (S_A - S_B + S_C)$$

$$= \frac{1}{2} (32 - 2 + 3) = \frac{33}{2}$$

Vậy $\int_{-2}^2 [f(2x+2)+1] dx = I_1 + 4 = \frac{33}{2} + 4 = \frac{41}{2}$

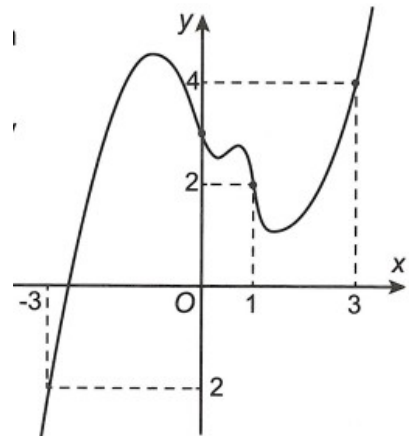


Chọn D.

Ví dụ 7*: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.

Đặt $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $g(3) > g(-3) > g(1)$.
- B. $g(-3) > g(3) > g(1)$.
- C. $g(1) > g(-3) > g(3)$.
- D. $g(1) > g(3) > g(-3)$.



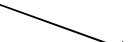
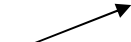
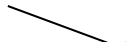
Hướng dẫn giải

Ta có $g'(x) = 2f'(x) - 2(x+1)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x+1$. Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $d: y = x+1$.

Dựa vào đồ thị ta thấy: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \pm 3 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$		$g(-3)$		$g(1)$		$g(3)$		$+\infty$

Suy ra $g(-3) < g(1)$ và $g(3) < g(1)$

Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích các hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f'(x)$, đường thẳng $d: y = x + 1$ trên các đoạn $[-3; 1]$ và $[1; 3]$ ta có:

+) Trên đoạn $[-3; 1]$ ta có $f'(x) \geq x + 1$ nên $S_1 = \int_{-3}^1 |g'(x)| dx = \frac{1}{2} \int_{-3}^1 [f'(x) - (x + 1)] dx$.

+) Trên đoạn $[1; 3]$ ta có $f'(x) \leq x + 1$ nên $S_2 = \int_1^3 |g'(x)| dx = \frac{1}{2} \int_1^3 [(x + 1) f'(x)] dx$.

Dựa vào đồ thị ta thấy $S_1 > S_2$ nên ta có:

$$g(x) \Big|_{-3}^1 > -g(x) \Big|_1^3 \Leftrightarrow g(1) - g(-3) > -g(3) + g(1) \Leftrightarrow g(3) > g(-3).$$

Vậy $g(1) > g(3) > g(-3)$.

Chọn D.

Lưu ý:

- Hoàn chỉnh giao điểm của đồ thị hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $d: y = x + 1$ chính là nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$.

- Lập bảng biến thiên ta thấy $g(1)$ lớn hơn $g(\pm 3)$. Ta chỉ cần so sánh $g(3)$ và $g(-3)$.

- So sánh diện tích dựa vào đồ thị.

Bài toán 2: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong

Phương pháp giải

$$\text{Xét hình phẳng } (H): \begin{cases} (C_1): y = f(x) \\ (C_2): y = g(x) \\ x = a \\ x = b (a < b) \end{cases}$$

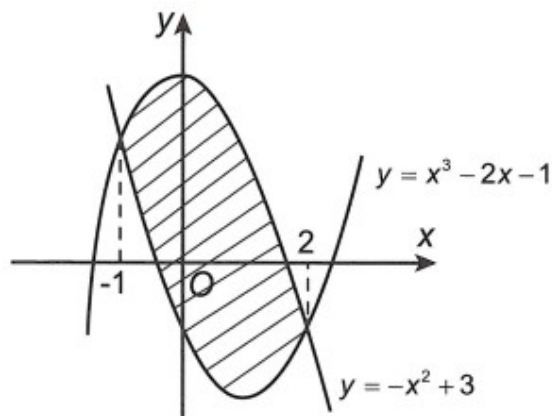
Ví dụ: Tính diện tích phần gạch chéo trên hình vẽ sau.

Khi đó diện tích hình phẳng (H) là:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Trong loại 2 này, nếu thiếu cận a hoặc b thì ta đi tìm bằng cách giải phương trình $f(x) = g(x)$.

Lưu ý: Kỹ năng phá dấu giá trị tuyệt đối, quan sát hình vẽ để xác định diện tích.



Hướng dẫn giải

Từ đồ thị ta thấy

$$-x^2 + 3 \geq x^3 - 2x - 1 \quad \forall x \in [-1; 2]$$

Vậy diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong

$$\begin{aligned} \text{hình vẽ là } S &= \int_{-1}^2 [(-x^2 + 3) - (x^3 - 2x - 1)] dx \\ &= \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx \\ &= \left(-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x \right) \Big|_{-1}^2 \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

📊 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số: $y = x^3 - 3x$, $y = x$. Tính S .

- A. $S = 4$. B. $S = 8$. C. $S = 2$. D. $S = 0$.

Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là

$$x^3 - 3x = x \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \left| \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx \right| + \left| \int_0^2 (x^3 - 4x) dx \right| = 4 + 4 = 8.$$

Chọn B.

Ví dụ 2: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $my = x^2$, $mx = y^2$ (với $m > 0$). Tìm giá trị của m để $S = 3$.

- A. $m = 1$. B. $m = 2$. C. $m = 3$. D. $m = 4$.

Hướng dẫn giải

Vì $m > 0$ nên từ $my = x^2$ ta suy $y = \frac{x^2}{m} \geq 0$;

Từ $mx = y^2$ nên $x \geq 0$ và $y = \sqrt{mx}$.

Xét phương trình $\frac{x^2}{m} = \sqrt{mx} \Leftrightarrow x^4 = m^3x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m \end{cases}$

Khi đó diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^m \left| \sqrt{mx} - \frac{x^2}{m} \right| dx = \left| \int_0^m \left(\sqrt{mx} - \frac{x^2}{m} \right) dx \right| \\ &= \left| \left(\frac{2\sqrt{m}}{3} x\sqrt{x} - \frac{x^3}{3m} \right) \right|_0^m = \left| \frac{1}{3} m^2 \right| = \frac{1}{3} m^2 \end{aligned}$$

Yêu cầu bài toán $S = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} m^2 = 3 \Leftrightarrow m^2 = 9 \Leftrightarrow m = 3$ (vì $m > 0$).

Chọn C.

Ví dụ 3: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm $y = x^2$ và $y = \frac{2x}{x-1}$ là $S = a + b \ln 2$ với a ,

b là những số hữu tỷ. Giá trị của $a + b$ là

A. $-\frac{1}{3}$.

B. 2.

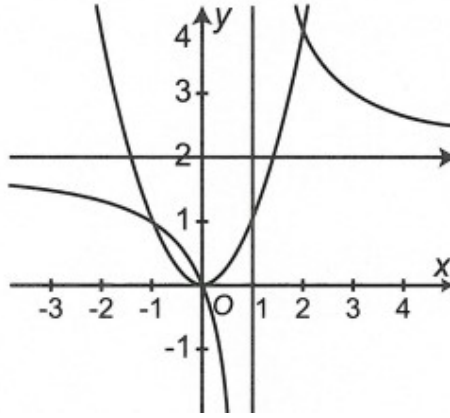
C. $-\frac{2}{3}$.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm của $(C_1): y = x^2$ và $(C_2): y = \frac{2x}{x-1}$ là

$$x^2 = \frac{2x}{x-1} (x \neq 1) \Rightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$



Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_{-1}^0 \left(\frac{2x}{x-1} - x^2 \right) dx = \int_{-1}^0 \left(2 + \frac{2}{x-1} - x^2 \right) dx = \left(2x + 2 \ln|x-1| - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^0 = \frac{5}{3} - 2 \ln 2$$

Suy ra $a = \frac{5}{3}$ và $b = -2$

Vậy $a + b = -\frac{1}{3}$

Chọn A.

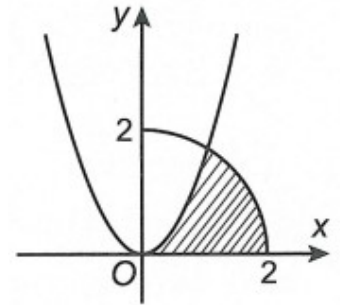
Ví dụ 4*: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{4-x^2}$ (với $0 \leq x \leq 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) là

A. $\frac{4\pi + \sqrt{3}}{12}$.

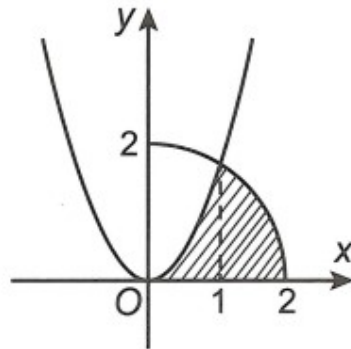
B. $\frac{4\pi - \sqrt{3}}{6}$.

C. $\frac{4\pi + 2\sqrt{3} - 3}{6}$.

D. $\frac{5\sqrt{3} - 2\pi}{3}$.



Hướng dẫn giải



Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $y = \sqrt{3}x^2$ và cung tròn $y = \sqrt{4-x^2}$ (với $0 \leq x \leq 2$) là $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{3}x^2 \Leftrightarrow 4-x^2 = 3x^4 \Leftrightarrow x=1$.

Diện tích của (H) là

$$S = \int_0^1 \sqrt{3}x^2 dx + \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{\sqrt{3}}{3}x^3 \Big|_0^1 + I = \frac{\sqrt{3}}{3} + I \text{ với } I = \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx.$$

$$\text{Đặt } x = 2\sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = 2\cos t dt$$

$$\text{Đổi cận } x=1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}, x=2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}.$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot 2\cos t dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2 t dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2(1+\cos 2t) dt = (2x + \sin 2t) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\ = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vậy } S = \frac{\sqrt{3}}{3} + I = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\pi - \sqrt{3}}{6}$$

Chọn B.

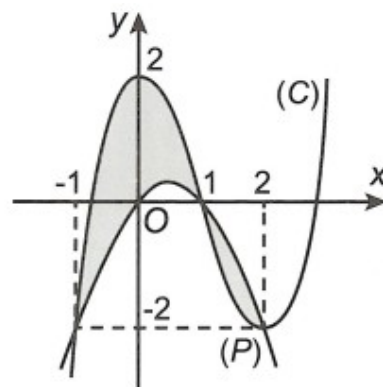
Ví dụ 5*: Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm đa thức bậc ba và parabol (P) có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần **tô đậm** của hình vẽ có diện tích bằng

A. $\frac{37}{12}$.

B. $\frac{7}{12}$.

C. $\frac{11}{12}$.

D. $\frac{5}{12}$.



Hướng dẫn giải

Vì đồ thị hàm bậc ba và đồ thị hàm bậc hai cắt trục tung tại các điểm có tung độ lần lượt là $y = 2$ và $y = 0$ nên ta xét hai hàm số là $y = ax^3 + bx^2 + cx + 2$, $y = mx^2 + nx$ (với $a, m \neq 0$).

Suy ra (C) : $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 2$ và (P) : $y = g(x) = mx^2 + nx$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (P) là:

$$ax^3 + bx^2 + cx + 2 = mx^2 + nx \Leftrightarrow (ax^3 + bx^2 + cx + 2) - (mx^2 + nx) = 0.$$

$$\text{Đặt } P(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + 2) - (mx^2 + nx).$$

Theo giả thiết, (C) và (P) cắt nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt là $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$ nên $P(x) = a(x+1)(x-1)(x-2)$.

$$\text{Ta có } P(0) = 2a.$$

$$\text{Mặt khác, ta có } P(0) = f(0) - g(0) = 2 \Rightarrow a = 1.$$

Vậy diện tích phần tô đậm là $S = \int_{-1}^2 |(x+1)(x-1)(x-2)| dx = \frac{37}{12}$

Chọn A.

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = \pi \int_0^2 e^{2x} dx$. B. $S = \int_0^2 e^x dx$. C. $S = \pi \int_0^2 e^x dx$. D. $S = \int_0^2 e^{2x} dx$.

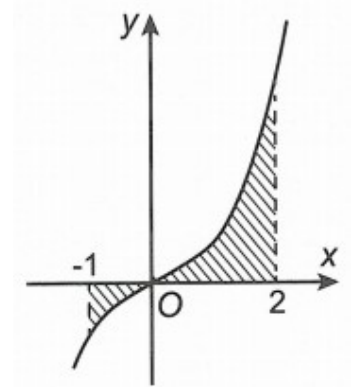
Câu 2: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ và đồ thị hàm số $y = x - x^2$ là

A. $\frac{37}{12}$. B. $I = \frac{9}{4}$. C. $\frac{81}{12}$. D. 13.

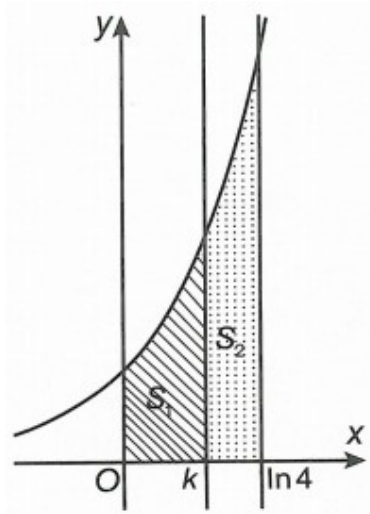
Câu 3: Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$ (như hình vẽ bên).

Đặt $a = \int_{-1}^0 f(x) dx$, $b = \int_0^2 f(x) dx$, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S = b - a$.
B. $S = b + a$.
C. $S = -b + a$.
D. $S = -b - a$.



Câu 4: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k$ ($0 < k < \ln 4$) chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên dưới. Tìm k để $S_1 = 2S_2$.



A. $k = \frac{2}{3} \ln 4$.

B. $k = \ln 2$.

C. $k = \ln \frac{8}{3}$.

D. $k = \ln 3$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-1; 4]$ như

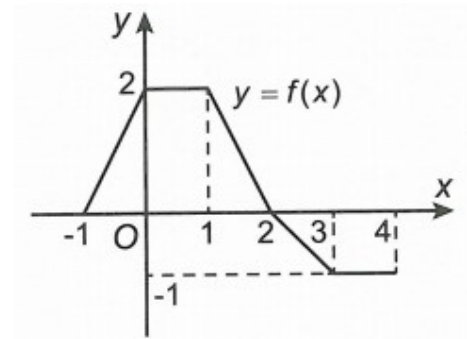
hình vẽ bên. Tính tích phân $I = \int_{-1}^4 f(x) dx$.

