

Mục lục

Phần 1. Một số bài toán cực trị trong hình học giải tích không gian 1

Chủ đề 1. Tìm điểm thỏa điều kiện cực trị 1

- Bài toán 1: Cho điểm A cố định và điểm M di động trên hình $(\mathcal{H})$ (đường thẳng, mặt phẳng). Tìm tọa độ M để độ dài AM nhỏ nhất.....1
- Bài toán 2: Cho mặt phẳng (P) và hai điểm A, B phân biệt. Tìm điểm $M \in (P)$ để $MA + MB$ nhỏ nhất, $|MA - MB|$ lớn nhất.....2
- Bài toán 3: Cho mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) cố định $((P)$ và (S) không có điểm chung). Xét điểm M di động trên (P) và N di động trên (S) . Xác định vị trí M và N để độ dài MN nhỏ nhất (lớn nhất).....5
- Bài toán 4: Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau. Tìm $M \in d_1, N \in d_2$ sao cho độ dài MN nhỏ nhất (đoạn vuông góc chung).....7
- Bài toán 5: Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện cực trị liên quan đến các yếu tố định lượng (diện tích, thể tích, khoảng cách, ...).....9
- Bài toán 6: Tìm tọa độ điểm M thuộc hình $(\mathcal{H})$ (mặt phẳng, đường thẳng) sao cho độ dài của véc tơ tổng (hiệu) nhỏ nhất.....11
- Bài toán 7: Tìm tọa độ điểm M thuộc hình $(\mathcal{H})$ (mặt phẳng, đường thẳng) để biểu thức $T = m.MA^2 + n.MB^2 + k.MC^2$ nhỏ nhất (lớn nhất).....13

Chủ đề 2. Lập phương trình mặt phẳng 16

- Bài toán 1: Viết phương trình mặt phẳng chứa M và cách A một khoảng lớn nhất.....16
- Bài toán 2: Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng d (hoặc hai điểm B, C) và cách điểm A một khoảng lớn nhất.....19
- Bài toán 3: Viết phương trình mặt phẳng chứa A và song song với Δ và cách Δ một khoảng lớn nhất.....22
- Bài toán 4: Viết phương trình mặt phẳng chứa d và tạo với mặt phẳng (Q) một góc nhỏ nhất.....24
- Bài toán 5: Viết phương trình mặt phẳng chứa d và tạo với d' một góc lớn nhất.....26
- Bài toán 6: Viết phương trình mặt phẳng đi qua A và cắt mặt cầu theo một đường tròn giao tuyến có bán kính nhỏ nhất.....28
- Bài toán 7: Viết phương trình mặt phẳng chứa d và cắt mặt cầu theo một đường tròn giao tuyến có bán kính nhỏ nhất.....29

Chủ đề 3. Lập phương trình đường thẳng 33

● <u>Bài toán 1</u> : Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) và đi qua M sao cho khoảng cách từ A đến d lớn nhất.....	33
● <u>Bài toán 2</u> : Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) và đi qua M sao cho khoảng cách từ A đến d nhỏ nhất.....	34
● <u>Bài toán 3</u> : Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) , đi qua M và tạo với d' một góc lớn nhất.....	36
● <u>Bài toán 4</u> : Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) , đi qua M và tạo với d' một góc nhỏ nhất.....	37
● <u>Bài toán 5</u> : Cho mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) cắt nhau theo một đường tròn giao tuyến $(\mathcal{C})$ và điểm A nằm trong hình tròn $(\mathcal{C})$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A và cắt $(\mathcal{C})$ tại hai điểm M, N thỏa mãn độ dài MN ngắn nhất.....	40

Phần 2. **Đáp án và hướng dẫn giải bài tập tương tự của từng Chủ đề** 42

Ⓐ Đáp án bài tập tương tự của từng Chủ đề.....	42
Ⓑ Lời giải chi tiết bài tập tương tự của từng Chủ đề.....	42

Phần 1

MỘT SỐ BÀI TOÁN CỰC TRỊ TRONG HÌNH HỌC GIẢI TÍCH KHÔNG GIAN

Chủ đề

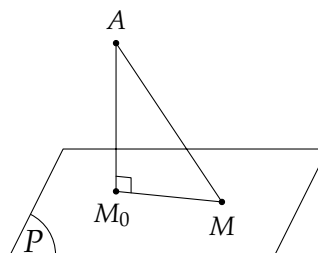
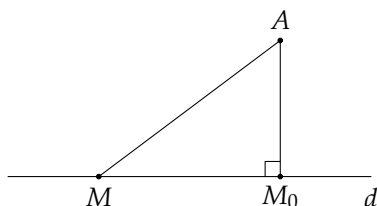


TÌM ĐIỂM THỎA ĐIỀU KIỆN CỰC TRỊ

BÀI TOÁN 1

Cho điểm A cố định và điểm M di động trên hình ($\mathcal{H}$) (đường thẳng, mặt phẳng). Tìm tọa độ M để độ dài AM nhỏ nhất

Sử dụng "Mối liên hệ giữa đường xiên và đường vuông góc" thì AM có độ dài nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của điểm A lên hình ($\mathcal{H}$) (M trùng với M_0).



1. Ví dụ minh họa

❶ Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 4; 2)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 1 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho độ dài đoạn AM nhỏ nhất.

A. $M(3; 6; 4)$.

B. $M(1; 4; -4)$.

C. $M(-1; 2; 0)$.

D. $M\left(-\frac{4}{3}; \frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

Lời giải.

Nhận xét AM nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của A lên (P) .

Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 1; 1)$.

$AM \perp (P)$ nên đường thẳng AM nhận $\vec{n} = (1; 1; 1)$ làm véc-tơ

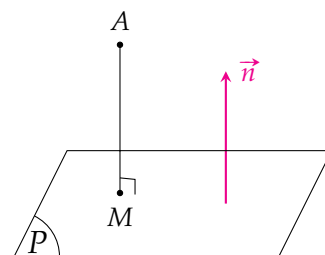
chỉ phương và qua $A(1; 4; 2)$ nên có phương trình $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$.

Gọi $M(1 + t; 4 + t; 2 + t) \in AM$. Mặt khác $M \in (P)$ nên

$$1 + t + 4 + t + 2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = -2.$$

Vậy $M(-1; 2; 0)$.

Chọn đáp án **C**



❶ Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 1; 1)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 6 - 4t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$.
Gọi $M(x_0; y_0; z_0)$ là điểm thuộc d sao cho độ dài AM nhỏ nhất. Tính $x_0 + y_0 + z_0$.
A. -2 . **B.** 2 . **C.** 6 . **D.** 0 .

Lời giải.

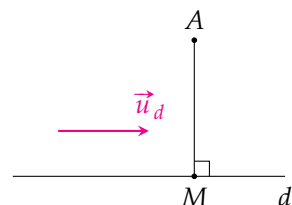
Nhận xét AM nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của A lên (P) .

Gọi $M(6 - 4t; -2 - t; -1 + 2t)$ là hình chiếu của A lên d . Ta có

- $\overrightarrow{AM} = (5 - 4t; -3 - t; -2 + 2t)$ và $\vec{u}_d = (4, 1, -2)$;
- $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow 4(5 - 4t) + 1(-3 - t) - 2(-2 + 2t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Vậy tọa độ điểm $M(2; -3; 1)$. Suy ra $x_0 + y_0 + z_0 = 0$.

Chọn đáp án **D**



2. Bài tập tương tự

Bài 1. Tìm hình chiếu vuông góc của điểm $M(1; 1; 0)$ trên mặt phẳng $(P): x + y + z - 5 = 0$.

- A.** $(2; 0; 1)$. **B.** $(1; 1; 0)$. **C.** $(0; 2; 1)$. **D.** $(2; 2; 1)$.

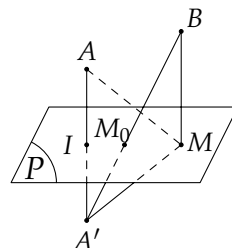
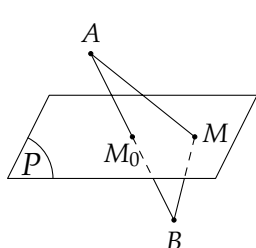
Bài 2. Cho điểm $M(2; 1; 0)$. Gọi $H(a; b; c)$ là điểm thuộc $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ sao cho MH có độ dài nhỏ nhất. Tính $T = a^2 + b^2 + c^2$.

- A.** $T = 21$. **B.** $T = 6$. **C.** $T = \sqrt{5}$. **D.** $T = 12$.

BÀI TOÁN 2

Cho mặt phẳng (P) và hai điểm A, B phân biệt. Tìm điểm $M \in (P)$ để $MA + MB$ nhỏ nhất, $|MA - MB|$ lớn nhất

⚙ Bài toán 1: Tìm điểm $M \in (P)$ để $MA + MB$ nhỏ nhất.

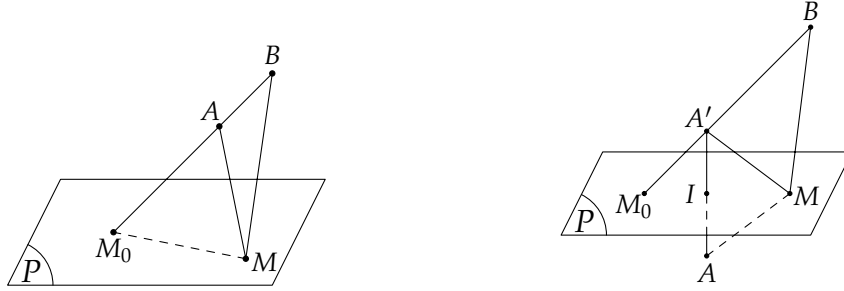


- ✓ Nếu A và B nằm khác phía so với (P) . Ta có đánh giá $AM + BM \geq AB$.
Đẳng thức xảy ra khi A, M, B thẳng hàng hay M là giao điểm của AB với (P) .
- ✓ Nếu A và B nằm cùng phía so với (P) . Gọi A' là điểm đối xứng của A qua (P) .
Ta có đánh giá

$$AM + BM = A'M + BM \geq A'B$$

Đẳng thức xảy ra khi A', M, B thẳng hàng hay M là giao điểm của $A'B$ với (P) .

Bài toán 2: Tìm điểm $M \in (P)$ để $|MA - MB|$ lớn nhất.



✓ Nếu A và B nằm cùng phía so với (P) . Ta có đánh giá

$$|MA - MB| \leq AB$$

Đẳng thức xảy ra khi A, M, B thẳng hàng hay M là giao điểm của AB với (P) .

✓ Nếu A và B nằm khác phía so với (P) . Gọi A' là điểm đối xứng của A qua (P) . Ta có đánh giá

$$|MA - MB| = |MA' - MB| \leq A'B$$

Đẳng thức xảy ra khi A', M, B thẳng hàng hay M là giao điểm của $A'B$ với (P) .

1. Ví dụ minh họa

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - y + 2z - 1 = 0$ và hai điểm $A(4; -1; 2)$, $B(-2; 11; -1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $MA + MB$ có giá trị nhỏ nhất.

- A. $M(0; 1; 0)$. B. $M(2; 3; 1)$. C. $M(3; 6; 2)$. D. $M(2; 3; -1)$.

Lời giải.

Thay tọa độ hai điểm A, B vào phương trình (P) và xét

$$(x_A - y_A + 2z_A - 1) \cdot (x_B - y_B + 2z_B - 1) = 8 \cdot (-16) < 0$$

nên A, B khác phía so với (P) . Nên theo kết quả **Bài toán 2** thì $M = AB \cap (P)$.

- AB qua A và nhận $\vec{u} = -\frac{1}{3}\vec{AB} = (2; -4; 1)$ làm vtcp nên có phương trình là
$$\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -1 - 4t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

- Gọi $M(4 + 2t; -1 - 4t; 2 + t) \in AB$. Mặt khác $M \in (P)$, suy ra

$$4 + 2t - (-1 - 4t) + 2(2 + t) - 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

Với $t = -1$, ta được $M(2; 3; 1)$.

CHÚ Ý

Nếu $(x_A - y_A + 2z_A - 1) \cdot (x_B - y_B + 2z_B - 1) > 0$ thì A, B cùng phía so với (P) .

Chọn đáp án **B**

❶ Ví dụ 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y - z - 5 = 0$ và hai điểm $A(4; 8; -3)$, $B(13; 5; -18)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $MA + MB$ có giá trị nhỏ nhất.

- A. $M(1; 1; -5)$. B. $M(3; -1; -4)$. C. $M(3; 1; 0)$. D. $M(2; 3; -1)$.

Lời giải.

Thay tọa độ hai điểm A, B vào phương trình (P) và xét

$$(x_A + 2y_A - z_A - 5) \cdot (x_B + 2y_B - z_B - 5) = 18 \cdot 30 > 0$$

nên A, B cùng phía so với (P) .

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua (P) , ta tìm được $A'(-2; -4; 3)$.

Theo kết quả **Bài toán 2** thì $M = A'B \cap (P)$.

- $A'B$ qua A' và nhận $\vec{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A'B} = (5; 3; -7)$ làm vtcp nên có phương trình là
$$\begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = -4 + 3t \\ z = 3 - 7t \end{cases}$$

- Gọi $M(-2 + 5t; -4 + 3t; 3 - 7t) \in A'B$. Mặt khác $M \in (P)$, suy ra

$$-2 + 5t + 2(-4 + 3t) - (3 - 7t) - 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Với $t = 1$, ta được $M(3; -1; -4)$.

Chọn đáp án **(B)** □

❷ Ví dụ 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; 2; 1)$ và $B(-1; 4; -3)$. Điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $|MA - MB|$ lớn nhất.

- A. $M(5; -1; 0)$. B. $M(5; 1; 0)$. C. $M(-5; -1; 0)$. D. $M(-5; 1; 0)$.

Lời giải.

Phương trình (Oxy) là $z = 0$.

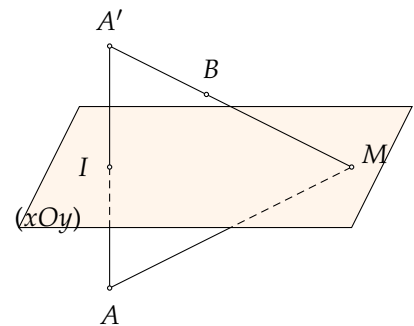
Xét $z_A \cdot z_B = 1 \cdot (-3) < 0$ nên A, B nằm khác phía so với (Oxy) .

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua (Oxy) thì $A'(3; 2; -1)$. Khi đó

$$|MA - MB| = |MA' - MB| \leq A'B_{\text{cố định}}$$

Suy ra $|MA - MB|_{\max} = A'B$ khi M, A', B thẳng hàng hay M là giao điểm của đường thẳng $A'B$ với (Oxy) .

$$A'B: \frac{x-3}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}. \text{ Suy ra } A'B \cap (Oxy) = M(5; 1; 0).$$



Chọn đáp án **(B)** □

2. Bài tập tương tự

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y - z + 3 = 0$ và hai điểm $A(1; -1; 2)$, $B(2; 0; 1)$. Giả sử $M(x_0; y_0; z_0)$ là điểm thuộc (P) sao cho $MA + MB$ có giá trị nhỏ nhất. Tính $T = 3x_0 + y_0 + z_0$.

- A. $T = 10$. B. $T = 2$. C. $T = 5$. D. $T = \frac{16}{5}$.

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;0;1), B(1;1;1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 4 = 0$. Gọi M là điểm nằm trong mặt phẳng (P) sao cho $AM + BM$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính độ dài đoạn OM .

- A. $OM = 2\sqrt{5}$. B. $OM = \frac{\sqrt{86}}{4}$. C. $OM = 4\sqrt{86}$. D. $OM = \frac{\sqrt{59}}{2}$.

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;3;4), B(3;1;0)$. Gọi M là điểm trên mặt phẳng (Oxz) sao cho tổng khoảng cách từ M đến A và B là ngắn nhất. Tìm hoành độ x_0 của M .

- A. $x_0 = 4$. B. $x_0 = 3$. C. $x_0 = 2$. D. $x_0 = 1$.

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 1 = 0$ và hai điểm $A(1;-3;0), B(5;-1;-2)$. Điểm $M(a;b;c)$ nằm trên (P) và $|MA - MB|$ lớn nhất. Giá trị tích $a \cdot b \cdot c$ bằng

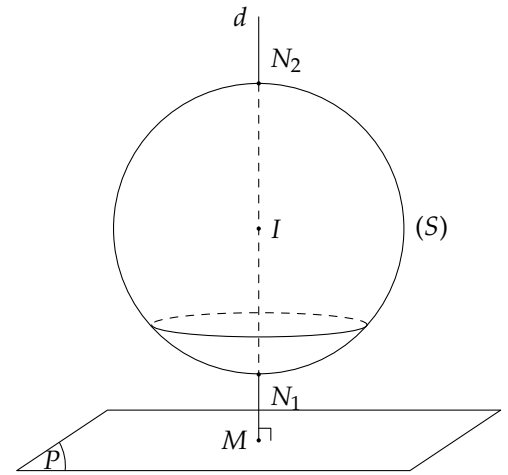
- A. 1. B. 12. C. 24. D. -24.

BÀI TOÁN
3

Cho mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) cố định ((P) và (S) không có điểm chung). Xét điểm M di động trên (P) và N di động trên (S) . Xác định vị trí M và N để độ dài MN nhỏ nhất (lớn nhất)

Nhận xét rằng MN nhỏ nhất (lớn nhất) khi M, N thuộc đường thẳng qua tâm I và vuông góc với (P) . Theo hình vẽ, thì $MN_{\min} = MN_1$ và $MN_{\max} = MN_2$. Để tìm các điểm này, ta có thể làm như sau:

- Viết phương trình đường thẳng d qua I và vuông với (P) , nhận $\vec{n}_P$ làm véc tơ chỉ phương.
- Giải giao điểm $d \cap (S)$, ta được tọa độ hai điểm N (N_1 và N_2);
- Tính độ dài MN_1 và MN_2 và so sánh. Kết luận $MN_{\max}$ và $MN_{\min}$.



⚠️ Chú ý: Trường hợp (P) tiếp xúc hoặc cắt (S) thì $MN_{\min} = 0$

1. Ví dụ minh họa

🔵 Ví dụ 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 24 = 0$. Gọi I là tâm mặt cầu và H là hình chiếu vuông góc của I trên (P) . Điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho đoạn MH có độ dài lớn nhất. Tìm tọa độ điểm M .

- A. $M(-1;0;4)$. B. $M(0;1;2)$. C. $M(3;4;2)$. D. $M(4;1;2)$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R = 3$. Xét

$$d(I, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 3 + 24|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 9 > R.$$

nên mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) không có điểm chung.

Gọi d là đường thẳng qua I và vuông góc với (P) . Theo kết quả của **Bài toán 3** thì M là một trong hai giao điểm của d với (S) .

Đường thẳng d có phương trình
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - t. \end{cases}$$

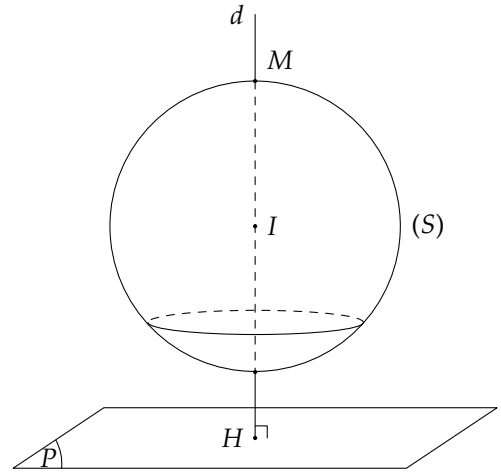
Thay $x = 1 + 2t, y = 2 + 2t, z = 3 - t$ vào phương trình mặt cầu, suy ra

$$t^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1. \end{cases}$$

Ta được hai điểm $M_1(3; 4; 2)$ và $M_2(-1; 0; 4)$.

Kiểm tra $d(M_1, (P)) > d(M_2, (P))$ nên $M_1(3; 4; 2)$ là điểm cần tìm.

Chọn đáp án **C**



Ví dụ 7. Cho các số thực a, b, c, d, e, f thỏa mãn
$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 - 2a + 4b + 2c - 6 = 0 \\ 2d - e + 2f - 14 = 0 \end{cases}.$$

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $(a - d)^2 + (b - e)^2 + (c - f)^2$ bằng

- A.** $7 - 4\sqrt{3}$. **B.** 1. **C.** $28 - 16\sqrt{3}$. **D.** $4 - 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Trong không gian $Oxyz$, gọi

- $M(a, b, c)$ thỏa $a^2 + b^2 + c^2 - 2a + 4b + 2c - 6 = 0$ thì M thuộc mặt cầu (S) tâm $I(1; -2; -1)$, bán kính $R = 2\sqrt{3}$.
- $N(d; e; f)$ thỏa $2d - e + 2f - 14 = 0$ thì N thuộc mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 14 = 0$.

Khi đó

$$MN^2 = (a - d)^2 + (b - e)^2 + (c - f)^2.$$

Bài toán trở thành: "Tìm điểm M trên $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 6 = 0$ và điểm N trên $(P): 2x - y + 2z - 14 = 0$ sao cho MN^2 nhỏ nhất".

Do $d(I, (P)) = 4 > R$ nên (P) và (S) không có điểm chung.

Suy ra $MN_{\min} = d(I, (P)) - R = 4 - 2\sqrt{3}$. Khi đó $MN^2 = 28 - 16\sqrt{3}$.

Chọn đáp án **C**

2. Bài tập tương tự

Bài 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $2x - 2y - z + 9 = 0$ và mặt cầu $(S): (x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 100$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất.

- A.** $M\left(-\frac{29}{3}; \frac{26}{3}; -\frac{7}{3}\right)$. **B.** $M\left(\frac{11}{3}; \frac{14}{3}; -\frac{13}{3}\right)$.
C. $M\left(-\frac{11}{3}; \frac{14}{3}; \frac{13}{3}\right)$. **D.** $M\left(\frac{29}{3}; -\frac{26}{3}; -\frac{7}{3}\right)$.

Bài 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;1)$, $B(1;-2;3)$ và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 1$, điểm N thuộc mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 4 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất độ dài MN .

A. 5.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Bài 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 2 = 0$ và các điểm $A(0;1;1)$, $B(-1;-2;-3)$, $C(1;0;-3)$. Điểm D thuộc mặt cầu (S) . Thể tích tứ diện $ABCD$ lớn nhất bằng

A. $\frac{16}{3}$.

B. 7.

C. $\frac{8}{3}$.

D. 9.

Bài 10. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + 2z - 13 = 0$. Xét các mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ đi qua điểm A , tiếp xúc với mặt phẳng (P) . Tính giá trị của biểu thức $T = a^2 + 2b^2 + 3c^2$ khi (S) có bán kính nhỏ nhất.

A. $T = 25$.

B. $T = 35$.

C. $T = 30$.

D. $T = 20$.

BÀI TOÁN
4

Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau. Tìm $M \in d_1$, $N \in d_2$ sao cho độ dài MN nhỏ nhất (đoạn vuông góc chung)

Cho đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}$ có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_1$; $d_2: \begin{cases} x = x'_0 + a'_1t \\ y = y'_0 + a'_2t \\ z = z'_0 + a'_3t \end{cases}$ có véc tơ

chỉ phương $\vec{u}_2$.

Xét điểm $M \in d_1$, $N \in d_2$ thỏa độ dài MN nhỏ nhất thì MN là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2 .

- Gọi

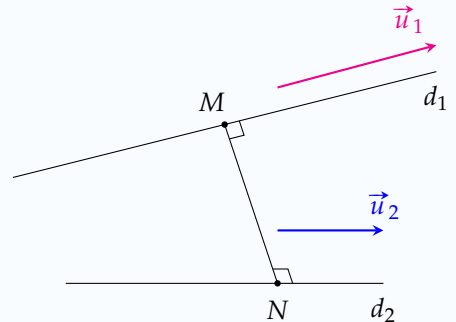
$$M(x_0 + a_1t_1, y_0 + a_2t_1, z_0 + a_3t_1) \in d_1$$

$$N(x'_0 + a'_1t_2, y'_0 + a'_2t_2, z'_0 + a'_3t_2) \in d_2.$$

- Để tìm tọa độ M và N , ta giải hệ

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \text{ tìm } t_1 \text{ và } t_2.$$

- Với t_1 và t_2 , suy ra tọa độ M và N .



