

CHỦ ĐỀ 9: TỈ SỐ THỂ TÍCH

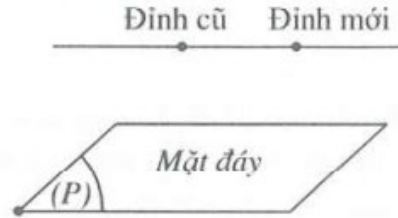
I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

Chú thích V_1 = Thể tích cũ, V_2 = Thể tích mới (dùng cho kỹ thuật chuyển đỉnh và đáy).

1. Kỹ thuật đổi đỉnh (đáy không đổi)

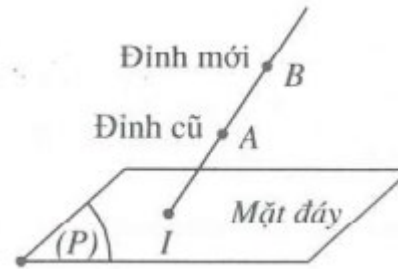
a. Song song với đáy

$$V_1 = V_2 = \frac{1}{3} Bh.$$



b. Cắt đáy

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3} \cdot d(A; (P)) \cdot S_d}{\frac{1}{3} \cdot d(B; (P)) \cdot S_d} = \frac{d(A; (P))}{d(B; (P))} = \frac{IB}{IA}.$$



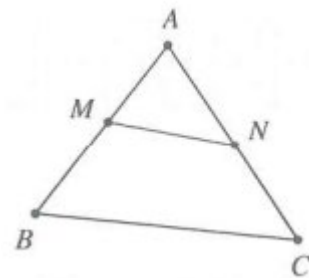
2. Kỹ thuật chuyển đáy (đường cao không đổi)

$$\boxed{\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1}{S_2}}; \text{ với } S_1 \text{ là diện tích đáy cũ; } S_2 \text{ là diện tích đáy mới}$$

Chú ý:

- Đưa hai khối đa diện về cùng một đỉnh; hai đáy mới và cũ nằm trong cùng một mặt phẳng (thường thì đáy cũ chứa đáy mới). Áp dụng công thức tính diện tích của đa giác để so sánh tỉ số giữa đáy cũ và đáy mới.
- Nếu tăng (hoặc giảm) mỗi cạnh của đa giác (tam giác, tứ giác), k lần thì diện tích đa giác sẽ tăng (hoặc giảm) k^2 lần.
- Tỉ số đa giác hay gấp là tỉ số diện tích của hai tam giác.

$$\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AM \cdot AN \cdot \sin A}{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC}.$$

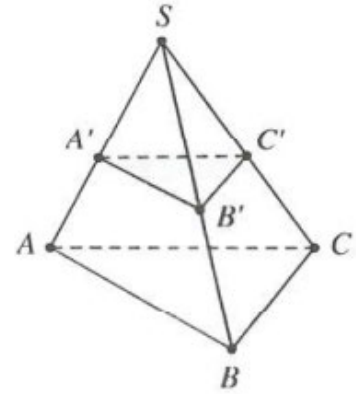


3. Tỉ số thể tích của khối chóp

a. Tỉ số thể tích của khối chóp tam giác

Công thức:
$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$

Lưu ý: Công thức chỉ áp dụng với khối chóp có đáy là tam giác nên trong nhiều trường hợp ta cần chia nhỏ các khối đa diện thành các hình chóp tam giác khác nhau rồi mới áp dụng.

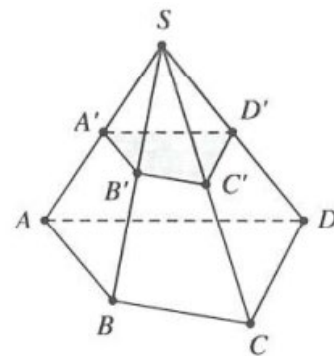


b. Tỷ số thể tích của khối chóp tứ giác

▪ Trường hợp đặc biệt: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ (hoặc đa giác bất kỳ), mặt phẳng (P) song song với đáy cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D' .

Khi đó
$$\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = k^3$$
; với
$$\frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{SD'}{SD} = k.$$

Chú ý: Công thức trên đúng với đáy n giác.

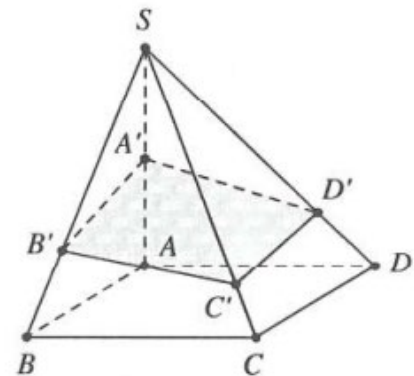


▪ Trường hợp đáy là hình bình hành (hay gấp)

Bài toán: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng (P) cắt các cạnh

SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D' sao cho $\frac{SA'}{SA} = x; \frac{SB'}{SB} = y; \frac{SC'}{SC} = z; \frac{SD'}{SD} = t.$

Khi đó
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{y} + \frac{1}{t}$$
 và
$$\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{xyzt}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right)$$



4. Tỷ số thể tích của khối lăng trụ

a. Lăng trụ tam giác

☑ **Kết quả 1:**

Gọi V là thể tích khối lăng trụ, V_1 là thể tích khối chóp tạo thành từ 4 trong 6 đỉnh của lăng trụ, V_2 là thể

tích khối chóp tạo thành từ 5 trong 6 đỉnh của lăng trụ. Khi đó:
$$V_1 = \frac{V}{3}; V_2 = \frac{2V}{3}$$

Ví dụ: Hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ $\longrightarrow V_{A'B'BC} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}; V_{A'B'ABC} = \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}$

☑ Kết quả 2:

Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Mặt phẳng (α) cắt các đường thẳng AA', BB', CC' lần lượt tại M, N, P (tham khảo hình vẽ bên).

Tính tỉ số $\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}}$.

HD: Ta có $V_{ABC.MNP} = V_{M.ABC} + V_{A.BNPC}$

$$\begin{aligned} \text{Lại có } V_{M.ABC} &= \frac{1}{3}.d(M; (ABC)).S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{AM}{AA'} \cdot d(A'; (ABC)).S_{\Delta ABC} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{AM}{AA'} \cdot V_{ABC.A'B'C'} \longrightarrow V_{M.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{AM}{AA'} \cdot V_{ABC.A'B'C'} \end{aligned}$$

$$\text{Và } S_{BNPC} = \frac{h}{2} \cdot (BN + CP); S_{BCC'B'} = \frac{h}{2} \cdot (BB' + CC') = h \cdot BB'$$

$$\Rightarrow \frac{S_{BNPC}}{S_{BCC'B'}} = \frac{\frac{h}{2} \cdot (BN + CP)}{h \cdot BB'} = \frac{1}{2} \left(\frac{BN + CP}{BB'} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } V_{A.BNPC} &= \frac{1}{3} \cdot d(A; (BCC'B')).S_{BNPC} \\ &= \frac{1}{3} \cdot d(A; (BCC'B')).\frac{1}{2} \left(\frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'} \right) \cdot S_{BCC'B'} = \frac{1}{2} \left(\frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'} \right) \cdot V_{A.BCC'B'} \end{aligned}$$

$$\text{Mà } V_{A.BCC'B'} = \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} \Rightarrow V_{A.BNPC} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'} \right) \cdot V_{ABC.A'B'C'}$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.MNP} = \frac{1}{3} \cdot \frac{AM}{AA'} \cdot V_{ABC.A'B'C'} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'} \right) \cdot V_{ABC.A'B'C'} \Rightarrow \frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{3} \left(\frac{AM}{AA'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'} \right)$$

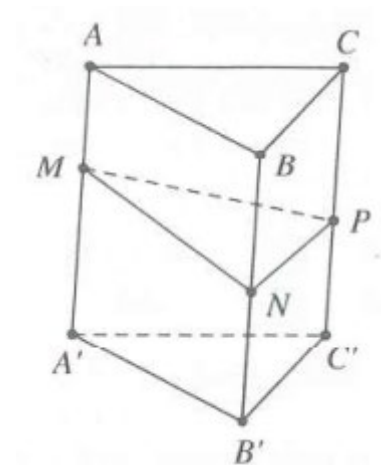
Công thức tính nhanh $\boxed{\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{3} \left(\frac{AM}{AA'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'} \right)}$

b. Khối hộp

☑ Kết quả 1:

Gọi V là thể tích khối hộp, V_1 là thể tích khối chóp tạo thành từ 4 trong 8 đỉnh của khối hộp gồm hai đường chéo của hai mặt song song, V_2 là thể tích khối chóp tạo thành từ 4 trong 8 đỉnh của khối hộp ở

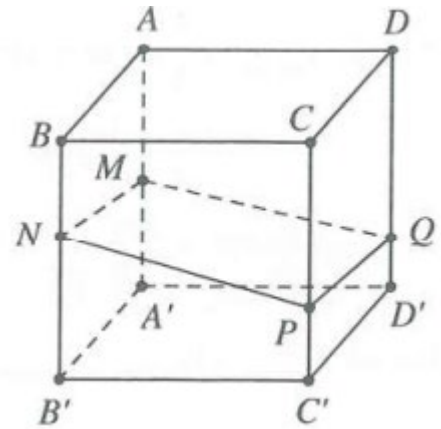
các trường hợp còn lại. Khi đó: $\boxed{V_1 = \frac{V}{3}; V_2 = \frac{V}{6}}$



Ví dụ: Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ $\longrightarrow V_{A'C'DD'} = \frac{1}{3}V_{ABCD.A'B'C'D'}$; $V_{A'C'D'D} = \frac{1}{6}V_{ABCD.A'B'C'D'}$

☑ Kết quả 2:

Cho hình lăng trụ tam giác $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng (α) cắt các đường thẳng AA', BB', CC', DD' lần lượt tại M, N, P, Q (tham khảo hình vẽ bên).