A. $I = 3$.

B. $I = \frac{11}{2}$.

C. $I = 5$.

D. $I = \frac{5}{2}$.



Câu 6: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị các hàm số $y = \ln x$, $y = 1$, $y = 1 - x$.

A. $S = e - \frac{3}{2}$.

B. $S = e - \frac{1}{2}$.

C. $S = e + \frac{1}{2}$.

D. $S = e + \frac{3}{2}$.

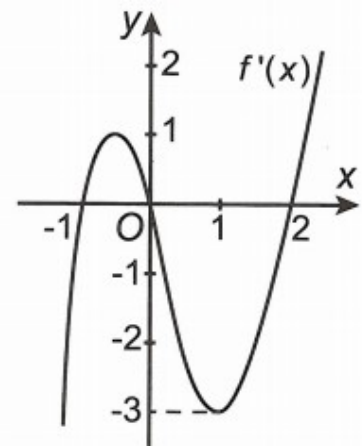
Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Khẳng định nào trong các phương án dưới đây là đúng?

A. $f(2) > f(-1) > f(0)$.

B. $f(0) > f(-1) > f(2)$.

C. $f(0) > f(2) > f(-1)$.

D. $f(-1) > f(0) > f(2)$.

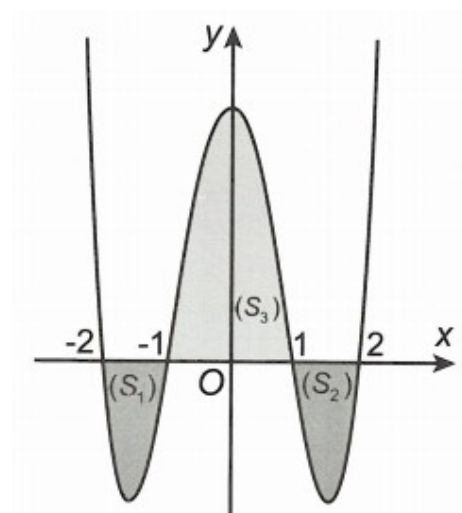


Câu 8: Cho hàm $y = F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = f(x)$,

biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 2]$ như hình vẽ ở bên dưới và có diện tích $S_1 = S_2 = \frac{22}{15}$,

$S_3 = \frac{76}{15}$

Giá trị của biểu thức $F(2) + F(1) - F(-1) - F(-2)$ bằng



A. $I = \frac{36}{5}$.

B. $I = \frac{32}{15}$.

C. $I = \frac{18}{5}$.

D. $I = -\frac{32}{15}$.

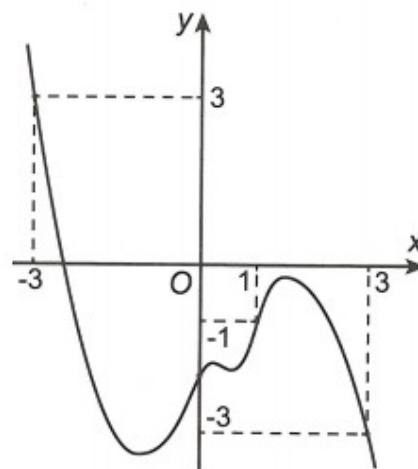
Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x) = 2f(x) + x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $g(3) > g(-3) > g(1)$.

B. $g(1) > g(3) > g(-3)$.

C. $g(1) > g(-3) > g(3)$.

D. $g(-3) > g(3) > g(1)$.



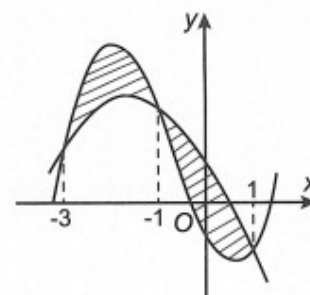
Câu 10: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - \frac{1}{2}$ và $g(x) = dx^2 + ex + 1$ (với $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -3 ; -1 ; 1 (tham khảo hình vẽ bên). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\frac{9}{2}$.

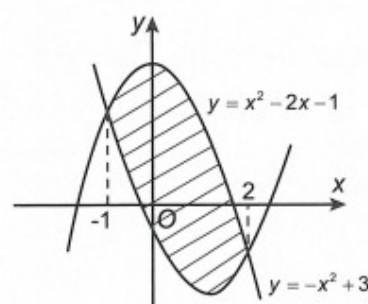
B. 8.

C. 4.

D. 5.



Câu 11: Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx$.

B. $\int_{-1}^2 (-2x + 2) dx$.

C. $\int_{-1}^2 (2x - 2) dx$.

D. $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$.

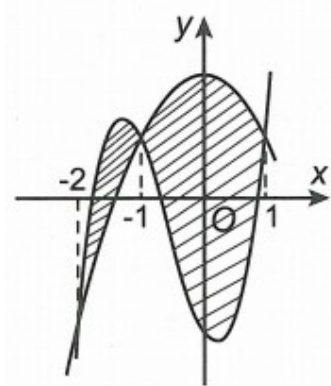
Câu 12: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 2$ và $g(x) = dx^2 + ex + 2$, với $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-2; -1; 1$ (tham khảo hình vẽ bên). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\frac{37}{6}$.

B. $\frac{13}{2}$.

C. $\frac{9}{2}$.

D. $\frac{37}{12}$.



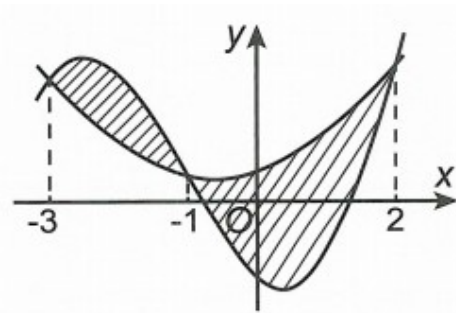
Câu 13: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 1$ và $g(x) = dx^2 + ex + \frac{1}{2}$ với $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-3; -1; 2$ (tham khảo hình vẽ bên). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số đã cho có diện tích bằng

A. $\frac{125}{12}$.

B. $\frac{253}{12}$.

C. $\frac{253}{48}$.

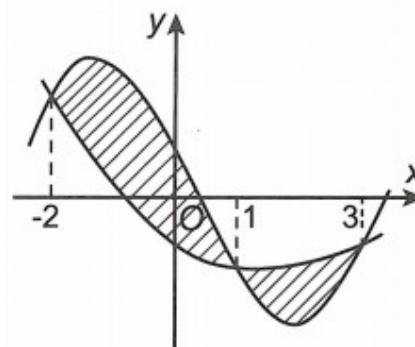
D. $\frac{125}{48}$.



Câu 14: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + \frac{3}{4}$ và $g(x) = dx^2 + ex - \frac{3}{4}$ với $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-2; 1; 3$ (tham khảo hình vẽ bên). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\frac{125}{48}$.

B. $\frac{253}{24}$.



C. $\frac{125}{24}$.

D. $\frac{253}{48}$.

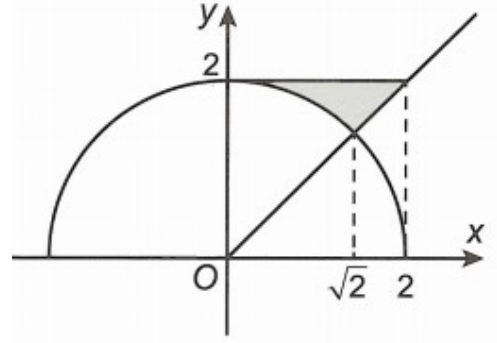
Câu 15: Cho hình phẳng được giới hạn bởi các đường $\sqrt{4-x^2}$, $y=x$ và $y=2$ có diện tích là $S=a+b\pi$ với $a, b \in \mathbb{Q}$ (phần bôi đen như hình vẽ bên). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a > 0$ và $b > 0$.

B. $a > 1$ và $b > 1$.

C. $a+2b=3$.

D. $a^2+4b^2 \geq 5$.



Câu 16: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) : $y=8x-x^2$ và trục hoành. Các đường thẳng $y=a$, $y=b$, $y=c$ với $0 < a < b < c < 16$ chia (H) thành bốn phần có diện tích bằng nhau.

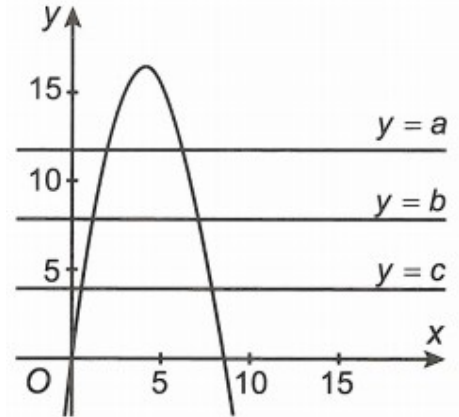
Giá trị của biểu thức $(16-a)^3 + (16-b)^3 + (16-c)^3$ bằng:

A. 2048.

B. 3584.

C. 2816.

D. 3480.



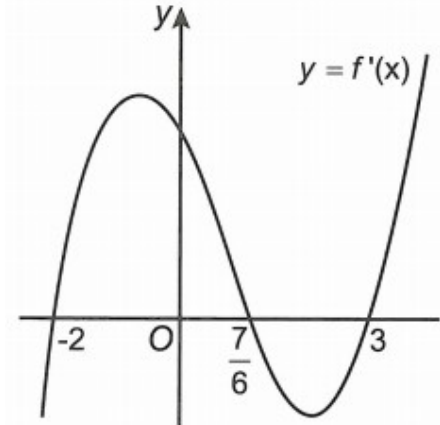
Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$ trong đó $m, n, p, q, r \in \mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tập nghiệm của phương trình $f(x)=r$ có tất cả bao nhiêu phần tử?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.



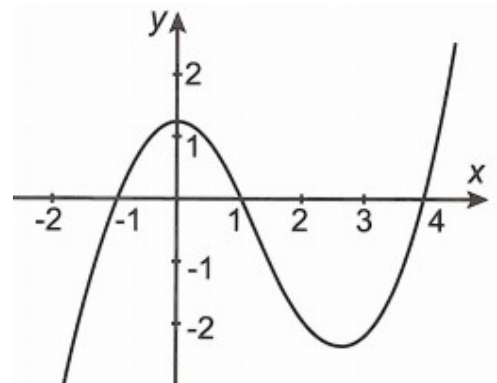
Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$ trong đó $m, n, p, q, r \in \mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tập nghiệm của phương trình $f(x)=16m+8n+4p+2q+r$ có tất cả bao nhiêu phần tử?

A. 3.

B. 4.

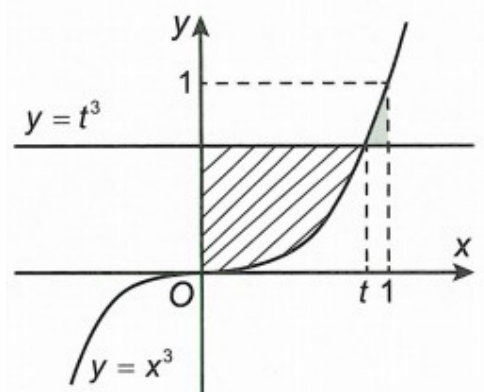
C. 5.

D. 6.



Câu 19: Cho đồ thị hàm số $y=x^3$ trên đoạn $[0;1]$ và một số

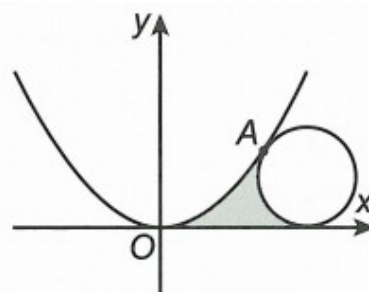
thực $t \in [0;1]$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3$, $y = t^3$, $x = 0$ và S_2 là diện



tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3$, $y = t^3$, $x = 1$ (tham khảo hình vẽ bên). Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $S_1 + S_2$. Tính $2M + 16m$.

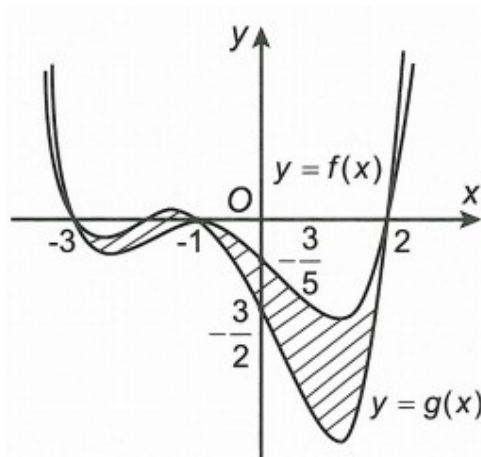
- A. $2M + 16m = 3$. B. $2M + 16m = 5$. C. $2M + 16m = 7$. D. $2M + 16m = 10$.

Câu 20: Cho Parabol (P) : $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường tròn (C) có bán kính bằng 1 tiếp xúc với trục hoành đồng thời có chung một điểm A duy nhất với (P) . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) , (C) và trục hoành (phần bôi đậm trong hình vẽ bên) bằng

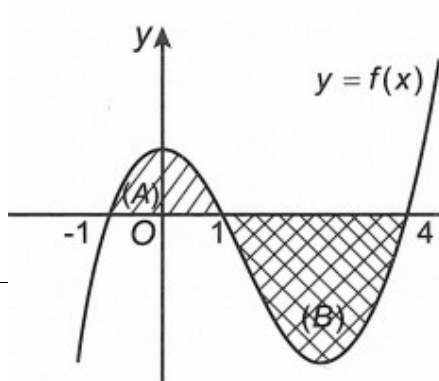


- A. $\frac{27\sqrt{3} - 8\pi}{24}$. B. $\frac{9\sqrt{3} + 9 - 4\pi}{12}$.
C. $\frac{29\sqrt{3} - 9\pi}{24}$. D. $\frac{3\sqrt{3} + 2 - \pi}{3}$.