1. Ví dụ minh họa

❶ Ví dụ 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}$ và $d_2: \frac{x-3}{-1} =$

$\frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ chéo nhau. Gọi $M \in d_1$, $N \in d_2$ sao cho độ dài MN nhỏ nhất. Tính $x_M - x_N$.

A. $x_M - x_N = \frac{4}{11}$. B. $x_M - x_N = -\frac{5}{11}$. C. $x_M - x_N = \frac{7}{11}$. D. $x_M - x_N = \frac{2}{11}$.

Lời giải.

Phương trình tham số của Δ_2 : $\begin{cases} x = 3 - t' \\ y = 1 + 2t' \\ z = t' \end{cases}$. Ta có $\vec{u}_1 = (1; 1; 0)$ và $\vec{u}_2 = (-1; 2; 1)$ là véc tơ chỉ phương của d_1 và d_2 . Gọi $M(t_1; t_1; 2) \in d_1$ và $N(3 - t_2; 1 + 2t_2; t_2) \in d_2$. Ta có

$$\overrightarrow{MN} = (3 - t_1 - t_2; 1 - t_1 + 2t_2; t_2 - 2)$$

$MN_{\min}$ khi MN là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2 . Suy ra

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2t_1 - t_2 = -4 \\ -t_1 + 6t_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{27}{11} \\ t_2 = \frac{10}{11} \end{cases}.$$

Suy ra $x_M - x_N = t_1 + t_2 - 3 = \frac{4}{11}$.

Chọn đáp án **A** □

❶ Ví dụ 9. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = t \\ z = 3 \end{cases}; d_2: \begin{cases} x = 1 \\ y = t' \\ z = -t' \end{cases}$ chéo nhau. Phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1, d_2 là

A. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = \frac{9}{4}$.

B. $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = \frac{9}{4}$.

C. $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = \frac{3}{2}$.

D. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = \frac{3}{2}$.

Lời giải.

d_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (-2; 1; 0)$; d_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (0; 1; -1)$.

Gọi (S) là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1, d_2 thì (S) sẽ nhận đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2 làm đường kính.

Gọi AB là đoạn vuông góc chung của d_1, d_2 .

• $A \in d_1 \Rightarrow A(4 - 2t; t; 3), B \in d_2 \Rightarrow B(1; t'; -t'), \overrightarrow{AB} = (-3 + 2t; t' - t; -t' - 3)$.

• Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2t - 3) \cdot (-2) + t' - t = 0 \\ 2t' - t = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t' = -1 \end{cases}.$

Suy ra $A(2; 1; 3), B(1; -1; 1)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I\left(\frac{3}{2}; 0; 2\right)$ là trung điểm của AB và bán kính $R = \frac{AB}{2} = \frac{3}{2}$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) : $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = \frac{9}{4}$.

Chọn đáp án **A** □

2. Bài tập tương tự

Bài 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d: \frac{x-3}{-4} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{1}$ và $d': \frac{x}{-6} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$. Gọi $A \in d$ và $B \in d'$ sao cho AB nhỏ nhất. Tính $x_A + x_B$.

- A. $x_A + x_B = 0$. B. $x_A + x_B = -1$. C. $x_A + x_B = 1$. D. $x_A + x_B = 2$.

Bài 12. Trong không gian $Oxyz$, cho $d_1: \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = -5 - 2t \end{cases}$ và $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{1}$ chéo nhau.

Gọi $I(a; b; c)$ là tâm của mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả d_1 và d_2 . Tính $a + b + c$.

- A. $a + b + c = -1$. B. $a + b + c = 0$. C. $a + b + c = 2$. D. $a + b + c = 4$.

Bài 13. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2}$ và $d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}$ chéo nhau. Gọi M, N lần lượt là các điểm di động trên d_1, d_2 . Tính giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn MN .

- A. $4\sqrt{2}$. B. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $2\sqrt{3}$.

BÀI TOÁN
5

Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện cực trị liên quan đến các yếu tố định lượng (diện tích, thể tích, khoảng cách, ...)

Với dạng toán này, ta thường dùng phương pháp đại số. Chú ý các công thức sau đây:

- ✓ Công thức tính độ dài đoạn thẳng

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

- ✓ Công thức tính diện tích tam giác $S_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB}, \vec{AC}|$.

- ✓ Công thức tính thể tích khối tứ diện $ABCD$ là $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}|$.

1. Ví dụ minh họa

❶ Ví dụ 10. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{OA} = \vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, $B(2; 2; 1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục tung sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

- A. $M(0; -4; 0)$. B. $M\left(0; \frac{3}{2}; 0\right)$. C. $M(0; -2; 0)$. D. $M(0; -3; 0)$.

Lời giải.

Với $\vec{OA} = \vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, suy ra $A(1; 1; -3)$.

Gọi $M(0; m; 0) \in Oy$. Ta có

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= 1 + (m - 1)^2 + 9 + 4 + (2 - m)^2 + 1 \\ &= 2m^2 - 6m + 20 = 2\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{31}{2} \geq \frac{31}{2}. \end{aligned}$$

Suy ra $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất khi $m = \frac{3}{2}$. Vậy $M\left(0; \frac{3}{2}; 0\right)$.

Chọn đáp án **(B)**

❶ Ví dụ 11. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$ và hai điểm $A(4;0;3)$, $B(0;2;3)$. Gọi $M(x_0; y_0; z_0)$ là điểm thuộc d sao cho diện tích tam giác MAB nhỏ nhất. Tính $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$.

A. $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$. **B.** $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 2$. **C.** $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3$. **D.** $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 5$.

Lời giải.

Gọi $M(1; t; -t) \in d$. Ta có

- $\overrightarrow{AM} = (-3; t; -t - 3)$, $\overrightarrow{AB} = (-4; 2; 0)$;
- Diện tích tam giác AMB là

$$\begin{aligned} S_{AMB} &= \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}] \right| \\ &= 2\sqrt{9t^2 + 18t + 54} = 2\sqrt{9(t+1)^2 + 45} \geq 2\sqrt{45}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $t = -1$. Khi đó $M(1; -1; 1)$. Suy ra $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3$.

⚠ Ta có thể dùng cách đánh giá hình học như sau:

- Diện tích tam giác AMB được tính theo công thức $S = \frac{1}{2} AB \cdot MH$, với H là hình chiếu vuông góc của điểm M lên AB .
- Do AB cố định nên $S_{\min}$ khi $MH_{\min}$. Ta kiểm tra được AB và d chéo nhau nên $MH_{\min}$ khi MH là đoạn vuông góc chung của d và AB (đây là kết quả đã xét ở **Bài toán 4.**)

Chọn đáp án **C** □

❷ Ví dụ 12. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) đi qua $M(1;1;4)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C phân biệt sao cho tứ diện $OABC$ có thể tích nhỏ nhất. Tính thể tích nhỏ nhất đó.

A. 72. **B.** 108. **C.** 18. **D.** 36.

Lời giải.

Gọi phương trình mặt phẳng (α) có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ với $a, b, c > 0$.

- Điểm $M \in (\alpha)$ nên

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} = 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{4}{abc}} \Rightarrow abc \geq 27 \cdot 4 = 108$.

- Do đó thể tích khối chóp $O.ABC$ là $V = \frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{6} abc \geq \frac{1}{6} \cdot 108 = 18$.
Đẳng thức xảy ra khi $a = b = 3, c = 12$.

Chọn đáp án **C** □

2. Bài tập tương tự

Bài 14. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;1), B(1;2;1)$ và đường thẳng $d : \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{-2}$. Tìm tọa độ điểm M thuộc d sao cho diện tích tam giác MAB có giá trị nhỏ nhất.

- A. $M(2; -3; -2)$. B. $M(0; -1; 2)$. C. $M(1; -2; 0)$. D. $M(-1; 0; 4)$.

Bài 15. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;1;1), B(2;1;-1), C(0;4;6)$. Điểm M di chuyển trên trục Ox . Tìm tọa độ M để $P = |\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}|$ có giá trị nhỏ nhất.

- A. $(2; 0; 0)$. B. $(1; 0; 0)$. C. $(-2; 0; 0)$. D. $(-1; 0; 0)$.

Bài 16. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$, trong đó $a > 0, b > 0, c > 0$. Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $I(1;2;3)$ sao cho thể tích khối tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó các số a, b, c thỏa mãn đẳng thức nào sau đây?

- A. $a + b + c = 12$. B. $a^2 + b = c - 6$. C. $a + b + c = 18$. D. $a + b - c = 0$.

BÀI TOÁN
6

Tìm tọa độ điểm M thuộc hình $(\mathcal{H})$ (mặt phẳng, đường thẳng) sao cho $T = |m\vec{MA} + n\vec{MB} + k\vec{MC}|$ nhỏ nhất.

Cho hình $(\mathcal{H})$ (mặt phẳng, đường thẳng), các điểm A, B, C phân biệt và các số thực m, n, k thỏa $m + n + k \neq 0$. Để tìm tọa độ điểm M thỏa yêu cầu, ta lập luận như sau:

- Gọi I là điểm thỏa

$$m \cdot \vec{IA} + n \cdot \vec{IB} + k \cdot \vec{IC} = \vec{0}$$

Có thể ghi nhớ nhanh $I = \frac{m \cdot A + n \cdot B + k \cdot C}{m + n + k}$ (1) để xác định tọa độ điểm I .

- Ta biến đổi

$$\begin{aligned} m\vec{MA} + n\vec{MB} + k\vec{MC} &= (m + n + k)\vec{MI} + m\vec{IA} + n\vec{IB} + k\vec{IC} \\ &= (m + n + k)\vec{MI}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$T = |m + n + k| \cdot MI.$$

Giá trị T nhỏ nhất khi độ dài MI nhỏ nhất. Lúc đó M là hình chiếu vuông góc của I lên hình $(\mathcal{H})$ (mặt phẳng, đường thẳng).

1. Ví dụ minh họa

❏ Ví dụ 13. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-3;0;0), B(0;0;3), C(0;-3;0)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$. Gọi $M(a,b,c)$ là điểm trên (P) sao cho $|\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC}|$ nhỏ nhất. Tính $a + b + c$.

- A. $a + b + c = 0$. B. $a + b + c = -1$. C. $a + b + c = 5$. D. $a + b + c = 3$.

Lời giải.

Xét điểm I thỏa mãn

$$\vec{IA} + \vec{IB} - \vec{IC} = \vec{0}.$$

Áp dụng công thức (1), ta được

$$x_I = \frac{x_A + x_B - x_C}{1+1-1} = -3; y_I = \frac{y_A + y_B - y_C}{1+1-1} = 3; z_I = \frac{z_A + z_B - z_C}{1+1-1} = 3$$

Tọa độ $I(-3; 3; 3)$.

Ta có

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{MI}$$

Suy ra

$$T = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = MI$$

$T_{\min}$ khi $IM_{\min}$. Lúc đó M là hình chiếu của I lên (P) .

Mặt khác, điểm I đã thuộc (P) , nên hình chiếu của I lên (P) là M trùng với điểm I .

Vậy $M(-3; 3; 3)$, suy ra $a + b + c = 3$.

Chọn đáp án **(D)**

□

❶ Ví dụ 14. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-1}$ và hai điểm $A(1; 0; 1), B(-1; 1; 2)$. Biết điểm $M(a; b; c)$ thuộc Δ sao cho $|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, tổng $a + 2b + 4c$ bằng bao nhiêu?

A. 0.

B. -1.

C. 2.

D. 1.

Lời giải.

❶ Cách 1: Gọi I là điểm thỏa $\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$, suy ra $I\left(-2; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

Theo kết quả của **Bài toán 5** thì $|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}|$ nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của điểm I lên Δ .

- Gọi $M(2t; -1+t; 1-t) \in \Delta$ là hình chiếu vuông góc của I lên Δ . Ta có

$$\overrightarrow{IM} \cdot \vec{u}_{\Delta} = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}.$$

- Với $t = -\frac{1}{2}$ thì $M\left(-1; -\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$. Suy ra $a + 2b + 4c = 2$.

❶ Cách 2: Ta tham số tọa độ điểm M , sau đó dùng khảo sát hàm để xử lý max - min. Gọi $M(2m; -1+m; 1-m) \in \Delta$. Ta có

$$\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = (4 + 4m; -5 + 2m; -3 - 2m)$$

Suy ra

$$|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}| = \sqrt{24m^2 + 24m + 50} = \sqrt{24\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + 44}.$$

Nhận xét $|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}|$ nhỏ nhất khi $m = -\frac{1}{2}$. Từ đó suy ra $M\left(-1; -\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Vậy $a + 2b + 4c = 2$.

Chọn đáp án **(C)**

□

2. Bài tập tương tự

Bài 17. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3; 2; 2)$; $B(-5; 3; 7)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z = 0$. Điểm $M(a; b; c)$ thuộc (P) sao cho $|\overrightarrow{2MA} - \overrightarrow{MB}|$ có giá trị nhỏ nhất. Tính $T = 2a + b - c$.

- A. $T = -3$. B. $T = 4$. C. $T = 3$. D. $T = -1$.

Bài 18. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -3; 7)$, $B(0; 4; -3)$, $C(4; 2; 5)$. Biết điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ nằm trên mặt phẳng (Oxy) sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ có giá trị nhỏ nhất. Khi đó tổng $P = x_0 + y_0 + z_0$ bằng

- A. $P = 0$. B. $P = 6$. C. $P = -3$. D. $P = 3$.

Bài 19. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(4; 2; 2)$, $B(1; 1; -1)$, $C(2; -2; -2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (Oyz) sao cho $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất.

- A. $M(2; 3; 1)$. B. $M(0; -3; 1)$. C. $M(0; 3; 1)$. D. $M(0; 1; 2)$.

Bài 20. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(5; 8; -11)$, $B(3; 5; -4)$, $C(2; 1; -6)$ và mặt cầu $(S): (x - 4)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 9$. Gọi $M(x_M; y_M; z_M)$ là điểm trên (S) sao cho biểu thức $|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của tổng $x_M + y_M$ bằng

- A. 2. B. 0. C. 4. D. -2.

BÀI TOÁN 7

Tìm tọa độ điểm M thuộc hình $(\mathcal{H})$ (mặt phẳng, đường thẳng) để biểu thức $T = m \cdot MA^2 + n \cdot MB^2 + k \cdot MC^2$ nhỏ nhất (lớn nhất)

Cho hình $(\mathcal{H})$ (mặt phẳng, đường thẳng), các điểm A, B, C phân biệt và các số thực m, n, k thỏa $m + n + k \neq 0$. Để tìm tọa độ điểm M thỏa yêu cầu, ta lập luận như sau:

- Gọi I là điểm thỏa

$$m \cdot \overrightarrow{IA} + n \cdot \overrightarrow{IB} + k \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

Có thể ghi nhớ nhanh $I = \frac{m \cdot A + n \cdot B + k \cdot C}{m + n + k}$ để xác định tọa độ điểm I .

- Ta biến đổi

$$\begin{aligned} m \overrightarrow{MA}^2 + n \overrightarrow{MB}^2 + k \overrightarrow{MC}^2 &= m (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + n (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + k (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 \\ &= (m + n + k) MI^2 + m \cdot IA^2 + n \cdot IB^2 + k \cdot IC^2. \end{aligned}$$

Suy ra $T = (m + n + k) MI^2 + m \cdot IA^2 + n \cdot IB^2 + k \cdot IC^2$. Do $m \cdot IA^2 + n \cdot IB^2 + k \cdot IC^2$ cố định nên

- với $m + n + k > 0$ thì T nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất.
- với $m + n + k < 0$ thì T lớn nhất khi MI nhỏ nhất.

Khi đó M là hình chiếu vuông góc của I lên hình $(\mathcal{H})$ (mặt phẳng, đường thẳng).

1. Ví dụ minh họa

❶ Ví dụ 15. Cho mặt phẳng $(\alpha): x + 2y + 2z + 9 = 0$ và ba điểm $A(1; 2; 0)$, $B(2; 0; -1)$, $C(3; 1; 1)$. Tìm tọa độ điểm $M \in (\alpha)$ sao cho $2MA^2 + 3MB^2 - 4MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $M(1; -2; -3)$. B. $M(-3; 1; -4)$. C. $M(-3; 2; -5)$. D. $M(1; -3; -2)$.

Lời giải.

Xét điểm I thỏa mãn $2\vec{IA} + 3\vec{IB} - 4\vec{IC} = \vec{0}$. Áp dụng công thức (1), ta được

$$x_I = \frac{2x_A + 3x_B - 4x_C}{2 + 3 - 4} = -4; y_I = \frac{2y_A + 3y_B - 4y_C}{2 + 3 - 4} = 0; z_I = \frac{2z_A + 3z_B - 4z_C}{2 + 3 - 4} = 7$$

Suy ra, tọa độ $I(-4; 0; 7)$.

Ta có

$$\begin{aligned} 2MA^2 + 3MB^2 - 4MC^2 &= 2(\vec{MI} + \vec{IA})^2 + 3(\vec{MI} + \vec{IB})^2 - 4(\vec{MI} + \vec{IC})^2 \\ &= MI^2 + 2IA^2 + 3IB^2 - 4IC^2 + 2\vec{MI}(2\vec{IA} + 3\vec{IB} - 4\vec{IC}) \\ &= MI^2 + 2IA^2 + 3IB^2 - 4IC^2. \end{aligned}$$

Do $2IA^2 + 3IB^2 - 4IC^2$ không đổi nên $2MA^2 + 3MB^2 - 4MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $MI_{\min} \Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên (α) .

Ta tìm hình chiếu vuông góc của I lên (P) .

- $IM \perp (\alpha) \Rightarrow \vec{u}_{IM} = \vec{n}_{(\alpha)} = (1; 2; 2)$ là vectơ chỉ phương của IM .

$$\text{Suy ra phương trình } IM: \begin{cases} x = -4 + t \\ y = 2t \\ z = -7 + 2t \end{cases}$$

- Gọi $M(-4 + t; 2t; -7 + 2t) \in IM$.
- $M = IM \cap (\alpha) \Rightarrow M \in (\alpha)$ hay $-4 + t + 2 \cdot 2t + 2(-7 + 2t) + 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.
- Với $t = 1 \Rightarrow M(-3; 2; -5)$.

Chọn đáp án **C**



Ví dụ 16. Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-2}$ và ba điểm $A(1; 3; -2)$, $B(0; 4; -5)$, $C(1; 2; -4)$. Biết điểm $M(a; b; c)$ thuộc đường thẳng Δ sao cho $MA^2 + MB^2 + 2MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, tổng $a + b + c$ bằng bao nhiêu?

- A.** 0. **B.** -1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Xét điểm I là điểm thỏa mãn $\vec{IA} + \vec{IB} + 2\vec{IC} = \vec{0}$. Áp dụng công thức (*), ta được

$$\begin{aligned} x_I &= \frac{x_A + x_B + 2x_C}{1 + 1 + 2} = \frac{3}{4}. \\ y_I &= \frac{y_A + y_B + 2y_C}{1 + 1 + 2} = \frac{11}{4}. \\ z_I &= \frac{z_A + z_B + 2z_C}{1 + 1 + 2} = -\frac{15}{4}. \end{aligned}$$

Suy ra, tọa độ $I\left(\frac{3}{4}; \frac{11}{4}; -\frac{15}{4}\right)$.

Theo kết quả của **Bài toán 6** thì $T = MA^2 + MB^2 + 2MC^2$ nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của I lên Δ . Ta tìm hình chiếu của I lên Δ .

- Mặt phẳng (α) qua I và vuông góc với Δ có phương trình là $x + y - 2z - 11 = 0$.
- $M(t; t + 1; -2t - 2) \in \Delta \cap (\alpha)$, suy ra $t + t + 1 - 2(-2t - 2) - 11 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.
- Với $t = 1$, tính được $M(1; 2; -4)$.

Suy ra $a + b + c = 1 + 2 + (-4) = -1$.

CHÚ Ý

Có thể dùng khảo sát hàm như đã xét ở các phần trên.

- Do $M \in \Delta \Rightarrow M(t; t + 1; -2t - 2)$
- Tính được $MA^2 + MB^2 + 2MC^2 = 24t^2 - 48t + 35 = 24(t - 1)^2 + 11 \geq 11$.
- Suy ra $(MA^2 + MB^2 + 2MC^2)_{\min} = 11$ khi $t = 1$.
- Với $t = 1$ thì $M(1; 2; -4) \Rightarrow a + b + c = 1 + 2 + (-4) = -1$

Chọn đáp án **B**



2. Bài tập tương tự

Bài 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ và hai điểm $A(0; -1; 3), B(1; -2; 1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho $MA^2 + 2MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A.** $M(1; 0; -2)$. **B.** $M(-1; -1; -1)$. **C.** $M(3; 1; -3)$. **D.** $M(5; 2; -4)$.

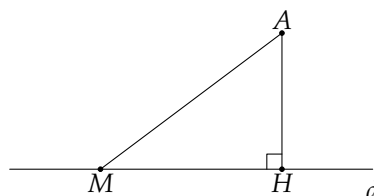
Bài 22. Cho $A(1; -2; 1), B(5; 0; -1), C(3; 1; 2)$ và mặt phẳng $(Q): 3x + y - z + 3 = 0$. Gọi $M(a; b; c) \in (Q)$ thỏa mãn $MA^2 + MB^2 + 2MC^2$ nhỏ nhất. Tổng $a + b + 5c$ bằng

- A.** 9. **B.** 11. **C.** 15. **D.** 14.

Các bài toán về cực trị trong hình học thì rất phong phú và đa dạng. Trong tài liệu này, người viết chủ yếu chọn lọc những dạng toán có thể được giải bằng nhiều cách, để giúp học sinh có cái nhìn bao quát, rèn luyện tư duy và chọn lọc cho mình cách giải phù hợp. Kết quả trong hình học được dùng nhiều trong tài liệu này là **Mối quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc**:

Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm nằm ngoài đường thẳng đó thì đường vuông góc là đường ngắn nhất. Như hình vẽ, ta luôn có

$$AH \leq AM.$$



BÀI TOÁN

1

Viết phương trình mặt phẳng chứa M và cách A một khoảng lớn nhất

Cho hai điểm $M(m_1; m_2; m_3)$ và $A(a_1; a_2; a_3)$ phân biệt. Gọi (P) là mặt phẳng qua điểm M và cách A một khoảng lớn nhất. Ta lập luận để tìm véc-tơ pháp tuyến của (P) như sau:

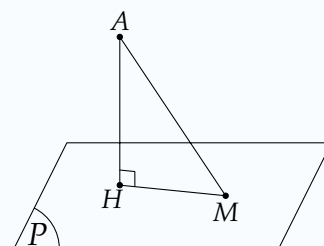
⚙ **Cách hình học:** Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (P) thì $d(A, (P)) = AH$.

- Chú ý rằng AM cố định. Ta có đánh giá

$$AH \leq AM_{\text{cố định}}$$

$AH_{\max} = AM$ khi và chỉ khi H trùng M hay $AM \perp (P)$.

- Khi đó (P) là mặt phẳng qua điểm M và nhận $\overrightarrow{AM}$ làm véc-tơ pháp tuyến.



⚙ **Cách đại số:** Gọi $\vec{n} = (a; b; c)$ là véc-tơ pháp tuyến của (P) , với $\vec{n} \neq \vec{0}$. Ta có

- Phương trình (P) : $a(x - m_1) + b(x - m_2) + c(x - m_3) = 0$

- Tính khoảng cách $d(A, (P)) = \frac{|a(a_1 - m_1) + b(a_2 - m_2) + c(a_3 - m_3)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Ta có đánh giá: (bất đẳng thức Bunhiacopxki)

$$\begin{aligned} d(A, (P)) &\leq \frac{\sqrt{[a^2 + b^2 + c^2] [(a_1 - m_1)^2 + (a_2 - m_2)^2 + (a_3 - m_3)^2]}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \sqrt{(a_1 - m_1)^2 + (a_2 - m_2)^2 + (a_3 - m_3)^2} \quad (\text{cố định}). \end{aligned}$$

Suy ra $d(A, (P))_{\max}$ khi $\frac{a}{a_1 - m_1} = \frac{b}{a_2 - m_2} = \frac{c}{a_3 - m_3}$.