Chứng minh rằng $\frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'} = \frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'}$

$$\text{và } \frac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{1}{2} \left(\frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'} \right)$$

• Chứng minh $\frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'} = \frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'}$

Gọi I là tâm hình vuông $ABCD$; I' là tâm hình vuông $A'B'C'D'$.

Ta có: $\frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'} = \frac{AM + PC}{AA'} = \frac{2OI}{AA'}$;

$$\frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'} = \frac{BN + DQ}{BB'} = \frac{2OI'}{BB'} \Rightarrow \frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'} = \frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'}$$

• Chứng minh $\frac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{1}{2} \left(\frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'} \right)$

Chia khối đa diện $ABCD.MNPQ$ thành hai khối đa diện $ABC.MNP$ và $ACD.MPQ$;

Làm tương tự với thể tích khối lăng trụ tam giác;

$$\text{Cộng thể tích hai khối đa diện} \Rightarrow \frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{4} \left(\frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'} \right)$$

$$\text{Mà } \frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'} = \frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'} \Rightarrow \frac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{1}{2} \left(\frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'} \right)$$

Công thức tính nhanh

$$\frac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{1}{4} \left(\frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'} \right)$$

II. CÁC DẠNG TOÁN TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

➤ Dạng 1. Tỷ số thể tích của khối chóp

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có thể tích $V = 18$. Gọi M là trung điểm của SA , E là điểm đối xứng với B qua C . Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng SB và ME .

a) Tính thể tích khối chóp $MABE$

b) Tính thể tích khối chóp $AMNBC$

c) Tính thể tích khối chóp $SANE$

Lời giải

Vì E đối xứng với B qua $C \Rightarrow C$ là trung điểm của BE .

Mà M là trung điểm của SB . $SC \cap ME = N$

Suy ra N là trọng tâm $\Delta SBE \longrightarrow \frac{SN}{SC} = \frac{2}{3}$.

a) Ta có: $S_{\Delta SBE} = \frac{1}{2} d_{A \rightarrow BC} \cdot BE = 2 \frac{1}{2} d_{A \rightarrow BC} \cdot BC = 2.S_{\Delta ABC}$

Và $\frac{d(S; (ABC))}{d(M; (ABC))} = \frac{SB}{BM} \Rightarrow d(M; (ABC)) = \frac{1}{2} d(S; (ABC))$

Khi đó $V_{M.ABE} = \frac{1}{3} d(M; (ABC)) \cdot S_{\Delta SBE}$
 $= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} d(M; (ABC)) \cdot S_{\Delta ABC} = V_{S.ABC} = 18$.

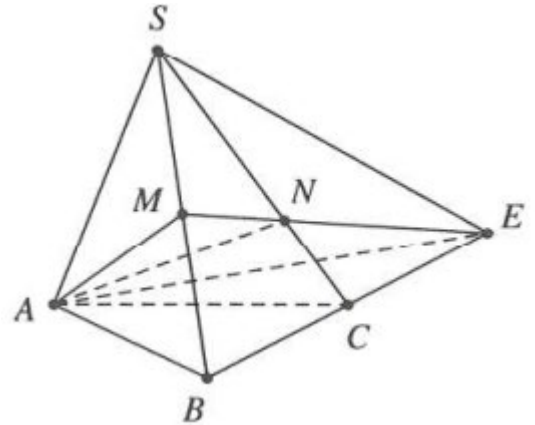
b) Ta có $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{1}{3} V_{S.ABC}$

Lại có $V_{S.ABC} = V_{S.AMN} + V_{AMNBC} \longrightarrow V_{AMNBC} = V_{S.ABC} - V_{S.AMN} = \frac{2}{3} V_{S.ABC} = \frac{2}{3} \cdot 18 = 12$

c) Ta có $V_{S.ANE} = V_{S.AME} - V_{S.AMN} = V_{S.AME} - \frac{1}{3} V_{S.ABC}$

Lại có $\frac{V_{S.AME}}{V_{S.ABE}} = \frac{SM}{SB} = \frac{1}{2} \longrightarrow V_{S.AME} = \frac{1}{2} V_{S.ABE} = \frac{1}{2} \cdot 2 V_{S.ABC} = V_{S.ABC}$

Do đó $V_{S.ANE} = V_{S.ABC} - \frac{1}{3} V_{S.ABC} = \frac{2}{3} V_{S.ABC} = \frac{2}{3} \cdot 18 = 12$



Ví dụ 2: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy cạnh bằng a , cạnh bên bằng $2a$.

a) Gọi M, N lần lượt thuộc AB, AC sao cho $2AM = AB, AN = 2NC$. Tính $V_{S.MBCN}$

b) Mặt phẳng (P) đi qua trọng tâm của tam giác ABC , song song với SA và BC , biết (P) cắt SB, SC lần lượt tại P, Q . Tính thể tích khối chóp $MPQCB$

Lời giải

Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow SG \perp (ABC)$.

Tam giác SAG vuông tại G , có

$$SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{33}}{3}.$$

$$\Rightarrow \text{Thể tích khối chóp } S.ABC \text{ là } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SG \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{a^3 \sqrt{11}}{12}$$

$$\text{a) Ta có } \frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{3}$$

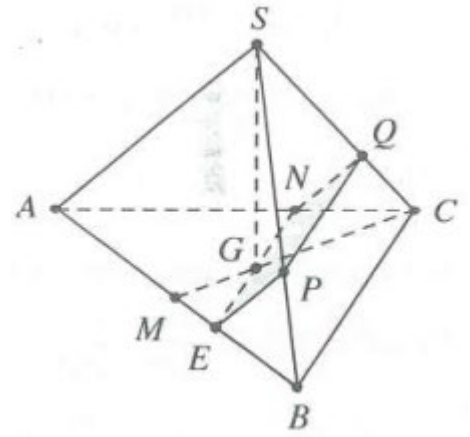
$$\text{Mà } V_{S.ABC} = V_{S.AMN} + V_{S.MBCN} \longrightarrow V_{S.MBCN} = \frac{2}{3} V_{S.ABC} = \frac{a^3 \sqrt{11}}{18}$$

b) Qua G kẻ đường thẳng song song với BC , cắt AB, AC lần lượt tại E, N . Tương tự, từ E, N kẻ các đường thẳng song song với BC cắt SB, SC lần lượt tại P, Q .

$$\text{Dễ dàng chứng minh được } \frac{SP}{SB} = \frac{SQ}{SC} = \frac{AN}{AC} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Ta có: } V_{MPQCB} = \frac{1}{2} V_{A.PQCB} = \frac{1}{2} (V_{S.ABC} - V_{S.APQ}) = \frac{1}{2} \left(V_{S.ABC} - \frac{SP}{SB} \cdot \frac{SQ}{SC} \cdot V_{S.ABC} \right) = \frac{5}{18} V_{S.ABC}.$$

$$\text{Vậy thể tích cần tìm là } V_{MPQCB} = \frac{5}{18} \cdot \frac{a^3 \sqrt{11}}{12} = \frac{5\sqrt{11}}{216} a^3.$$



Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng 45° .

a) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, AB . Tính $V_{MNP D}$.

b) Gọi H là hình chiếu của A trên SD ; E là trung điểm của BC . Nối AC cắt DE tại F . Tính thể tích các khối đa diện $MHCD, HFCD$.