Câu 21: Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ và $y = g(x)$. Biết rằng đồ thị của hai hàm số này tiếp xúc nhau tại $x = -3$ và cắt nhau tại hai điểm có hoành độ lần lượt là -1 ; 2 như hình vẽ bên. Diện tích của hình phẳng (H) (phần gạch sọc trên hình vẽ) gần nhất với kết quả nào dưới đây?



- A. 3,11. B. 2,45.
C. 3,21. D. 2,95.



Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng diện tích các hình phẳng (A) , (B) lần lượt bằng 3 và 7.

Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(5 \sin x - 1) dx$ bằng

A. $-\frac{4}{5}$.

B. 2.

C. $\frac{4}{5}$.

D. -2.

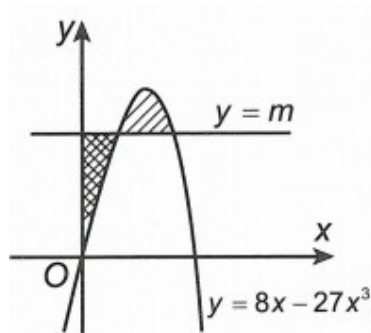
Câu 23: Cho đường cong $(C): y = 8x - 27x^3$ và đường thẳng $y = m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt nằm trong góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ Oxy và chia thành 2 miền phẳng (gạch sọc và kẻ caro) có diện tích bằng nhau (tham khảo hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $0 < m < \frac{1}{2}$.

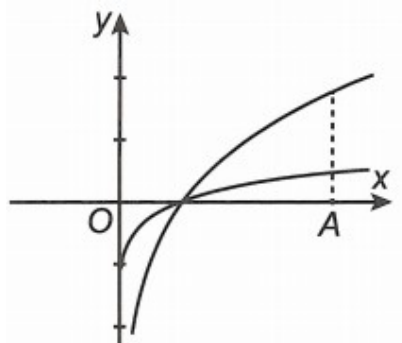
B. $\frac{1}{2} < m < 1$.

C. $1 < m < \frac{3}{2}$.

D. $\frac{3}{2} < m < 2$.



Câu 24: Cho 2 số thực dương a, b khác 1 và đồ thị của các hàm số $y = \log_a x$; $y = \log_b x$ như hình vẽ bên. Gọi d là đường thẳng song song với trục Oxy và cắt trục hoành tại điểm A có hoành độ $x = k$ ($k > 1$). Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = \log_a x$, đường thẳng d và trục hoành; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = \log_b x$, đường thẳng d và trục hoành. Biết $S_1 = 4S_2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $b = a^4$.

B. $a = b^4$.

C. $b = a^4 \ln 2$.

D. $a = b^4 \ln 2$.

Câu 25: Cho đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Gọi (d) là tiếp tuyến của (C) tại điểm A có hoành độ $x_A = a$. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi (d) và (C) bằng $\frac{27}{4}$, các giá trị của a thỏa mãn đẳng thức nào?

A. $2a^2 - a - 1 = 0$.

B. $a^2 - 2a = 0$.

C. $a^2 - a - 2 = 0$.

D. $a^2 + 2a - 3 = 0$.

Câu 26: Số thực a để hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm $y = \frac{x^2 + 2ax + 3a^2}{1 + a^6}$ và $y = \frac{a^2 - ax}{1 + a^6}$ có diện tích lớn nhất là

A. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

B. 1.

C. 2.

D. $\sqrt[3]{3}$.

Câu 27: Cho hàm số $y = x^4 - 6x^2 + m$ có đồ thị (C_m) . Giả sử (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt sao cho hình phẳng giới hạn bởi (C_m) và trục hoành có phần phía trên trục hoành và phần phía dưới trục hoành có diện tích bằng nhau. Khi đó $m = \frac{a}{b}$ (với a, b là các số nguyên, $b > 0$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản).

Giá trị của biểu thức $S = a + b$ là:

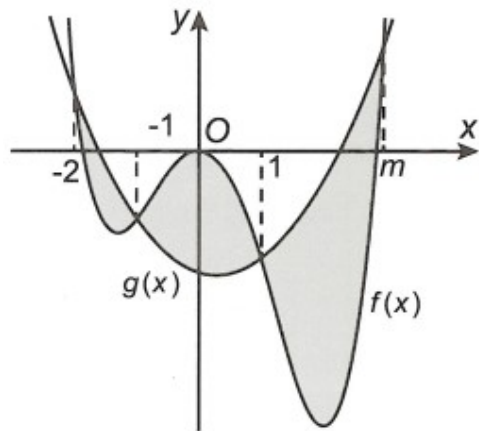
A. 7.

B. 6.

C. 5.

D. 4.

Câu 28: Cho hai hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ với $a \neq 0$ và $g(x) = px^2 + qx - 3$ có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Biết rằng (C_1) đi qua gốc tọa độ và cắt (C_2) tại bốn điểm có hoành độ lần lượt là $-2; -1; 1$ và m . Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) - g(x)$ tại điểm có hoành độ $x = -2$ có hệ số góc bằng $-\frac{15}{2}$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ (phần được tô đậm trong hình vẽ bên). Diện tích của hình (H) bằng



A. $\frac{1553}{120}$.

B. $\frac{1553}{240}$.

C. $\frac{1553}{60}$.

D. $\frac{1553}{30}$.

Dạng 2: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong

Phương pháp giải

Các kiến thức được sử dụng khi giải toán:

- Đường tròn (C) tâm $I(a; b)$ và bán kính R có phương trình $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ hay $y = b \pm \sqrt{R^2 - (x-a)^2}$. Diện tích hình tròn là $S = \pi R^2$.

- Elip (E) có tâm $O(0; 0)$ là gốc tọa độ, độ dài trục lớn và trục nhỏ lần lượt là $2a$ và $2b$ (với $a > b > 0$), có các tiêu cự $F_1(-c; 0)$ và $F_2(c; 0)$, với $c^2 = a^2 - b^2$ có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ hay $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$.

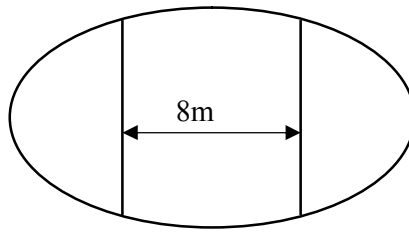
Diện tích của elip là $S = \pi \cdot a \cdot b$.

- Parabol (P) : $y = ax^2 + bx + c$.

- Khi đó đỉnh của (P) là $I\left(-\frac{b}{2a}; \frac{\Delta}{4a}\right)$ với $\Delta = b^2 - 4ac$ và điểm $M(x_0; y_0) \in (P) \Leftrightarrow y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Ông An có một mảnh vườn hình Elip có độ dài trục lớn bằng 16m và độ dài trục bé bằng 10m. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng 8m và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ bên dưới).

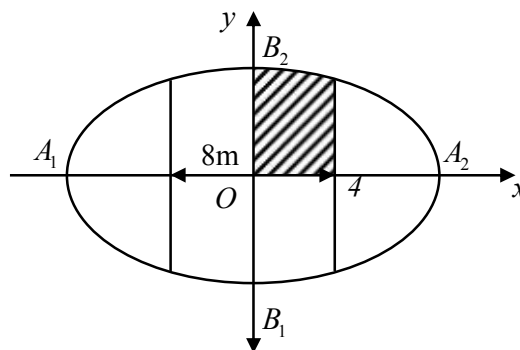


Biết kinh phí để trồng hoa là 100000 đồng/1 m^2 . Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó (số tiền được làm tròn đến hàng nghìn)?

- A. 7862000 đồng. B. 7653000 đồng. C. 7128000 đồng. D. 7826000 đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ bên dưới



Từ giả thiết ta có: $a = 8$ và $b = 5$.

Vậy phương trình của elip là $(E): \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} = 1$ hay $y = \pm \frac{5}{8} \sqrt{64 - x^2}$.

Khi đó, diện tích dải đất trồng hoa chính là diện tích S của hình phẳng được giới hạn bởi (E) và các đường thẳng $x = -4$ và $x = 4$.

$$\text{Ta có: } S = 4 \int_0^4 \frac{5}{8} \sqrt{64 - x^2} dx = \frac{5}{2} \int_0^4 \sqrt{64 - x^2} dx = 80 \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

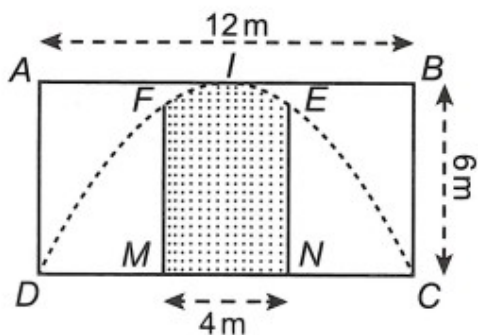
Khi đó số tiền cần để trồng hoa trên dải đất là

$$T = 100000.S = 7652891,82 \approx 7653000 \text{ (đồng)}.$$

Chọn B.

Chú ý: Việc tìm kết quả tích phân chúng ta nên sử dụng máy tính cho nhanh chóng.

Ví dụ 2: Một công ty quảng cáo X muốn làm một bức tranh trang trí hình MNEIG ở chính giữa của một bức tường hình chữ nhật ABCD có chiều cao $BC = 6m$, chiều dài $CD = 12m$ (hình vẽ bên dưới).

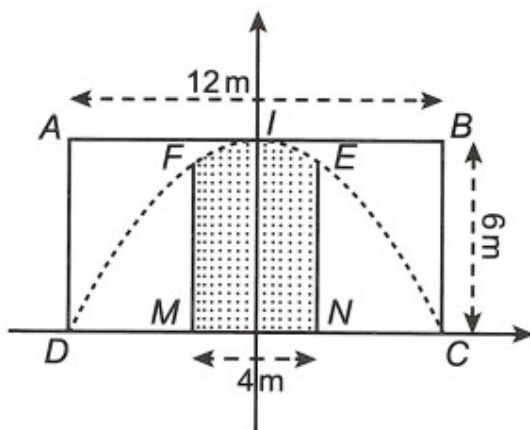


Cho biết $MNEG$ là hình chữ nhật có $MN = 4m$; cung EIF có hình dạng là một phần của parabol có đỉnh I là trung điểm của cạnh AB và đi qua hai điểm C, D . Kinh phí làm bức tranh là $900.000 \text{ đồng}/m^2$. Hỏi công ty X cần bao nhiêu tiền để làm bức tranh đó?

- A. 20 400 000 đồng. B. 20 600 000 đồng. C. 20 800 000 đồng. D. 21 200 000 đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục tọa độ có gốc là trung điểm O của MN , trục hoành trùng với đường thẳng MN (hình vẽ bên dưới).



Khi đó parabol có phương trình là $y = -\frac{1}{6}x^2 + 6$.

Diện tích của khung tranh là $S = \int_{-2}^2 \left(-\frac{1}{6}x^2 + 6 \right) dx = \frac{208}{9} (m^2)$.

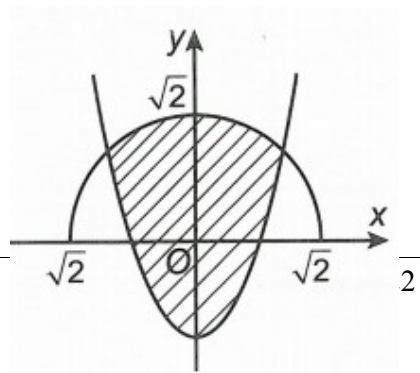
Suy ra số tiền cần để làm bức tranh là $\frac{208}{9} \times 900.000 = 20800000$ (đồng).

Chọn C.

Lưu ý: Parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} I(0;6) \in (P) \\ -\frac{b}{2a} = 0 \\ C(6;0) \in (P) \end{cases}$$

Ví dụ 3: Người ta cần trồng một vườn hoa Cẩm Tú Cầu (phần được gạch chéo trên hình vẽ bên). Biết rằng phần gạch chéo là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = 2x^2 - 1$ và nửa trên của đường tròn có tâm là



gốc tọa độ và bán kính bằng $\sqrt{2}$ m. Số tiền tối thiểu để trồng xong vườn hoa Cẩm Tú Cầu là bao nhiêu biết rằng để trồng mỗi m^2 hoa cần ít nhất là 250000 đồng?

- A. $\frac{3\pi-2}{6} \times 250000$ (đồng).
 B. $\frac{3\pi+10}{6} \times 250000$ (đồng).
 C. $\frac{3\pi+10}{3} \times 250000$ (đồng).
 D. $\frac{3\pi+2}{3} \times 250000$ (đồng).

Hướng dẫn giải

Phương trình đường tròn tâm gốc tọa độ, bán kính $R = \sqrt{2}$ là $x^2 + y^2 = 2$ hay $y = \pm\sqrt{2-x^2}$

Tọa độ giao điểm của parabol và đường tròn là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} y = \sqrt{2-x^2} \\ y = 2x^2-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1; y = 1 \\ x = 1; y = 1 \end{cases}$$

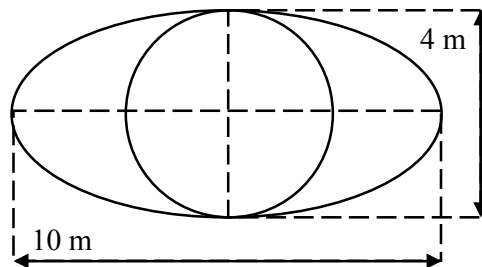
Diện tích vườn hoa là $S = \int_{-1}^1 (\sqrt{2-x^2} - 2x^2 + 1) dx = \frac{3\pi+10}{6}$.

Số tiền tối thiểu để trồng xong vườn hoa Cẩm Tú Cầu là $\frac{3\pi+10}{6} \times 250000$ (đồng).

Chọn B.

Lưu ý: Nửa đường tròn phía trên trục hoành có phương trình là $y = \sqrt{2-x^2}$

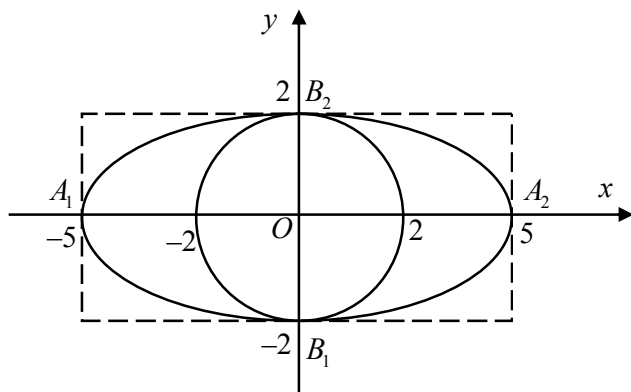
Ví dụ 4: Để trang trí cho một lễ hội đầu xuân, từ một mảnh vườn hình elip có chiều dài trục lớn là 10m, chiều dài trục nhỏ là 4 m. Ban tổ chức chia mảnh vườn elip thành hai phần bởi đường tròn có đường kính bằng độ dài trục nhỏ và có tâm trùng với tâm của elip như hình vẽ.