Từ đẳng thức này, ta chọn a, b và c (quy ước mẫu bằng 0 thì tử bằng 0).

1. Ví dụ minh họa

❏ Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1; 2; -1)$ và $A(3; 0; 3)$. Biết mặt phẳng (P) đi qua điểm M và cách A một khoảng lớn nhất. Phương trình mặt phẳng (P) là

- A. $x - 2y + 2z + 5 = 0$. B. $x - y + 2z + 3 = 0$.
C. $2x - y + 4z + 4 = 0$. D. $2x - y + 2z + 2 = 0$.

Lời giải.

⚙ Cách hình học: Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (P) thì $d(A, (P)) = AH$.

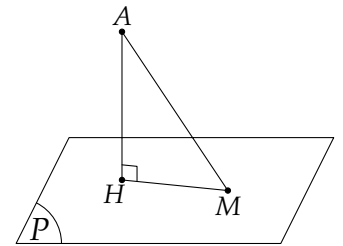
- Ta có đánh giá

$$AH \leq AM_{\text{cố định}}.$$

Suy ra $AH_{\max} = AM$ khi H trùng với M hay $AM \perp (P)$. Khi đó $\overrightarrow{AM}$ là véc-tơ pháp tuyến của (P) .

- Mặt phẳng (P) qua $M(1; 2; -1)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = \overrightarrow{AM} = -2(1; -1; 2)$ nên có phương trình là

$$x - y + 2z + 3 = 0.$$



⚙ Cách đại số: Gọi $\vec{n} = (a; b; c)$ là véc-tơ pháp tuyến của (P) , với $\vec{n} \neq \vec{0}$. Ta có

- Phương trình của (P) có dạng

$$a(x - 1) + b(y - 2) + c(z + 1) = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz - a - 2b + c = 0.$$

- Khoảng cách từ A đến (P) là

$$d = \frac{|2a - 2b + 4c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \leq \frac{\sqrt{(2^2 + (-2)^2 + 4^2)(a^2 + b^2 + c^2)}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 2\sqrt{6}.$$

$$d_{\max} = 2\sqrt{6} \text{ khi } \frac{a}{2} = \frac{b}{-2} = \frac{c}{4}. \text{ Từ đây ta chọn được } a = 1, b = -1 \text{ và } c = 2.$$

- Thay vào (*), ta được phương trình (P) là $x - y + 2z + 3 = 0$.

Chọn đáp án **B**



❏ Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 4; -3)$ và mặt phẳng $(P): (m^2 + 1)x - (2m^2 - m + 2)y + (m^2 + m)z - 1 = 0$ (m là tham số). Tìm phương trình mặt phẳng (P) , biết khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất.

- A. $x - 2y + 2z + 7 = 0$. B. $5x - 2y + 3z + 12 = 0$.
C. $2x - 3y + 2z - 1 = 0$. D. $2x - y - z - 1 = 0$.

Lời giải.

⚠ Tìm điểm cố định M thuộc (P) . Khi đó $d(A, (P)) \leq AM_{\text{cố định}}$ nên

$$d(A, (P))_{\max} = AM \text{ khi } AM \perp (P).$$

Ta biến đổi (P) về dạng

$$m^2(x - 2y + z) + m(y + z) + x - 2y - 1 = 0$$

Phương trình này thỏa với mọi m khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ x - 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}. \text{ Suy ra } M(3; 1; -1) \in (P), \forall m.$$

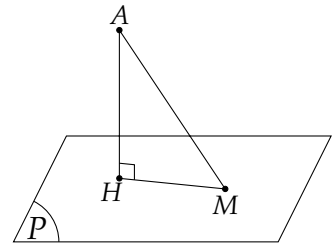
Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (P) thì $d(A, (P)) = AH$.

- Ta có đánh giá

$$AH \leq AM_{\text{cố định}}.$$

- Suy ra $AH_{\max} = AM$ khi H trùng với M hay $AM \perp (P)$.
Khi đó $\overrightarrow{AM} = (2; -3; 2)$ là véc-tơ pháp tuyến của (P) .

Mặt phẳng (P) qua $M(3; 1; -1)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{AM} = (2; -3; 2)$ nên có phương trình là $2x - 3y + 2z - 1 = 0$ (ứng với giá trị $m = 1$).



Chọn đáp án **C**



2. Bài tập tương tự

Bài 1. (Thi thử Sở Quảng Bình – 2018). Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; -1; 1)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất là

- A. $2x - y + z - 6 = 0$. B. $2x - y + z + 6 = 0$.
C. $2x + y + z - 6 = 0$. D. $2x + y - z - 6 = 0$.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 1; -2)$, $B(-1; 0; 3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A sao cho khoảng cách từ B đến (P) lớn nhất.

- A. $3x - y + 2z - 1 = 0$. B. $3x + y + 5z + 3 = 0$.
C. $3x + y - 5z - 17 = 0$. D. $3x - y - 5z + 17 = 0$.

Bài 3. (Thi thử TNTHPT 2021 – Sở Hưng Yên). Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ và $D(1; 2; -1)$, với a, b, c là các số thực khác 0. Biết rằng 4 điểm này đồng phẳng và khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (ABC) lớn nhất. Tính $a + b + c$.

- A. 3. B. 15. C. 2. D. 4.

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm M và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất, mặt phẳng (P) cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C . Tính thể tích khối chóp $O.ABC$.

- A. $\frac{1372}{9}$. B. $\frac{524}{3}$. C. $\frac{686}{9}$. D. $\frac{343}{9}$.

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): (2m^2 + 3m + 1)x - (m^2 + 2m + 1)y + (1 - m)z + 2 = 0$ (m là tham số) và điểm $A(7; 0; 5)$. Tìm phương trình mặt phẳng (P) , biết khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất.

- A. $x - 2y + 2z + 2 = 0$. B. $3x - y + 3x + 2 = 0$.
C. $2x - 3y + 2z + 2 = 0$. D. $2x - y - z + 2 = 0$.

Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng d (hoặc hai điểm B, C) và cách điểm A một khoảng lớn nhất

Cho điểm A và d , với A không thuộc d . Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và (P) cách điểm A một khoảng lớn nhất. Ta lập luận để tìm véc tơ pháp tuyến của (P) như sau:

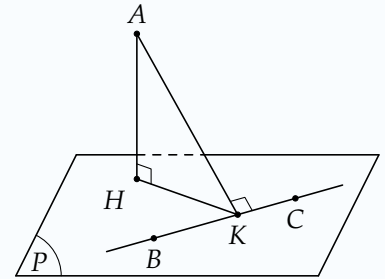
Cách hình học: Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên (P) và d .

- Chú ý rằng AK cố định. Ta có đánh giá

$$d(A, (P)) = AH \leq AK_{\text{cố định}}$$

$AH_{\text{max}} = AK$ khi và chỉ khi H trùng K hay $AK \perp (P)$.

- Khi đó (P) là mặt phẳng qua điểm K và nhận $\overrightarrow{AK}$ làm véc tơ pháp tuyến.



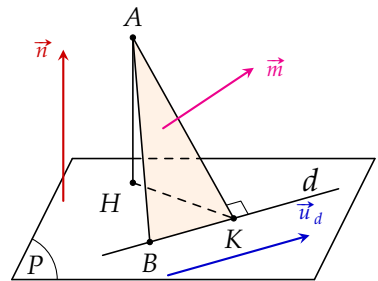
! Khi $d(A, (P))_{\text{max}}$ thì (P) vuông góc với mặt phẳng chứa A và d nên ta còn cách xác định véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}$ của (P) bằng tích có hướng như sau:

- d qua điểm B và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_d$. Tính

$$\vec{m} = [\overrightarrow{AB}, \vec{u}_d]$$

là pháp tuyến của mặt phẳng chứa A và d .

- Do $\vec{n} \perp \vec{u}_d$, $\vec{n} \perp \vec{m}$ nên $\vec{n} = [\vec{m}, \vec{u}_d]$.



Cách đại số: Gọi B, C là hai điểm phân biệt thuộc d ; $\vec{n} = (a; b; c)$ là véc-tơ pháp tuyến của (P) , với $\vec{n} \neq \vec{0}$.

- Viết phương trình (P) qua điểm B và nhận $\vec{n}$ làm véc-tơ pháp tuyến.
- Điểm $C \in (P)$ nên thay tọa độ C vào phương trình (P) phải thỏa mãn. Từ đây ta rút được c theo hai ẩn a và b .
- Tính khoảng cách $d(A, (P)) = \dots = f(t)$, với $t = \frac{a}{b}$, $b \neq 0$.
- Khảo sát hàm $[f(t)]^2$. Tìm $\max\{f(t)\}$, đạt được khi $t = \frac{a}{b} = t_0$. Từ tỉ lệ này, ta chọn a, b . Sau đó thay vào điều kiện đầu, tìm c .

1. Ví dụ minh họa

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 1; 1)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = -2 - t \end{cases}$.

Tìm phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d và cách A một khoảng lớn nhất.

A. $(\alpha): 2x + y - z - 4 = 0$.

B. $(\alpha): x + y + 3z + 5 = 0$.

C. $(\alpha): -4x + 7y + z - 6 = 0$.

D. $(\alpha): 4x - 7y + z = 0$.

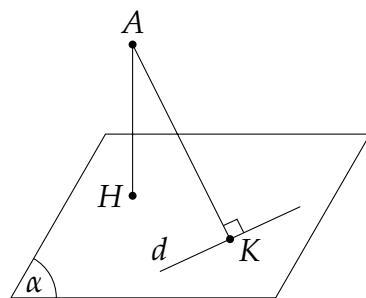
Lời giải.

Gọi K, H lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng d và lên (α) .

Ta xác định tọa độ điểm K như sau:

- $K(1+2t; t; -2-t) \in d$. Suy ra $\overrightarrow{AK} = (2t-1; t-1; -t-3)$.
- Gọi $\vec{u}_d = (2; 1; -1)$ là véc tơ chỉ phương của d .

$$\begin{aligned} AK \perp d &\Leftrightarrow \overrightarrow{AK} \cdot \vec{u}_d = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(2t-1) + 1(t-1) - 1(-t-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 0. \text{ Suy ra } K(1; 0; -2). \end{aligned}$$



Ta đánh giá $d(A, (\alpha)) = AH \leq AK_{\text{cố định}}$ nên $d(A, (\alpha))_{\max} = AK$ khi $AK \perp (\alpha)$.

Khi đó $\overrightarrow{AK} = (-1; -1; -3)$ là véc tơ pháp tuyến của (α) .

Mặt phẳng (α) qua $K(1; 0; -2)$ và nhận $\overrightarrow{AK} = (-1; -1; -3) = -1(1; 1; 3)$ làm véc tơ pháp tuyến nên có phương trình là $x + y + 3z + 5 = 0$.

⚠ Cách khác: Khi khoảng cách $d(A, (\alpha))_{\max}$ thì (α) vuông góc với mặt phẳng chứa A và d . Ta xác định véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ của (α) như sau:

- d qua điểm $B(1; 0; -2)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_d = (2; 1; -1)$. Tính

$$\vec{m} = [\overrightarrow{AB}, \vec{u}_d] = (4; -7; 1)$$

là pháp tuyến của mặt phẳng chứa A và d .

- Do $\vec{n} \perp \vec{u}_d, \vec{n} \perp \vec{m}$ nên $\vec{n} = [\vec{m}, \vec{u}_d] = (6; 6; 18)$ là véc tơ pháp tuyến của (α) .

Ta có thể chọn $\vec{n}_1 = (1; 1; 3)$ làm véc tơ pháp tuyến cho (α) .

Chọn đáp án **(B)**



🔵 Ví dụ 4. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 1; 3); B(3; 0; 2); C(0; -2; 1)$. Tìm phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B và cách C một khoảng lớn nhất.

- | | |
|--|--------------------------------------|
| A. $(P): 2x + y + z - 8 = 0.$ | B. $(P): -y + z - 2 = 0.$ |
| C. $(P): 3x + 2y + z - 11 = 0.$ | D. $(P): x - y + 2z - 7 = 0.$ |

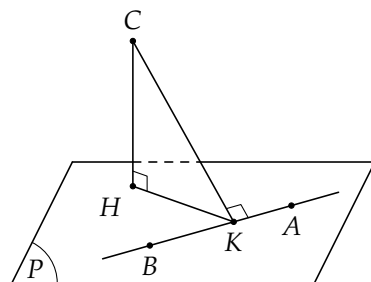
Lời giải.

⚙ Cách hình học: Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm C lên (P) và đường thẳng AB . Ta có

$$CH = d(C, (P)) \leq CK_{\text{cố định}}$$

nên $d(C, (P))_{\max} = CK$ khi H trùng K . Khi đó mặt phẳng (P) đi qua A, B và vuông với mặt phẳng (ABC) . Véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_P$ của (P) được xác định như sau:

$$\vec{n}_P = \left[[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}], \overrightarrow{AB} \right] = (-9, -6, -3) = -3 \cdot (3; 2; 1).$$



Ta có thể chọn $\vec{m} = (3; 2; 1)$ làm véc tơ pháp tuyến cho (P) . Mặt phẳng (P) qua $A(2; 1; 3)$ và nhận $\vec{m} = (3; 2; 1)$ làm véc tơ pháp tuyến nên có phương trình là $3x + 2y + z - 11 = 0$.

☀ **Cách đại số:** Gọi $\vec{n} = (a, b, c)$ là véc tơ pháp tuyến của (P) , $\vec{n} \neq \vec{0}$. Phương trình (P) qua $A(2; 1; 3)$ và có $\vec{n} = (a, b, c)$ là véc tơ pháp tuyến là

$$a(x - 2) + b(y - 1) + c(z - 3) = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz - 2a - b - 3c = 0.$$

$B(3; 0; 2) \in (P)$, suy ra

$$a - b - c = 0 \Leftrightarrow c = a - b.$$

Khoảng cách từ C đến (P) là

$$d(C, (P)) = \frac{|-2a - 3b - 2c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|4a + b|}{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - 2ab}}$$

- Với $b = 0$ thì $d(C, (P)) = 2\sqrt{2}$.
- Với $b \neq 0$, ta biến đổi

$$d(C, (P)) = \frac{|4a + b|}{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - 2ab}} = \frac{|4t + 1|}{\sqrt{2t^2 - 2t + 2}}, \text{ với } t = \frac{a}{b}.$$

Xét hàm số $f(t) = d^2(C, (P)) = \frac{(4t + 1)^2}{2t^2 - 2t + 2}$, có $f'(t) = \frac{-48t^2 + 60t + 18}{(2t^2 - 2t + 2)^2}$.

- $f'(t) = 0 \Leftrightarrow -48t^2 + 60t + 18 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{4}$ hoặc $t = \frac{3}{2}$.
- Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$		
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	8			14		8
			0			

Ta thấy $0 \leq f(t) \leq 14$ nên $0 \leq d(C, (P)) \leq \sqrt{14}$. Suy ra

$$d(C, (P))_{\max} = \sqrt{14} \text{ khi } t = \frac{3}{2} \text{ hay } \frac{a}{b} = \frac{3}{2}.$$

Chọn $a = 3, b = 2$. Ta tính được $c = a - b = 1$. Vậy, phương trình mặt phẳng (P) là

$$3x + 2y + z - 11 = 0.$$

Chọn đáp án 



2. Bài tập tương tự

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(0; -1; 2)$ và $N(-1; 1; 3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M, N sao cho khoảng cách từ $K(0; 0; 2)$ đến (P) lớn nhất.

- | | |
|----------------------------------|---------------------------------|
| A. $3x + y + z - 1 = 0.$ | B. $x + y - z + 3 = 0.$ |
| C. $4x + y + 2z - 7 = 0.$ | D. $x + 2y - z - 3 = 0.$ |



Bài 7. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3; -1; 5)$ và đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-4}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d sao cho khoảng cách từ điểm M đến (P) là lớn nhất. Biết (P) cắt các trục tọa độ lần lượt tại A, B và C . Thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng

- A. 28. B. 72. C. 84. D. 24.

Bài 8. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1; -2; 1)$, song song với đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ và cách gốc tọa độ O khoảng lớn nhất.

- A. $11x - 16y + 10z - 53 = 0$. B. $11x - 16y + 8z - 51 = 0$.
C. $4x - 5y + 2z - 16 = 0$. D. $-7x + 5y + 4z + 13 = 0$.

Bài 9. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3; 0; 2)$ và mặt phẳng $(Q): 2x - y + z - 1 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua gốc O , vuông góc với (Q) đồng thời cách điểm M một khoảng lớn nhất.

- A. $3x + 4y - 2z = 0$. B. $x + 4y + 2z = 0$. C. $3x - 2y + z = 0$. D. $x + 3y + z = 0$.

BÀI TOÁN
3

Viết phương trình mặt phẳng chứa A và song song với Δ và cách Δ một khoảng lớn nhất

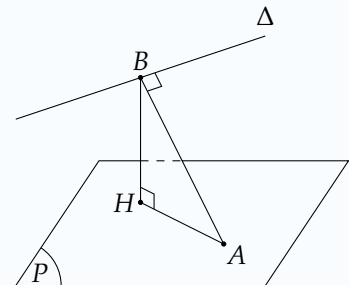
Cho điểm A và đường thẳng Δ , với A không thuộc Δ . Gọi (P) là mặt phẳng qua A song song với Δ và cách Δ một khoảng lớn nhất. Ta lập luận để tìm véc tơ pháp tuyến của (P) như sau:

- Gọi B là hình chiếu vuông góc của A lên Δ và H là hình chiếu vuông góc của B xuống mặt phẳng (P) .
- Nhận xét AB cố định. Ta có đánh giá

$$d(\Delta, (P)) = d(B, (P)) = BH \leq BA_{\text{cố định}}$$

nên $d(\Delta, (P))_{\max} = BA$ khi H trùng A . Lúc đó, $BA \perp (P)$ hay $\overrightarrow{BA}$ là véc tơ pháp tuyến của (P) .

- Tìm tọa độ điểm B (bài toán hình chiếu) và tính $\overrightarrow{BA}$ chính là pháp tuyến của (P) .



⚠ Nhận xét:

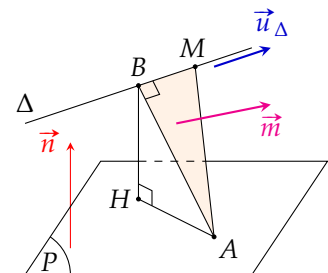
Khi $d(\Delta, (P))_{\max}$ thì (P) vuông góc với mặt phẳng chứa A và Δ , nên ta có thể dùng tích có hướng để xác định véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ của (P) như sau:

- Giả sử Δ qua điểm M và có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_{\Delta}$. Tính

$$\vec{m} = [\overrightarrow{AM}, \vec{u}_{\Delta}]$$

là pháp tuyến của mặt phẳng chứa Δ và A .

- Do $\vec{n} \perp \vec{u}_{\Delta}$, $\vec{n} \perp \vec{m}$ nên $\vec{n} = [\vec{m}, \vec{u}_{\Delta}]$ là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .



1. Ví dụ minh họa

Ví dụ 5. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; -1; -2)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A , song song với đường thẳng Δ và khoảng cách từ đường thẳng Δ tới mặt phẳng (P) lớn nhất. Tìm phương trình (P) .

A. $2x + y - z - 7 = 0$.

B. $x - 2y - 3z + 5 = 0$.

C. $x - y + z - 1 = 0$.

D. $x - 2y - 3z - 10 = 0$.

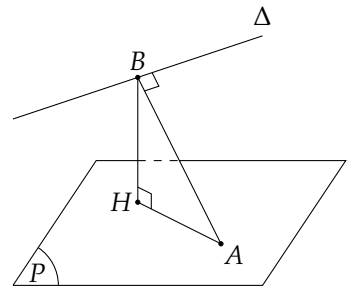
Lời giải.

Gọi B là hình chiếu vuông góc của A lên Δ và H là hình chiếu vuông góc của B xuống (P) .

Do A và Δ cố định nên AB cố định. Ta có đánh giá

$$d(\Delta, (P)) = d(B, (P)) = BH \leq BA_{\text{cố định}}$$

nên $d(\Delta, (P))_{\max} = BA$ khi H trùng A . Lúc đó, $BA \perp (P)$ hay $\overrightarrow{BA}$ là véc tơ pháp tuyến của (P) .



Xác định tọa độ B là hình chiếu của A lên Δ .

- $B \in \Delta$, suy ra $B(1+t; 1-t; 1+t)$.
- $\overrightarrow{AB} = (t-1; 2-t; t+3)$ và véc tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}_{\Delta} = (1; -1; 1)$.
 B là hình chiếu của A lên Δ nên

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_{\Delta} = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

Suy ra $B(1; 1; 1)$.

(P) qua điểm A và nhận $\overrightarrow{BA} = (1; -2; -3)$ là véc tơ pháp tuyến nên có phương trình là $x - 2y - 3z - 10 = 0$.

Chọn đáp án **(D)**

Chú ý

Ta có thể tính nhanh véc tơ tuyến $\vec{n}$ của (P) bằng cách sau:

- Δ qua $M(1; 1; 1)$ và có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_{\Delta} = (1; -1; 1)$. Tính

$$\vec{m} = [\overrightarrow{AM}, \vec{u}_{\Delta}] = (5; 4; -1)$$

là pháp tuyến của mặt phẳng chứa Δ và A .

- Tính $\vec{n} = [\vec{m}, \vec{u}_{\Delta}] = (3; -6; -9)$.

Ta có thể chọn $\vec{n}_1 = (1; -2; -3)$ làm véc tơ pháp tuyến cho (P) .

2. Bài tập tương tự

Bài 10. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2; 4; 1)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+7}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A , song song với đường thẳng Δ và khoảng cách từ đường thẳng Δ tới mặt phẳng (P) lớn nhất. Tìm phương trình (P) .

A. $2x + y - z + 1 = 0$.

B. $x - 2y - 3z + 13 = 0$.

C. $x - y + z + 5 = 0$.

D. $2x + y - 3z + 3 = 0$.

Bài 11. (Thi thử, Sở GD và ĐT - Vĩnh Phúc, 2019). Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(10; 2; -1)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A , song song với

đường thẳng d sao cho khoảng cách giữa d và (P) lớn nhất. Khoảng cách từ điểm $M(-1;2;3)$ đến mặt phẳng (P) bằng

- A. $\frac{76\sqrt{790}}{790}$. B. $\frac{3\sqrt{29}}{29}$. C. $\frac{97\sqrt{3}}{15}$. D. $\frac{2\sqrt{13}}{13}$.

BÀI TOÁN 4

Viết phương trình mặt phẳng chứa d và tạo với mặt phẳng (Q) một góc nhỏ nhất

Cho trước d và mặt phẳng (Q) cắt nhau. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và tạo với (Q) một góc nhỏ nhất. Để tìm véc tơ pháp tuyến của (P) , ta lý luận như sau:

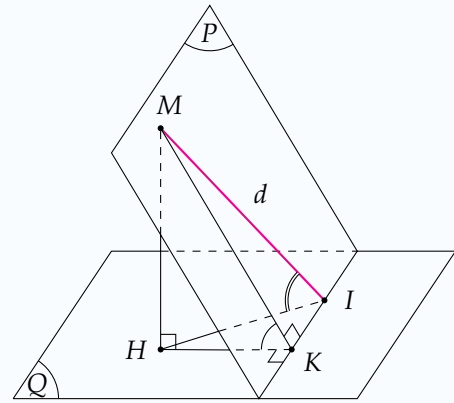
Cách hình học:

- Gọi I là giao điểm của d và (Q) . Lấy $M \in d$ và gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên (Q) và giao tuyến của (P) với (Q) . Ta có MH và HI cố định.

- Gọi $\varphi = \widehat{MKH}$ là góc giữa (P) và (Q) thì

$$\tan \varphi = \frac{MH}{HK} \geq \frac{MH}{HI} \quad (\text{cố định})$$

$\varphi_{\min} \Leftrightarrow \{\tan \varphi\}_{\min}$. Khi đó K trùng I hay (P) chính là mặt phẳng chứa d và vuông góc với (MIH) .



⚠ Xác định véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_P$ của mặt phẳng (P) bằng tích có hướng như sau:

- Tính $\vec{m} = [\vec{n}_Q, \vec{u}_d]$ là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (MIH) .
- Do $\vec{n}_P \perp \vec{u}_d, \vec{n}_P \perp \vec{m}$ nên $\vec{n}_P = [\vec{m}, \vec{u}_d]$.