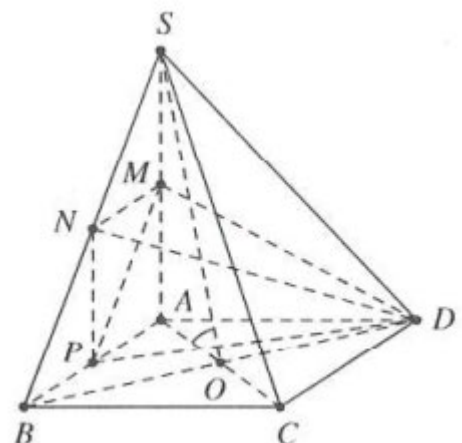
Lời giải

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD \Rightarrow \widehat{(SBD);(ABCD)} = \widehat{SOA} = 45^\circ$

$$\text{Suy ra } SA = OA = \frac{AC}{2} = a \longrightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{a}{3} \cdot (a\sqrt{2})^2 = \frac{2a^3}{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } S_{\Delta MNP} &= S_{\Delta SAB} - S_{\Delta SMN} - S_{\Delta AMP} - S_{\Delta BPN} \\ &= S_{\Delta SAB} - \frac{1}{4} S_{\Delta SAB} - \frac{1}{4} S_{\Delta SAB} - \frac{1}{4} S_{\Delta SAB} = \frac{1}{4} S_{\Delta SAB}. \end{aligned}$$

$$\text{Lại có } V_{MNP D} = V_{D.MNP} = \frac{1}{3} d(D; (SAB)) \cdot S_{\Delta MNP} = \frac{1}{4} V_{D.SAB}$$



$$= \frac{1}{4} V_{S.ABD} = \frac{1}{4} \cdot \frac{S_{\Delta ABD}}{S_{ABCD}} \cdot V_{S.ABCD} = \frac{1}{8} V_{S.ABCD} = \frac{1}{8} \cdot \frac{2a^3}{3} = \frac{a^3}{12}.$$

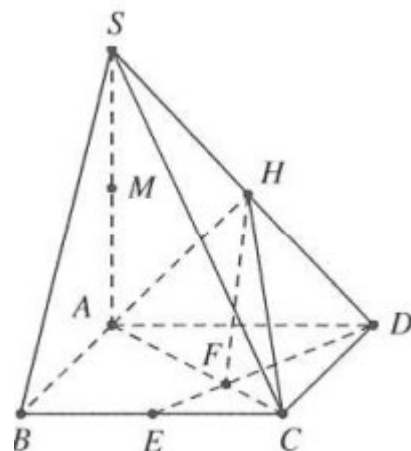
b) Xét ΔSAD vuông tại A , đường cao $AH \Rightarrow \frac{SH}{SD} = \left(\frac{SA}{SD} \right)^2 = \frac{1}{3}$.

• Tính thể tích khối chóp $MHCD$.

Ta có $\frac{S_{\Delta HCD}}{S_{\Delta SCD}} = \frac{HD}{SD} = \frac{1}{3} \Rightarrow S_{\Delta HCD} = \frac{1}{3} S_{\Delta SCD}$

$$\Rightarrow V_{M.HCD} = \frac{1}{3} \cdot d(M; (SCD)) \cdot S_{\Delta HCD} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot d(A; (SCD)) \cdot S_{\Delta SCD}$$

$$= \frac{1}{6} V_{A.SCD} = \frac{1}{6} V_{S.ACD} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{1}{12} V_{S.ABCD} = \frac{a^3}{18}.$$



• Tính thể tích khối chóp $HFCD$.

Vì $EC \parallel AD \Rightarrow \frac{EC}{AD} = \frac{CF}{AC} = \frac{EF}{FD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{DF}{DE} = \frac{2}{3}$.

Cách 1. Ta có $V_{H.FCD} = \frac{1}{3} \cdot d(H; (ABCD)) \cdot S_{\Delta FCD}$ mà $\frac{d(H; (ABCD))}{d(S; (ABCD))} = \frac{HD}{SD} = \frac{2}{3}$.

Và $\frac{S_{\Delta FCD}}{S_{\Delta ECD}} = \frac{DF}{DE} = \frac{2}{3} \longrightarrow V_{H.FCD} = \frac{4}{9} \cdot V_{S.ECD} = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{4} V_{S.ABCD} = \frac{1}{9} V_{S.ABCD} = \frac{2a^3}{27}$.

Cách 2. Ta có $V_{H.FCD} = V_{F.HCD} = \frac{1}{3} \cdot d(F; (SCD)) \cdot S_{\Delta HCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot d(A; (SCD)) \cdot \frac{2}{3} S_{\Delta SCD}$

$$= \frac{2}{9} V_{A.SCD} = \frac{2}{9} V_{S.ACD} = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{1}{9} V_{S.ABCD} = \frac{2a^3}{27}.$$

Ví dụ 4: Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V . Gọi V' là thể tích của khối tứ diện có các đỉnh là trọng tâm của các mặt của khối tứ diện $ABCD$. Tính tỉ số $\frac{V'}{V}$.

A. $\frac{V'}{V} = \frac{8}{27}$.

B. $\frac{V'}{V} = \frac{23}{27}$.

C. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{27}$.

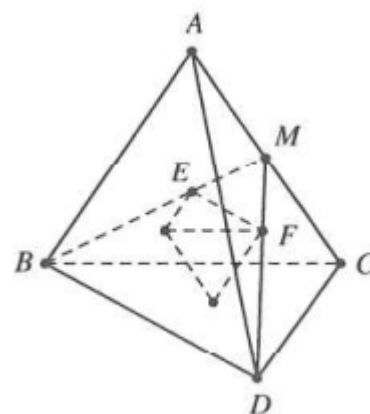
D. $\frac{V'}{V} = \frac{4}{27}$.

Lời giải

Gọi M là trung điểm AC ; E, F lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC , ACD . Trong tam giác MBD có $EF = \frac{1}{3}BD$.

Tương tự ta có các cạnh còn lại của tứ diện mới sinh ra bằng $\frac{1}{3}$ cạnh của

tứ diện ban đầu. Do đó $\frac{V'}{V} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$. **Chọn C.**



Ví dụ 5: Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc và $AB = 6a, AC = 9a, AD = 3a$. Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD, ADB . Tính thể tích V của khối tứ diện $AMNP$.

- A. $V = 8a^2$. B. $V = 4a^2$. C. $V = 6a^2$. D. $V = 2a^2$.

Lời giải

Ta có: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot AC \cdot AD = 27a^3$.

Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của BC, CD, DB .

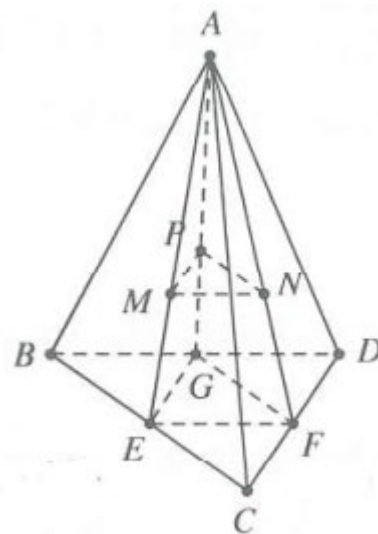
Suy ra $V_{AEFG} = \frac{1}{4} V_{ABCD} = \frac{27}{4} a^3$.

Do M, N, P là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD, ADB .

Nên ta có: $\frac{AM}{AE} = \frac{AN}{AF} = \frac{AP}{AG} = \frac{2}{3}$.

Lại có: $\frac{V_{A.MNP}}{V_{A.EFG}} = \frac{AM}{AE} \cdot \frac{AN}{AF} \cdot \frac{AP}{AG} = \frac{8}{27}$.

→ $V_{A.MNP} = \frac{8}{27} V_{A.EFG} = 2a^3$. **Chọn D.**



Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có chiều cao bằng 9, diện tích đáy bằng 5. Gọi M là trung điểm của cạnh SB và N thuộc cạnh SC sao cho $NS = 2NC$. Tính thể tích V của khối chóp $A.BMNC$.

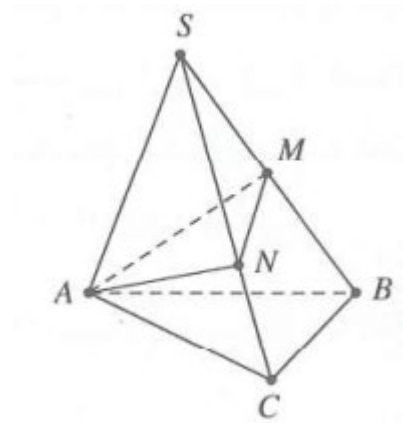
- A. $V = 15$. B. $V = 5$. C. $V = 10$. D. $V = 6$.

Lời giải

Từ giả thiết, ta có $\frac{SN}{SC} = \frac{2}{3}$ và $\frac{SM}{SB} = \frac{1}{2}$.

Thể tích khối chóp $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 5 = 15$

Ta có $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{ABMNC} = \frac{2}{3} V_{S.ABC} = 10$. **Chọn C.**



Ví dụ 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 3, SB = 4, SC = 5$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 60^\circ$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = 5\sqrt{2}$.