Trên hình tròn, người ta trồng hoa với giá 100000 đồng/ m^2 , phần còn lại của mảnh vườn người ta trồng cỏ với giá 60000 đồng/ m^2 (biết tiền trồng hoa và trồng cỏ bao gồm cả tiền công và tiền mua cây). Hỏi ban tổ chức cần bao nhiêu tiền để trồng hoa và cỏ (số tiền được làm tròn đến hàng nghìn)?

- A. 2387000 đồng. B. 2638000 đồng. C. 2639000 đồng. D. 2388000 đồng.

Hướng dẫn giải



Elip (E) có độ dài trục lớn bằng 10 m và độ dài trục nhỏ là 4m nên ta có $a = 5$, $b = 2$. Diện tích của (E) là $S_1 = \pi ab = 10\pi (m^2)$.

Đường tròn (C) có đường kính bằng độ dài trục nhỏ của elip nên có bán kính là $R = 2(m)$.

Diện tích của hình tròn (C) là $S_2 = \pi R^2 = 4\pi (m^2)$.

Tổng số tiền T mà ban tổ chức cần để trồng hoa trên hình tròn và trồng cỏ trên phần còn lại của mảnh vườn là $T = 100.000S_2 + 60.000(S_1 - S_2) \approx 2388000$ (đồng).

Chọn D.

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Một mảnh vườn hình elip có trục lớn bằng 100m, trục nhỏ bằng 80 m được chia thành 2 phần bởi một đoạn thẳng nối hai đỉnh liên tiếp của elip. Phần nhỏ hơn trồng cây con và phần lớn hơn trồng rau. Biết lợi nhuận thu được là 2000 đồng mỗi m^2 trồng cây con và 4000 đồng mỗi m^2 trồng rau. Hỏi thu nhập từ cả mảnh vườn là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng nghìn)?

A. 31904000 đồng. B. 23991000 đồng.

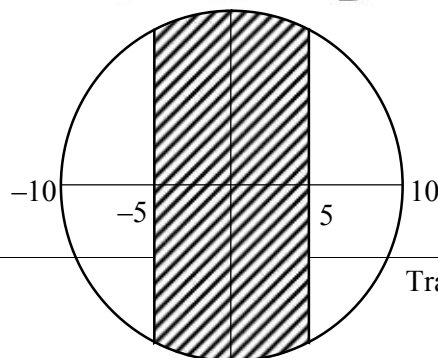
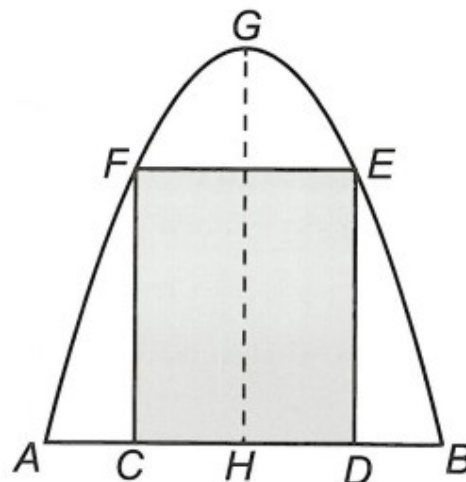
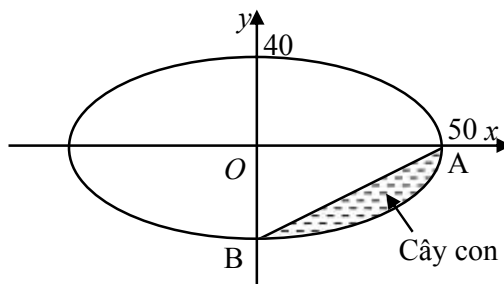
C. 10566000 đồng. D. 17635000 đồng.

Câu 2: Một cái cổng hình parabol như hình vẽ bên dưới. Biết chiều cao $GH = 4m$, chiều rộng $AB = 4m$, $AC = BD = 0,9m$. Chủ nhà làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật CDEG tô đậm giá là 1200 000 đồng/ m^2 , còn các phần để trống làm xiên hoa có giá là 900000 đồng/ m^2 . Tổng chi phí để là hai phần nói trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A. 11445000 đồng. B. 7368000 đồng.

C. 4077000 đồng. D. 11370000 đồng.

Câu 3: Một khu đất có hình dạng là một hình tròn với đường kính $d = 20m$ như hình vẽ bên. Người ta muốn trồng rau trên dải đất rộng 10 m lấy tâm của đường tròn khu đất làm

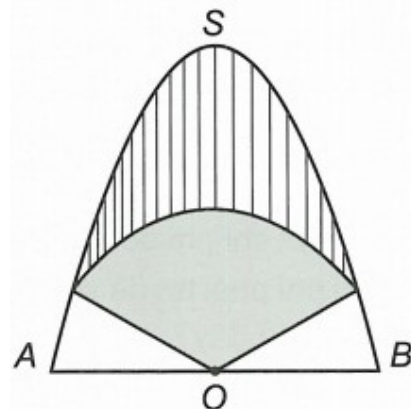


tâm đối xứng. Diện tích phần đất trống còn lại bao nhiêu m^2 ?

- A. $\frac{100\pi}{3} - 50\sqrt{3}$. B. $\frac{100\pi}{3} - 10\sqrt{3}$.
C. $\frac{400\pi}{3} - 50\sqrt{3}$. D. $\frac{200\pi}{3} - 50\sqrt{3}$.

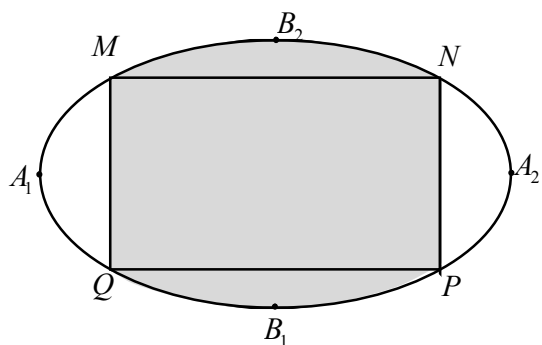
Câu 4: Trên bức tường cần trang trí một hình phẳng dạng parabol đỉnh S như hình vẽ bên. Biết $OS = AB = 4(m)$, với O là trung điểm của AB . Parabol trên được chia thành ba phần để sơn ba màu khác nhau với mức chi phí: phần trên là phần kẻ sọc giá 120 000 đồng/ m^2 ; phần giữa là hình quạt tâm O , bán kính 2 m được tô đậm giá 140000 đồng/ m^2 ; phần còn lại giá 160000 đồng/ m^2 . Tổng chi phí để sơn cả ba phần gần nhất với số nào sau đây?

- A. 1444000 đồng. B. 1488000 đồng.
C. 1450000 đồng. D. 1493000 đồng.



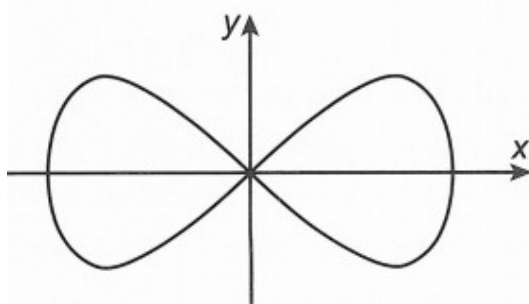
Câu 5: Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí để sơn phần tô đậm là 200 000 đồng/ m^2 và phần còn lại 100 000 đồng/ m^2 . Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 8m$, $B_1B_2 = 6m$ và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ = 3m$.

- A. 7322000 đồng. B. 7213000 đồng.
C. 5526000 đồng. D. 5782000 đồng.

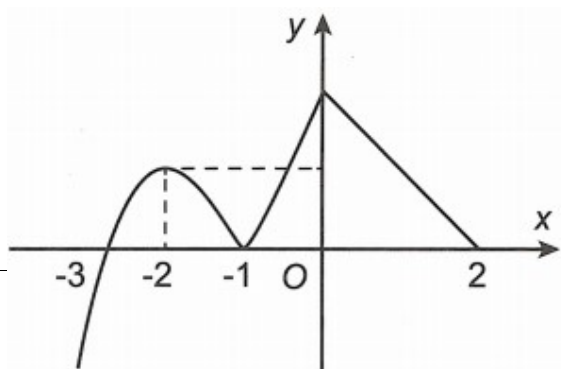


Câu 6: Trong công viên Toán học, có những mảnh đất mang hình dáng khác nhau. Mỗi mảnh được trồng một loài hoa và nó được tạo thành bởi một trong những đường cong đẹp trong Toán học. Ở đó có một mảnh đất mang tên Bernoulli, nó được tạo thành từ đường Lemniscate có phương trình trong hệ tọa độ Oxy là $16y^2 = x^2(25 - x^2)$ như hình vẽ bên dưới. Tính diện tích S của mảnh đất Bernoulli biết rằng mỗi đơn vị trong hệ tọa độ Oxy tương ứng với chiều dài 1 mét.

- A. $S = \frac{125}{6} m^2$. B. $S = \frac{125}{4} m^2$.
C. $S = \frac{250}{3} m^2$. D. $S = \frac{125}{3} m^2$.



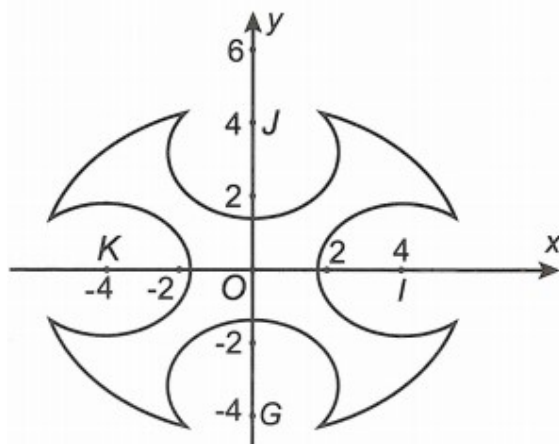
Câu 7: Cho hàm số $f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[-3; 2]$ như hình vẽ (phần cong của đồ thị là một phần



của parabol $y = ax^2 + bx + c$. Biết $f(-3) = 0$, giá trị của $f(-1) + f(1)$ bằng

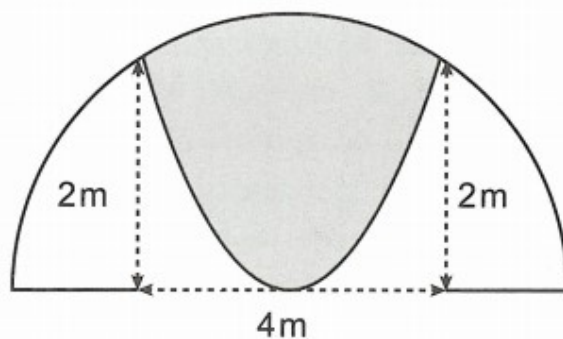
- A. $\frac{23}{6}$. B. $\frac{31}{6}$.
C. $\frac{35}{3}$. D. $\frac{9}{2}$.

Câu 8: Một chi tiết máy hình đĩa tròn có dạng như hình vẽ bên. Người ta cần phủ sơn cả hai mặt của chi tiết. Biết rằng đường tròn lớn có phương trình $x^2 + y^2 = 25$. Các đường tròn nhỏ có tâm $I\left(\frac{7}{2}; 0\right)$, $J\left(0; \frac{7}{2}\right)$, $K\left(\frac{-7}{2}; 0\right)$, $G\left(0; \frac{-7}{2}\right)$ và đều có bán kính bằng 2. Biết chi phí sơn là 900 000 đồng/ m^2 , đơn vị trên hệ trục là dm. Chi phí phải trả để sơn hoàn thiện chi tiết máy gần nhất với số tiền nào sau đây?



- A. 650000 (đồng). B. 688500 (đồng).
C. 785200 (đồng). D. 588700 (đồng).

Câu 9: Một khuôn viên dạng nửa hình tròn, trên đó người ta thiết kế phần trồng hoa hồng có dạng một hình parabol có đỉnh trùng với tâm hình tròn và có trục đối xứng vuông góc với đường kính của nửa đường tròn, hai đầu mút của parabol nằm trên nửa đường tròn và cách nhau một đoạn 4 mét (phần tô màu). Phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dùng để trồng hoa cúc. Biết các kích thước cho như hình vẽ, chi phí trồng hoa hồng và hoa cúc lần lượt là 200 000 đồng/ m^2 và 150 000 đồng/ m^2 . Hỏi chi phí trồng hoa khuôn viên đó gần nhất với số tiền nào sau đây (làm tròn đến nghìn đồng)?



- A. 2.132.000 đồng. B. 2.266.000 đồng. C. 2.257.000 đồng. D. 2.123.000 đồng.

Câu 10: Bác An có mảnh ruộng hình Elip độ dài trục lớn bằng 100m, độ dài trục bé bằng 80m. Với chủ trương xây dựng kinh tế nông thôn mới, bác định chuyển đổi canh tác bằng cách đào một cái ao hình elip ở chính giữa vườn có trục lớn bằng 90m, trục bé bằng 70m để nuôi tôm, cá. Phần đất còn lại bác làm bờ trồng cây xung quanh. Biết chi phí đào 1 m^2 ao hết 250000 đồng và chi phí làm bờ trồng cây là 100000 đồng/ m^2 . Hỏi số tiền bác phải chi gần với số nào nhất sau đây?

- A. 1370519000 đồng. B. 1400500000 đồng. C. 1500000000 đồng. D. 1398212000 đồng.