Cách đại số:

Gọi $\vec{n}_P$ là véc tơ pháp tuyến của (P) , với $\vec{n}_P \neq \vec{0}$. Ta có

- $\vec{n}_P \perp \vec{u}_d$ nên $\vec{n}_P \cdot \vec{u}_d = 0$. Từ đây ta rút được c theo hai ẩn a và b .
- Gọi φ là góc giữa (P) và (Q) thì

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{n}_Q|} = f(t), \quad \text{với } t = \frac{a}{b}, b \neq 0.$$

- Khảo sát hàm $[f(t)]^2$. Tìm $\max\{f(t)\}$, đạt được khi

$$t = \frac{a}{b} = t_0$$

Từ tỉ lệ này, ta chọn a, b . Sau đó thay vào điều kiện đầu, tìm c .

1. Ví dụ minh họa

❶ Ví dụ 6. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(Q): x + 2y - 2z = 0$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d sao cho góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) nhỏ nhất. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $x - 2y + z = 0$.

B. $x + 22y + 10z = 0$.

C. $x - 2y - z = 0$.

D. $x + 10y - 22z = 0$.

Lời giải.

❷ Cách hình học:

Gọi $\varphi = \widehat{MKH}$ là góc giữa (P) và (Q) . Theo kết quả của **Bài toán 4** thì $\varphi_{\min}$ khi (P) chính là mặt phẳng chứa d và vuông góc với (MIH) .

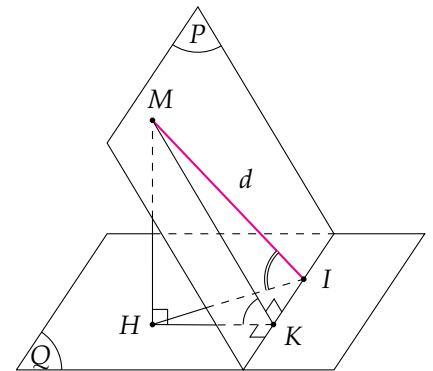
Gọi $\vec{u}_d = (2; 2; 1)$ và $\vec{n}_Q = (1; 2; -2)$ lần lượt là véc tơ chỉ phương của d và véc tơ pháp tuyến của (Q) . Xác định véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_P$ như sau:

- Tính $\vec{m} = [\vec{n}_Q, \vec{u}_d] = (6; -5; -2)$ là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (MIH) .

- Do $\vec{n}_P \perp \vec{u}_d, \vec{n}_P \perp \vec{m}$ nên

$$\vec{n}_P = [\vec{u}_d, \vec{m}] = (1; 10; -22).$$

Mặt phẳng (P) qua $M(0; 0; 0) \in d$ và nhận $\vec{n}_P = (1; 10; -22)$ làm véc tơ pháp tuyến nên có phương trình là $x + 10y - 22z = 0$.



❸ Cách đại số: Ta có $\vec{u}_d = (2; 2; 1)$ và $\vec{n}_Q = (1; 2; -2)$ lần lượt là véc tơ chỉ phương của d và véc tơ pháp tuyến của (Q) . Gọi $\vec{n} = (a; b; c)$, với $\vec{n} \neq \vec{0}$ là véc-tơ của mặt phẳng (P) thì

$$\vec{n} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow 2a + 2b + c = 0 \Leftrightarrow c = -2a - 2b \quad (1).$$

Gọi φ là góc giữa (P) và (Q) thì

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}_Q|} = \frac{|a + 2b - 2c|}{3 \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \stackrel{(1)}{=} \frac{|5a + 6b|}{3 \cdot \sqrt{5a^2 + 5b^2 + 8ab}}.$$

Với $b = 0$ thì $\cos \varphi = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad (2).$

Với $b \neq 0$ thì $\cos \varphi = \frac{|5t + 6|}{3 \cdot \sqrt{5t^2 + 8t + 5}}$, với $t = \frac{a}{b}$.

Xét $f(t) = [\cos \varphi]^2 = \frac{25t^2 + 60t + 36}{5t^2 + 8t + 5}$. Ta có

- $f'(t) = \frac{-100t^2 - 110t + 12}{(5t^2 + 8t + 5)^2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{6}{5} \\ t = \frac{1}{10} \end{cases}$

- Bảng biến thiên

t	$-\infty$	$-\frac{6}{5}$	$\frac{1}{10}$	$+\infty$	
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	5	0	$\frac{65}{9}$	5	

Ta được $0 \leq \cos \varphi \leq \frac{\sqrt{65}}{9}$ (3).

Nhận xét $\varphi_{\min}$ khi $\cos \varphi$ lớn nhất. Xét hai trường hợp (2) và (3) thì $\cos \varphi_{\max} = \frac{\sqrt{65}}{9}$ khi $t = \frac{1}{10}$.

Với $t = \frac{1}{10}$, ta chọn $a = 1$ và $b = 10$. Từ đây tính $c = -2a - 2b = -22$.

Mặt phẳng (P) qua $M(0;0;0) \in d$ và nhận $\vec{n}_P = (1;10;-22)$ làm véc tơ pháp tuyến nên có phương trình là $x + 10y - 22z = 0$.

Chọn đáp án **D**



2. Bài tập tương tự

Bài 12. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d : \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(P) : x + 2y - z + 5 = 0$. Phương trình mặt phẳng (Q) chứa d và tạo với (P) một góc nhỏ nhất là

- A.** $y + z - 3 = 0$. **B.** $2x + y - 12 = 0$. **C.** $-4x + z - 1 = 0$. **D.** $y - z + 4 = 0$.

Bài 13. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(0;-1;2)$ và $N(-1;1;3)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M, N và tạo với mặt phẳng $(Q) : 2x - y - 2z - 2 = 0$ góc có số đo nhỏ nhất. Tính khoảng cách từ điểm $A(1;2;3)$ đến (P) .

- A.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{7\sqrt{3}}{11}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

BÀI TOÁN

5

Viết phương trình mặt phẳng chứa d và tạo với d' một góc lớn nhất

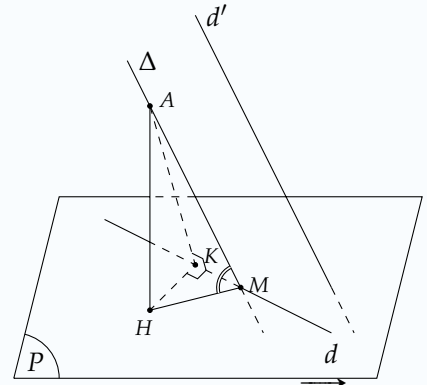
Cho hai đường thẳng d, d' chéo nhau. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và tạo với d' một góc lớn nhất. Ta lập luận để tìm véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ của (P) như sau:

Cách hình học: Trên đường thẳng d , lấy điểm M và dựng đường thẳng Δ đi qua M song song với d' . Khi đó góc giữa Δ và (P) chính là góc giữa d' và (P) .

- Trên đường thẳng Δ , lấy điểm A . Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A lên (P) và d . Ta có AM và KM cố định.

- Gọi φ là góc giữa Δ và (P) . Khi đó $\varphi = \widehat{AMH}$ và

$$\cos \varphi = \frac{HM}{AM} \geq \frac{KM}{AM} \quad (\text{cố định}).$$



Nhận xét $\varphi_{\max} \Leftrightarrow \cos \varphi_{\min}$. Khi đó H trùng với K hay $AK \perp (P)$. Suy ra $\vec{AK}$ là véc-tơ pháp tuyến của (P) .

⚠ Lưu ý: Khi $\varphi_{\max}$ thì (P) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với mặt phẳng (AMK) (chứa d và Δ). Do đó có thể tìm véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}$ của (P) bằng tích có hướng như sau: $\vec{n} = [\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}], \vec{u}_d$.

⚙ Cách đại số: Gọi $\vec{n} = (a; b; c)$, với $\vec{n} \neq \vec{0}$ là véc-tơ của mặt phẳng (P) .

- $\vec{n} \cdot \vec{u}_d = 0$. Từ đây ta rút được c theo a, b .
- Gọi φ là góc giữa d' và (P) . Ta có

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}_{d'}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}_{d'}|} = f(t), \text{ với } t = \frac{a}{b} \text{ và } b \neq 0.$$

- Nhận xét $\varphi_{\max}$ thì $f(t)_{\max}$. Khảo sát $[f(t)]^2$, ta suy ra $f(t)_{\max}$ khi $t = \frac{a}{b} = t_0$. Từ đây, ta chọn được a, b và tính được c .

1. Ví dụ minh họa

🔵 Ví dụ 7. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-3}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{3}$ và đường thẳng $d: \frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua Δ và tạo với đường thẳng d một góc lớn nhất.

- A.** $19x - 17y - 20z - 77 = 0$.
C. $19x - 17y - 20z + 34 = 0$.

- B.** $31x - 8y - 5z + 91 = 0$.
D. $31x - 8y - 5z - 98 = 0$.

Lời giải.

⚙ Cách hình học: Ta có $\vec{u}_\Delta = (1; 2; 3)$ và $\vec{u}_d = (3; 1; 2)$ là véc-tơ chỉ phương của Δ và d . Gọi $\vec{n}$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) chứa Δ và tạo với d một góc lớn nhất. Theo kết quả của **Bài toán 5** thì $\vec{n} = [[\vec{u}_\Delta, \vec{u}_d], \vec{u}_\Delta] = (31; -8; -5)$.

Phương trình mặt phẳng (P) qua điểm $M(3; 0; -1) \in \Delta$ và nhận $\vec{n} = (31; -8; -5)$ làm véc-tơ pháp tuyến là $31x - 8y - 5z - 98 = 0$

⚙ Cách đại số: Gọi $\vec{n} = (a; b; c)$, với $\vec{n} \neq \vec{0}$ là véc-tơ của mặt phẳng (P) .

- $\vec{u}_\Delta \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow a + 2b + 3c = 0 \Leftrightarrow a = -2b - 3c$.

- Gọi φ là góc giữa d và (P) . Ta có

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{u}_d \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}_d| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|3a + b + 2c|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|5b + 7c|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{5b^2 + 12bc + 10c^2}}$$

Ta tìm giá trị lớn nhất của hàm này tương tự các Ví dụ đã xét ở trên.

Chọn đáp án **D**



2. Bài tập tương tự

Bài 14. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$. Viết phương trình của mặt phẳng (P) chứa d và tạo với đường thẳng $d': \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$ góc lớn nhất.

A. $x - 4y + z - 7 = 0$.

B. $x - 3y + z - 4 = 0$.

C. $x + 4y + z - 7 = 0$.

D. $x + 3y + z - 4 = 0$.

Bài 15. Trong không gian $Oxyz$, cho $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-1}$ và $d': \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và tạo với d' một góc lớn nhất. Tọa độ giao điểm của (P) với trục Oy là

A. $(0; 3; 0)$.

B. $(0; -9; 0)$.

C. $(0; 9; 0)$.

D. $(0; -3; 0)$.

BÀI TOÁN

6

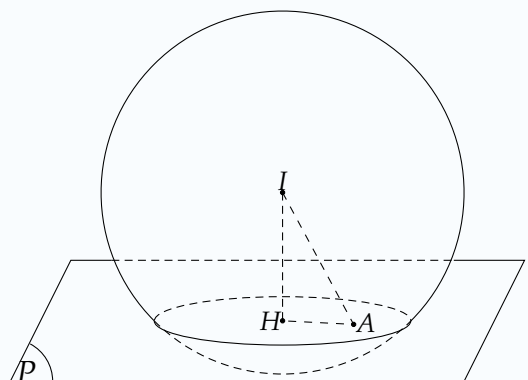
Viết phương trình mặt phẳng đi qua A và cắt mặt cầu theo một đường tròn giao tuyến có bán kính nhỏ nhất

Cho mặt cầu (S) có tâm I , bán kính R và điểm A nằm trong mặt cầu ($IA < R$). Gọi (P) là mặt phẳng qua điểm A và cắt mặt cầu theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Ta tìm véc tơ pháp tuyến của (P) như sau:

- Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (P) thì $IH = d(I, (P))$; r là bán kính đường tròn giao tuyến. Ta có công thức liên hệ

$$r = \sqrt{R^2 - d^2(I, (P))}$$

- Nhận xét $r_{\min}$ khi và chỉ khi $d(I, (P))_{\max}$ hay $IH_{\max}$. Điều này xảy ra khi H trùng với A . Khi đó $IA \perp (P)$. Suy ra (P) là mặt phẳng qua A và nhận $\vec{IA}$ làm véc tơ pháp tuyến.



1. Ví dụ minh họa

Ví dụ 8. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 9$ và điểm $A(0, -1, 2)$. Gọi (P) là mặt phẳng qua A và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có chu vi nhỏ nhất. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $y - 2z - 5 = 0$.

B. $x - y + 2z - 5 = 0$.

C. $-y + 2z + 5 = 0$.

D. $-y + 2z - 5 = 0$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;0)$, bán kính $R = 3$. Xét $IA = \sqrt{5} < R$ nên A nằm trong mặt cầu (S). Nhận xét rằng chu vi đường tròn giao tuyến nhỏ nhất thì bán kính r của đường tròn đó phải nhỏ nhất.

Theo kết quả của **Bài toán 6** thì $r_{\min}$ khi $IA \perp (P) \Rightarrow \vec{IA} = (0; -1; 2)$ là véc tơ pháp tuyến của (P). Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $y - 2z + 5 = 0$.

Chọn đáp án **D**

□

2. Bài tập tương tự

Bài 16. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; -1; 2)$ và mặt cầu (S): $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 9$. Mặt phẳng qua M cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất có phương trình là

A. $x - y + 2z - 7 = 0$.

B. $x - y + 2z - 5 = 0$.

C. $2x - y + z - 7 = 0$.

D. $x + y + 2z - 5 = 0$.

Bài 17. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S): $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 9$ và điểm $A(0;0;2)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là hình tròn (C) có diện tích nhỏ nhất. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. (P): $3x + 2y + 2z - 4 = 0$.

B. (P): $x - 2y + 3z - 6 = 0$.

C. (P): $x + 2y + 3z - 6 = 0$.

D. (P): $x + 2y + z - 2 = 0$.

BÀI TOÁN
7

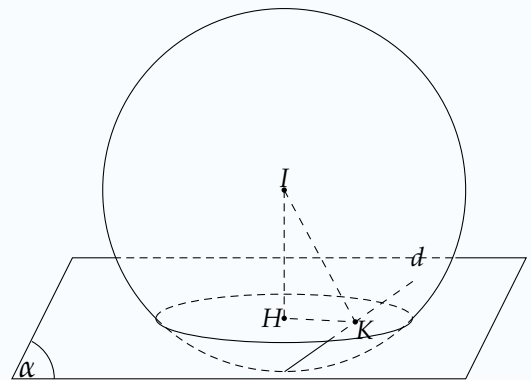
Viết phương trình mặt phẳng chứa d và cắt mặt cầu theo một đường tròn giao tuyến có bán kính nhỏ nhất

Cho mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R và đường thẳng d (d cắt (S)). Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và cắt mặt cầu theo một đường tròn giao tuyến có bán kính nhỏ nhất.

- Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên (P) và d . Chú ý rằng IK cố định.
- Bán kính đường tròn giao tuyến nhỏ nhất thì IH phải lớn nhất. Ta có đánh giá

$$IH \leq IK_{\text{cố định}}$$

Suy ra $IH_{\max} = IK$ khi H trùng K hay $IK \perp (P)$. Khi đó (P) là mặt phẳng qua điểm K và nhận $\vec{IK}$ làm véc tơ pháp tuyến.



⚠ Lưu ý:

- Trường hợp d không cắt (S) (tiếp xúc, không có điểm chung) thì sẽ không tồn tại mặt phẳng (P) thỏa mãn. Vì thế trước khi áp dụng kết quả của **Bài toán 7**, ta phải kiểm tra yếu tố d cắt (S) tại hai điểm phân biệt.
- Cho mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R và đường thẳng d (d không qua I). Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và cắt mặt cầu theo một đường tròn giao tuyến có bán kính **lớn nhất** thì (P) đi qua tâm I.

1. Ví dụ minh họa

❶ Ví dụ 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t, t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases}$. Mặt phẳng chứa d và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất có phương trình là

A. $y + z + 1 = 0$. B. $x + 3y + 5z + 2 = 0$.
C. $x - 2y - 3 = 0$. D. $3x - 2y - 4z - 8 = 0$.

Lời giải.

Xét hệ $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -t \\ (x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4 \end{cases}$
Suy ra

$$(1 + 2t - 3)^2 + (-1 + t - 1)^2 + (-t)^2 = 4 \Leftrightarrow 6t^2 - 12t + 4 = 0 \quad (*)$$

Phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt nên d cắt (S) tại 2 điểm phân biệt. Mặt cầu (S) có tâm $I(3; 1; 0)$. Gọi $K(1 + 2t; -1 + t; -t)$ là hình chiếu vuông góc của I lên d .

- Tính $\overrightarrow{IK} = (2t - 2; t - 2; -t)$ và $\vec{u}_d = (2; 1; -1)$. Ta có

$$\overrightarrow{IK} \cdot \vec{u}_d = 2(2t - 2) + 1(t - 2) - 1(-t) = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

- Với $t = 1$ thì $K(3; 0; -1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Theo kết quả của **Bài toán 7** thì (P) nhận $\overrightarrow{IK} = (0; -1; -1)$ làm véc tơ pháp tuyến và đi qua $K(3; 0; -1)$ nên có phương trình

$$0(x - 3) - (y - 0) - (z + 1) = 0 \Leftrightarrow y + z + 1 = 0.$$

Chọn đáp án **A** □

❷ Ví dụ 10. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$ và hai điểm $M(3; -2; 6)$, $N(0; 1; 0)$. Giả sử $(\alpha): ax + by + cz - 2 = 0$ đi qua M , N và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $a + b^2 + c^3$.

A. 9. B. 12. C. 5. D. 3.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MN} = (-3; 3; -6) = -3(1; -1; 2)$. Phương trình

$$\text{đường thẳng } d \text{ qua } M, N \text{ là } \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 2t. \end{cases}$$

Nhận xét hai điểm M, N đều nằm trong mặt cầu (S) nên d luôn cắt (S) tại hai điểm phân biệt.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$. Gọi $K(m; 1 - m; 2m) \in d$ là hình chiếu của I lên d .

- Ta có $\overrightarrow{IK} = (m - 1; -m - 1; 2m - 3)$.

$$\overrightarrow{IK} \cdot \vec{u}_d = m - 1 + m + 1 + 2(2m - 3) = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

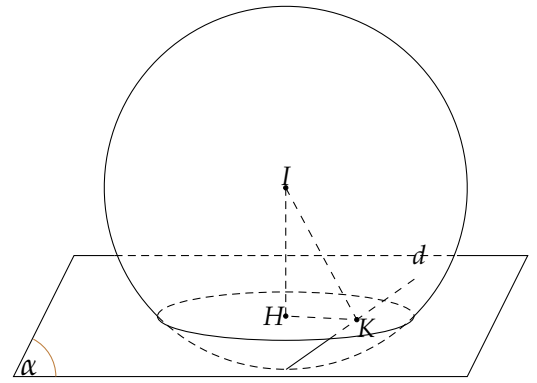
- Với $m = 1$, suy ra $K(1; 0; 2)$.

Theo kết quả của **Bài toán 7** thì (α) nhận $\overrightarrow{IK} = (0; -2; -1)$ làm véc tơ pháp tuyến và đi qua $K(1; 0; 2)$ nên có phương trình

$$0(x - 1) - 2(y - 0) - (z - 2) = 0 \Leftrightarrow 2y + z - 2 = 0.$$

Suy ra $a = 0, b = 2, c = 1$. Vậy, $a + b^2 + c^3 = 5$.

Chọn đáp án **C**



Ví dụ 11. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(1; 2; 3)$, bán kính $R = 3$ và hai điểm $M(2; 0; 0), N(0; 1; 0)$. Mặt phẳng $(X): x + by + cz + d = 0$ chứa MN và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính r lớn nhất. Tính giá trị $T = b + c + d$.

- A.** 3. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{IM} = (1; -2; -3)$ và $\overrightarrow{IN} = (-1; -1; -3)$ không cùng phương nên ba điểm I, M, N không thẳng hàng. Khi đó, Mặt phẳng (X) qua MN cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính lớn nhất thì (X) phải đi qua tâm I .

Mặt phẳng $(X): x + by + cz + d = 0$ qua ba điểm M, N và I nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2 + d = 0 \\ b + d = 0 \\ 1 + 2b + 3c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -2 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{cases}. \text{ Suy ra } T = b + c + d = -1.$$

Chọn đáp án **C**

2. Bài tập tương tự

Bài 18. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 9$, điểm $A(0; 0; 2)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là hình tròn (C) có diện tích nhỏ nhất.

- A.** $(P): x - 2y + 3z - 6 = 0$. **B.** $(P): x + 2y + 3z - 6 = 0$.
C. $(P): 3x + 2y + 2z - 4 = 0$. **D.** $(P): x + 2y + z - 2 = 0$.

Bài 19. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; -2; 6), B(0; 1; 0)$ và mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$. Mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 2 = 0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T = a + b + c$.

- A.** $T = 3$. **B.** $T = 4$. **C.** $T = 2$. **D.** $T = 5$.

Bài 20. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) : $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 12$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với mặt phẳng (Oxz) và cắt mặt cầu (S) theo đường tròn có chu vi lớn nhất. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $y - 2 = 0$.

B. $y + 2 = 0$.

C. $x - 2y + 1 = 0$.

D. $y + 1 = 0$.

BÀI TOÁN 1

Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) và đi qua M sao cho khoảng cách từ A đến d lớn nhất

Cho điểm A , mặt phẳng (P) và điểm $M \in (P)$ (AM không vuông với (P)). Gọi d là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) và đi qua M sao cho khoảng cách từ A đến d lớn nhất. Ta lập luận để tìm véc tơ chỉ phương của d như sau:

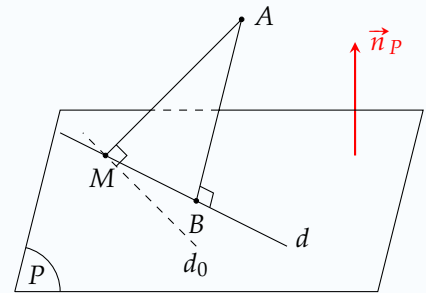
- Gọi B là hình chiếu vuông góc của A lên d . Ta có

$$d(A, d) = AB \leq AM_{\text{cố định}}.$$

Suy ra $d(A, d)_{\max} = AM$ khi B trùng M . Khi đó $d \perp AM$.

- Gọi $\vec{u}$ là véc tơ chỉ phương của d thì

$$\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{n}_P \\ \vec{u} \perp \overrightarrow{AM} \end{cases} \text{ suy ra } \vec{u} = [\vec{n}_P, \overrightarrow{AM}].$$



⚠ Lưu ý: Trường hợp $d \parallel (P)$ hoặc $d \perp d'$ ta đều có suy luận tương tự như $d \subset (P)$.

1. Ví dụ minh họa

🔵 Ví dụ 1. (Thi thử Đô Lương - Nghệ An 2021). Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1; 1; 1)$, $A(2; 3; 0)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong (P) đi qua điểm M và cách A một khoảng lớn nhất.

A. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+1}{5}$.

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-5}$.

B. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-1}$.

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AM} = (-1; -2; 1)$, $\vec{n}_P = (1; 1; 1)$. Gọi $\vec{u}$ là véc tơ chỉ phương của d .

Theo kết quả của **Bài toán 1** thì $d(A, d)_{\max}$ khi $d \perp AM$. Khi đó $\vec{u} = [\vec{n}_P, \overrightarrow{AM}] = (3; -2; -1)$.

d qua $M(1; 1; 1)$ và nhận $\vec{u} = (3; -2; -1)$ nên có phương trình $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-1}$.

Chọn đáp án **(B)**

2. Bài tập tương tự

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(1; 1; -1)$, nằm trong mặt phẳng $(P): 2x - y - z = 0$ và cách $B(0; 2; 1)$ một khoảng lớn nhất là

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{1}$.

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{1}$.

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-1}$.

D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-2}$.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(1;0;2)$, song song với mặt phẳng $(P): 2x - y + z + 1 = 0$ và cách gốc tọa độ O một khoảng cách lớn nhất.