B. $V = 5\sqrt{3}$.

C. $V = 10$.

D. $V = 15$.

Lời giải

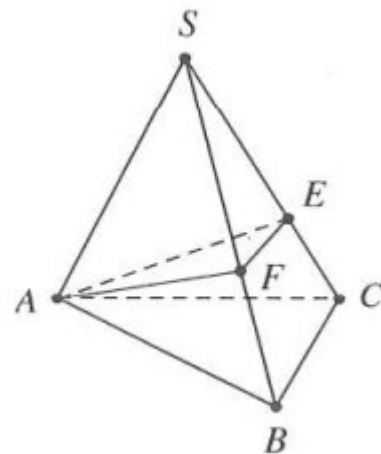
Trên SB, SC lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $SE = SF = 3$.

Khi đó $S.AEF$ là khối tứ diện đều có cạnh $a = 3$.

Suy ra thể tích khối chóp $S.AEF$ là $V_{S.AEF} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$.

Ta có: $\frac{V_{S.AEF}}{V_{S.ABC}} = \frac{SE}{SB} \cdot \frac{SF}{SC} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{20}$.

$\longrightarrow V_{S.ABC} = \frac{20}{9} \cdot V_{S.AEF} = 5\sqrt{2}$. **Chọn A.**



Ví dụ 8: Cho tứ diện đều cạnh $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và E là điểm đối xứng với B qua D . Mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích V . Tính V

A. $V = \frac{7\sqrt{2}a^3}{216}$

B. $V = \frac{11\sqrt{2}a^3}{216}$

C. $V = \frac{13\sqrt{2}a^3}{216}$

D. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{18}$

Lời giải

Thể tích khối tứ diện đều $ABCD$ cạnh a là $V_{ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$

Gọi $P = EN \cap CD$ và $Q = EM \cap AD$.

$\Rightarrow P, Q$ lần lượt là trọng tâm của $\triangle BCE$ và $\triangle ABE$

Gọi S là diện tích tam giác $BCD \Rightarrow S_{\triangle CDE} = S_{\triangle BNE} = S$.

Ta có: $S_{\triangle PDE} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle CDE} = \frac{S}{3}$.

Gọi h là chiều cao của tứ diện $ABCD$, suy ra

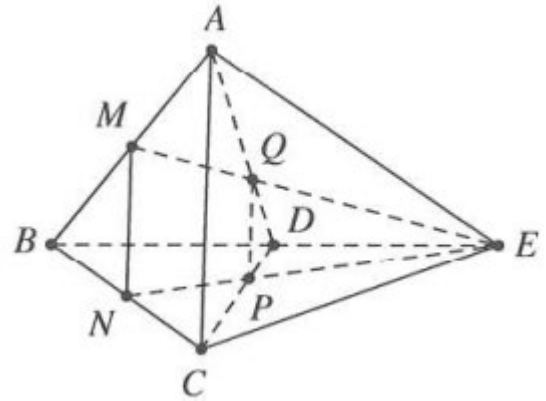
$$d[M; (BCD)] = \frac{h}{2}; d[Q; (BCD)] = \frac{h}{3}.$$

Khi đó $V_{M.BNE} = \frac{1}{3} S_{\triangle BNE} \cdot d(M; (BCD)) = \frac{S \cdot h}{6}$;

Và $V_{Q.PDE} = \frac{1}{3} S_{\triangle PDE} \cdot d(Q; (BCD)) = \frac{S \cdot h}{27}$

Suy ra $V_{PQD.NMB} = V_{M.BNE} - V_{Q.PDE} = \frac{S \cdot h}{6} - \frac{S \cdot h}{27} = \frac{7S \cdot h}{54} = \frac{7}{18} \cdot \frac{S \cdot h}{3} = \frac{7}{18} V_{ABCD}$.

Vậy thể tích khối đa diện chứa đỉnh A là $V = V_{ABCD} - V_{PQD.NMB} = \frac{11}{18} \cdot \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} = \frac{11\sqrt{2}a^3}{216}$. **Chọn B.**



Ví dụ 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AD = 2, BA = BC = 1$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = \sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB . Tính thể tích V của khối đa diện $SAHCD$.

A. $V = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

B. $V = \frac{4\sqrt{2}}{9}$.

C. $V = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

D. $V = \frac{2\sqrt{2}}{9}$.

Lời giải

Tam giác vuông SAB , có $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{3}$

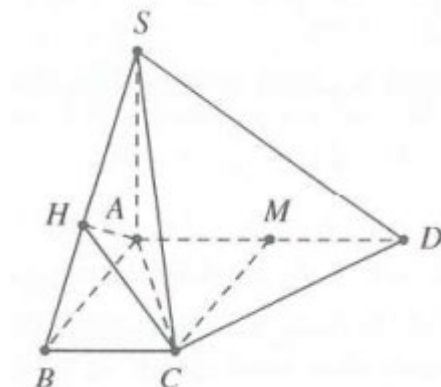
Gọi M là trung điểm của $AD \Rightarrow ABCM$ là hình vuông nên $CM = AB = a = \frac{AD}{2}$.

$\longrightarrow$ Tam giác ACD vuông tại C .

Ta có $V_{S.AHCD} = V_{S.ACD} + V_{S.AHC}$

- $V_{S.ACD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ACD} \cdot SA = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} AD \cdot AB \right) SA = \frac{\sqrt{2}}{3}$

- $\frac{V_{S.AHC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{S.AHC} = \frac{2}{3} V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{2}}{9}$



Vậy $V_{S.AHCD} = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{9} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$. **Chọn B**

Ví dụ 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = a$ vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Điểm M thuộc cạnh SA sao cho $\frac{SM}{SA} = k$. Xác định k sao cho mặt phẳng (MBC) chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích bằng nhau.

A. $k = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. B. $k = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. C. $k = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$. D. $k = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Lời giải

Cách 1. Kẻ $MN \parallel AD (N \in SD) \longrightarrow \frac{SN}{SD} = \frac{SM}{SA} = k$.

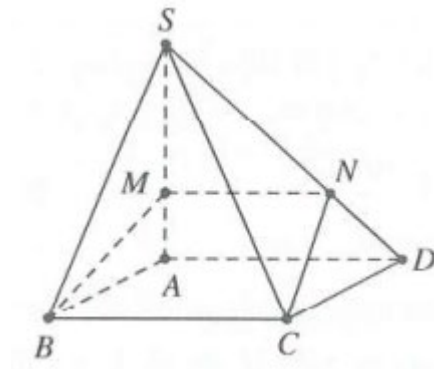
Khi đó mặt phẳng (MBC) chia khối chóp thành hai phần là $S.MBCN$ và $AMBDNC$.

Ta có $V_{S.MBCN} = V_{S.MBC} + V_{S.MCN}$.

• $\frac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} = k \Rightarrow V_{S.MBC} = k.V_{S.ABC}$.

• $\frac{V_{S.MCN}}{V_{S.ACD}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SD} = k^2 \Rightarrow V_{S.MCN} = k^2.V_{S.ACD}$.

Lại có $V_{S.MBCN} = \frac{1}{2}.V_{S.ABCD} \Rightarrow k.V_{S.ABC} + k^2.V_{S.ACD} = \frac{1}{2}.V_{S.ABCD}$



$\Rightarrow k \cdot \frac{V_{S.ABCD}}{2} + k^2 \cdot \frac{V_{S.ABCD}}{2} = \frac{1}{2}.V_{S.ABCD} \longrightarrow k + k^2 = 1 \Rightarrow k = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Cách 2: Với $\frac{SA}{SM} = \frac{1}{k}$; $\frac{SB}{SB} = 1$; $\frac{SC}{SC} = 1$; $\frac{SD}{SN} = \frac{1}{k}$

Áp dụng công thức, ta được $\frac{V_{S.MBCN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{k} + 2}{4 \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k}} = \frac{k^2 + 1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **Chọn B.**

Ví dụ 11: Cho hình chóp đều $S.ABCD$. Gọi N là trung điểm SB , M là điểm đối xứng với B qua A . Mặt phẳng (MNC) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần có thể tích lần lượt là V_1, V_2 với $V_1 < V_2$. Tính tỉ số thể tích $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{7}$ B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{11}$ C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{9}$ D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{13}$

Lời giải

Gọi h, S lần lượt là chiều cao và diện tích đáy của khối

chóp $S.ABCD$. Khi đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}Sh$.

Nối MN cắt SA tại E , MC cắt AD tại F .

Tam giác SBM có A, N lần lượt là trung điểm của BM và SB . Suy ra E là trọng tâm tam giác SBM .

Vì $ACDM$ là hình bình hành nên F là trung điểm MC .