Câu 11: Một chiếc cổng có hình dạng là một parabol có khoảng cách giữa hai chân cổng là 8 m. Người ta treo một tấm phong hình chữ nhật có hai đỉnh M, N nằm trên parabol và hai đỉnh P, Q nằm trên mặt đất như hình vẽ bên. Ở phần phía ngoài phong (phần không kẻ) người ta mua hoa để trang trí với chi phí 200 000 đồng/ m^2 , biết $MN = 4m$, $MQ = 6m$. Hỏi số tiền để mua hoa trang trí gần với số tiền nào sau đây?

A. 3 434 300 đồng. B. 3 373 400 đồng.

C. 3 437 300 đồng. D. 3 733 300 đồng.

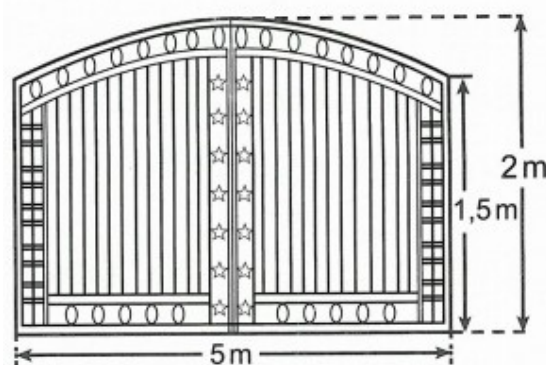
Câu 12: Ông An muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một parabol. Giá $1 m^2$ của rào sắt là 700000 đồng. Hỏi ông An phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy (làm tròn đến hàng nghìn)?

A. 6.620.000 đồng.

B. 6.320.000 đồng.

C. 6.520.000 đồng.

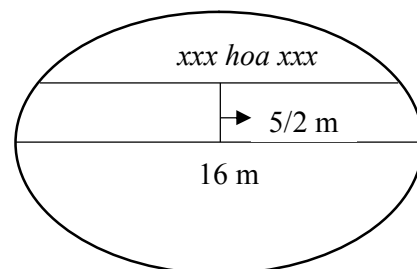
D. 6.417.000 đồng.



Câu 13: Trên một khuôn viên hình elip có độ dài trục lớn bằng 16 m, trục bé bằng 10 m. Người ta muốn trồng hoa trên một dải đất phía trong khuôn viên, dải đất có một cạnh song song với trục lớn và cách trục lớn 2,5 m (hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100 000 đồng/ m^2 . Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó?

A. 2 879 000 đồng. B. 2 587 000 đồng.

C. 2 457 000 đồng. D. 2 678 000 đồng.



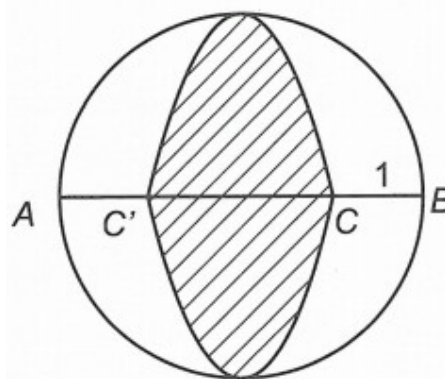
Câu 14: Một vòng xuyến ở ngã tư thành phố X có dạng hình tròn đường kính $AB = 4m$. Công ty cây xanh thiết kế phần trồng hoa giấy ở giữa hai đường parabol có trục đối xứng vuông góc với đường kính AB tại tâm của hình tròn và cắt AB tại điểm C, C' thỏa mãn $BC = 1m$ (phần tô đậm). Phần còn lại của vòng xuyến thiết kế trồng hoa cúc. Chi phí để trồng hoa giấy và hoa cúc lần lượt là 200000 đồng/ m^2 và 100 000 đồng/ m^2 . Hỏi chi phí để trang trí vòng xuyến theo thiết kế gần nhất với số tiền nào dưới đây (làm tròn đến đơn vị nghìn đồng)?

A. 1523000 đồng.

B. 1532000 đồng.

C. 1790000 đồng.

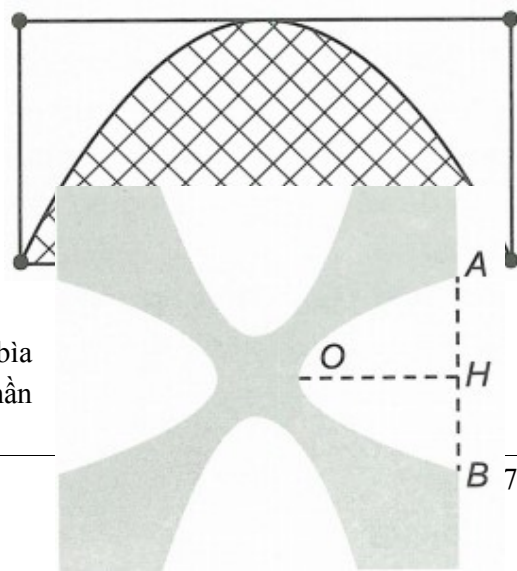
D. 1980000 đồng.



Câu 15: Một mảnh vườn hình chữ nhật với diện tích 200 m^2 . Người ta muốn trồng hoa trên mảnh vườn đó theo hình một parabol bậc hai sao cho đỉnh của parabol trùng với trung điểm một cạnh của mảnh vườn như hình vẽ bên. Biết chi phí trồng hoa là 300 nghìn đồng cho mỗi mét vuông. Xác định chi phí trồng hoa cần có cho mảnh vườn trên.

A. 30 triệu đồng. B. 60 triệu đồng.

C. 50 triệu đồng. D. 40 triệu đồng



Câu 16: Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10cm bằng cách khoét đi bốn phần

bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB = 5\text{ cm}$, $OH = 4\text{ cm}$. Diện tích bề mặt hoa văn đó.

- A. $\frac{160}{3}\text{ cm}^2$. B. $\frac{140}{3}\text{ cm}^2$.
C. $\frac{14}{3}\text{ cm}^2$. D. 50 cm^2 .

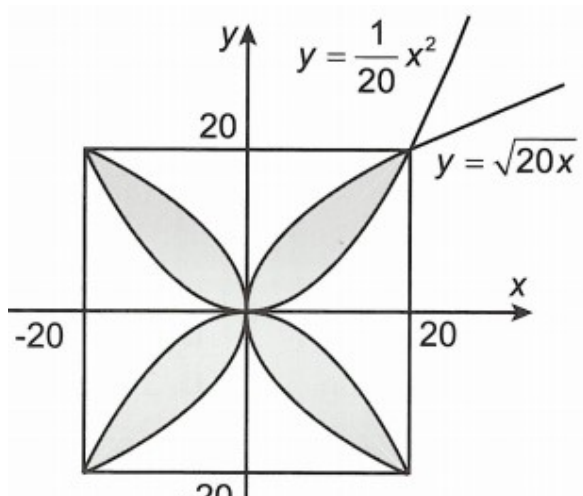
Câu 17: Cho parabol $(P): y = x^2$ và một đường thẳng d thay đổi cắt (P) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 2019$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng d .

Tìm giá trị lớn nhất $S_{\max}$ của S .

- A. $S_{\max} = \frac{2019^3 + 1}{6}$. B. $S_{\max} = \frac{2019^3}{3}$.
C. $S_{\max} = \frac{2019^3 - 1}{6}$. D. $S_{\max} = \frac{2019^3}{6}$.

Câu 18: Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40 cm được thiết kế như hình bên. Diện tích hoa văn trang trí (phần tô đậm) bằng

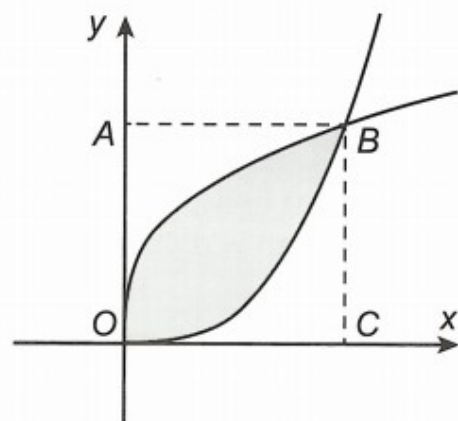
- A. $\frac{1600}{3}\text{ cm}^3$. B. $\frac{800}{3}\text{ cm}^3$.
C. 250 cm^3 . D. 800 cm^3 .



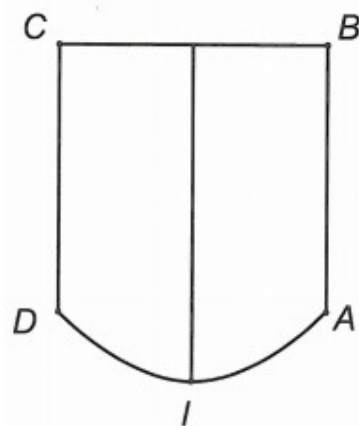
Câu 19: Cho một viên gạch men có dạng hình vuông $OABC$ như hình vẽ. Sau khi tọa độ hóa, ta có $O(0;0)$,

$A(0;1)$, $B(1;1)$, $C(1;0)$ và hai đường cong lần lượt là đồ thị hàm số $y = x^3$ và $y = \sqrt[3]{x}$. Tính diện tích của phần không được tô đậm trên viên gạch men.

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{5}{4}$.
C. $\frac{4}{5}$. D. $\frac{1}{2}$.



Câu 20: Để tăng thêm thu nhập, ông Bình chăn nuôi thêm 2 con bò. Do diện tích đất của nhà ông hẹp nên ông xây chuồng bò như hình vẽ bên và chia thành hai phần bằng nhau để nhốt 2 con bò. Biết $ABCD$ là hình vuông cạnh 4 m và I là đỉnh của một parabol có trục đối xứng là trung trực của BC và parabol đi qua hai điểm A, D ; tiền xây chuồng bò hết $350000\text{ đồng}/1\text{ m}^2$ và I cách BC một khoảng 5 m . Số tiền chi phí ông



Bình bỏ ra để xây dựng chuồng bò (làm tròn đến hàng nghìn) là bao nhiêu?

- A. 6333000đồng. B. 7533000đồng. C. 6533000đồng. D. 7333000đồng.

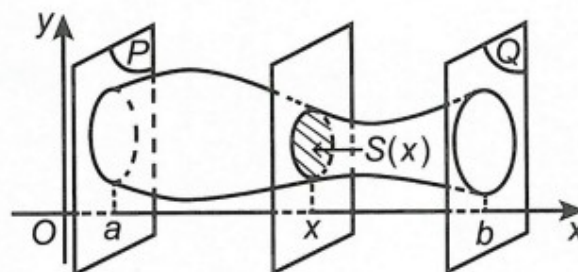
B. THỂ TÍCH VẬT THỂ VÀ THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

Thể tích vật thể

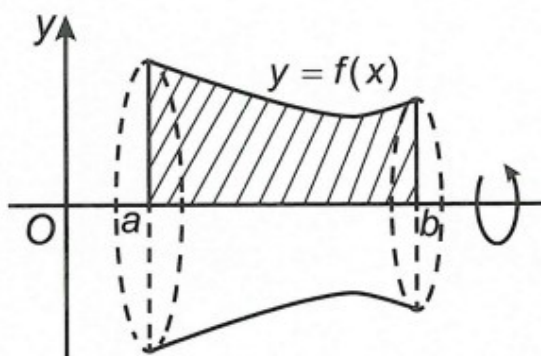
Cắt một vật thể B bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với trục Ox lần lượt tại $x = a$ và $x = b$, với $a < b$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ x (với $a \leq x \leq b$) cắt B theo thiết diện có diện tích $S(x)$ như hình vẽ bên.

Khi đó thể tích vật thể B là $V = \int_a^b S(x) dx$.



Thể tích khối tròn xoay

a) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ (với $a < b$). Quay (H) xung quanh trục Ox ta thu được một khối tròn xoay như hình vẽ bên.

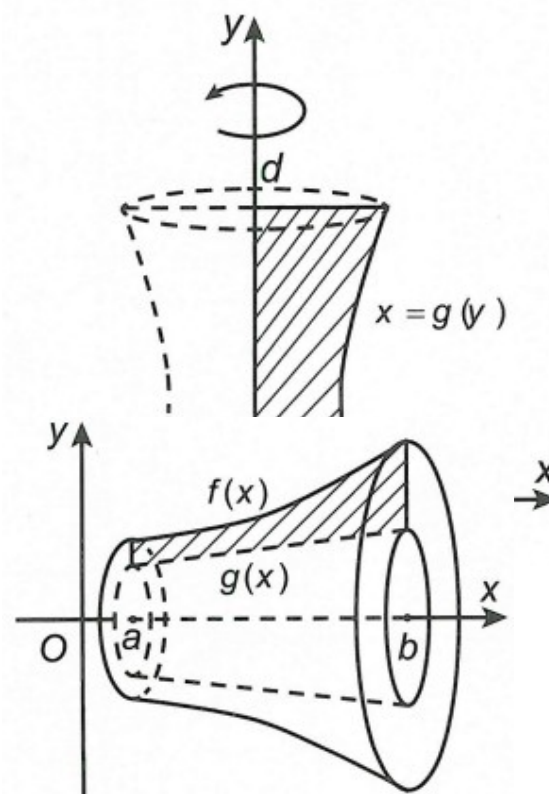


Thể tích khối tròn xoay thu được là $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$

Nếu đổi vai trò của x và y cho nhau, ta được

$$V_{Oy} = \pi \int_c^d g^2(y) dy$$

Khi đó, hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $x = g(y)$ liên tục trên đoạn $[c; d]$, trục Oy và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ (với $c < d$). Quay (H) xung quanh trục Oy ta thu được một khối tròn xoay như hình vẽ bên.



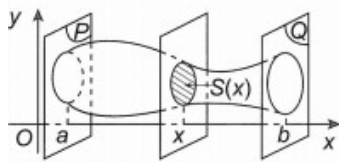
b) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $(C_1): y = f(x)$, $(C_2): y = g(x)$ liên tục

trên đoạn $[a; b]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (với $a < b$). Quay (H) xung quanh trục Ox ta thu được một khối tròn xoay như hình vẽ bên. Khi đó, thể tích khối tròn xoay thu được là

$$V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$$

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA

Chú ý: Trong trường hợp này, ta phải có $f(x).g(x) \geq 0$ với $\forall x \in [a; b]$ thì mới áp dụng được công thức.