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{3}$.

B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-3}$.

C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-1}$.

D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{1}$.

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng d đi qua gốc tọa độ O , vuông góc với đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-2}$ và cách điểm $M(2;1;1)$ khoảng lớn nhất là

A. $\frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$.

B. $\frac{x}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{2}$.

C. $\frac{x}{1} = \frac{y}{-6} = \frac{z}{4}$.

D. $\frac{x}{1} = \frac{y}{6} = \frac{z}{4}$.

BÀI TOÁN 2

Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) và đi qua M sao cho khoảng cách từ A đến d nhỏ nhất

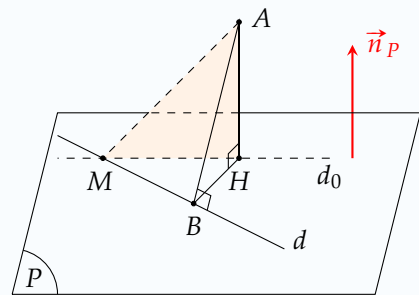
Cho điểm A , mặt phẳng (P) và điểm $M \in (P)$ (AM không vuông góc với (P)). Gọi d là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) và đi qua M sao cho khoảng cách từ A đến d nhỏ nhất. Ta lập luận để tìm véc tơ chỉ phương của d như sau:

- Gọi B, H lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên d và (P) . Ta có

$$d(A, d) = AB \geq AH_{\text{cố định}}.$$

Suy ra $d(A, d)_{\min} = AH$ khi B trùng H . Khi đó d qua hai điểm M và H .

- Ta xác định tọa độ điểm H (Xem lại bài toán tìm hình chiếu của điểm lên mặt).
- Gọi $\vec{u}$ là véc tơ chỉ phương của d thì $\vec{u} = \overrightarrow{MH}$.



Lưu ý: $d(A, d)_{\min}$ khi mặt phẳng chứa A và d ($mp(AMH)$) vuông góc với (P) nên ta có thể tìm véc tơ chỉ phương $\vec{u}$ của d như sau:

- Tính $\vec{m} = [\overrightarrow{AM}, \vec{n}_P]$ là pháp tuyến của mặt phẳng (AMH) .
- Do $\vec{u} \perp \vec{m}, \vec{u} \perp \vec{n}_P$ nên $\vec{u} = [\vec{m}, \vec{n}_P]$.

1. Ví dụ minh họa

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng d đi qua gốc tọa độ O , nằm trong mặt phẳng $(P): 2x - y + z = 0$ và cách điểm $M(1;2;1)$ một khoảng cách nhỏ nhất.

A. $d: \frac{x}{4} = \frac{y}{13} = \frac{z}{-5}$.

B. $d: \frac{x}{4} = \frac{y}{-12} = \frac{z}{-5}$.

C. $d: \frac{x}{4} = \frac{y}{13} = \frac{z}{5}$.

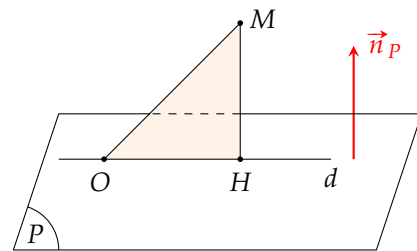
D. $d: \frac{x}{4} = \frac{y}{-12} = \frac{z}{5}$.

Lời giải.

Gọi $\vec{u}$ là véc tơ chỉ phương của d .

Theo kết quả của **Bài toán 2** thì $d(M, d)_{\min}$ khi mặt phẳng chứa M và d ((MOH)) vuông góc với (P) nên ta có thể tìm $\vec{u}$ như sau:

- Tính $\vec{m} = [\vec{OM}, \vec{n}_P] = (3; 1; -5)$ là pháp tuyến của mặt phẳng $mp(OMH)$.
- Do $\vec{u} \perp \vec{n}_P, \vec{n} \perp \vec{m}$ nên $\vec{u} = [\vec{n}_P, \vec{m}] = (4; 13; 5)$.



d đi qua O và nhận $\vec{u}$ làm véc tơ chỉ phương nên có phương trình là $\frac{x}{4} = \frac{y}{13} = \frac{z}{5}$.

⚠ Có thể tìm tọa độ hình chiếu vuông góc H của M lên (P) . Khi đó $\vec{u} = \vec{OH}$.

Chọn đáp án **C**

❶ Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(-2; -2; 1)$, $A(1; 2; -3)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{-1}$. Tìm véc-tơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng d đi qua M vuông góc với đường thẳng Δ đồng thời cách A một khoảng bé nhất.

- A.** $\vec{u}(1; 0; 2)$. **B.** $\vec{u}(2; 1; 6)$. **C.** $\vec{u}(-1; 0; 2)$. **D.** $\vec{u}(2; 2; -1)$.

Lời giải.

⚠ Nhận xét: Đường thẳng d đi qua M vuông góc với đường thẳng Δ nên d nằm trong mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 9 = 0$. Khi đó bài toán trở thành "Viết phương trình đường thẳng d qua điểm M , nằm trong (P) và cách A một khoảng bé nhất". Đây là dạng đã xét ở **Bài toán 2**.

Ta tìm $\vec{u}$ như sau:

⚙ Cách 1: Tìm hình chiếu H của A lên (P) :

$$\text{Phương trình AH: } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 - t \end{cases}$$

Tọa độ $H(1 + 2t; 2 + 2t; -3 - t)$ thỏa

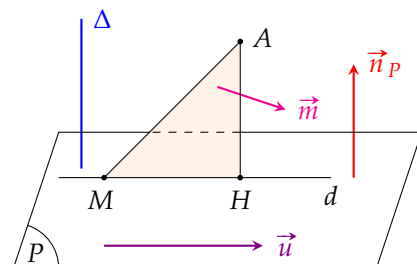
$$2(1 + 2t) + 2(2 + 2t) - (-3 - t) + 9 = 0 \Leftrightarrow t = -2.$$

Với $t = 2$, ta được $H(-3; -2; -1) \Rightarrow \vec{u} = \vec{HM} = (1; 0; 2)$.

⚙ Cách 2: Sử dụng tích có hướng:

- Tính $\vec{m} = [\vec{AM}, \vec{n}_P] = (-4; 5; 2)$.
- Tính $\vec{u} = [\vec{n}_P, \vec{m}] = (9; 0; 18)$.

Chọn $\vec{u}_1 = \frac{1}{9}\vec{u} = (1; 0; 2)$ làm véc tơ chỉ phương cho d .



Chọn đáp án **A**

2. Bài tập tương tự

Bài 4. (Thi thử THPT Chuyên Sơn La lần 2, 2019). Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3; 0; 1)$, $B(1; -1; 3)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 5 = 0$. Đường thẳng d đi qua A , song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến đường thẳng d là nhỏ nhất. Đường thẳng

d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; b; c)$ khi đó $\frac{b}{c}$ bằng

A. $\frac{b}{c} = -\frac{3}{2}$.

B. $\frac{b}{c} = 11$.

C. $\frac{b}{c} = -\frac{11}{2}$.

D. $\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$.

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{-1}$ và hai điểm $A(-2; -2; 1)$, $B(1; 2; -3)$. Tìm véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d đi qua A vuông góc với đường thẳng Δ đồng thời cách điểm B một khoảng cách bé nhất.

A. $\vec{u} = (2; 1; 6)$.

B. $\vec{u} = (1; 0; 2)$.

C. $\vec{u} = (25; -29; -6)$.

D. $\vec{u} = (2; 2; -1)$.

BÀI TOÁN
3

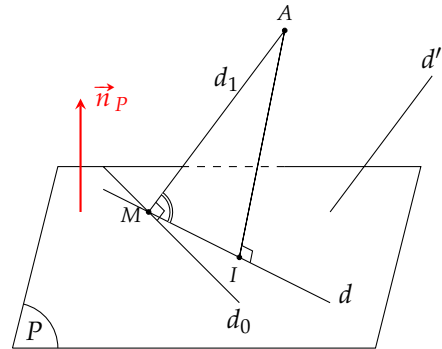
Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) , đi qua M và tạo với d' một góc lớn nhất

Cho mặt phẳng (P) và điểm $M \in (P)$; d' là một đường thẳng cắt nhưng không vuông với (P) . Trường hợp d tạo với d' một góc lớn nhất. Ta lập luận như sau:

Qua M , dựng d_1 song song với d' .

- Gọi $\varphi = (d', d)$, suy ra $\varphi = (d_1, d) = \widehat{AMI}$. Ta có $\varphi_{\max} = 90^\circ$ khi d trùng d_0 hay d chính là đường thẳng qua M và vuông góc với d_1 .
- Gọi $\vec{u}$ là véc-tơ chỉ phương của d thì

$$\vec{u} = [\vec{n}_P, \vec{u}_{d'}].$$



1. Ví dụ minh họa

Ví dụ 4. Trong không gian $Oxyz$, gọi d là đường thẳng đi qua điểm $M(1; -1; 2)$, nằm trong $(P): 2x - y - z - 1 = 0$, đồng thời tạo với đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$ một góc lớn nhất. Phương trình đường thẳng d là

A. $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z+2}{7}$.

B. $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{3}$.

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{-7}$.

D. $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{7}$.

Lời giải.

Ta có

$\vec{u}_\Delta = (1; -2; 2)$ là véc-tơ chỉ phương của Δ ; $\vec{n}_P = (2; -1; -1)$ là véc-tơ pháp tuyến của (P)

Theo kết quả của **Bài toán 3** thì d là đường thẳng qua $M(1; -1; 2)$ và có véc-tơ chỉ phương

$$\vec{u} = [\vec{u}_\Delta, \vec{n}_P] = (4; 5; 3)$$

nên có phương trình $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{3}$.

Chọn đáp án **(B)**



2. Bài tập tương tự

Bài 6. Cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và đường thẳng $d': \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$. Phương trình đường thẳng d nằm trong (P) , cắt d' và tạo với d' một góc lớn nhất là

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-5}$.

B. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-1}$.

C. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+1}{5}$.

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+4}{1} = \frac{z+5}{1}$.

Bài 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -2 - t \end{cases}$ và $d_2: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{2}$. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $M(-1; 0; -1)$ cắt đường thẳng d_1 và tạo với đường thẳng d_2 một góc lớn nhất. Phương trình đường thẳng d là

A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$.

B. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2}$.

C. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

D. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$.

BÀI TOÁN 4

Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) , đi qua M và tạo với d' một góc nhỏ nhất

Cho mặt phẳng (P) và điểm $M \in (P)$; d' là một đường thẳng cắt nhưng không vuông với (P) . Trường hợp d tạo với d' một góc nhỏ nhất. Ta lập luận như sau:

Cách hình học: Qua M , dựng d_1 song song với d' . Lấy điểm A xác định thuộc d_1 .

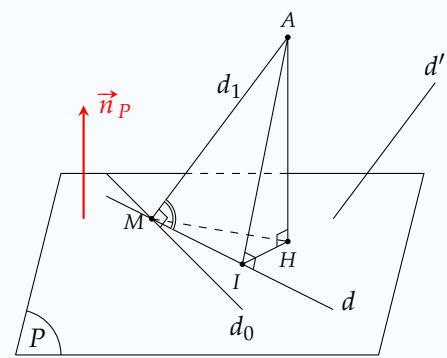
- Gọi H và I lần lượt là hình chiếu của A lên (P) và d . Ta có AM và AH cố định.

- Gọi $\varphi = (d', d)$, suy ra $\varphi = (d_1, d) = \widehat{AMI}$ và

$$\sin \varphi = \frac{AI}{AM} \geq \frac{AH}{AM} \quad (\text{cố định}).$$

Suy ra $\varphi_{\min}$ khi I trùng với H . Khi đó d là đường thẳng qua hai điểm M và H .

- Ta xác định tọa độ điểm H (Xem lại bài toán tìm hình chiếu của điểm lên mặt). Khi đó véc tơ chỉ phương của d là $\vec{u} = \overrightarrow{MH}$.



Lưu ý: $\varphi_{\min}$ khi mặt phẳng chứa A và d ($mp(AMH)$) vuông góc với (P) nên ta có thể tìm véc tơ chỉ phương $\vec{u}$ của d như sau:

- Tính $\vec{m} = [\overrightarrow{AM}, \vec{n}_P] = [\vec{u}_{d'}, \vec{n}_P]$ là pháp tuyến của mặt phẳng (AMH) .

- Do $\vec{u} \perp \vec{m}$, $\vec{u} \perp \vec{n}_P$ nên $\vec{u} = [\vec{m}, \vec{n}_P]$.

Cách đại số: Gọi $\vec{u} = (a; b; c)$, với $\vec{u} \neq \vec{0}$ là véc-tơ chỉ phương của d .

- $\vec{u} \cdot \vec{n}_P = 0$. Từ đây ta rút được c theo a, b .
- Gọi φ là góc giữa d và d' . Ta có

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{u}_{d'}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u}_{d'}|} = f(t), \text{ với } t = \frac{a}{b} \text{ và } b \neq 0.$$

- Nhận xét $\varphi_{\min}$ khi $f(t)_{\max}$. Khảo sát $[f(t)]^2$, ta suy ra $f(t)_{\max}$ khi $t = \frac{a}{b} = t_0$. Từ đây, ta chọn được a, b và tính được c .

1. Ví dụ minh họa

❶ Ví dụ 5. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng d đi qua $M(1; -3; 0)$, nằm trong $(P): 2x + y - z + 1 = 0$ và tạo với $d': \frac{x}{2} = \frac{y-1}{7} = \frac{z+1}{-1}$ một góc nhỏ nhất.

A. $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{-1}$.

B. $d: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+3}{5} = \frac{z}{-1}$.

C. $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-1}$.

D. $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{7} = \frac{z}{-1}$.

Lời giải.

Ta có thể chọn một trong ba cách sau đây để tìm véc tơ chỉ phương của đường thẳng d .

⚙ **Cách 1:** Qua điểm M , ta dựng d_1 song song d' . Suy ra phương trình d_1 là

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{7} = \frac{z}{-1}.$$

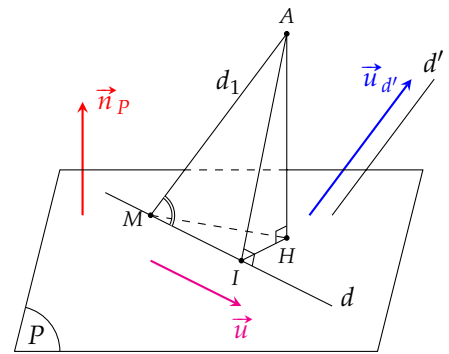
Chọn $A(3; 4; -1) \in d_1$. Gọi H, I lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên (P) và d .

- Ta có $(d, d') = (d, d_1) = \widehat{AMI}$ và

$$\sin \widehat{AMI} = \frac{AI}{AM} \geq \frac{AH}{AM} \quad (\text{cố định}).$$

Suy ra $\widehat{AMI}_{\min}$ khi I trùng với H . Khi đó d là đường thẳng qua hai điểm M và H .

- Với H là hình chiếu vuông góc của A lên (P) thì $H(-1; 2; 1)$.
- Đường thẳng d nhận $\vec{MH} = (-2; 5; 1)$ làm véc tơ chỉ phương.



⚙ **Cách 2:** Sử dụng tích có hướng.

Ta có $\vec{u}_{d'} = (2; 7; -1)$, $\vec{n}_P = (2; 1; -1)$ là véc tơ chỉ phương của d' và pháp tuyến của (P) .

- Tính $\vec{m} = [\vec{u}_{d'}, \vec{n}_P] = -6 \cdot (1; 0; 2) \Rightarrow \vec{m}_1 = (1; 0; 2)$ là pháp tuyến của mặt phẳng (AMH) .
- Do $\vec{u} \perp \vec{m}$, $\vec{u} \perp \vec{n}_P$ nên $\vec{u} = [\vec{m}_1, \vec{n}_P] = (-2; 5; 1)$.

Cách 3: Phương pháp khảo sát hàm.

Gọi $\vec{u} = (a; b; c)$ là véc tơ chỉ phương của d . Ta có

- $\vec{u} \cdot \vec{n}_P = 0 \Leftrightarrow 2a + b - c = 0 \Leftrightarrow c = 2a + b$.
- Gọi φ là góc giữa d và d' thì

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{u}_{d'}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u}_{d'}|} = \frac{|2a + 7b - c|}{\sqrt{54}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|6b|}{\sqrt{54}\sqrt{5a^2 + 4ab + 2b^2}}$$

Nhận xét $\varphi_{\min}$ khi $\cos \varphi_{\max}$.

Trường hợp 1: Nếu $b = 0$ thì $\cos \varphi = 0$.

Trường hợp 2: Nếu $b \neq 0$ thì

$$\cos \varphi = \frac{6}{\sqrt{54}\sqrt{5t^2 + 4t + 2}} \text{ với } t = \frac{a}{b} \text{ và } b \neq 0.$$

$\cos \varphi_{\max}$ khi $f(t) = 5t^2 + 4t + 2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow t = -\frac{2}{5}$.

So sánh hai trường hợp thì $\cos \varphi_{\max}$ ở trường hợp 2.

Với $t = -\frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = -\frac{2}{5}$. Chọn $a = -2$ và $b = 5$, ta tính $c = 2a + b = 1$.

Vậy $\vec{u} = (-2; 5; 1)$.

Đường thẳng d qua M và nhận $\vec{MH} = (-2; 5; 1)$ làm véc tơ chỉ phương nên có phương trình là $d: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+3}{5} = \frac{z}{1}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

2. Bài tập tương tự

Bài 8. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$.

Phương trình đường thẳng nằm trong (P) , cắt d và tạo với d một góc nhỏ nhất là

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-5}$.

B. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-1}$.

C. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+1}{5}$.

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+4}{1} = \frac{z+5}{1}$.

Bài 9. Trong không gian $Oxyz$, cho $d: \frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+2}{3}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 1 = 0$. Đường thẳng Δ đi qua điểm $E(-2; 1; -2)$, song song với (P) , đồng thời tạo với d một góc bé nhất. Biết Δ có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (m; n; 1)$. Tính $m^2 - n^2$.

A. -5.

B. -4.

C. 4.

D. 3.

Bài 10. Trong không gian $Oxyz$, gọi d là đường thẳng đi qua $A(-1; 0; -1)$, cắt $\Delta_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-1}$ và tạo với $\Delta_2: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{2}$ một góc nhỏ nhất. Phương trình đường thẳng d là

A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

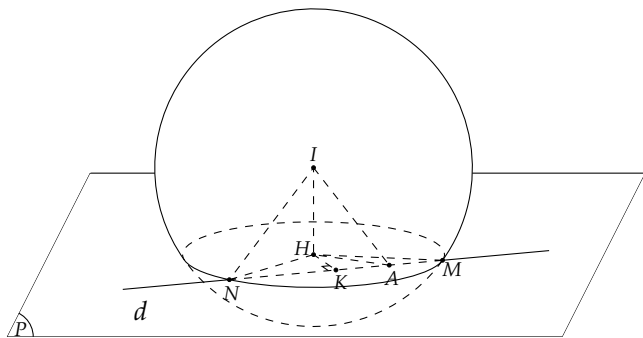
B. $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{-2}$.

C. $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{-5} = \frac{z+1}{-2}$.

D. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$.

Cho mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) cắt nhau theo một đường tròn giao tuyến $(\mathcal{C})$ và điểm A nằm trong hình tròn $(\mathcal{C})$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A và cắt $(\mathcal{C})$ tại hai điểm M, N thỏa mãn độ dài MN ngắn nhất.

Gọi I là tâm của mặt cầu (S) ; H là hình chiếu vuông góc của I lên (P) và K là hình chiếu vuông góc của H lên d .



Chú ý

Nếu đề bài yêu cầu $MN_{\max}$ thì đường thẳng d qua A và H . Khi đó

$$MN_{\max} = 2r$$

với r là bán kính đường tròn giao tuyến.

- Ta có K là trung điểm của đoạn MN . Suy ra $MN = 2KN = 2\sqrt{HN^2 - HK^2}$. Do $HN = r$ là bán kính đường tròn giao tuyến (cố định) nên $MN_{\min}$ khi $HK_{\max}$.
- Ta có $HK \leq HA_{\text{cố định}}$ nên $HK_{\max} = HA$ khi K trùng A . Lúc đó $d \perp HA \Rightarrow d \perp IA$.
- Gọi $\vec{u}$ là véc tơ chỉ phương của d . Do $\vec{u} \perp \vec{n}_P$ và $\vec{u} \perp \vec{IA}$. Vậy véc tơ $\vec{u} = [\vec{n}_P, \vec{IA}]$.

1. Ví dụ minh họa

❶ Ví dụ 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 5 = 0$, mặt phẳng $(P): x - y + 2z - 3 = 0$ và điểm $A(0; 1; 2)$. Gọi d là đường thẳng đi qua A , nằm trong mặt phẳng (P) và cắt mặt cầu (S) theo một dây cung có độ dài nhỏ nhất. Hỏi d đi qua điểm nào sau đây ?

- A. $Q(3; 2; 1)$. B. $M(5; 2; 0)$. C. $P(0; 3; 3)$. D. $N(1; 0; 1)$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 3)$ và bán kính $R = \sqrt{19}$.

Kiểm tra các giả thiết (P) cắt (S) , A nằm trong (S) đều thỏa mãn. Theo kết quả của **Bài toán 5** thì d là đường thẳng nằm trong (P) đồng thời vuông góc với IA .

Ta có $\vec{n}_P = (1; -1; 2)$ là pháp tuyến của (P) ; $\vec{IA} = (-1; 3; -1)$.

Gọi $\vec{u}$ là véc tơ chỉ phương của d thì

$$\vec{u} = [\vec{n}_P, \vec{IA}] = (5; 1; -2).$$

Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(0; 1; 2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta = (5; 1; -2)$ là

$$\begin{cases} x = 5t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - 2t. \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Ta thấy điểm M thuộc đường thẳng d , ứng với $t = 1$.

Chọn đáp án **(B)**



2. Bài tập tương tự

Bài 11. (Đề tham khảo BGD-2019). Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2;1;3)$, mặt phẳng $(P) : 2x + 2y - z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S) : (x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 5)^2 = 36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E , nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình của Δ là

- A. $\begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 2 + 9t \\ y = 1 + 9t \\ z = 3 + 8t \end{cases}$.

Bài 12. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;1)$ và mặt phẳng $(\alpha) : x + y + z - 4 = 0$ và mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 8z + 18 = 0$. Phương trình đường thẳng Δ đi qua M , nằm trong mặt phẳng (α) và cắt mặt cầu (S) theo một đoạn thẳng có độ dài nhỏ nhất là

- A. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-1}$. B. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1}$.
C. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}$. D. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1}$.

Bài 13. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng (α) có phương trình $2x - 2y + z + 15 = 0$ và mặt cầu $(S) : (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 5)^2 = 100$. Đường thẳng Δ qua A , nằm trên mặt phẳng (α) và cắt (S) tại M, N . Để độ dài MN lớn nhất thì phương trình đường thẳng Δ là

- A. $\frac{x+3}{16} = \frac{y-3}{11} = \frac{z+3}{-10}$. B. $\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 3 \\ z = -3 + 8t \end{cases}$.
C. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{3}$. D. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+3}{6}$.

Phần 2

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TƯƠNG TỰ CỦA TỪNG CHỦ ĐỀ

A. ĐÁP ÁN BÀI TẬP TƯƠNG TỰ CỦA TỪNG CHỦ ĐỀ

Chủ đề 1

1. D	2. B	3. B	4. B	5. C	6. C	7. D	8. B	9. A	10. A
11. B	12. C	13. B	14. B	15. B	16. C	17. B	18. D	19. C	20. D
21. B	22. A								

Chủ đề 2

1. A	2. C	3. A	4. C	5. B	6. B	7. B	8. A	9. B	10. D
11. C	12. D	13. C	14. A	15. B	16. A	17. D	18. D	19. A	20. B

Chủ đề 3

1. B	2. C	3. C	4. C	5. B	6. B	7. B	8. A	9. B	10. A
11. B	12. D	13. D							

B. LỜI GIẢI CHI TIẾT BÀI TẬP TƯƠNG TỰ CỦA TỪNG CHỦ ĐỀ

Link tải và xem trực tiếp:

https://drive.google.com/drive/folders/1ZpJklJxml_ihnvPFe07rihcEYlJfR8hB?usp=sharing

Mục lục

Phần 2.	Hướng dẫn giải bài tập tương tự của từng Chủ đề	1
	Chủ đề 1. Tìm điểm thỏa điều kiện cực trị	1
	Chủ đề 2. Lập phương trình mặt phẳng	12
	Chủ đề 3. Lập phương trình đường thẳng	21



Phần 2

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TƯƠNG TỰ CỦA TỪNG CHỦ ĐỀ

Chủ đề



TÌM ĐIỂM THỎA ĐIỀU KIỆN CỰC TRỊ

🔵 **Bài 1.** Tìm hình chiếu vuông góc của điểm $M(1; 1; 0)$ trên mặt phẳng $(P): x + y + z - 5 = 0$.