Ta có $V_{BNC.AEF} = V_{ABCEN} + V_{E.ACF}$

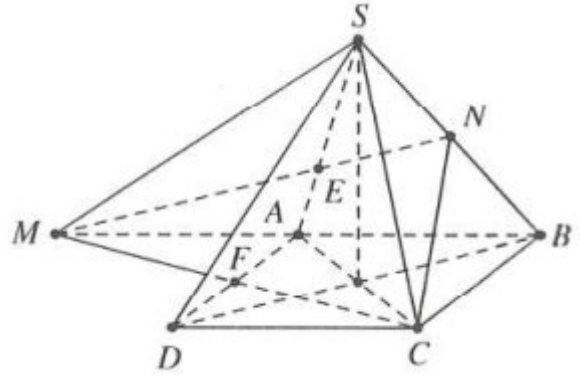
$$\bullet \frac{V_{S.ENC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SE}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \longrightarrow V_{S.ENC} = \frac{1}{3}V_{S.ABC}$$

$$\longrightarrow V_{ABCEN} = \frac{2}{3}V_{S.ABC} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}V_{S.ABCD} \right) = \frac{1}{3}V_{S.ABCD}.$$

$$\bullet V_{E.ACF} = \frac{1}{3}S_{\Delta ACF} \cdot d(E; (ACF)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}S \cdot \frac{1}{3}h = \frac{1}{12}V_{S.ABCD}.$$

$$\text{Do đó } V_{BNC.AEF} = V_{ABCEN} + V_{E.ACF} = \frac{1}{3}V_{S.ABCD} + \frac{1}{12}V_{S.ABCD} = \frac{5}{12}V_{S.ABCD} = V_1.$$

$$\text{Suy ra } V_2 = \frac{7}{12}V_{S.ABCD} \longrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{7}. \text{ Chọn A.}$$



Ví dụ 12: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 1, SB = 2, SC = 3, \widehat{ASB} = 60^\circ, \widehat{ASC} = 90^\circ, \widehat{CSB} = 120^\circ$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng?

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\sqrt{2}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{6}$.

Lời giải

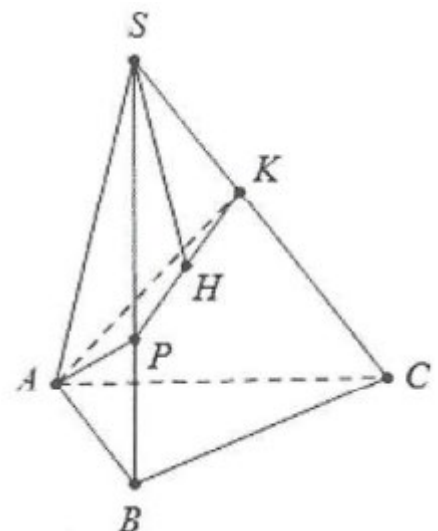
Kí hiệu như hình vẽ với $SA = SP = SK = 1 \Rightarrow$ Hình chiếu vuông góc H hạ từ S xuống (APK) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAPK .

Ta có $AP = 1, AK = \sqrt{2}$

Gọi H là trung điểm của cạnh PK

$$\Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{HP}{SP} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HP = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow PK = 2HP = \sqrt{3}$$

$$\text{Như vậy } AP^2 + AK^2 = 1 + 2 = PK^2 \Rightarrow AP \perp AK$$



$\Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle APK \Rightarrow SH \perp (APK)$.

$$\text{Cạnh } SH = \sqrt{SP^2 - HP^2} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow V_{S.APK} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{APK} = \frac{1}{3} SH \cdot \frac{1}{2} AP \cdot AK = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

Ta có: $\frac{V_{S.APK}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SP}{SB} \cdot \frac{SK}{SC} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.ABC} = 6V_{S.APK} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **Chọn B.**

Ví dụ 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , với $AC = a\sqrt{2}$. Cạnh $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC , mặt phẳng (α) qua A, G và song song với BC cắt SB, SC lần lượt tại M và N . Tính theo a thể tích V của khối chóp $A.BCNM$

A. $V = \frac{5a^3}{54}$.

B. $V = \frac{5a^3}{27}$.

C. $V = \frac{2a^3}{27}$.

D. $V = \frac{a^3}{18}$.

Lời giải

Ta có $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC}$.

Bài ra có: $MN \parallel BC \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC} = \frac{SG}{GP} = \frac{2}{3}$.

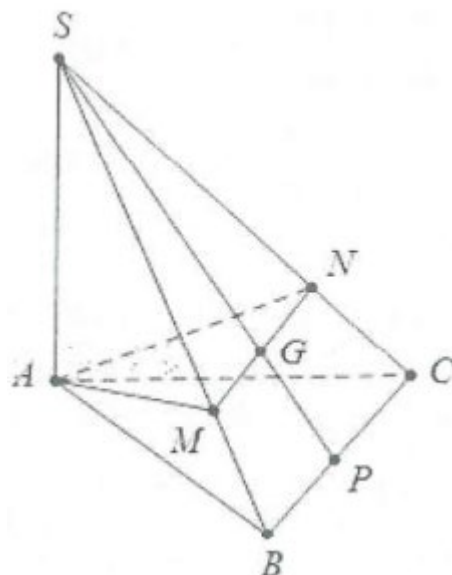
$$\Rightarrow \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{4}{9} \Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{4}{9} V_{S.ABC}$$

$$\Rightarrow V_{A.BCNM} = V_{S.ABC} - V_{S.AMN} = \frac{5}{9} V_{S.ABC}.$$

Tam giác ABC vuông cân tại B , với $AC = a\sqrt{2}$.

$$\Rightarrow AB = BC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = a$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} a \cdot \frac{1}{2} a^2 = \frac{a^3}{6} \Rightarrow V_{A.BCNM} = \frac{5}{9} V_{S.ABC} = \frac{5a^3}{54}. \text{ **Chọn A.**}$$



Ví dụ 14: Cho hình chóp $S.ABCD$, trên cạnh SA lấy điểm M sao cho $SM = AM$. Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với mặt phẳng đáy cắt SB, SC, SD lần lượt tại N, P, Q . Kí hiệu V_1 và V_2 lần lượt là thể tích của khối chóp $S.MNPQ$ và $S.ABCD$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{16}$.

B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{8}$.

C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{4}$.

D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{24}$.

Lời giải

Ta có N, P, Q lần lượt là trung điểm của SB, SC, SD .

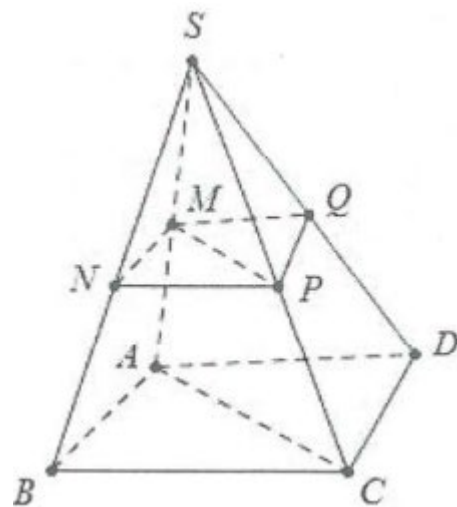
Tỉ số $\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Tỉ số $\frac{V_{S.MPQ}}{V_{S.ACD}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SP}{SC} \cdot \frac{SQ}{SD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

$\Rightarrow V_{S.MNPQ} = V_{S.MNP} + V_{S.MPQ} = \frac{1}{8}V_{S.ABC} + \frac{1}{8}V_{S.ACD} = \frac{1}{8}V_{SABCD}$

$\Rightarrow V_1 = \frac{1}{8}V_2 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{8}$

Hoặc áp dụng công thức $\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{SM}{SA}\right)^2 = \frac{1}{8}$. **Chọn B**



Ví dụ 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, với $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Cạnh $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại H, I, K . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.AHIK$.

A. $V = \frac{4a^3\sqrt{3}}{35}$.

B. $V = \frac{6a^3\sqrt{3}}{35}$.

C. $V = \frac{8a^3\sqrt{3}}{35}$.

D. $V = \frac{12a^3\sqrt{3}}{35}$.

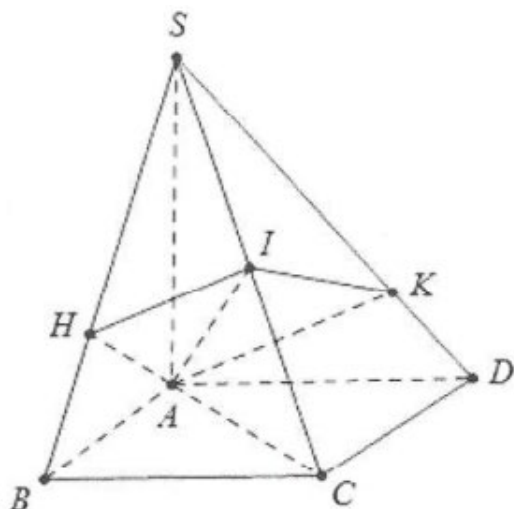
Lời giải

Ta có $SC \perp (AHIK) \Rightarrow SC \perp AI, SC \perp AH \Rightarrow AH \perp SC$.

Lại có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH \Rightarrow AH \perp BC$.

Như vậy $\begin{cases} AH \perp SC \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SB$, tương tự thì $AK \perp SD$.