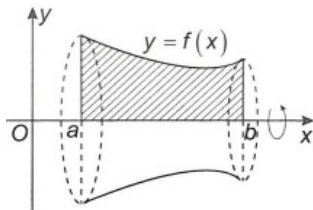


Thể tích vật thể

Cắt một vật thể B bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với trục Ox lần lượt tại $x = a$ và $x = b$, với $a < b$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ x (với $a \leq x \leq b$) cắt B theo thiết diện có diện tích $S(x)$ như hình vẽ.

$$\text{Khi đó thể tích vật thể } B \text{ là } V = \int_a^b S(x) dx$$

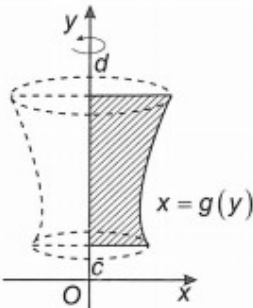
Ứng dụng của tích phân trong tính thể tích



Thể tích khối tròn xoay

a) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ (với $a < b$). Quay (H) xung quanh trục Ox ta thu được một khối tròn xoay như hình vẽ bên.

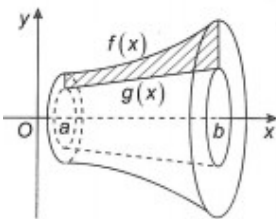
$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$



Nếu đổi vai trò của x và y cho nhau, ta được

$$V_{Oy} = \pi \int_c^d g^2(y) dy$$

Khi đó, hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $x = g(y)$ liên tục trên đoạn $[c; d]$, trục Oy và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ (với $c < d$). Quay (H) xung quanh trục Oy ta thu được một khối tròn xoay như hình vẽ bên.



b) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $(C_1): y = f(x)$, $(C_2): y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (với $a < b$). Quay (H) xung quanh trục Ox ta thu được một khối tròn xoay như hình vẽ bên. Khi đó, thể tích khối tròn xoay thu được là

$$V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$$

Chú ý: Trong trường hợp này, ta phải có $f(x).g(x) \geq 0$ với $\forall x \in [a; b]$ thì mới áp dụng được công thức.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Bài toán 1: Tính thể tích vật thể

Phương pháp giải

Cắt một vật thể B bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với trục Ox lần lượt tại $x = a$ và $x = b$, với $a < b$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ x (với $a \leq x \leq b$) cắt B theo thiết diện có diện tích $S(x)$

Khi đó thể tích vật thể B là $V = \int_a^b S(x) dx$

Ví dụ: Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 1$ và $x = 3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1 \leq x \leq 3$) thì được thiết diện là một hình chữ nhật có hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2 - 2}$

Hướng dẫn giải

Diện tích thiết diện là $S(x) = 3x\sqrt{3x^2 - 2}$.

Suy ra thể tích vật thể tạo thành là

$$V = \int_1^3 S(x) dx = \int_1^3 3x\sqrt{3x^2 - 2} dx = \frac{124}{3}$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ: Tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = \frac{\pi}{4}$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$) là một tam giác đều có cạnh là $2\sqrt{\cos 2x}$.

A. $V = \sqrt{3}$.

B. $V = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $V = \frac{1}{2}$.

D. $V = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Diện tích tam giác đều là $S(x) = \frac{\sqrt{3}(2\sqrt{\cos 2x})^2}{4} = \sqrt{3} \cos 2x$

$$\text{Thể tích vật thể là } V = \int_0^{\frac{\pi}{4}} S(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{3} \cos 2x dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Chọn B.

Bài toán 2: Tính thể tích khối tròn xoay

Phương pháp giải

Áp dụng các công thức tính thể tích khối tròn xoay:

Ví dụ: Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \cos x}$, trục hoành và các đường thẳng

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ (với $a < b$). Quay (H) xung quanh trục Ox ta thu được một khối tròn

xoay có thể tích là $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$

$x = 0, x = \frac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 + \cos x) dx \\ &= \pi \left(2x + \sin x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi + (\pi + 1) \end{aligned}$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 2, y = 0, x = 1, x = 2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V = \int_1^2 (x^2 + 2) dx$. **B.** $V = \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx$. **C.** $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx$. **D.** $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2) dx$.

Hướng dẫn giải

Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) được giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 2, y = 0, x = 1, x = 2$ xung quanh trục Ox là

$$V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx$$

Chọn C.

Ví dụ 2: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{2x-1}}{2x+1}$, trục hoành, hai đường thẳng $x = 1, x = 2$. Thể tích của vật thể tròn xoay tạo thành khi cho hình (H) quay xung quanh trục Ox bằng

$V = \pi \left(\ln \frac{\sqrt{a}}{3} + b \right)$, trong đó a, b là các số hữu tỷ. Khi đó tích $a.b$ bằng

A. $\frac{10}{3}$. **B.** $-\frac{10}{3}$. **C.** 2. **D.** -2.

Hướng dẫn giải

Thể tích của vật thể tròn xoay tạo thành khi hình phẳng (H) quay xung quanh trục Ox là

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^2 \left(\frac{\sqrt{2x-1}}{2x+1} \right)^2 dx = \pi \int_1^2 \frac{2x-1}{(2x+1)^2} dx = \pi \int_1^2 \left[\frac{1}{2x+1} - \frac{2}{(2x+1)^2} \right] dx \\ &= \pi \left(\frac{1}{2} \ln(2x+1) + \frac{1}{2x+1} \right) \Big|_1^2 = \pi \left(\frac{1}{2} \ln \frac{5}{3} - \frac{2}{15} \right) = \pi \left(\ln \frac{\sqrt{15}}{3} - \frac{2}{15} \right) \end{aligned}$$

Suy ra $a=15$, $b=-\frac{2}{15}$

Vậy $ab=-2$.

Chọn D.

Ví dụ 3: Cho parabol $(P): y=16-x^2$ và hai điểm $A(a;0)$, $B(-a;0)$; $a < 0 < 4$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi (P) và trục Ox , (H_1) là hình chữ nhật $ABCD$ với C, D là hai điểm thuộc (P) . Gọi V là thể tích hình tròn xoay có được khi xoay (H) quanh Oy và V_1 là thể tích hình tròn xoay có được khi xoay (H_1) quanh Oy . Giá trị lớn nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V}$ bằng

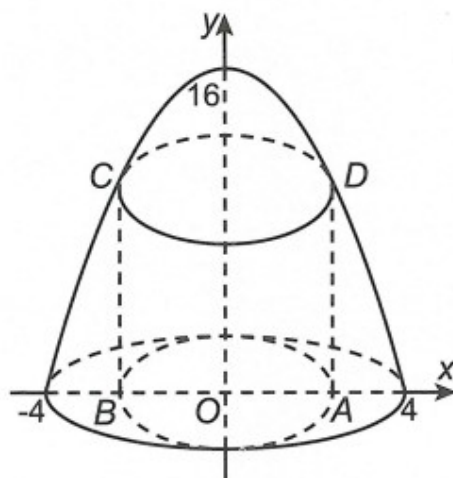
A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải



Ta có $V = V_y = \pi \int_0^{16} (16-y) dy = 128\pi$

Vì $D \in (P)$ nên $D(a; 16-a^2)$. Suy ra $AD = 16-a^2$.

Do đó khi xoay (H_1) quanh Oy ta được hình trụ tròn có bán kính $R=a$ và chiều cao $h=16-a^2$. Suy ra $V_1 = \pi a^2 (16-a^2) = \pi (16a^2 - a^4)$

Xét hàm số $f(x) = \pi (16a^2 - a^4)$ trên $[0; 4]$ ta thấy: $f'(x) = \pi (32x - 4x^3)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2\sqrt{2} \\ x = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

nên $\max_{[0;4]} f(x) = f(2\sqrt{2}) = 64\pi$.

Vậy $\max \left(\frac{V_1}{V} \right) = \frac{64\pi}{128\pi} = \frac{1}{2}$ khi $a = 2\sqrt{2}$.

Chọn C.

Ví dụ 4: Kí-hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2(x-1)e^x$, trục tung và trục hoành.

Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox :

A. $V = 4 - 2e$. B. $V = (4 - 2e)\pi$. C. $V = e^2 - 5$. D. $V = (e^2 - 5)\pi$.

Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành là $2(x-1)e^x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox là:

$$V = \pi \int_0^1 [2(x-1)e^x]^2 dx = 4\pi \int_0^1 (x-1)^2 e^{2x} dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = (x-1)^2 \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2(x-1) dx \\ v = \frac{e^{2x}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } V = 4\pi (x-1)^2 \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^1 - 4\pi \int_0^1 (x-1) e^{2x} dx = -2\pi - 4\pi \int_0^1 (x-1) e^{2x} dx$$

$$\text{Gọi } V_1 = 4\pi \int_0^1 (x-1) e^{2x} dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x-1 \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{e^{2x}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } V_1 = 4\pi (x-1) \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^1 - 2\pi \int_0^1 e^{2x} dx = 2\pi - \pi e^{2x} \Big|_0^1 = 2\pi - \pi e^2 + \pi = 3\pi - \pi e^2$$

$$V = -2\pi - V_1 = -2\pi - (3\pi - \pi e^2) = \pi(e^2 - 5)$$

Chọn D.

Ví dụ 5: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi hai đồ thị (C_1) : $y = 2x^2$ và (C_2) : $y^2 = 4x$. Quay hình phẳng

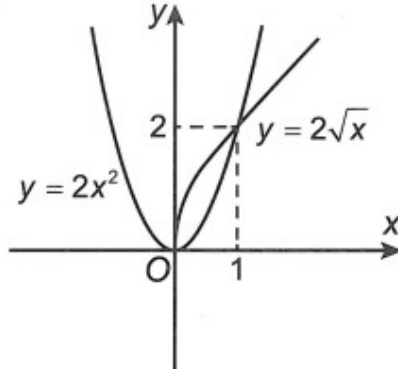
(H) xung quanh trục Ox ta thu được khối tròn xoay có thể tích là

A. $V = \frac{88\pi}{5}$. B. $V = \frac{9\pi}{70}$. C. $V = \frac{4\pi}{3}$. D. $V = \frac{6\pi}{5}$.

Hướng dẫn giải

Tọa độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = 2x^2 \\ y^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ x = 1; y = 2 \end{cases}$$



Với $x \in [0;1]$ thì $y^2 = 4x \Leftrightarrow y = 2\sqrt{x}$.

$$\begin{aligned} \text{Vậy thể tích của khối tròn xoay cần tính là } V &= \pi \int_0^1 \left| (2x^2)^2 - (2\sqrt{x})^2 \right| dx \\ &= \pi \int_0^1 (4x - 4x^2) dx = \frac{6\pi}{5} \end{aligned}$$

Chọn A.

Ghi nhớ: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $(C_1): y = f(x), (C_2): y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ (với $a < b$). Quay (H) xung quanh trục Ox ta thu được một khối tròn xoay.

$$\text{Khi đó, thể tích khối tròn xoay thu được là } S = \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$$

Ví dụ 6: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $(C_1): f(x) = x - \pi, (C_2): g(x) = \sin x$ và $x = 0$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành do (H) quay quanh trục hoành và $V = p\pi^2, p \in (\mathbb{Q})$. Giá trị của $24p$ bằng

A. 8.

B. 4.

C. 24.

D. 12.

Hướng dẫn giải

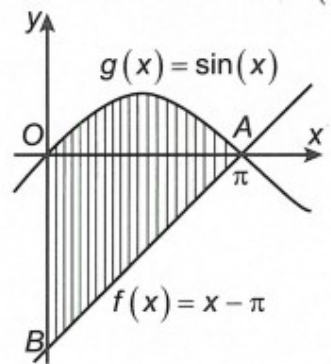
Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị các hàm số (C_1) và (C_2) là

$$x - \pi = \sin x \Leftrightarrow x - \pi - \sin x = 0 \quad (1).$$

$$\text{Xét hàm số } h(x) = x - \pi - \sin x \Rightarrow h'(x) = 1 - \cos x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $h(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $x = \pi$ là một nghiệm của phương trình (1) nên $x = \pi$ là nghiệm duy nhất của phương trình (1).

Do đó thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành là thể tích của khối nón khi quay tam giác vuông OAB quanh trục hoành.



$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot OB^2 \cdot OA = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \pi^2 \cdot \pi = \frac{1}{3} \pi^4 \Rightarrow p = \frac{1}{3}$$

$$\text{Vậy } 24p = 24 \cdot \frac{1}{3} = 8.$$

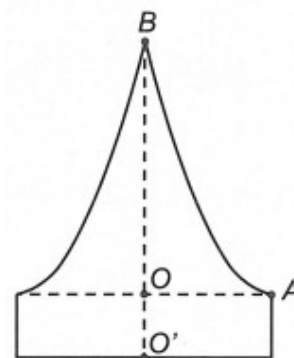
Chọn A.

Lưu ý: Vì trên đoạn $[0; \pi]$ thì $y = x - \pi \leq 0$ và $y = \sin x \geq 0$ nên không thể áp dụng công

thức $V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$. Ở đây ta áp dụng công thức tính thể tích khối nón là $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$.

Ví dụ 7: Để chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn An đã làm một chiếc mũ “cách điệu” cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên. Biết rằng $OO' = 5 \text{ cm}$, $OA = 10 \text{ cm}$, $OB = 20 \text{ cm}$, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm A . Thể tích của chiếc mũ bằng

- A. $\frac{2750\pi}{3} \text{ cm}^3$. B. $\frac{2500\pi}{3} \text{ cm}^3$.
C. $\frac{2050\pi}{3} \text{ cm}^3$. D. $\frac{2250\pi}{3} \text{ cm}^3$.



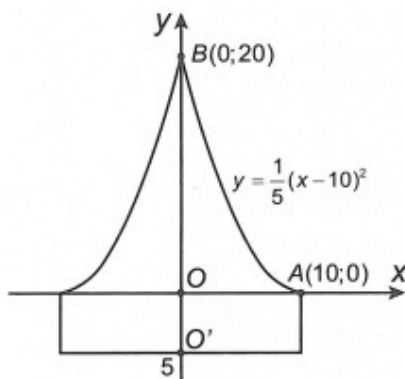
Hướng dẫn giải

Ta gọi:

- +) Thể tích của chiếc mũ là V .
- +) Thể tích của khối trụ có bán kính đáy bằng $OA = 10 \text{ cm}$ và đường cao $OO' = 5 \text{ cm}$ là V_1 .
- +) Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong AB và hai trục tọa độ quanh trục Oy là V_2 .