A. $(2; 0; 1)$.

B. $(1; 1; 0)$.

C. $(0; 2; 1)$.

D. $(2; 2; 1)$.

Lời giải.

Gọi $H(a; b; c)$ là hình chiếu vuông góc của $M(1; 1; 0)$ trên (P) .

- Khi đó $H \in (P)$ nên $a + b + c - 5 = 0$.
- Lại có $\overrightarrow{MH} = (a - 1; b - 1; c); \vec{n} = (1; 1; 1)$.
 $\overrightarrow{MH}$ cùng phương với véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt phẳng (P) nên

$$\frac{a-1}{1} = \frac{b-1}{1} = \frac{c}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} a-1 = b-1 \\ b-1 = c \end{cases}$$

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} a+b+c-5=0 \\ a-1=b-1 \\ b-1=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases} \text{ Vậy } H(2; 2; 1).$$

Chọn đáp án **(D)**



🔵 **Bài 2.** Cho điểm $M(2; 1; 0)$. Gọi $H(a; b; c)$ là điểm thuộc $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ sao cho MH có độ dài nhỏ nhất. Tính $T = a^2 + b^2 + c^2$.

A. $T = 21$.

B. $T = 6$.

C. $T = \sqrt{5}$.

D. $T = 12$.

Lời giải.

Phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -t \end{cases}$

Lấy $H \in d \Rightarrow H(1 + 2t; -1 + t; -t)$ và $\overrightarrow{MH} = (2t - 1; t - 2; -t)$.

MH nhỏ nhất khi và chỉ khi H là hình chiếu của M xuống d , do đó

$$\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow 2(2t - 1) + (t - 2) + t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Vậy } H\left(\frac{7}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \\ c = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow T = a^2 + b^2 + c^2 = 6.$$

Chọn đáp án **(B)**



❶ Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y - z + 3 = 0$ và hai điểm $A(1; -1; 2), B(2; 0; 1)$. Giả sử $M(x_0; y_0; z_0)$ là điểm thuộc (P) sao cho $MA + MB$ có giá trị nhỏ nhất. Tính $T = 3x_0 + y_0 + z_0$.

- A.** $T = 10$. **B.** $T = 2$. **C.** $T = 5$. **D.** $T = \frac{16}{5}$.

Lời giải.

Thay tọa độ hai điểm A và B vào phương trình (P) , ta được

$$(2x_A - y_A - z_A + 3 = 0)(2x_B - y_B - z_B + 3 = 0) = 4 \cdot 6 = 24 > 0$$

nên A và B cùng phía so với (P) .

- Lấy đối xứng điểm $A(1; -1; 2)$ qua (P) ta được $A'\left(-\frac{5}{3}; \frac{1}{3}; \frac{10}{3}\right)$. Ta có đánh giá

$$MA + MB = MA' + MB \geq A'B$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi A', M, B thẳng hàng hay $M = A'B \cap (P)$.

- Phương trình $A'B$ là: $\frac{x-2}{11} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-7}$. Tọa độ M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \frac{x-2}{11} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-7} \\ 2x - y - z + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = -\frac{1}{5}; y_0 = \frac{1}{5}; z_0 = \frac{12}{5}.$$

Suy ra $T = 3x_0 + y_0 + z_0 = 2$.

Chọn đáp án **(B)**



❷ Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 0; 1), B(1; 1; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 4 = 0$. Gọi M là điểm nằm trong mặt phẳng (P) sao cho $AM + BM$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính độ dài đoạn OM .

- A.** $OM = 2\sqrt{5}$. **B.** $OM = \frac{\sqrt{86}}{4}$. **C.** $OM = 4\sqrt{86}$. **D.** $OM = \frac{\sqrt{59}}{2}$.

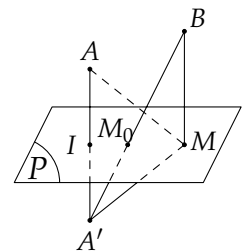
Lời giải.

Do $(0 + 0 + 1 - 4)(1 + 1 + 1 - 4) > 0$ nên A và B nằm cùng phía so với mặt phẳng (P) .

- Lấy đối xứng điểm $A(0; 0; 1)$ qua (P) ta được $A'()$. Ta có đánh giá

$$MA + MB = MA' + MB \geq A'B$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi A', M, B thẳng hàng hay $M = A'B \cap (P)$.



- Phương trình $A'B$ là: $\frac{x-2}{11} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-7}$. Tọa độ M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \frac{x-2}{11} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-7} \\ 2x - y - z + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = -\frac{1}{5}; y_0 = \frac{1}{5}; z_0 = \frac{12}{5}.$$

Suy ra $M\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right)$. Từ đó ta có $OM = \frac{\sqrt{86}}{4}$.

Chọn đáp án **(B)**

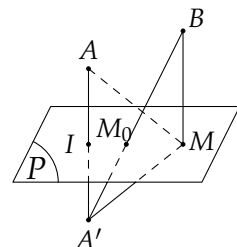
Bài 5. Trong không $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 3; 4)$, $B(3; 1; 0)$. Gọi M là điểm trên mặt phẳng (Oxz) sao cho tổng khoảng cách từ M đến A và B là ngắn nhất. Tìm hoành độ x_0 của M .

- A.** $x_0 = 4$. **B.** $x_0 = 3$. **C.** $x_0 = 2$. **D.** $x_0 = 1$.

Lời giải.

Phương trình (Oxz) là $y = 0$. Thay tọa độ điểm A, B vào phương trình mặt phẳng (Oxy) ta được $3 \cdot 1 > 0$ nên A, B nằm cùng phía với mặt phẳng Oxz .

- Gọi A' là điểm đối xứng của điểm A qua (Oxz) thì $A'(-1; -3; 4)$.
- Ta có $MA + MB = MA' + MB \geq A'B$ (định lý). Do đó $MA' + MB$ ngắn nhất khi M, A', B thẳng hàng hay M là giao điểm của $A'B$ và (Oxz)



- Đường thẳng $A'B$: $\begin{cases} \vec{u} = (4; 4; -4) \\ \text{đi qua } B(3; 1; 0) \end{cases}$ có dạng $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases}$

Vì $M = A'B \cap (Oxz) \Rightarrow y_M = 0 \Leftrightarrow t = -1$. Suy ra $M(2; 0; 1)$. Vậy $x_0 = 2$.

Chọn đáp án **(C)**

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 1 = 0$ và hai điểm $A(1; -3; 0)$, $B(5; -1; -2)$. Điểm $M(a; b; c)$ nằm trên (P) và $|MA - MB|$ lớn nhất. Giá trị tích $a \cdot b \cdot c$ bằng

- A.** 1. **B.** 12. **C.** 24. **D.** -24.

Lời giải.

Xét

$$(x_A + y_A + z_A - 1 = 0)(x_B + y_B + z_B - 1 = 0) > 0$$

nên A, B nằm về hai phía của mặt phẳng (P) .

Gọi B' là điểm đối xứng của B qua (P) .

- Ta có $|MA - MB| = |MA - MB'| \leq AB'$. Suy ra $|MA - MB|$ lớn nhất khi M là giao điểm của AB' và mp (P) .

- Phương trình đường thẳng BB' là $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -1 + t \\ z = -2 + t \end{cases}$. Gọi H là giao điểm của BB' và mp (P) .

Suy ra $H\left(\frac{14}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{7}{3}\right)$.

Do H là trung điểm của BB' nên $B' \left(\frac{13}{3}; -\frac{5}{3}; -\frac{8}{3} \right)$.

$\overrightarrow{AB'} = \left(\frac{10}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{8}{3} \right)$ là véc tơ chỉ phương của đường thẳng AB' .

Phương trình đường thẳng AB' là
$$\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -3 + 2t \\ z = -4t. \end{cases}$$

Tọa độ điểm $M = AB' \cap (P) \Rightarrow M(6; -1; -4)$. Suy ra $a \cdot b \cdot c = 24$.

Chọn đáp án **C**

□

❶ Bài 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $2x - 2y - z + 9 = 0$ và mặt cầu $(S): (x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 100$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất.

A. $M \left(-\frac{29}{3}; \frac{26}{3}; -\frac{7}{3} \right)$.

B. $M \left(\frac{11}{3}; \frac{14}{3}; -\frac{13}{3} \right)$.

C. $M \left(-\frac{11}{3}; \frac{14}{3}; \frac{13}{3} \right)$.

D. $M \left(\frac{29}{3}; -\frac{26}{3}; -\frac{7}{3} \right)$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(3; -2; 1)$ và bán kính $R = 10$. Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) là $d(I; (P)) = 6 < R$ nên (P) cắt (S) .

Nhận xét: Khoảng cách từ M thuộc (S) đến (P) nhỏ nhất $\Rightarrow M \in d$ với d đi qua I và vuông góc với (P) .

Đường thẳng d qua tâm $I(3; -2; 1)$ và nhận $\vec{n}_P = (2; -2; -1)$ làm véc tơ chỉ phương nên có

phương trình d :
$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 - t. \end{cases}$$

Ta có $M \in (d) \Rightarrow M(3 + 2t; -2 - 2t; 1 - t)$.

Mặt khác

$$M \in (S) \Rightarrow (3 + 2t - 3)^2 + (-2 - 2t + 2)^2 + (1 - t - 1)^2 = 100$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{10}{3} \Rightarrow M_1 \left(\frac{29}{3}; -\frac{26}{3}; -\frac{7}{3} \right) \\ t = -\frac{10}{3} \Rightarrow M_2 \left(-\frac{11}{3}; \frac{14}{3}; \frac{13}{3} \right). \end{cases}$$

Thử lại ta thấy $d(M_1, (P)) > d(M_2, (P))$ nên $M_1 \left(\frac{29}{3}; -\frac{26}{3}; -\frac{7}{3} \right)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **D**

□

❷ Bài 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 0; 1)$, $B(1; -2; 3)$ và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 1$, điểm N thuộc mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 4 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất độ dài MN .

A. 5.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải.

Gọi $M(x; y; z)$, suy ra $\overrightarrow{MA} = (x + 1; y; z - 1)$, $\overrightarrow{MB} = (x - 1; y + 2; z - 3)$.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= 1 \\ \Leftrightarrow (x+1)(x-1) + y(y+2) + (z-1)(z-3) &= 1 \\ \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 &= 4.\end{aligned}$$

Do đó $M \in (S)$ với (S) là mặt cầu tâm $I(0; -1; 2)$, bán kính $R = 2$.

Vì $d(M; (P)) = 3 > R = 2$ nên (P) không cắt mặt cầu (S) .

Khi đó $M \in (S)$ và $N \in (P)$ sao cho MN nhỏ nhất khi và chỉ khi $MN = d(I; (P)) - R = 3 - 2 = 1$.

Chọn đáp án **(B)**

Bài 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 2 = 0$ và các điểm $A(0; 1; 1)$, $B(-1; -2; -3)$, $C(1; 0; -3)$. Điểm D thuộc mặt cầu (S) . Thể tích tứ diện $ABCD$ lớn nhất bằng

A. $\frac{16}{3}$.

B. 7.

C. $\frac{8}{3}$.

D. 9.

Lời giải.

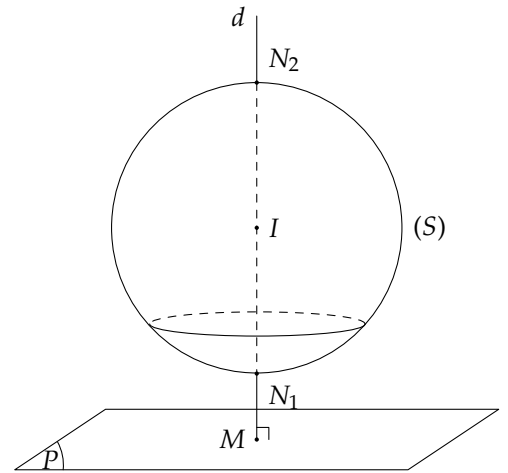
Ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot d(D, (ABC)) \cdot S_{ABC}$.

Mà S_{ABC} không đổi nên suy ra V_{ABCD} lớn nhất $\Leftrightarrow d(D, (ABC))$ lớn nhất.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; -3; -4)$, $\overrightarrow{AC} = (1; -1; -4)$. Suy ra $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (8; -8; 4) = 4(2; -2; 1)$.

Mặt phẳng $(ABC): \begin{cases} \text{qua } A(0; 1; 1) \\ \text{vtpt } \vec{n} = (2; -2; 1) \end{cases}$ nên có phương trình $2x - 2y + z + 1 = 0$.

Nhận xét $d(D, (ABC))$ lớn nhất khi D là một trong hai giao điểm của d là đường thẳng đi qua tâm I vuông góc với (ABC) với mặt cầu (S) .



Gọi $D(x; y; z) \in (S)$. Suy ra: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4$.

$$\begin{aligned}\text{Mặt khác } d(D, (ABC)) &= \frac{|2x - 2y + z + 1|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|2(x-1) - 2y + (z+1) + 2|}{3} \\ &\leq \frac{|2 \cdot (x-1) - 2 \cdot y + 1 \cdot (z+1)| + 2}{3} \leq \frac{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2} + 2}{3} \\ &= \frac{\sqrt{9} \cdot \sqrt{4} + 2}{3} = \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

Do đó $d(D, (ABC))$ đạt giá trị lớn nhất là $\frac{8}{3}$ khi $\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{1} \\ 2(x-1) - 2y + (z+1) > 0 \\ (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ y = -\frac{4}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases}$

Ta tính $S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| [\vec{AB}, \vec{AC}] \right| = 6$. Vậy V_{ABCD} đạt giá trị lớn nhất là $V_{\max} = \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{3} \cdot 6 = \frac{16}{3}$.

Chọn đáp án **(A)** □

● Bài 10. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -1)$ và mặt phẳng $(P) : x + y + 2z - 13 = 0$. Xét các mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ đi qua điểm A , tiếp xúc với mặt phẳng (P) . Tính giá trị của biểu thức $T = a^2 + 2b^2 + 3c^2$ khi (S) có bán kính nhỏ nhất.

- A.** $T = 25$. **B.** $T = 35$. **C.** $T = 30$. **D.** $T = 20$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng $(P) : x + y + 2z - 13 = 0$.

Khi đó tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2} \\ x+y+2z-13=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow H(3; 4; 3).$$

Gọi R là bán kính mặt cầu (S) .

Do (S) có tâm I , đi qua điểm A , tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm K nên ta có $2R = IA + d(I; (P)) \geq AK \geq AH$.

Suy ra bán kính R nhỏ nhất bằng $\frac{AH}{2} \Rightarrow I$ là trung điểm của $AH \Rightarrow I(2; 3; 1)$.

Khi đó $T = a^2 + 2b^2 + 3c^2 = 25$.

Chọn đáp án **(A)** □

● Bài 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d: \frac{x-3}{-4} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{1}$ và $d': \frac{x}{-6} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$. Gọi $A \in d$ và $B \in d'$ sao cho AB nhỏ nhất. Tính $x_A + x_B$.

- A.** $x_A + x_B = 0$. **B.** $x_A + x_B = -1$. **C.** $x_A + x_B = 1$. **D.** $x_A + x_B = 2$.

Lời giải.

d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_d = (-4; 1; 1)$; d' có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_{d'} = (-6; 1; 2)$.

$$\text{Gọi } \begin{cases} A(3-4a; -2+a; -1+a) \in d \\ B(-6b; 1+b; 2+2b) \in d' \end{cases} \Rightarrow \vec{AB} = (4a-6b-3; b-a+3; 2b-a+3).$$

AB nhỏ nhất khi AB là đoạn vuông góc chung của d và d' . Suy ra

$$\begin{cases} \vec{AB} \cdot \vec{u}_d = 0 \\ \vec{AB} \cdot \vec{u}_{d'} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4(4a-6b-3) + b-a+3 + 2b-a+3 = 0 \\ -6(4a-6b-3) + b-a+3 + 2(2b-a+3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$$

Ta tính được $A(-1; -1; 0)$, $B(0; 1; 2)$. Suy ra $x_A + x_B = -1$.

Chọn đáp án **(B)** □

● Bài 12. Trong không gian $Oxyz$, cho $d_1: \begin{cases} x=4+3t \\ y=1-t \\ z=-5-2t \end{cases}$ và $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{1}$ chéo

nhau. Gọi $I(a; b; c)$ là tâm của mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả d_1 và d_2 . Tính $a + b + c$.

- A.** $a + b + c = -1$. **B.** $a + b + c = 0$. **C.** $a + b + c = 2$. **D.** $a + b + c = 4$.

Lời giải.

Đường thẳng d_2 có PTTS:
$$\begin{cases} x = 2 + s \\ y = -3 + 3s \\ z = s \end{cases}$$

Gọi $M = d_1 \cap \Delta \Rightarrow M(4 + 3t; 1 - t; -5 - 2t)$ và $N = d_2 \cap \Delta \Rightarrow N(2 + s; -3 + 3s; s)$
Ta có $\overrightarrow{MN} = (-2 - 3t + s; t + 3s - 4; 2t + s + 5)$, suy ra $\overrightarrow{MN}$ là một VTCP của Δ
Vì Δ là đường vuông góc chung của 2 đường thẳng d_1 và d_2 nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2s - t - 3 = 0 \\ s - 8t - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 1 \\ t = -1. \end{cases}$$

Suy ra $M(1; 2; -3), N(3; 0; 1)$.

Tâm của (S) là trung điểm của đoạn MN , suy ra $I(2; 1; -1)$.

Chọn đáp án **C** □

❶ Bài 13. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2}$ và $d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}$ chéo nhau. Gọi M, N lần lượt là các điểm di động trên d_1, d_2 . Tính giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn MN .

- A.** $4\sqrt{2}$. **B.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải.

d_1 qua $A(2; -1; -3)$ và có VTCP $\vec{u}_1 = (1; 2; 2)$.

d_2 qua $B(1; 1; -1)$ và có VTCP $\vec{u}_2 = (1; 2; 2)$.
 $\overrightarrow{AB} = (-1; 2; 2)$.

Nhận xét : $d_1 \parallel d_2$ nên $MN_{\min} = d(d_1, d_2) = d(A, d_2) = \frac{|\overrightarrow{AB}, \vec{u}_2|}{|\vec{u}_2|} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án **B** □

❷ Bài 14. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 1; 1), B(1; 2; 1)$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{-2}$. Tìm tọa độ điểm M thuộc d sao cho diện tích tam giác MAB có giá trị nhỏ nhất.

- A.** $M(2; -3; -2)$. **B.** $M(0; -1; 2)$. **C.** $M(1; -2; 0)$. **D.** $M(-1; 0; 4)$.

Lời giải.

Gọi $M(t; -1 - t; 2 - 2t) \in d$, khi đó ta có $\overrightarrow{AM} = (t; -t - 2; -2t + 1)$, $\overrightarrow{BM} = (t - 1; -t - 3; -2t + 1)$.

Xét $[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}] = (-2t + 1; 2t - 1; -2t - 2)$.

Ta có $S_{\Delta MAB} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}]| = \frac{1}{2} \sqrt{12t^2 + 6} \geq \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Vậy $S_{\Delta MAB} \min \Leftrightarrow t = 0$. Khi đó $M(0; -1; 2)$.

Chọn đáp án **B** □

❸ Bài 15. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 1; 1), B(2; 1; -1), C(0; 4; 6)$. Điểm M di chuyển trên trục Ox . Tìm tọa độ M để $P = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ có giá trị nhỏ nhất.

- A.** $(2; 0; 0)$. **B.** $(1; 0; 0)$. **C.** $(-2; 0; 0)$. **D.** $(-1; 0; 0)$.

Lời giải.

Gọi $M(x;0;0) \in Ox, (x \in \mathbb{R})$.

Khi đó $\overrightarrow{MA} = (1-x;1;1), \overrightarrow{MB} = (2-x;1;-1), \overrightarrow{MC} = (-x;4;6)$.

Suy ra $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (3-3x;6;6)$.

Với mọi số thực x , ta có

$$\begin{aligned} P &= |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = \sqrt{(3-3x)^2 + 6^2 + 6^2} \\ &= \sqrt{9x^2 - 18x + 81} = \sqrt{9(x-1)^2 + 72} \geq \sqrt{72}. \\ P &= \sqrt{72} \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ là $\sqrt{72}$, đạt được khi và chỉ khi $x = 1$.

Do đó $M(1;0;0)$ là điểm thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án **(B)**

□

● Bài 16. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$, trong đó $a > 0, b > 0, c > 0$. Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $I(1;2;3)$ sao cho thể tích khối tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó các số a, b, c thỏa mãn đẳng thức nào sau đây?

A. $a + b + c = 12$. **B.** $a^2 + b = c - 6$. **C.** $a + b + c = 18$. **D.** $a + b - c = 0$.

Lời giải.

Ta có $(ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Do $I \in (ABC)$ nên $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1$. Khi đó

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq \sqrt[3]{\frac{6}{abc}} \Rightarrow abc \geq 162.$$

Suy ra $V = \frac{1}{6}abc \geq 27$. Dấu "=" xảy ra khi $\frac{1}{3} = \frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c} \Rightarrow a = 3, b = 6, c = 9$, tức là $a + b + c = 18$.

Chọn đáp án **(C)**

□

● Bài 17. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;2;2); B(-5;3;7)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z = 0$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc (P) sao cho $|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$ có giá trị nhỏ nhất. Tính $T = 2a + b - c$.

A. $T = -3$. **B.** $T = 4$. **C.** $T = 3$. **D.** $T = -1$.

Lời giải.

Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} &= \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IA} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -5-x = 2(-3-x) \\ 3-y = 2(2-y) \\ 7-z = 2(2-z) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = -3 \end{cases} \\ \Rightarrow I(-1;1;-3). \end{aligned}$$

Ta có $|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| = |2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IB}| = MI$.

Vậy $|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$ có giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI ngắn nhất hay M là hình chiếu vuông góc của I lên (P) .

Phương trình đường thẳng d đi qua $I(-1; 1; -3)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) nên nhận vectơ $\vec{n}_P = (1; 1; 1)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình
$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + t. \end{cases}$$

Tọa độ M thỏa hệ
$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + t \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ x = 0 \\ y = 2 \\ z = -2. \end{cases}$$

Vậy $T = 2a + b - c = 4$.

Chọn đáp án **(B)** □

🔵 Bài 18. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -3; 7)$, $B(0; 4; -3)$, $C(4; 2; 5)$. Biết điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ nằm trên mặt phẳng (Oxy) sao cho $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}|$ có giá trị nhỏ nhất. Khi đó tổng $P = x_0 + y_0 + z_0$ bằng

A. $P = 0$. **B.** $P = 6$. **C.** $P = -3$. **D.** $P = 3$.

Lời giải.

Vì $M \in (Oxy)$ nên $M(x_0; y_0; 0)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC .
Ta có $G(2; 1; 3)$.
Khi đó

$$\begin{aligned} |\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| &= |\vec{MG} + \vec{GA} + \vec{MG} + \vec{GB} + \vec{MG} + \vec{GC}| \\ &= |3\vec{MG}| = 3MG = 3\sqrt{(x_0 - 2)^2 + (y_0 - 1)^2 + 3^2} \geq 9. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x_0 = 2$ và $y_0 = 1$ hay $M(2; 1; 0)$.
Vậy $P = x_0 + y_0 + z_0 = 3$.

Chọn đáp án **(D)** □

🔵 Bài 19. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(4; 2; 2)$, $B(1; 1; -1)$, $C(2; -2; -2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (Oyz) sao cho $|\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}|$ nhỏ nhất.