Cạnh $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}$



$$\Rightarrow SH = \frac{SA^2}{SB} = \frac{4a^2}{a\sqrt{5}} = \frac{4a}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{SB}{SH} = \frac{5}{4}$$

Mà $SA = 2a \Rightarrow SA = AC \Rightarrow \Delta SAC$ vuông cân tại A

$$\Rightarrow I \text{ là trung điểm của cạnh } SC \Rightarrow \frac{SC}{SI} = 2.$$

$$\text{Do đó } \frac{SA}{SA} + \frac{SC}{SI} = \frac{SB}{SH} + \frac{SD}{SK} \Rightarrow \frac{SD}{SK} = \frac{7}{4}.$$

Áp dụng công thức, ta được:

$$\frac{V_{S.AHIK}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1 + \frac{5}{4} + 2 + \frac{7}{4}}{4 \cdot 1 \cdot \frac{5}{4} \cdot 2 \cdot \frac{7}{4}} = \frac{12}{35}.$$

$$\text{Do đó } V_{S.AHIK} = \frac{12}{35} \cdot \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{4}{35} \cdot 2a \cdot a \cdot a\sqrt{3} = \frac{8a^3\sqrt{3}}{35}. \text{ Chọn C.}$$

Ví dụ 16: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 6, SB = 2, SC = 4, AB = 2\sqrt{10}$ và $\widehat{SBC} = 90^\circ, \widehat{ASC} = 120^\circ$. Mặt phẳng (P) đi qua B và trung điểm N của SC đồng thời vuông góc với mặt phẳng (SAC) , cắt cạnh SA tại

$$M. \text{ Tính tỉ số thể tích } k = \frac{V_{S.BMN}}{V_{S.ABC}}.$$

A. $k = \frac{2}{9}$

B. $k = \frac{2}{5}$

C. $k = \frac{1}{6}$

D. $k = \frac{1}{4}$

Lời giải

Gọi D thuộc SA sao cho $SA = 3.SD \Rightarrow SD = 2$.

Xét ΔSBC vuông tại B , có $\cos \widehat{BSC} = \frac{SB}{SC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BSC} = 60^\circ$.

Và $AB^2 = SA^2 + SB^2 \Rightarrow \Delta SAB$ vuông tại $S \Rightarrow \widehat{ASB} = 90^\circ$

Xét tứ diện $S.BND$ có $\widehat{DSB} = 90^\circ, \widehat{BSN} = 60^\circ, \widehat{DSN} = 120^\circ$

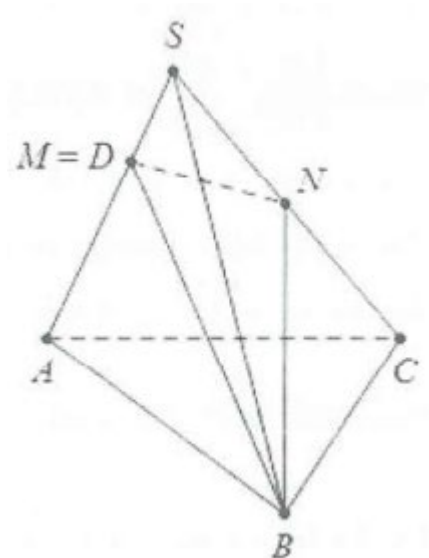
$$\Rightarrow BD^2 + BN^2 = DN^2 \Rightarrow \Delta BDN \text{ vuông tại } B$$

Mà $SB = SN = SD \Rightarrow$ hình chiếu của S trên mặt phẳng (BDN) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BDN .

Gọi H là trung điểm $DN \Rightarrow SH \perp (BDN) \Rightarrow (SDN) \perp (BDN)$

Hay $(BDN) \perp (SAC) \Rightarrow mp(P) \equiv (BDN) \Rightarrow M \equiv D$.

$$\text{Vậy } k = \frac{V_{S.BMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SN}{SC} \cdot \frac{SM}{SD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}. \text{ Chọn C.}$$



Ví dụ 17: Cho khối tứ diện ABCD có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau và $AB = 2a$, $AC = AD = 4a$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên BC và BD. Thể tích của khối tứ diện ABHK là

- A. $\frac{16a^3}{75}$ B. $\frac{32a^3}{75}$ C. $\frac{2a^3}{3}$ D. $\frac{3a^3}{2}$

Lời giải

Ta có $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{(2a)^2 + (4a)^2} = 2a\sqrt{5}$

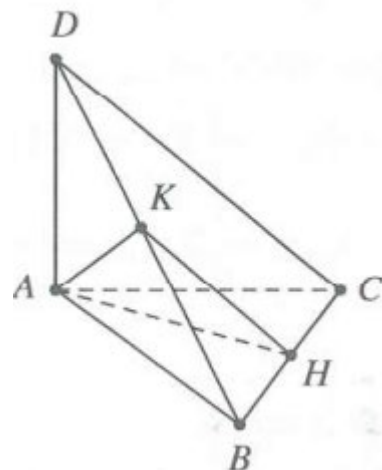
Và $AB^2 = BK \cdot BD \Rightarrow \frac{BK}{BD} = \left(\frac{AB}{BD}\right)^2 = \left(\frac{2a}{2a\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{5}$.

Tương tự, được $\frac{BH}{BC} = \frac{1}{5}$.

Lại có $V_{B.ACD} = V_{D.ABC} = \frac{1}{6} \cdot 4a \cdot 4a \cdot 2a = \frac{16a^3}{3}$.

Vậy $\frac{V_{B.AKH}}{V_{B.ACD}} = \frac{BK}{BD} \cdot \frac{BH}{BC} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25} \Rightarrow V_{ABHK} = \frac{1}{25} \cdot \frac{16a^3}{3} = \frac{16a^3}{75}$.

Chọn A.



Ví dụ 18: Cho hình hộp $S.ABC$ có $SC = 2a$ và $SC \perp (ABC)$. Đáy ABC là tam giác vuông cân tại B có $AB = a\sqrt{2}$. Mặt phẳng (α) đi qua C và vuông góc với SA, (α) cắt SA, SB lần lượt tại D, E. Tính thể tích khối chóp S.CDE

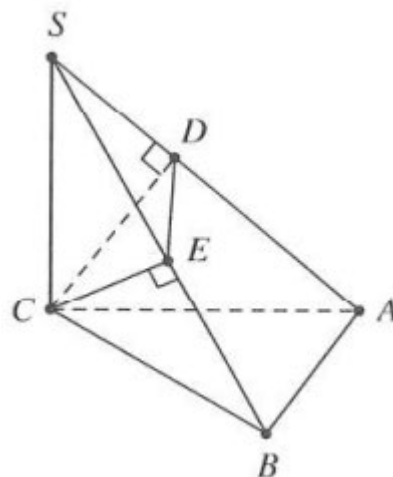
- A. $\frac{4a^3}{9}$ B. $\frac{2a^3}{3}$ C. $\frac{2a^3}{9}$ D. $\frac{a^3}{3}$

Lời giải

Ta có $\begin{cases} SC \perp AB \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SBC) \Rightarrow CE \perp AB$

Mà $SA \perp (\alpha) \Rightarrow SA \perp CE$ suy ra $CE \perp (SAB) \Rightarrow CE \perp SB$

Tam giác ABC vuông cân tại B $\Rightarrow AC = AB\sqrt{2} = 2a$



Suy ra $SC = AC \Rightarrow \Delta SAC$ cân tại $C \Rightarrow SD = DA \Leftrightarrow \frac{SD}{SA} = \frac{1}{2}$.

Tam giác SBC vuông tại C , có $CE = \frac{SC \cdot BC}{\sqrt{SC^2 + BC^2}} = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$.

Do đó $SE = \sqrt{SC^2 - CE^2} = \frac{2\sqrt{6}a}{3} \rightarrow \frac{SE}{SB} = \frac{2\sqrt{6}a}{3} : a\sqrt{6} = \frac{2}{3}$.

Khi đó $\frac{V_{S.CDE}}{V_{S.CAB}} = \frac{SD}{SA} \cdot \frac{SE}{SB} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.CDE} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot SC \cdot \frac{AB^2}{2} = \frac{2a^3}{9}$

Chọn C.

Ví dụ 19: Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB , AC và AD đôi một vuông góc. Các điểm M , N , P lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng BC , CD , BD . Biết rằng $AB = 4a$, $AC = 6a$, $AD = 7a$. Tính thể tích của khối tứ diện $AMNP$.