Khi đó $V_1 = 5 \cdot 10^2 \pi = 500\pi$ và $V = V_1 + V_2$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Do parabol có đỉnh A nên nó có phương trình dạng $(P): y = a(x-10)^2$.

Vì (P) qua điểm $B(0;20)$ nên $a = \frac{1}{5}$.

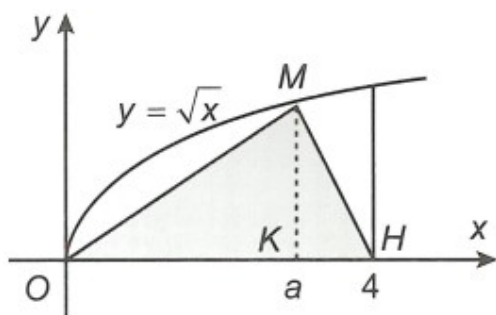
Do đó $(P): y = \frac{1}{5}(x-10)^2$. Từ đó suy ra $x = 10 - \sqrt{5y}$ (do $x < 10$).

Suy ra $V_2 = \pi \int_0^{20} (10 - \sqrt{5y})^2 dy = \pi \left(3000 - \frac{8000}{3} \right) = \frac{1000}{3} \pi (cm^3)$.

Vậy $V = V_1 + V_2 = \frac{1000}{3} \pi + 500\pi = \frac{2500}{3} \pi (cm^3)$

Chọn B.

Ví dụ 8: Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ và $x = 4$ quanh trục Ox . Đường thẳng $x = a$ ($0 < a < 4$) cắt đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ tại M như hình vẽ bên dưới:



Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox . Biết rằng $V = 2V_1$.

Khi đó

- A. $a = 2$. B. $a = 2\sqrt{2}$. C. $a = \frac{5}{2}$. D. $a = 3$.

Hướng dẫn giải

Ta có $V = \pi \int_0^4 x dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = 8\pi$. Mà $V = 2V_1 \Rightarrow V_1 = 4\pi$

Gọi K là hình chiếu của M trên trục Ox .

Khi đó $OK = a$, $KH = 4 - a$, $MK = \sqrt{a}$.

Khi xoay tam giác OMH quanh Ox ta được hai khối nón sinh bởi các tam giác OMK , MHK nên thể tích của khối tròn xoay đó là

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot MK^2 \cdot OK + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot MK^2 \cdot KH = \frac{4\pi a}{3}.$$

Từ $V_1 = 4\pi$ suy ra $\frac{4\pi a}{3} = 4\pi \Leftrightarrow a = 3$.

Chọn D.

 **Bài tập tự luyện**

Câu 1: Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 4 - x^2$, $y = 0$.

- A. $V = 2\pi$. B. $V = \frac{71}{82}$. C. $V = \frac{512\pi}{15}$. D. $V = \frac{8}{3}\pi^2$.

Câu 2: Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{\tan x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$.

- A. $V = \frac{\pi}{4}$. B. $V = \frac{\pi^2}{4}$. C. $V = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$. D. $V = \frac{\pi \ln 2}{2}$.

Câu 3: Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt[3]{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 8$.

- A. $V = \pi^2$. B. $V = \frac{9\pi}{4}$. C. $V = 18,6$. D. $V = \frac{93\pi}{5}$.

Câu 4: Kí hiệu V_1 là thể tích hình cầu bán kính đơn vị và V_2 là thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x + 2$, $y = 2\sqrt{1 - x^2}$ quanh Ox . Khẳng định nào sau đây đúng?

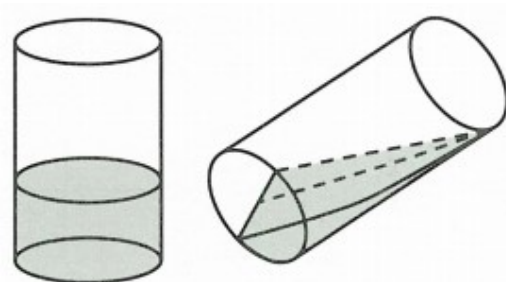
- A. $V_1 < V_2$. B. $V_1 = V_2$. C. $V_1 > V_2$. D. $V_1 = 2V_2$.

Câu 5: Cho khối trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$, $OO' = 4R$. Trên đường tròn $(O; R)$ lấy hai điểm A, B sao cho $AB = R\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) đi qua A, B cắt đoạn OO' và tạo với đáy một góc bằng 60° . (P) cắt khối trụ theo thiết diện là một phần của hình elip. Diện tích thiết diện đó bằng

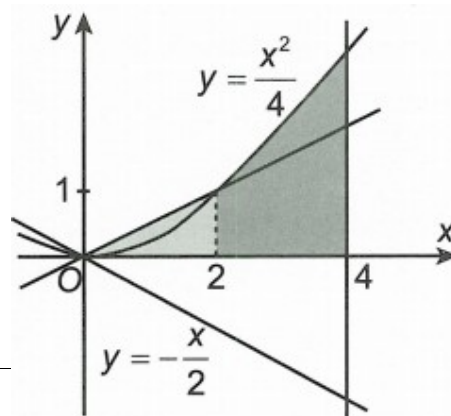
- A. $\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$. B. $\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$.
C. $\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$. D. $\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$.

Câu 6: Một chiếc cốc hình trụ có chiều cao bằng 10cm và bán kính mặt trong bằng 3 cm đựng một lượng nước. Khi nghiêng cốc nước sao cho nước chạm vào miệng cốc thì ở đáy mực nước đi qua tâm của đáy. Thể tích nước ở trong cốc bằng

- A. $30\pi \text{ cm}^3$. B. 30 cm^3 .
C. 60 cm^3 . D. $15\pi \text{ cm}^3$.



Câu 7: Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = -\frac{x}{2}$, $x = 0$ và $x = 4$ (phần hình phẳng bên phải trục Oy), tham khảo hình vẽ bên. Thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng



A. $\frac{512}{15}\pi$.

B. $\frac{196}{15}\pi$.

C. $\frac{272}{15}\pi$.

D. $\frac{112}{15}\pi$.

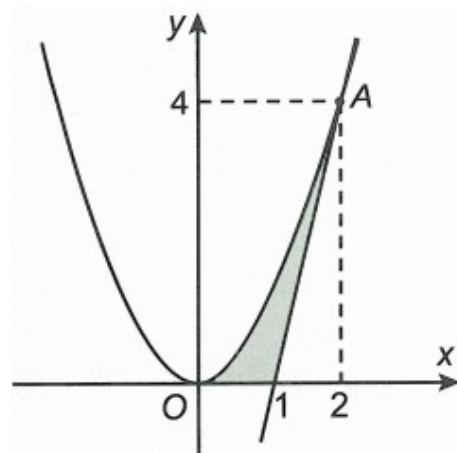
Câu 8: Cho hình (H) giới hạn bởi trục hoành, một Parabol và một đường thẳng tiếp xúc parabol đó tại điểm $A(2;4)$ (như hình vẽ bên). Thể tích vật thể tròn xoay tạo bởi khi hình (H) quay quanh trục Ox bằng

A. $\frac{32\pi}{5}$.

B. $\frac{16\pi}{5}$.

C. $\frac{2\pi}{3}$.

D. $\frac{22\pi}{5}$.



Câu 9: Cho hình (H) là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $x = y^2$ và đường thẳng $x = a$ với $a > 0$. Gọi V_1 và V_2 lần lượt là thể tích của vật thể tạo tròn xoay sinh ra khi quay hình (H) quanh trục hoành và trục tung. Kí hiệu ΔV là giá trị lớn nhất của $V_1 = -\frac{V_2}{8}$ đạt được khi $a = a_0 > 0$. Hệ thức nào sau đây đúng?

A. $5\Delta V = 2\pi a_0$.

B. $5\Delta V = 4\pi a_0$.

C. $4\Delta V = 5\pi a_0$.

D. $2\Delta V = 5\pi a_0$.

Câu 10: Xét (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = a \sin x + b \cos x$ (với a, b là các hằng số thực dương), trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = \pi$. Nếu vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay (H) quanh trục Ox có thể tích bằng $\frac{5\pi^2}{2}$ và $f'(0) = 2$ thì $2a + 5b$ bằng

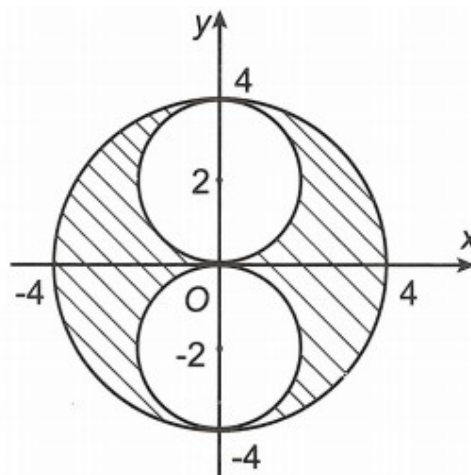
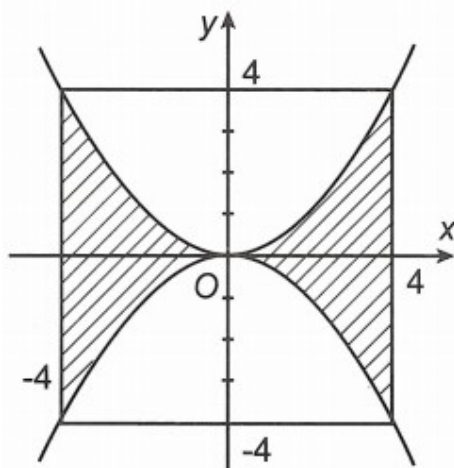
A. 8.

B. 11.

C. 9.

D. 10.

Câu 11: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{x^2}{4}$, $y = -\frac{x^2}{4}$, $x = -4$, $x = 4$ và (H_2) là hình gồm tất cả các điểm $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 + y^2 \leq 16$, $x^2 + (y-2)^2 \geq 4$, $x^2 + (y+2)^2 \geq 4$.



Cho (H_1) , (H_2) quay quanh trục Oy ta được các vật thể có thể tích lần lượt là V_1 , V_2 . Đẳng thức nào sau đây đúng?

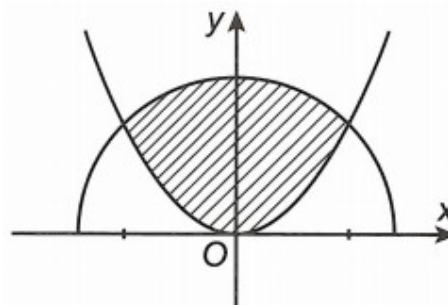
A. $V_1 = V_2$. B. $V_1 = \frac{1}{2}V_2$.

C. $V_1 = 2V_2$. D. $V_1 = \frac{2}{3}V_2$.

Câu 12: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2$ và đường tròn $x^2 + y^2 = 2$ (phần tô đậm trong hình). Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành bằng

A. $\frac{5\pi}{3}$. B. $\frac{44\pi}{15}$.

C. $\frac{\pi}{5}$. D. $\frac{22\pi}{15}$.

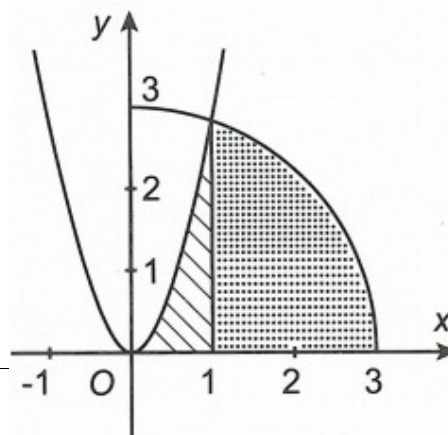


Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 2020x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục Ox .

A. $V = \left(\frac{8098}{3}\right)^2 \pi$. B. $V = 4049\pi$. C. $V = \frac{8098}{3}\pi$. D. $V = \sqrt{\frac{8098}{3}}\pi$.

Câu 14: Cho hình (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = 2\sqrt{2}x^2$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{9 - x^2}$ (với $0 \leq x \leq 3$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) quanh trục Ox là

A. $\frac{164\pi}{15}$. B. $\frac{164}{15}$.



C. $\frac{163\pi}{15}$.

D. $\frac{163}{15}$.

Câu 15: Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình tròn $(C): (x+2)^2 + (y-3)^2 \leq 1$ quanh trục Ox .

A. $V = 2\pi^2$.

B. $V = 6\pi^2$.

C. $V = \pi^2$.

D. $V = 6\pi$.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ ($a < b$). Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức.

A. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. B. $V = 2\pi \int_a^b f^2(x) dx$. C. $V = \pi^2 \int_a^b f^2(x) dx$. D. $V = \pi^2 \int_a^b f(x) dx$.

Câu 17: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3) dx$. B. $V = \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$. C. $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$. D. $V = \int_0^2 (x^2 + 3) dx$.

Câu 18: Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{x^2 + 1}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích là

A. $\int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx$. B. $\int_0^1 (x^2 + 1) dx$. C. $\pi \int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx$. D. $\pi \int_0^1 (x^2 + 1) dx$.

Câu 19: Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = 2(\pi + 1)$. B. $V = 2\pi(\pi + 1)$. C. $V = 2\pi^2$. D. $V = 2\pi$.

Câu 20: Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay D xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3) dx$. B. $V = \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$. C. $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$. D. $V = \int_0^2 (x^2 + 3) dx$.

Câu 21: Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích là

A. $V = \frac{\pi e^2}{2}$. B. $V = \frac{\pi(e^2 + 1)}{2}$. C. $V = \frac{e^2 - 1}{2}$. D. $V = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$.

Câu 22: Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{x^2 + 1}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích là

A. $V = \frac{4\pi}{3}$. B. $V = 2\pi$. C. $V = \frac{4}{3}$. D. $V = 2$.

Câu 23: Thể tích của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường

$y = x^2 - 2x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ quanh trục hoành có giá trị bằng

- A. $\frac{8\pi}{15}$. B. $\frac{7\pi}{8}$. C. $\frac{15\pi}{8}$. D. $\frac{8\pi}{7}$.

Câu 24: Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{1 + \sin^4 x + \cos^4 x}$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành Ox bằng

- A. $\frac{7\pi^2}{8}$. B. $\frac{7\pi^2}{4}$. C. $\frac{3\pi^2}{4}$. D. $\frac{3\pi^2}{8}$.