A. $M(2; 3; 1)$. **B.** $M(0; -3; 1)$. **C.** $M(0; 3; 1)$. **D.** $M(0; 1; 2)$.

Lời giải.

Gọi $G(x_G; y_G; z_G)$ là điểm sao cho $\vec{GA} + 2\vec{GB} - \vec{GC} = \vec{0}$. Ta có

$$\vec{GA} + 2\vec{GB} - \vec{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G - 4 + 2(x_G - 1) - (x_G - 2) = 0 \\ y_G - 2 + 2(y_G - 1) - (y_G + 2) = 0 \\ z_G - 2 + 2(z_G + 1) - (z_G + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = 2 \\ y_G = 3 \\ z_G = 1 \end{cases} \Rightarrow G(2; 3; 1).$$

Như vậy ta có $|\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}| = |\vec{MG} + \vec{GA} + 2\vec{MG} + 2\vec{GB} - \vec{MG} - \vec{GC}| = |2\vec{MG}| = 2MG$.
Do đó $|\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MG ngắn nhất.
Mà M thuộc (Oyz) nên MG ngắn nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu của G lên (Oyz)
 $\Rightarrow M(0; 3; 1)$.

Chọn đáp án **(C)** □

🔵 Bài 20. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(5; 8; -11)$, $B(3; 5; -4)$, $C(2; 1; -6)$ và mặt cầu $(S): (x - 4)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 9$. Gọi $M(x_M; y_M; z_M)$ là điểm trên (S) sao cho biểu

thức $|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của tổng $x_M + y_M$ bằng

A. 2. B. 0. C. 4. D. -2.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(4; 2; -1)$, bán kính $r = 3$.

Gọi J là điểm thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{JA} - \overrightarrow{JB} - \overrightarrow{JC} = \vec{0} \Rightarrow J(0; -2; 1), \overrightarrow{IJ} = (-4; -4; 2)$.

Ta có: $|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = |-\overrightarrow{MJ}| = MJ \Rightarrow |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ ngắn nhất khi và chỉ khi MJ ngắn nhất.

Từ giả thiết ta có điểm M thuộc mặt cầu (S) $\Rightarrow MJ$ ngắn nhất khi $\{M\} = (S) \cap IJ$.

$\Rightarrow \overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IM}$ cùng phương hay $\overrightarrow{IM} = \frac{r}{IJ} \overrightarrow{IJ} \Rightarrow \overrightarrow{IM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{IJ}$.

Gọi $M(x; y; z) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = (x - 4; y - 2; z + 1)$.

Ta có: $\begin{cases} x - 4 = -4 \\ y - 2 = -4 \\ z + 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ z = 1. \end{cases} \Rightarrow M(0; -2; 1)$. Vậy, $x_M + y_M = -2$.

Chọn đáp án **(D)**

● Bài 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ và hai điểm $A(0; -1; 3), B(1; -2; 1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho $MA^2 + 2MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(1; 0; -2)$. B. $M(-1; -1; -1)$. C. $M(3; 1; -3)$. D. $M(5; 2; -4)$.

Lời giải.

Vì $M \in \Delta$ nên $M(1 + 2t; t; -2 - t)$.

Ta có

$$\begin{aligned} MA^2 + 2MB^2 &= (2t + 1)^2 + (t + 1)^2 + (t + 5)^2 + 2[(2t)^2 + (t + 2)^2 + (t + 3)^2] \\ &= 18t^2 + 36t + 53 \\ &= 18(t + 1)^2 + 35 \geq 35, \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $MA^2 + 2MB^2$ là 35, xảy ra khi $t = -1$, khi đó $M(-1; -1; -1)$.

Chọn đáp án **(B)**

● Bài 22. Cho $A(1; -2; 1), B(5; 0; -1), C(3; 1; 2)$ và mặt phẳng (Q) : $3x + y - z + 3 = 0$. Gọi $M(a; b; c) \in (Q)$ thỏa mãn $MA^2 + MB^2 + 2MC^2$ nhỏ nhất. Tổng $a + b + 5c$ bằng

A. 9. B. 11. C. 15. D. 14.

Lời giải.

Gọi I là điểm sao cho $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow I(3; 0; 1)$.

Ta có $MA^2 + MB^2 + 2MC^2 = 4MI^2 + \text{const}$ nên $MA^2 + MB^2 + 2MC^2$ nhỏ nhất khi M là hình chiếu của điểm $I(3; 0; 1)$ lên mặt phẳng (Q) : $3x + y - z + 3 = 0$.

Toa độ hình chiếu M thỏa mãn $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = t \\ z = 1 - t \\ 3x + y - z + 3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow 9 + 9t + t - 1 + t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow M(0; -1; 2)$.

Suy ra $a + b + 5c = -1 + 2 \cdot 5 = 9$.

Chọn đáp án A



Bài 1. (Thi thử Sở Quảng Bình – 2018). Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; -1; 1)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất là

- A. $2x - y + z - 6 = 0$. B. $2x - y + z + 6 = 0$.
C. $2x + y + z - 6 = 0$. D. $2x + y - z - 6 = 0$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên mặt phẳng (P) . Khi đó, khoảng cách từ O đến mặt phẳng (P) bằng OH . Do đó, mặt phẳng (P) đi qua A và cách O một khoảng lớn nhất khi $H \equiv A$, hay $OA \perp (P)$.

Mặt phẳng (P) đi qua $A(2; -1; 1)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{OA} = (2; -1; 1)$. Phương trình mặt phẳng (P) là

$$2 \cdot (x - 2) + (-1) \cdot (y + 1) + 1 \cdot (z - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + z - 6 = 0.$$

Chọn đáp án **A**

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 1; -2)$, $B(-1; 0; 3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A sao cho khoảng cách từ B đến (P) lớn nhất.

- A. $3x - y + 2z - 1 = 0$. B. $3x + y + 5z + 3 = 0$.
C. $3x + y - 5z - 17 = 0$. D. $3x - y - 5z + 17 = 0$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của B lên mặt phẳng (P) . Khi đó tam giác ABH là tam giác vuông tại H nên $AB > BH$ nếu H không trùng A và $AB = BH$ nếu H trùng A . Vậy để khoảng cách từ B đến (P) lớn nhất thì H trùng $A \Leftrightarrow AB \perp (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P) \Rightarrow (P)$ đi qua $A(2; 1; -2)$ và nhận $\overrightarrow{AB}(-3; -1; 5)$ làm vectơ pháp tuyến. Phương trình của mặt phẳng (P) có dạng: $3x + y - 5z - 17 = 0$

Chọn đáp án **C**

Bài 3. (Thi thử TNTHPT 2021 – Sở Hưng Yên). Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ và $D(1; 2; -1)$, với a, b, c là các số thực khác 0. Biết rằng 4 điểm này đồng phẳng và khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (ABC) lớn nhất. Tính $a + b + c$.

- A. 3. B. 15. C. 2. D. 4.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm O lên mặt phẳng (ABC) . Ta có

$$d(O, (ABC)) = OH \geq OD_{\text{cố định}}$$

Suy ra $d(O, (ABC))_{\max} = OD$ khi H trùng với D . Lúc đó, (ABC) nhận $\overrightarrow{OD} = (1; 2; -1)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Mặt phẳng (ABC) qua D và nhận $\overrightarrow{OD}$ làm véc-tơ pháp tuyến nên có phương trình là $x + 2y - z - 6 = 0$.

Gọi A, B, C lần lượt là giao điểm của (ABC) với Ox, Oy, Oz . Ta tính được tọa độ $A(6; 0; 0)$,

$B(0;3;0), C(0;0;-6)$.

Từ đây, ta có $a = 6, b = 3, c = -6$. Suy ra $a + b + c = 3$.

Chọn đáp án **A**

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm M và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất, mặt phẳng (P) cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C . Tính thể tích khối chóp $O.ABC$.

A. $\frac{1372}{9}$.

B. $\frac{524}{3}$.

C. $\frac{686}{9}$.

D. $\frac{343}{9}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của O lên (P) . Khi đó $d(O; (P)) = OH$.

- Ta có tam giác OHM vuông tại H nên

$$OH \leq OM_{\text{cố định}}$$

Suy ra $OH_{\max} = OM$ khi H trùng M hay $OM \perp (P)$. Khi đó (P) nhận $\overrightarrow{OM}$ là vectơ pháp tuyến.

- Mặt phẳng (P) qua điểm M và nhận $\overrightarrow{OM} = (1;2;3)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $x + 2y + 3z - 14 = 0$

Gọi $A = (P) \cap Ox \Rightarrow A(14;0;0), B = (P) \cap Oy \Rightarrow B(0;7;0), C = (P) \cap Oz \Rightarrow C(0;0;\frac{14}{3})$.

$$\text{Vậy } V_{OABC} = \frac{OA \cdot OB \cdot OC}{6} = \frac{14 \cdot 7 \cdot \frac{14}{3}}{6} = \frac{686}{9}$$

Chọn đáp án **C**

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): (2m^2 + 3m + 1)x - (m^2 + 2m + 1)y + (1 - m)z + 2 = 0$ (m là tham số) và điểm $A(7;0;5)$. Tìm phương trình mặt phẳng (P) , biết khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất.

A. $x - 2y + 2z + 2 = 0$.

B. $3x - y + 3z + 2 = 0$.

C. $2x - 3y + 2z + 2 = 0$.

D. $2x - y - z + 2 = 0$.

Lời giải.

! Ta thử tìm điểm cố định M thuộc (P) . Khi đó $d(A, (P)) \leq AM_{\text{cố định}}$ nên

$$d(A, (P))_{\max} = AM \text{ khi } AM \perp (P).$$

Ta biến đổi (P) về dạng

$$m^2(2x - y) + m(3x - 2y - z) + x - y + z + 2 = 0$$

Phương trình này thỏa với mọi m khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x - 2y - z = 0 \\ x - y + z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}. \text{ Suy ra } M(1;2;-1) \in (P), \forall m.$$

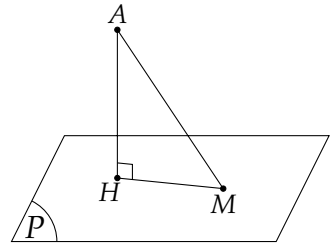
Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (P) thì $d(A, (P)) = AH$.

- Ta có đánh giá

$$AH \leq AM_{\text{cố định}}.$$

- Suy ra $AH_{\max} = AM$ khi H trùng với M hay $AM \perp (P)$.
Khi đó $\overrightarrow{AM} = (-6; 2; -6)$ là véc-tơ pháp tuyến của (P) .

Mặt phẳng (P) qua $M(3; 1; -1)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{AM} = (-6; 2; -6) = -2(3; -1; 3)$ nên có phương trình là $3x - y + 3z + 2 = 0$ ứng với giá trị $m = -2$.



Chọn đáp án **(B)**



❶ Bài 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(0; -1; 2)$ và $N(-1; 1; 3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M, N sao cho khoảng cách từ $K(0; 0; 2)$ đến (P) lớn nhất.

- A.** $3x + y + z - 1 = 0.$ **B.** $x + y - z + 3 = 0.$
C. $4x + y + 2z - 7 = 0.$ **D.** $x + 2y - z - 3 = 0.$

Lời giải.

Để khoảng cách từ K tới (P) lớn nhất thì (P) phải vuông góc với mặt phẳng đi qua K, M và N .
Ta có $\overrightarrow{MN} = (-1; 2; 1)$, $\overrightarrow{MK} = (0; 1; 0)$.

$$\Rightarrow (P): \begin{cases} \text{Qua } M(0; -1; 2) \\ \text{VTPT: } \vec{n} = [\overrightarrow{MN}, [\overrightarrow{MK}, \overrightarrow{MN}]] = (2; 2; -2). \end{cases}$$

$$\Rightarrow (P): 2(x - 0) + 2(y + 1) - 2(z - 2) = 0 \Leftrightarrow x + y - z + 3 = 0.$$

Chọn đáp án **(B)**



❶ Bài 7. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3; -1; 5)$ và đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-4}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d sao cho khoảng cách từ điểm M đến (P) là lớn nhất. Biết (P) cắt các trục tọa độ lần lượt tại A, B và C . Thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng

- A.** 28. **B.** 72. **C.** 84. **D.** 24.

Lời giải.

Để khoảng cách từ M tới (P) lớn nhất thì (P) phải vuông góc với mặt phẳng đi qua d và M .

Lấy $N(3; -1; 4) \in d$ ta có $\overrightarrow{MN} = (0; 0; -1)$ và d có VTCP là $\vec{u}_d = (2; -2; 1)$.

$$\Rightarrow (P): \begin{cases} \text{Qua } N(3; -1; 4) \\ \text{VTPT: } \vec{n} = [\vec{u}_d, [\overrightarrow{BA}, \vec{u}_d]] = (2; -2; -8). \end{cases}$$

$$\Rightarrow (P): 2(x - 3) - 2(y + 1) - 8(z - 4) = 0 \Leftrightarrow x - y - 4z - 12 = 0.$$

Khi đó (P) cắt các trục tọa độ lần lượt tại $A(12; 0; 0)$, $B(0; -12; 0)$ và $C(0; 0; -3)$.

$$\text{Do đó } V_{OABC} = \frac{1}{6} \cdot OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{6} \cdot 12 \cdot 12 \cdot 6 = 72.$$

Chọn đáp án **(B)**



❶ Bài 8. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1; -2; 1)$, song song với đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ và cách gốc tọa độ O khoảng lớn nhất.

- A.** $11x - 16y + 10z - 53 = 0.$ **B.** $11x - 16y + 8z - 51 = 0.$
C. $4x - 5y + 2z - 16 = 0.$ **D.** $-7x + 5y + 4z + 13 = 0.$

Lời giải.

Mặt phẳng (P) đi qua A , đồng thời song song với đường thẳng d nên (P) chứa đường thẳng m qua A và song song với d .

Ta có VTCP của m là $\vec{u}_m = \vec{u}_d = (2; 2; 1)$ nên $m: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$.

Để khoảng cách từ O tới (P) lớn nhất thì (P) phải vuông góc với mặt phẳng đi qua O và m .

Ta có $\vec{OA} = (1; -2; 1)$ và m có VTCP là $\vec{u}_m = (2; 2; 1)$.

$\Rightarrow (P): \begin{cases} \text{Qua } A(1; -2; 1) \\ \text{VTPT: } \vec{n} = [\vec{u}_m, [\vec{OA}, \vec{u}_m]] = (11; -16; 10). \end{cases}$

$\Rightarrow (P): 11(x-1) - 16(y+2) + 10(z-1) = 0 \Leftrightarrow 11x - 16y + 10z - 53 = 0$.

Chọn đáp án **(A)**



❏ Bài 9. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3; 0; 2)$ và mặt phẳng $(Q): 2x - y + z - 1 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua gốc O , vuông góc với (Q) đồng thời cách điểm M một khoảng lớn nhất.

A. $3x + 4y - 2z = 0$.

B. $x + 4y + 2z = 0$.

C. $3x - 2y + z = 0$.

D. $x + 3y + z = 0$.

Lời giải.

Do (P) qua O và vuông với (Q) nên (P) chứa đường thẳng d cố định, với d qua O và có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_d = \vec{n}_Q = (2; -1; 1)$.

Khi $d(M, (P))_{\max}$ thì (P) vuông góc với mặt phẳng chứa M và d . Ta xác định véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ của (P) như sau:

- Tính

$$\vec{m} = [\vec{OM}, \vec{u}_d] = (2; 1; -3)$$

là pháp tuyến của mặt phẳng chứa M và d .

- Do $\vec{n} \perp \vec{u}_d$, $\vec{n} \perp \vec{m}$ nên $\vec{n} = [\vec{m}, \vec{u}_d] = (-2; -8; -4)$ là véc tơ pháp tuyến của (P) .

Có thể chọn $\vec{n}_1 = (1; 4; 2)$ làm véc tơ pháp tuyến cho (P) . Khi đó phương trình của mặt phẳng (P) là $x + 4y + 2z = 0$.

Chọn đáp án **(B)**



❏ Bài 10. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2; 4; 1)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+7}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A , song song với đường thẳng Δ và khoảng cách từ đường thẳng Δ tới mặt phẳng (P) lớn nhất. Tìm phương trình (P) .

A. $2x + y - z + 1 = 0$.

B. $x - 2y - 3z + 13 = 0$.

C. $x - y + z + 5 = 0$.

D. $2x + y - 3z + 3 = 0$.

Lời giải.

Gọi $\vec{n}$ là véc tơ pháp tuyến của (P) .

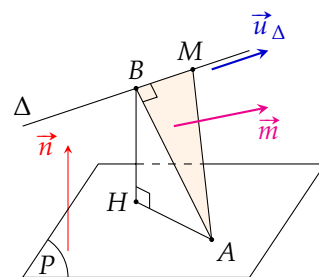


- Ta có Δ qua điểm $M(0; 4; -7)$ và có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_\Delta = (1; 1; 1)$. Tính

$$\vec{m} = [\vec{AM}, \vec{u}_\Delta] = (8; -10; 2)$$

là pháp tuyến của mặt phẳng chứa Δ và A .

- Do $\vec{n} \perp \vec{u}_\Delta$, $\vec{n} \perp \vec{m}$ nên $\vec{n} = [\vec{m}, \vec{u}_\Delta] = (-12; -6; 18)$ là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .



Ta chọn $\vec{n}_1 = (2; 1; -3)$ làm véc tơ pháp tuyến cho (P) .

(P) qua $A(-2; 4; 1)$ và nhận $\vec{n}_1 = (2; 1; -3)$ làm véc tơ pháp tuyến nên có phương trình là $2x + y - 3z + 3 = 0$.

Chọn đáp án **D**

□

Bài 11. (Thi thử, Sở GD và ĐT - Vĩnh Phúc, 2019). Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(10; 2; -1)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A , song song với đường thẳng d sao cho khoảng cách giữa d và (P) lớn nhất. Khoảng cách từ điểm $M(-1; 2; 3)$ đến mặt phẳng (P) bằng

- A. $\frac{76\sqrt{790}}{790}$. B. $\frac{3\sqrt{29}}{29}$. C. $\frac{97\sqrt{3}}{15}$. D. $\frac{2\sqrt{13}}{13}$.

Lời giải.

Gọi $A'(1+2t; t; 1+3t)$ là hình chiếu của A lên d , suy ra $\vec{AA'} = (2t-9; t-2; 3t+2)$.

Vì $AA' \perp d$ nên $\vec{AA'} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow 2(2t-9) + (t-2) + 3(3t+2) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow \vec{AA'} = (-7; -1; 5)$. Ta có $d(d, (P)) = d(A', (P)) \leq AA'$.

Do đó khoảng cách giữa d và (P) lớn nhất khi $AA' \perp (P)$, hay (P) nhận véc-tơ $\vec{AA'} = (-7; -1; 5)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (P) : $-7(x-10) - (y-2) + 5(z+1) = 0 \Leftrightarrow -7x - y + 5z + 77 = 0$.

Khoảng cách từ M đến (P) là $d(M, (P)) = \frac{|7-2+15+77|}{\sqrt{(-7)^2 + (-1)^2 + 5^2}} = \frac{97\sqrt{3}}{15}$.

Chọn đáp án **C**

□

Bài 12. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(P): x+2y-z+5=0$. Phương trình mặt phẳng (Q) chứa d và tạo với (P) một góc nhỏ nhất là

- A. $y+z-3=0$. B. $2x+y-12=0$. C. $-4x+z-1=0$. D. $y-z+4=0$.

Lời giải.

Cách 1

d có VTCP là $u_d = (2; 1; 1)$. (P) có VTCP là $n_p = (1; 2; -1)$.

Giả sử VTPT của (Q) là $n_Q = (A; B; C)$, ($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$)

Do $d \subset (Q)$ nên $u_d \cdot n_Q = 0 \Leftrightarrow 2A + B + C = 0 \Leftrightarrow C = -2A - B$.

* Gọi α là góc giữa (Q) và (P) . Ta có $\cos \alpha = \frac{|n_Q \cdot n_p|}{|n_Q| \cdot |n_p|} = \frac{|A + 2B - C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{|A + B|}{\sqrt{5A^2 + 2B^2 + 4AB}}$

* TH1: Với $B = 0$ thì $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{10}$ * TH2: Với $B \neq 0$ đặt $t = \frac{A}{B}$ ta có $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{(t+1)^2}{5t^2 + 4t + 2}}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{(t+1)^2}{5t^2+4t+2}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $\max f(t) = \frac{1}{2}$ khi $t = 0$. Khi đó $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}$

So sánh TH1 và TH2 ta có α nhỏ nhất khi $\cos \alpha$ lớn nhất bằng $\frac{\sqrt{6}}{2}$ khi $A = 0$.

Chọn $B = 1 \Rightarrow C = -1$.

Phương trình mặt phẳng (Q) qua M và có VTPT $\vec{n}_Q = (0; 1; -1)$ là $y - z + 4 = 0$.

Cách 2.

Dùng công thức tính nhanh $\vec{n}_Q = [[\vec{n}_p, \vec{u}_d], \vec{u}_d] = (0; -9; 9)$.

Phương trình mặt phẳng (Q) qua M $(-1; -1; 3)$ và có VTPT $\vec{n}_Q = (0; -9; 9)$ là $y - z + 4 = 0$.

Chọn đáp án **(D)**

Bài 13. Trong không gian Oxyz, cho điểm $M(0; -1; 2)$ và $N(-1; 1; 3)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M, N và tạo với mặt phẳng (Q): $2x - y - 2z - 2 = 0$ góc có số đo nhỏ nhất. Tính khoảng cách từ điểm $A(1; 2; 3)$ đến (P).

A. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

B. $\frac{7\sqrt{3}}{11}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

• (P) có VTPT $\vec{n}_1 = (a; b; c)$ với $a^2 + b^2 + c^2 > 0$. Ta có $M \in (P)$ nên (P): $ax + b(y + 1) + c(z - 2) = 0$. Điểm $N \in (P)$ nên $-a + 2b + c = 0 \Leftrightarrow a = 2b + c$. (1)

• $\vec{n}_2 = (2; -1; -2)$ nên $|\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|2a - b - 2c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{5b^2 + 4bc + 2c^2}}$.

• Với $c = 0$ thì $|\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

• Với $c \neq 0$ thì $|\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{\left|\frac{b}{c}\right|}{\sqrt{5\frac{b^2}{c^2} + 4\frac{b}{c} + 2}}$.

Đặt $t = \frac{b}{c}$ ta có $\cos^2(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{t^2}{\sqrt{5t^2 + 4t + 2}} = f(t)$.

• Ta có $f'(t) = \frac{4t^2 + 4t}{5t^2 + 4t + 2}$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$	
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{5}$	

• Từ bảng biến thiên, $\cos((P), (Q))$ đạt GTLN khi $t = -1 \Leftrightarrow b = -c \Rightarrow a = -c$. Chọn $c = -1$, ta có $a = b = 1$. Ta có (P): $x + y - z + 3 = 0$. Suy ra $d(A, (P)) = \sqrt{3}$.

Chọn đáp án **(C)**

❶ Bài 14. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$. Viết phương trình của mặt phẳng (P) chứa d và tạo với đường thẳng $d': \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$ góc lớn nhất.

A. $x - 4y + z - 7 = 0$.

B. $x - 3y + z - 4 = 0$.

C. $x + 4y + z - 7 = 0$.

D. $x + 3y + z - 4 = 0$.

Lời giải.

Ta có VTCP $\vec{u}_d = (2; 1; 2)$ và $\vec{u}_{d'} = (1; 2; 1)$.

$\Rightarrow (P): \begin{cases} \text{Qua } M(1; -1; 2) \in d \\ VTPT: \vec{n} = [[\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}], \vec{u}_d] = (-3; 12; -3). \end{cases}$

$\Rightarrow (P): -3(x-1) + 12(y+1) - 3(z-2) = 0 \Leftrightarrow x - 4y + z - 7 = 0$.

Chọn đáp án **A** □

❷ Bài 15. Trong không gian $Oxyz$, cho $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-1}$ và $d': \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và tạo với d' một góc lớn nhất. Tọa độ giao điểm của (P) với trục Oy là

A. $(0; 3; 0)$.

B. $(0; -9; 0)$.

C. $(0; 9; 0)$.

D. $(0; -3; 0)$.

❸ Bài 16. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; -1; 2)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 9$. Mặt phẳng qua M cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất có phương trình là

A. $x - y + 2z - 7 = 0$.

B. $x - y + 2z - 5 = 0$.

C. $2x - y + z - 7 = 0$.

D. $x + y + 2z - 5 = 0$.

Lời giải.