A. $V = 7a^3$

B. $V = 28a^3$

C. $V = 14a^3$

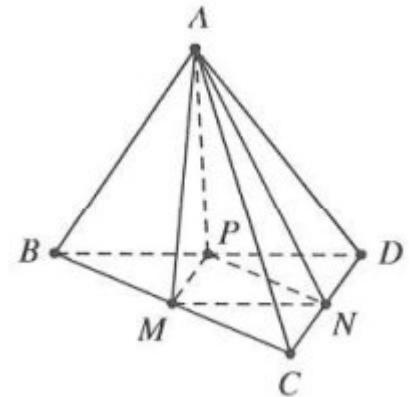
D. $V = 21a^3$

Lời giải

Tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB , AC và AD đôi một vuông góc

$\rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot AC \cdot AD = 28a^3$

Ta có $S_{\Delta MNP} = \frac{1}{4} S_{\Delta BCD}$, suy ra $V_{AMNP} = \frac{1}{4} V_{A.BCD} = 7a^3$. **Chọn A.**



Ví dụ 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm SB và G là trọng tâm của tam giác SBC . Gọi V, V' lần lượt là thể tích của các khối chóp $M.ABC$ và $G.ABD$. Tính tỉ số $\frac{V}{V'}$

A. $\frac{V}{V'} = \frac{3}{2}$

B. $\frac{V}{V'} = \frac{4}{3}$

C. $\frac{V}{V'} = \frac{5}{3}$

D. $\frac{V}{V'} = \frac{2}{3}$

Lời giải

Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của M và G trên $mp(ABCD)$

Suy ra $MH \parallel GK \rightarrow \frac{MH}{GK} = \frac{CM}{CG} = \frac{3}{2}$.

Ta có $\frac{V}{V'} = \frac{\frac{1}{3}MH.S_{\triangle ABC}}{\frac{1}{3}GK.S_{\triangle ABD}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}S_{ABCD}}{\frac{1}{2}S_{ABCD}} = \frac{3}{2}$. **Chọn D**

Ví dụ 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. I nằm trên cạnh SC sao cho $IS = 2IC$.

Mặt phẳng (P) chứa cạnh AI cắt cạnh SB, SD lần lượt tại M, N . Gọi V', V lần lượt là thể tích khối chóp

$S.AMIN$ và $S.ABCD$. Tính giá trị nhỏ nhất của tỷ số thể tích $\frac{V'}{V}$

A. $\frac{4}{5}$

B. $\frac{5}{54}$

C. $\frac{8}{15}$

D. $\frac{5}{24}$

Lời giải

Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$.

Gọi $H = SK \cap AI$, qua H kẻ $d \parallel BD$ cắt SB, SD tại M, N .

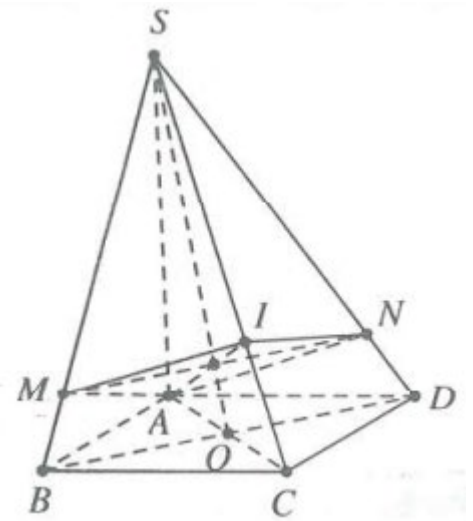
Xét tam giác SAC , có $\frac{IS}{IC} \cdot \frac{AC}{OC} \cdot \frac{OH}{SH} = 1 \Rightarrow \frac{OH}{SC} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{SH}{SC} = \frac{4}{5}$.

Mà $MN \parallel BD \rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SD} = \frac{SH}{SO} = \frac{4}{5}$

Ta có $\frac{V_{S.AMI}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SI}{SC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{SM}{SB} \Rightarrow \frac{V_{S.AMI}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{SM}{SB}$

Và $\frac{V_{S.ANI}}{V_{S.ACD}} = \frac{SN}{SD} \cdot \frac{SI}{SC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{SN}{SD} \Rightarrow \frac{V_{S.ANI}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{SN}{SD}$

Suy ra $\frac{V'}{V} = \frac{1}{3} \left(\frac{SM}{SB} + \frac{SN}{SD} \right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{4}{5} \right) = \frac{8}{15}$. **Chọn C.**



Ví dụ 22: Cho điểm M nằm trên cạnh SA , điểm N nằm trên cạnh SB của khối chóp tam giác $S.ABC$ sao cho

$\frac{SM}{MA} = \frac{1}{2}; \frac{SN}{NB} = 2$. Mặt phẳng (α) đi qua MN và song song với SC chia khối chóp thành 2 phần. Gọi V_1 là

thể tích của khối đa diện chứa A , V_2 là thể tích của khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{5}$

B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{4}$

C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{6}$

D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{6}{5}$

Lời giải

Kẻ $NP // SC (P \in BC)$, kẻ $MQ // SC (Q \in SC)$.

Khi đó, mặt phẳng (α) cắt hình chóp theo thiết diện là $MNPQ$.

$$\text{Vì } NP // SC \Rightarrow \frac{CP}{CB} = \frac{2}{3}; MQ // SC \Rightarrow \frac{CQ}{CA} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Ta có } \frac{S_{\Delta CPQ}}{S_{\Delta CBA}} = \frac{CP}{CB} \cdot \frac{CQ}{CA} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \Rightarrow S_{\Delta CPQ} = \frac{2}{9} S_{\Delta ABC}$$

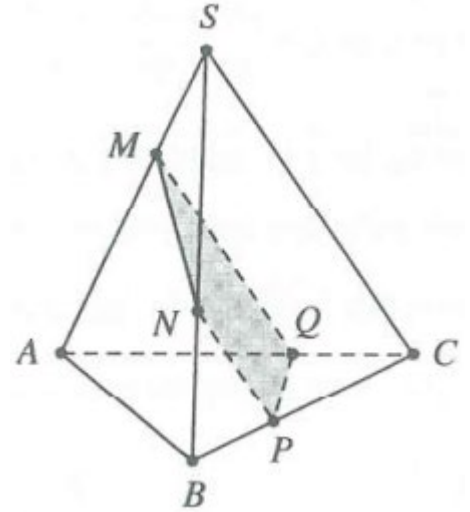
$$\text{Và } d(N; (ABC)) = \frac{1}{3} d(S; (ABC)) \Rightarrow V_{N.CPQ} = \frac{2}{27} V_{S.ABC} = \frac{2V}{27}.$$

$$\text{Lại có } \frac{S_{\Delta AMQ}}{S_{\Delta ASC}} = \frac{AM}{SA} \cdot \frac{AQ}{AC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \Rightarrow S_{\Delta MQC} = \frac{5}{9} S_{\Delta ASC}.$$

$$\text{Và } d(N; (SAC)) = \frac{2}{3} d(B; (SAC)) \Rightarrow V_{N.SMQC} = \frac{10}{27} V_{S.ABC} = \frac{10V}{27}.$$

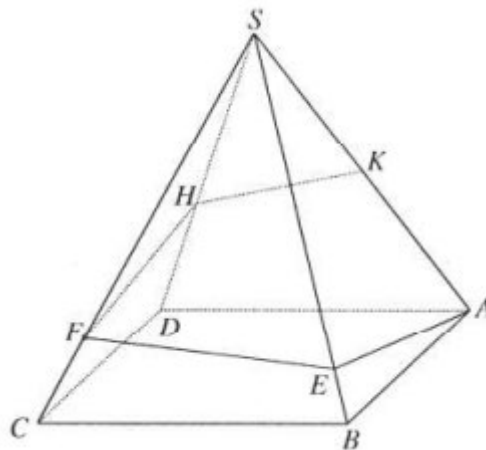
$$\text{Do đó } V_2 = V_{SCMNPQ} = V_{N.CPQ} + V_{N.SMQC} = \frac{2V}{27} + \frac{10V}{27} = \frac{4V}{9} \Rightarrow V_1 = \frac{5V}{9}.$$

$$\text{Vậy } \frac{V_1}{V_2} = \frac{5V}{9} : \frac{4V}{9} = \frac{5}{4}. \text{ Chọn B}$$



Ví dụ 23: Thị xã Từ Sơn xây dựng một ngọn tháp đèn lồng lấy hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có cạnh bên $SA = 12m$ và $\widehat{ASB} = 30^\circ$. Người ta cần mắc một đường dây điện từ điểm A đến trung điểm K của SA gồm AE, EF, FH, HK như hình vẽ. Để tiết kiệm chi phí người ta cần thiết kế được chiều dài con đường từ A đến

K là ngắn nhất. Tính tỉ số $k = \frac{HF + HK}{EA + EF}$



A. $k = \frac{3}{4}$

B. $k = \frac{1}{2}$

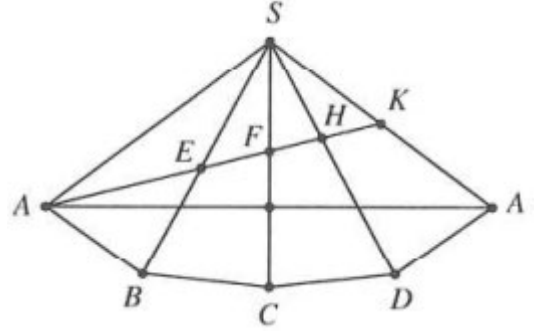
C. $k = \frac{1}{3}$

D. $k = \frac{2}{3}$

Lời giải

Giả sử ngọn tháp được làm bằng bìa nên ta cắt được ngọn tháp theo các đường SA, AB, BC, CD, DA . Và trải các mặt bên SAB, SBC, SCD, SDA lên cùng một mặt phẳng.