Câu 25: Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y = x \ln x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành Ox bằng $\frac{\pi}{a}(be^2 - 2)$. Giá trị $a + b$ bằng

- A. 32. B. 28. C. 34. D. 20.

Câu 26: Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \ln x$, trục hoành và đường thẳng $x = e$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành.

- A. $V = \pi(e + 1)$. B. $V = \pi(e - 2)$. C. $V = \pi e$. D. $V = \pi(e - 1)$.

Câu 27: Thể tích vật tròn xoay khi quay hình phẳng (H) xác định bởi các đường $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 3$ quanh trục Ox là

- A. $\frac{81\pi}{35}$. B. $\frac{81}{35}$. C. $\frac{71\pi}{35}$. D. $\frac{71}{35}$.

Câu 28: Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường cong $y = \frac{x-3}{x+1}$, trục hoành và trục tung. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích $V = \pi(a + b \ln 2)$ với a, b là các số nguyên. Giá trị $T = a + b$ bằng

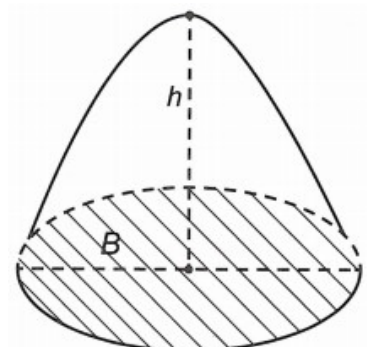
- A. $T = 3$. B. $T = 6$. C. $T = 10$. D. $T = -1$.

Câu 29: Thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đường elip có phương trình $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ quay xung quanh trục Ox là

- A. 8π . B. 12π . C. 16π . D. 6π .

Câu 30: Vật thể paraboloid tròn xoay như hình vẽ bên có đáy (phần gạch chéo) diện tích $B = 3$ và chiều cao $h = 4$ (khoảng cách từ đỉnh đến mặt đáy). Thể tích của vật thể trên là

- A. $V = \frac{1}{3}\pi$. B. $V = 6$.
C. $V = \frac{1}{4}\pi$. D. $V = 8$.



Câu 31: Khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong

$$y = \sqrt{\frac{5+(x-4)e^x}{xe^x+1}}, \text{ trục hoành và hai đường thẳng } x=0, x=1 \text{ quanh trục hoành có thể tích}$$

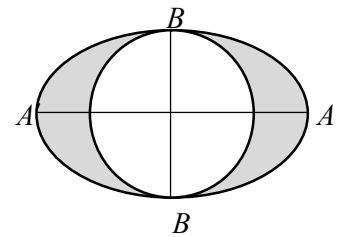
$V = \pi[a + b \ln(e+1)]$, trong đó a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a+b=5$. B. $a-2b=-3$. C. $a+b=9$. D. $2a-b=13$.

Câu 32: Ký hiệu D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{x^2}$, trục hoành, đường thẳng $x=1$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay D quanh trục hoành.

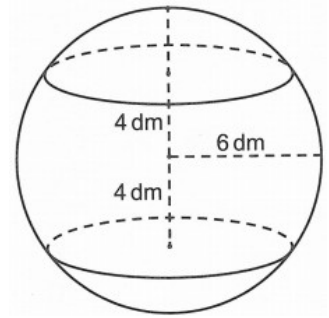
- A. $V = e^2 - 1$. B. $V = \pi(e^2 - 1)$. C. $V = \frac{1}{4}\pi e^2 - 1$. D. $V = \frac{1}{4}\pi(e^2 - 1)$.

Câu 33: Trong mặt phẳng, cho đường elip (E) có độ dài trục lớn là $AA' = 10$, độ dài trục nhỏ là $BB' = 6$, đường tròn tâm O có đường kính là BB' (như hình vẽ bên). Cho miền hình phẳng giới hạn bởi đường elip và đường tròn (được tô đậm trên hình vẽ) quay xung quanh trục AA' . Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành.



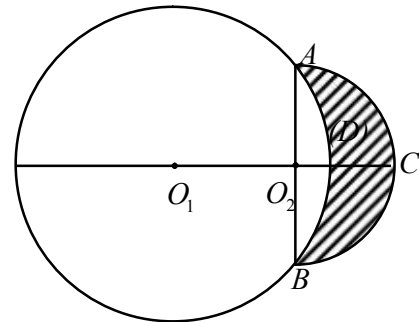
- A. $V = 36\pi$. B. $V = 60\pi$.
C. $V = 24\pi$. D. $V = \frac{20\pi}{3}$.

Câu 34: Một hình cầu có bán kính 6 dm, người ta cắt bỏ hai phần bằng hai mặt phẳng song song và cùng vuông góc với đường kính để làm mặt xung quanh của một chiếc lu chứa nước (như hình vẽ). Tính thể tích V mà chiếc lu chứa được, biết mặt phẳng cách tâm mặt cầu 4 dm.



- A. $V = \frac{368}{3}\pi \text{ dm}^3$. B. $V = 192\pi \text{ dm}^3$.
C. $V = \frac{736}{3}\pi \text{ dm}^3$. D. $V = 288\pi \text{ dm}^3$.

Câu 35: Cho hai đường tròn $(O_1, 5)$ và $(O_2, 3)$ cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho AB là một đường kính của đường tròn $(O_2, 3)$. Gọi D là hình phẳng được giới hạn bởi hai đường tròn (ở ngoài đường tròn lớn, phần được gạch chéo như hình vẽ). Quay D quanh trục O_1O_2 ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.



- A. $V = 36\pi$. B. $V = \frac{68\pi}{3}$.

C. $V = \frac{14\pi}{3}$.

D. $V = \frac{40\pi}{3}$.

Câu 36: Một bình cắm hoa dạng khối tròn xoay với đáy bình và miệng bình là các đường tròn có đường kính lần lượt là 2 và 4. Mặt xung quanh của bình là một phần của mặt tròn xoay khi quay đường cong $y = \sqrt{x-1}$ quay quanh trục Ox . Thể tích của bình cắm hoa đó bằng

A. 8π .

B. $\frac{15\pi}{2}$.

C. $\frac{14\pi}{3}$.

D. $\frac{14}{3}$.

Câu 37: Gọi V là thể tích của khối tròn xoay giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x\sqrt{a}$ và $y = \sqrt{a(2-a)x}$, $0 < a < 2$ khi quay quanh trục Ox . Giá trị của a để V đạt giá trị lớn nhất là

A. $a = 1$.

B. $a = \frac{1}{2}$.

C. $a = \frac{3}{2}$.

D. $a = \frac{3}{4}$.

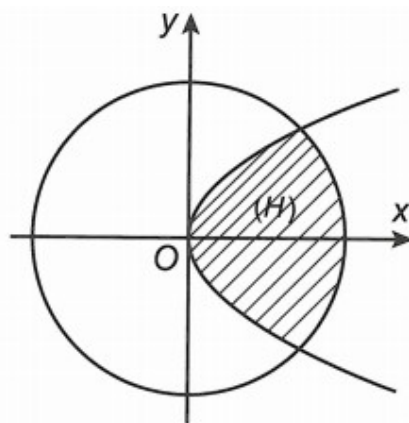
Câu 38: Cho hình H giới hạn bởi các đường $y^2 = 2x$ và $x^2 + y^2 = 8$ (phần gạch sọc trong hình). Khối tròn xoay khi quay H xung quanh trục Ox có thể tích bằng bao nhiêu?

A. $\frac{2\pi(8\sqrt{2}-7)}{3}$.

B. $\frac{4\pi(13-8\sqrt{2})}{3}$.

C. $\left(\frac{32\sqrt{2}}{3}-8\right)\pi$.

D. $\frac{4\pi(8\sqrt{2}-7)}{3}$.



Câu 39: Một cái trống trường có bán kính các đáy là 30 cm, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có diện tích là $1600\pi (cm^2)$, chiều dài của trống là 1 m. Biết rằng mặt phẳng chứa trục cắt mặt xung quanh của trống là các đường parabol. Hỏi thể tích của cái trống là bao nhiêu?

A. $425,2 dm^3$.

B. $425,2 cm^3$.

C. $425,2 cm^3$.

D. $425,2 m^3$.

Câu 40: Một bình hoa dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -\sin x + 2$ và trục Ox (tham khảo hình vẽ bên). Biết đáy bình hoa là hình tròn có bán kính bằng 2 dm, miệng bình hoa là đường tròn bán kính bằng 1,5 dm. Bỏ qua độ dày của bình hoa, thể tích của bình hoa gần với giá trị nào trong các giá trị sau đây?

A. $100 dm^3$.

B. $104 dm^3$.

C. $102 dm^3$.

D. $103 dm^3$.



Câu 41: Hình elip được ứng dụng nhiều trong thực tiễn, đặc biệt là kiến trúc xây dựng như đầu trường La Mã, tòa nhà **Ellipse Tower** Hà Nội, sử dụng trong thiết kế logo quảng cáo, thiết bị nội thất, ... Xét một Lavabo (bồn rửa) làm bằng sứ đặc hình dạng là một nửa khối elip tròn xoay có thông số kỹ thuật mặt trên của Lavabo là: dài X rộng: 660×380 mm (tham khảo hình vẽ bên). Biết rằng Lavabo có độ dày đều là 20 mm. Thể tích chứa nước của Lavabo gần với giá trị nào trong các giá trị sau:



- A. $18,66 \text{ dm}^3$. B. $18,76 \text{ dm}^3$. C. $18,86 \text{ dm}^3$. D. $18,96 \text{ dm}^3$.

Câu 42: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vật thể (H) giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x = a$ và $x = b$ ($a < b$). Gọi $S(x)$ là diện tích thiết diện của (H) bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ là x với $a \leq x \leq b$. Giả sử hàm số $y = S(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó, thể tích V của vật thể (H) được cho bởi công thức:

- A. $V = \pi \int_a^b [S(x)]^2 dx$. B. $V = \pi \int_a^b S(x) dx$. C. $V = \int_a^b [S(x)]^2 dx$. D. $V = \int_a^b S(x) dx$.

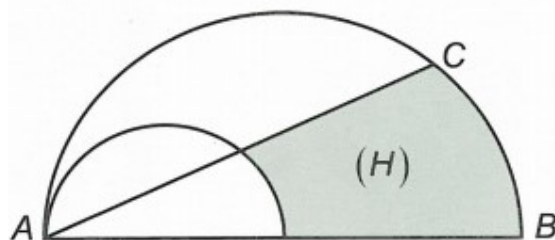
Câu 43: Cho (T) là vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$, $x = 1$. Tính thể tích V của (T) biết rằng khi cắt (T) bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng X ($0 \leq x \leq 1$), ta được thiết diện là tam giác đều có cạnh bằng $\sqrt{1+x}$.

- A. $V = \frac{3}{2}$. B. $V = \frac{3\sqrt{3}}{8} \pi$. C. $V = \frac{3\sqrt{3}}{8}$. D. $V = \frac{3}{2} \pi$.

Câu 44: Cho vật thể (T) giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 0$; $x = 2$. cắt vật thể (T) bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại x ($0 \leq x \leq 2$) ta thu được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $(x+1)e^x$.

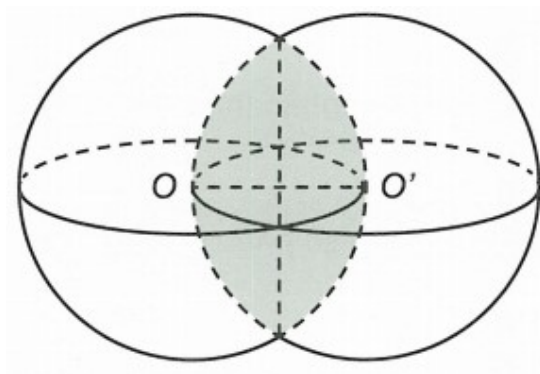
- A. $\frac{\pi(13e^4 - 1)}{4}$. B. $\frac{13e^4 - 1}{4}$. C. $2e^2$. D. $2\pi e^2$.

Câu 45: Ta vẽ hai nửa đường tròn như hình vẽ bên, trong đó đường kính của nửa đường tròn lớn gấp đôi đường kính của nửa đường tròn nhỏ. Biết rằng nửa hình tròn đường kính AB có diện tích là 8π và $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình (H) (phần tô đậm) xung quanh đường thẳng AB .



- A. $\frac{220}{3} \pi$. B. $\frac{98}{3} \pi$. C. $\frac{224}{3} \pi$. D. $4\pi^2$.

Câu 46: Một đồ chơi được thiết kế gồm hai mặt cầu (S_1) , (S_2) có cùng bán kính R thỏa mãn tính chất: tâm của (S_1) thuộc (S_2) và ngược lại (xem hình vẽ). Tính thể tích phần chung V của hai khối cầu tạo bởi (S_1) và (S_2) .



- A. πR^3 . B. $\frac{\pi R^3}{2}$.
- C. $\frac{5\pi R^3}{12}$. D. $\frac{2\pi R^3}{5}$.

ĐÁP ÁN

A. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

Dạng 1. Tính diện tích hình phẳng

1 - B	2 - A	3 - A	4 - D	5 - D	6 - A	7 - B	8 - A	9 - B	10 - C
11 - D	12 - A	13 - C	14 - D	15 - D	16 - B	17 - A	18 - B	19 - B	20 - A
21 - A	22 - A	23 - C	24 - A	25 - B	26 - B	27 - B	28 - A		

Dạng 2: Các bài toán thực tế ứng dụng diện tích hình phẳng

1 - B	2 - A	3 - D	4 - A	5 - A	6 - D	7 - B	8 - D	9 - B	10 - A
11 - D	12 - D	13 - C	14 - C	15 - D	16 - B	17 - D	18 - A	19 - D	20 - C

B. THỂ TÍCH VẬT THỂ VÀ THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

1 - C	2 - D	3 - D	4 - B	5 - D	6 - C	7 - B	8 - B	9 - A	10 - C
11 - A	12 - B	13 - C	14 - A	15 - B	16 - A	17 - C	18 - D	19 - B	20 - C
21 - D	22 - A	23 - A	24 - A	25 - A	26 - B	27 - A	28 - D	29 - C	30 - B
31 - D	32 - D	33 - C	34 - C	35 - D	36 - B	37 - B	38 - D	39 - A	40 - D
41 - B	42 - D	43 - C	44 - B	45 - B	46 - C				