Ta có, mặt cầu (S) có tâm $I(1; 0; 0)$, bán kính $R = 3$.

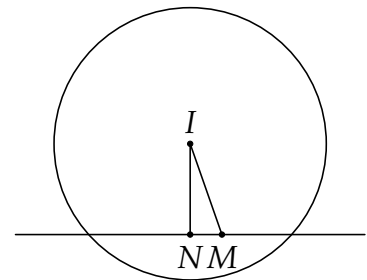
$MI = \sqrt{6}$ nên M là điểm trong của mặt cầu (S) .

Gọi (P) là mặt phẳng bất kỳ đi qua M , N là hình chiếu của I trên (P) , r là bán kính đường tròn giao tuyến của mặt cầu với mặt phẳng (P) , $d = IN$ là khoảng cách từ tâm I tới mặt phẳng (P) . Khi đó,

$r^2 = \overline{IN}^2 = R^2 - d^2 \geq R^2 - IM^2 \Rightarrow r_{\min} = R^2 - IM^2 \Rightarrow IM \perp (P)$.

Vậy $\vec{IM} = (1; -1; 2)$ là véc-tơ pháp tuyến của (P) . Phương trình mặt

phẳng cần tìm là $x - y + 2z - 7 = 0$.



Chọn đáp án **A** □

❹ Bài 17. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ và điểm $A(0; 0; 2)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là hình tròn (C) có diện tích nhỏ nhất. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $(P): 3x + 2y + 2z - 4 = 0$.

B. $(P): x - 2y + 3z - 6 = 0$.

C. $(P): x + 2y + 3z - 6 = 0$.

D. $(P): x + 2y + z - 2 = 0$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1, 2, 3)$, bán kính $R = 3$.

Ta có $IA = \sqrt{6} < R$ nên điểm A nằm trong mặt cầu. Giả sử (P) cắt (S) theo thiết diện là hình tròn (C) có bán kính r .

Ta có: $d(I, (P)) = \sqrt{R^2 - r^2}$.

Diện tích hình tròn (C) nhỏ nhất $\Leftrightarrow r$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow d(I, (P))$ lớn nhất.

Do $d(I, (P)) \leq IA \Rightarrow d(I, (P))$ lớn nhất bằng IA . Khi đó mặt phẳng (P) đi qua A và nhận $\overrightarrow{AI} = (1; 2; 1)$ làm VTPT.

Phương trình mặt phẳng (P): $x + 2y + z - 2 = 0$.

Chọn đáp án **(D)**

❶ Bài 18. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 9$, điểm $A(0; 0; 2)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là hình tròn (C) có diện tích nhỏ nhất.

A. (P): $x - 2y + 3z - 6 = 0$.

B. (P): $x + 2y + 3z - 6 = 0$.

C. (P): $3x + 2y + 2z - 4 = 0$.

D. (P): $x + 2y + z - 2 = 0$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1, 2, 3)$, $R = 3$.

Ta có $IA < R$ nên điểm A nằm trong mặt cầu.

Ta có: $d(I, (P)) = \sqrt{R^2 - r^2}$.

Diện tích hình tròn (C) nhỏ nhất $\Leftrightarrow r$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow d(I, (P))$ lớn nhất.

Do $d(I, (P)) \leq IA \Rightarrow \max d(I, (P)) = IA$ Khi đó mặt phẳng (P) đi qua A và nhận $\overrightarrow{IA}$ làm vtpt $\Rightarrow (P): x + 2y + z - 2 = 0$.

Chọn đáp án **(D)**

❷ Bài 19. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; -2; 6)$, $B(0; 1; 0)$ và mặt cầu (S): $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$. Mặt phẳng (P): $ax + by + cz - 2 = 0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T = a + b + c$.

A. $T = 3$.

B. $T = 4$.

C. $T = 2$.

D. $T = 5$.

Lời giải.

Ta có $A, B \in (P)$ nên $b = 2$ và $a = 2 - 2c$. Phương trình (P) có dạng $(2 - 2c)x + 2y + cz - 2 = 0$. Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ và bán kính $R = 5$. Khoảng cách từ I đến (P) là

$$d = \frac{|2 - 2c + 4 + 3c - 2|}{\sqrt{(2 - 2c)^2 + 4 + c^2}} \Rightarrow d^2 = \frac{(4 + c)^2}{5c^2 - 8c + 8} = f(c).$$

$$f'(c) = -\frac{48c - 1}{(5c^2 - 8c + 8)^2}, f'(c) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ c = -4 \end{cases}. \text{ Ta có bảng biến thiên}$$

c	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$f'(c)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(c)$	$\frac{1}{5}$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
		0		5		$\frac{1}{5}$	

Để (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất thì $d < R$ và d đạt giá trị lớn nhất. Từ bảng biến thiên suy ra $\max d = \sqrt{5}$ khi $c = 1 \Rightarrow a = 0$. Vậy $T = 3$.

Chọn đáp án **(A)**

❶ Bài 20. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 12$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với mặt phẳng (Oxz) và cắt mặt cầu (S) theo đường tròn có chu vi lớn nhất. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $y - 2 = 0$. **B.** $y + 2 = 0$. **C.** $x - 2y + 1 = 0$. **D.** $y + 1 = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Oxz) nên có VTPT $\vec{j} = (0; 1; 0)$.

Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 12$ theo đường tròn có chu vi lớn nhất nên mặt phẳng (P) đi qua tâm $I(1; -2; 0)$.

Phương trình mặt phẳng $(P): y + 2 = 0$.

Chọn đáp án **B**



Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(1; 1; -1)$, nằm trong mặt phẳng $(P): 2x - y - z = 0$ và cách $B(0; 2; 1)$ một khoảng lớn nhất là

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{1}$.
C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{1}$.

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-1}$.
D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-2}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên d .

Ta có $d_{(B,d)} = BH \leq AB \Rightarrow d_{(B,d)\max} = AB \Leftrightarrow d \perp AB$.

Do đó đường thẳng d có VTCP là $\vec{a}_d = [\vec{n}_{(P)}, \vec{AB}] = (1; 3; -1)$.

Vậy phương trình đường thẳng d đi qua $A(1; 1; -1)$ và có VTCP $\vec{a}_d = (1; 3; -1)$ là

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-1}$$

Chọn đáp án **B**

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(1; 0; 2)$, song song với mặt phẳng $(P): 2x - y + z + 1 = 0$ và cách gốc tọa độ O một khoảng cách lớn nhất.

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{3}$.
C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-1}$.

B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-3}$.
D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{1}$.

Lời giải.

Ta có (P) có VTPT là $\vec{n}_{(P)} = (2; -1; 1)$ và $\vec{AO} = (-1; 0; -2)$.

Do đó $(d): \begin{cases} \text{Qua } A(1; 0; 2) \\ \text{VTCP: } \vec{u} = [\vec{n}_{(P)}, \vec{OA}] = (2; 3; -1). \end{cases}$

$$\Rightarrow d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-1}.$$

Chọn đáp án **C**

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng d đi qua gốc tọa độ O , vuông góc với đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-2}$ và cách điểm $M(2; 1; 1)$ khoảng lớn nhất là

A. $\frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$.

B. $\frac{x}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{2}$.

C. $\frac{x}{1} = \frac{y}{-6} = \frac{z}{4}$.

D. $\frac{x}{1} = \frac{y}{6} = \frac{z}{4}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) đi qua O và vuông góc với d_1 có phương trình là $(P): 2x - y - 2z = 0$.

Ta có $d \perp d_1$ nên $d \in (P)$, khi đó $d(M, d) \leq OM$ nên $d(M, d)$ lớn nhất khi $OM \perp d$.

Ta có $\begin{cases} \vec{u}_d \perp \vec{OM} \\ \vec{u}_d \perp \vec{n}_P \end{cases}$ nên $\vec{u}_d$ cùng phương với $[\vec{OM}, \vec{n}_P]$.

Ta có $[\overrightarrow{OM}, \vec{n}_P] = (-1; 6; 4)$ nên ta chọn $\vec{u}_d = (1; -6; 4)$.

Phương trình đường thẳng d là $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{-6} = \frac{z}{4}$.

Chọn đáp án **C**



❶ Bài 4. (Thi thử THPT Chuyên Sơn La lần 2, 2019). Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3; 0; 1)$, $B(1; -1; 3)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 5 = 0$. Đường thẳng d đi qua A , song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến đường thẳng d là nhỏ nhất. Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; b; c)$ khi đó $\frac{b}{c}$ bằng

A. $\frac{b}{c} = -\frac{3}{2}$.

B. $\frac{b}{c} = 11$.

C. $\frac{b}{c} = -\frac{11}{2}$.

D. $\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$.

Lời giải.

Thay tọa độ các điểm A và B lần lượt vào vế trái phương trình mặt phẳng (P) ta được

$VT(A) = -6 < 0$, $VT(B) = 4 > 0 \Rightarrow A, B$ nằm về hai phía của mặt phẳng (P) .

Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua A và song song với $(P) \Rightarrow d \subset (Q)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên $(Q) \Rightarrow d(B, d) \geq BH$.

Vậy khoảng cách từ B đến đường thẳng d nhỏ nhất khi d đi qua A và $H \Rightarrow H$ là hình chiếu vuông góc của B lên d .

Gọi Δ là đường thẳng đi qua B và vuông góc với (P) .

Phương trình $\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

Phương trình mặt phẳng (Q) là $x - 2y + 2z + 1 = 0$.

Có $H = \Delta \cap (Q) \Rightarrow H \in \Delta \Rightarrow H(1 + t; -1 - 2t; 3 + 2t)$.

$H \in (Q) \Rightarrow 1 + t - 2(-1 - 2t) + 2(3 + 2t) + 1 = 0 \Leftrightarrow 9t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{10}{9}$.

Suy ra $H\left(-\frac{1}{9}; \frac{11}{9}; \frac{7}{9}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = \left(\frac{26}{9}; \frac{11}{9}; -\frac{2}{9}\right) \Rightarrow \vec{u}_1 = (26; 11; -2)$

$\Rightarrow \vec{u} = \left(1; \frac{11}{26}; -\frac{2}{26}\right) \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{11}{26} \cdot \frac{26}{-2} = -\frac{11}{2}$.

Chọn đáp án **C**



❶ Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{-1}$ và hai điểm $A(-2; -2; 1)$, $B(1; 2; -3)$. Tìm véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d đi qua A vuông góc với đường thẳng Δ đồng thời cách điểm B một khoảng cách bé nhất.

A. $\vec{u} = (2; 1; 6)$.

B. $\vec{u} = (1; 0; 2)$.

C. $\vec{u} = (25; -29; -6)$.

D. $\vec{u} = (2; 2; -1)$.

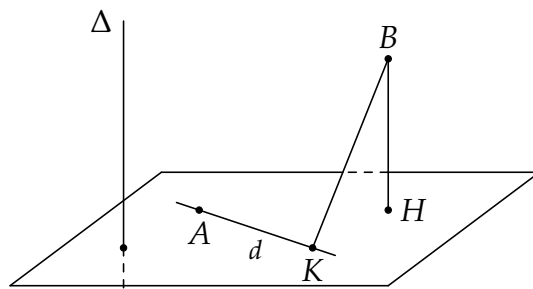
Lời giải.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với Δ .

Phương trình mặt phẳng (P) là

$$2(x+2) + 2(y+2) - (z-1) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y - z + 9 = 0.$$

Đường thẳng d đi qua A và vuông góc Δ nên d nằm trong (P) .



Gọi K, H lần lượt là hình chiếu vuông góc của B lên d và (P) .

Ta có khoảng cách từ B đến d là $BK \geq BH = d(B, (P)) = 6$.

Đẳng thức xảy ra khi d đi qua A và H .

Đường thẳng a đi qua $B(1; 2; -3)$ và vuông góc với (P) có phương trình
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 - t. \end{cases}$$

Vì $H \in a$ nên $H(1 + 2t; 2 + 2t; -3 - t)$.

Mặt khác $H \in (P)$ nên $2(1 + 2t) + 2(2 + 2t) - (-3 - t) + 9 = 0 \Leftrightarrow 9t + 18 = 0 \Leftrightarrow t = -2$.

Khi đó, $H(-3; -2; -1)$ và $\overrightarrow{AH} = (-1; 0; -2)$ là một véc-tơ chỉ phương của d .

Vậy một véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (1; 0; 2)$.

Chọn đáp án **(B)**



Bài 6. Cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và đường thẳng $d': \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$.

Phương trình đường thẳng d nằm trong (P) , cắt d' và tạo với d' một góc lớn nhất là

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-5}$.

B. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-1}$.

C. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+1}{5}$.

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+4}{1} = \frac{z+5}{1}$.

Lời giải.

Gọi $M = d' \cap (P)$. Tọa độ M là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1} \end{cases} \Rightarrow M(1; 1; 1).$$

Theo kết quả của **Bài toán 3** thì d là đường thẳng qua $M(1; 1; 1)$ và có véc-tơ chỉ phương

$$\vec{u} = [\vec{u}_{d'}, \vec{n}_P] = (3; -2; -1)$$

nên có phương trình $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-1}$.

Chọn đáp án **(B)**



Bài 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -2 - t \end{cases}$ và $d_2: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{1}$.

Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $M(-1; 0; -1)$ cắt đường thẳng d_1 và tạo với đường thẳng d_2 một góc lớn nhất. Phương trình đường thẳng d là

A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$.

B. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2}$.

C. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

D. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$.

Lời giải.

Do d qua M và cắt d_1 nên d nằm trong mặt phẳng (P) chứa M và d_1 . Suy ra

$$\vec{n}_P = [\vec{u}_1, \overrightarrow{MQ}] = (1; 0; 2)$$

với $Q(1; 2; -2) \in d_1$.

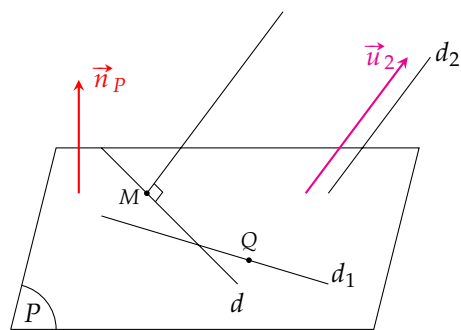
Do d_1 không vuông với d_2 nên với d là đường thẳng qua M , nằm trong (P) và vuông góc với d_2 thì d thỏa mãn yêu cầu bài toán (đảm bảo cắt d_1 và tạo với d_2 một góc lớn nhất).

Gọi $\vec{u}$ là véc tơ chỉ phương của d thì

$$\vec{u} = [\vec{u}_2, \vec{n}_P] = (4; 4; -2) = 2 \cdot (2; 2; -1).$$

Phương trình đường thẳng d là $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

Chọn đáp án **(B)**



Bài 8. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$. Phương trình đường thẳng nằm trong (P) , cắt d và tạo với d một góc nhỏ nhất là

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-5}$.

B. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-1}$.

C. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+1}{5}$.

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+4}{1} = \frac{z+5}{1}$.

Lời giải.

Giả sử Δ là đường thẳng cần tìm, Δ có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (a; b; c) \neq \vec{0}$.

$\Delta \subset (P)$ nên $\vec{u} \cdot \vec{n}_{(P)} = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0 \Leftrightarrow c = -a - b$.

Suy ra $\vec{u} = (a; b; -a - b)$.

Gọi $A = \Delta \cap d \Rightarrow A = d \cap (P)$. Khi đó, ta tìm được $A(1; 1; 1)$.

Ta có (Δ, d) nhỏ nhất khi và chỉ khi $\cos(\Delta, d)$ lớn nhất.

$$\cos(\Delta, d) = \frac{|a + 2b + a + b|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + (a+b)^2}} = \frac{|2a + 3b|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2a^2 + 2ab + 2b^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{\frac{4a^2 + 12ab + 9b^2}{2a^2 + 2ab + b^2}}.$$

Xét $b = 0 \Rightarrow \cos(\Delta, d) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Xét $b \neq 0$, chia cả tử và mẫu của phân thức dưới dấu căn cho b^2 và đặt $t = \frac{a}{b}$, ta được

$$\cos(\Delta, d) = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{\frac{4t^2 + 12t + 9}{2t^2 + 2t + 2}}.$$

Xét $f(t) = \frac{4t^2 + 12t + 9}{2t^2 + 2t + 2}$.

$$f'(t) = \frac{-16t^2 - 20t + 6}{(2t^2 + 2t + 2)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{4} \\ t = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$	
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	2	0	$\frac{14}{3}$	2	

Suy ra $\max f(t) = \frac{14}{3}$ khi $t = \frac{1}{4}$.

Khi đó, $\max \cos(\Delta, d) = \frac{\sqrt{7}}{3}$ khi $t = \frac{1}{4}$ hay $\frac{a}{b} = \frac{1}{4}$.

Chọn $a = 1, b = 4$.

Khi đó đường thẳng Δ qua điểm $A(1; 1; 1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 4; -5)$ nên có phương trình $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-5}$.

Chọn đáp án **A**.

□

Bài 9. Trong không gian $Oxyz$, cho $d: \frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+2}{3}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 1 = 0$. Đường thẳng Δ đi qua điểm $E(-2; 1; -2)$, song song với (P) , đồng thời tạo với d một góc bé nhất. Biết Δ có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (m; n; 1)$. Tính $m^2 - n^2$.

A. -5. **B.** -4. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải.

Δ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (m; n; 1)$.

(P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; -1; 2)$, d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_d = (4; -4; 3)$.

$\Delta \parallel (P) \Rightarrow 2m - n + 2 = 0 \Leftrightarrow n = 2m + 2$.

Suy ra $\vec{u} = (m; 2m + 2; 1)$.

Ta có (Δ, d) nhỏ nhất khi $\cos(\Delta, d)$ lớn nhất.

$$\cos(\Delta, d) = \frac{|4m - 4(2m + 2) + 3|}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{m^2 + (2m + 2)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{41}} \cdot \sqrt{\frac{16m^2 + 40m + 25}{5m^2 + 8m + 5}}.$$

$$\text{Xét } f(m) = \frac{16m^2 + 40m + 25}{5m^2 + 8m + 5}.$$

$$f'(m) = \frac{-72m^2 - 90m}{(5m^2 + 8m + 5)^2}; f'(m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{5}{4} \\ m = 0. \end{cases}$$

Bảng biến thiên

m	$-\infty$	$-\frac{5}{4}$	0	$+\infty$		
$f'(m)$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(m)$	$\frac{16}{5}$		0	5		$\frac{16}{5}$

Suy ra $\max f(m) = 5$ khi $m = 0$.

Suy ra $\max \cos(\Delta, d) = \frac{1}{\sqrt{41}} \cdot \sqrt{5}$ khi $m = 0$.



Từ đó, ta tìm được $n = 2$.

Vậy $m^2 - n^2 = -4$.

Chọn đáp án **(B)**



❶ Bài 10. Trong không gian $Oxyz$, gọi d là đường thẳng đi qua $A(-1;0;-1)$, cắt $\Delta_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-1}$ và tạo với $\Delta_2: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{2}$ một góc nhỏ nhất.

Phương trình đường thẳng d là

A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

B. $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{-2}$.

C. $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{-5} = \frac{z+1}{-2}$.

D. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$.

Lời giải.

Gọi $M = d \cap \Delta_1 \Rightarrow M(1+2t; 2+t; -2-t)$.

d có véc-tơ chỉ phương $\vec{a}_d = \vec{AM} = (2t+2; t+2; -1-t)$.

Δ_2 có véc-tơ chỉ phương $\vec{a}_2 = (-1; 2; 2)$.

$$\cos(d; \Delta_2) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{t^2}{6t^2 + 14t + 9}}.$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2}{6t^2 + 14t + 9}$, ta suy ra được min $f(t) = f(0) = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Do đó min $[\cos(d, \Delta_2)] = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow \vec{AM} = (2; 2; -1)$.

Vậy phương trình đường thẳng d là $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

Chọn đáp án **(A)**



❷ Bài 11. (Đề tham khảo BGD-2019). Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2;1;3)$, mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E , nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình của Δ là

A. $\begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 2 + 9t \\ y = 1 + 9t \\ z = 3 + 8t \end{cases}$

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;5)$ và bán kính $R = 6$. $IE = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6} < R \Rightarrow$ điểm E nằm trong mặt cầu (S) .

Gọi H là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P) , A và B là hai giao điểm của Δ với (S) .

Khi đó, AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow AB \perp OE$, mà $AB \perp IH$ nên $AB \perp (HIE) \Rightarrow AB \perp IE$.

Suy ra: $\vec{u}_\Delta = [\vec{n}_P; \vec{EI}] = (5; -5; 0) = 5(1; -1; 0)$.

Vậy phương trình của Δ là $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases}$

Chọn đáp án **(B)**



❸ Bài 12. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;1)$ và mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 4 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 8z + 18 = 0$. Phương trình đường thẳng Δ đi qua M , nằm trong mặt phẳng (α) và cắt mặt cầu (S) theo một đoạn thẳng có độ dài nhỏ nhất

là

A. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-1}$.
 C. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}$.

B. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1}$.
 D. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1}$.

Lời giải.

Xét mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 8z + 18 = 0$ có tâm $I(3;3;4)$ và bán kính $R = 4$.
 Ta có $IM = \sqrt{14} < R \Rightarrow$ điểm M nằm trong mặt cầu hay mặt phẳng (α) cắt mặt cầu theo giao tuyến là một đường tròn (C) , gọi H là tâm đường tròn đó.

Để dây cung cắt là nhỏ nhất thì $\Delta \perp MH$, khi đó $\vec{u}_\Delta = [\vec{MH}, \vec{n}_\alpha]$.

Đường thẳng IH đi qua tâm I và vuông góc với $(\alpha) \Rightarrow IH: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 3 + t \\ z = 4 + t \end{cases}$.

H là giao điểm của IH và $(\alpha) \Rightarrow H(1;1;2) \Rightarrow \vec{MH} = (-1;0;1) \Rightarrow \vec{u}_\Delta = (-1;2;-1)$.

Khi đó Δ đi qua M và có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1;-2;1) \Rightarrow \Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1}$.

Chọn đáp án **D**

Bài 13. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng (α) có phương trình $2x - 2y + z + 15 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 100$. Đường thẳng Δ qua A , nằm trên mặt phẳng (α) và cắt (S) tại M, N . Để độ dài MN lớn nhất thì phương trình đường thẳng Δ là

A. $\frac{x+3}{16} = \frac{y-3}{11} = \frac{z+3}{-10}$.
 C. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{3}$.

B. $\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 3 \\ z = -3 + 8t \end{cases}$.
 D. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+3}{6}$.

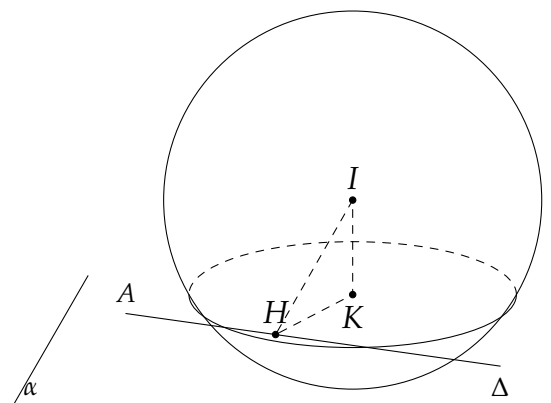
Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;5)$ bán kính $R = 10$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên Δ và mặt phẳng (α) .

$\Rightarrow IK \perp (\alpha)$ nên phương trình đường thẳng IK đi qua

I và vuông góc với mặt phẳng (α) là $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = 5 + t \end{cases}$.



Tọa độ điểm K là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = 5 + t \\ 2x - 2y + z + 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow K(-2;7;3)$.

Vì $\Delta \subset (\alpha)$ nên $IH \geq IK$. Do đó, IH nhỏ nhất khi H trùng với K .

Để MN lớn nhất thì IH phải nhỏ nhất. Khi đó, đường thẳng Δ cần tìm đi qua A và K .

Đường thẳng Δ có phương trình là $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+3}{6}$.

Chọn đáp án 