Vì $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = \widehat{DSA} = 30^\circ$ nên khi trải ra mặt phẳng ta thu được một tam giác cân SAA có góc ở đỉnh $\widehat{S} = 4 \cdot 30^\circ = 120^\circ$ như hình vẽ bên.



Để độ dài đoạn gấp khúc $AE + EF + FH + HK$ nhỏ nhất khi và chỉ khi A, E, F, H, K thẳng hàng.

Vì K là trung điểm của $SA \Rightarrow F = SC \cap AK \Rightarrow F$ là trọng tâm của tam giác SAA

Vậy tỉ số $k = \frac{HF + HK}{EA + EF} = \frac{FK}{AF} = \frac{1}{2}$. **Chọn B.**

Ví dụ 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có thể tích là V . Gọi M là một điểm trên cạnh AB sao cho $\frac{MA}{MB} = x, 0 < x < 1$. Biết rằng mặt phẳng (α) qua M và song song với (SBC) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần trong đó phần chứa điểm A có thể tích bằng $\frac{4}{27}V$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \frac{1-x}{1+x}.$$

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{5}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{3}{5}$

Lời giải

Kẻ $MN \parallel BC (N \in CD), NP \parallel SC (P \in SD), MQ \parallel SB (Q \in SA)$.

$\Rightarrow mp(\alpha)$ cắt chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là $MNPQ$.

Ta có $\frac{MA}{AB} = \frac{AQ}{SA} = \frac{ND}{CD} = x \Rightarrow \frac{SQ}{SA} = \frac{SP}{SD} = 1-x$

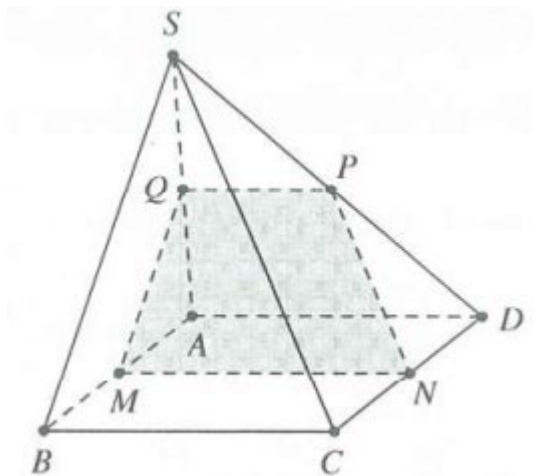
Mặt khác $\triangle AMN = \triangle ADN$

$$\Rightarrow V_{Q.AMN} = V_{P.ADN} = x \cdot V_{S.AMN} = \frac{x}{2} V_{S.AMND} = \frac{x^2}{2} V.$$

Và $V_{N.APQ} = x(1-x) \times V_{N.SAD} = \frac{x^2(1-x)}{2} V.$

Do đó $V_{AQM.DPN} = V_{Q.AMN} + V_{P.AND} + V_{N.APQ}$

$$= \frac{3x^2 - x^3}{2} \times V = \frac{4}{27} V$$



$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + \frac{8}{27} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}. \text{ Vậy } P = \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \bigg|_{x=\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}. \text{ Chọn A.}$$

Ví dụ 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích bằng 1. Trên cạnh SC lấy điểm E sao cho $SE = 2EC$. Tính thể tích V của khối tứ diện $SEBD$.

- A. $V = \frac{2}{3}$. B. $V = \frac{1}{6}$. C. $V = \frac{1}{3}$. D. $V = \frac{4}{3}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.EBD}}{V_{S.BCD}} = \frac{SE}{SC} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{S.EBD} = \frac{2}{3} V_{S.BCD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}. \text{ Chọn C.}$$

Ví dụ 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , SA vuông góc với mặt đáy. Gọi M là trung điểm của BC . Mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với SM cắt SB , SC lần lượt tại E , F . Biết

$$V_{S.AEF} = \frac{1}{4} V_{S.ABC}. \text{ Tính thể tích } V \text{ của khối chóp } S.ABC.$$

- A. $V = \frac{a^3}{2}$ B. $V = \frac{a^3}{8}$ C. $V = \frac{2a^3}{5}$ D. $V = \frac{a^3}{12}$

Lời giải

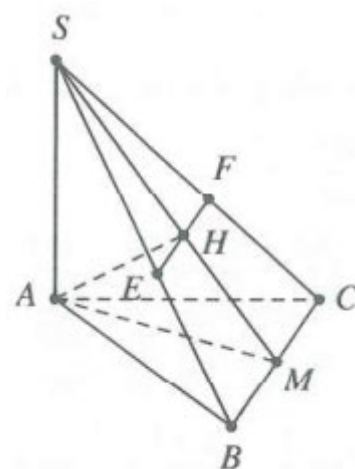
Dựng $AH \perp SM$, dựng đường thẳng qua H song song với BC cắt SB , SC lần lượt tại E , F .

Khi đó $EF \parallel BC \perp SM \Rightarrow mp(AEF) \perp SM$.

$$\text{Lại có: } V_{S.AEF} = \frac{1}{4} V_{S.ABC} \Rightarrow \frac{SE}{SB} = \frac{SF}{SC} = \frac{SH}{SM} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Do đó } \triangle SAM \text{ vuông cân tại } A \Rightarrow SA = SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABC} = \frac{a^3}{8}. \text{ Chọn B.}$$



Ví dụ 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, gọi M , P lần lượt là trung điểm của SA và SC .

Điểm N thuộc cạnh SB sao cho $\frac{SN}{SB} = k$. Mặt phẳng (MNP) cắt khối chóp theo thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Biết rằng $\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{2}{15}$, giá trị của k là:

- A. $k \in \left\{ \frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right\}$. B. $k \in \left\{ \frac{1}{3}; \frac{2}{5} \right\}$. C. $k \in \left\{ \frac{2}{3}; \frac{2}{5} \right\}$. D. $k \in \left\{ \frac{3}{5}; \frac{2}{5} \right\}$.

Lời giải

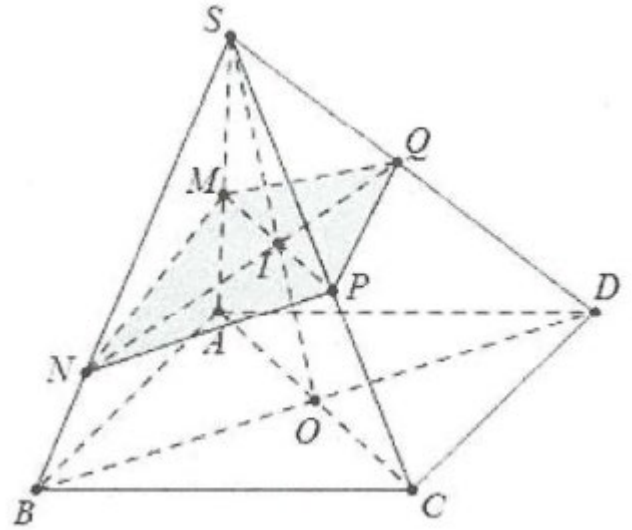
Ta có $\frac{SM}{SA} = x; \frac{SN}{SB} = y; \frac{SP}{SC} = z; \frac{SQ}{SD} = t$.

Ta có: $x = z = \frac{1}{2}$, mà $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} + \frac{1}{y} + \frac{1}{t} = 4$.

Áp dụng công thức nhanh ta có:

$$\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{xyzt}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z} + \frac{1}{y} + \frac{1}{t} \right) = \frac{yt}{16} \cdot 2 \cdot 4 = \frac{2}{15}.$$

$$\Leftrightarrow yt = \frac{4}{15} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y+t}{yt} = 4 \\ yt = \frac{4}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yt = \frac{4}{15} \\ yt = \frac{16}{15} \end{cases}$$



Khi đó y, t là nghiệm của phương trình $X^2 - \frac{16}{15}X + \frac{4}{15} = 0 \Rightarrow \begin{cases} X = \frac{2}{3} \\ X = \frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow k \in \left\{ \frac{2}{5}; \frac{2}{3} \right\}$. **Chọn C**

Ví dụ 28: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 1, AD = 2, SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy ($ABCD$) và $SA = 2$. Điểm M trên cạnh SA sao cho (MBC) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần có thể tích bằng nhau. Tính diện tích S của tam giác MAC .

A. $S = \frac{3\sqrt{5} - 5}{2}$.

B. $S = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

C. $S = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

D. $S = \frac{5 - \sqrt{5}}{4}$.

Lời giải

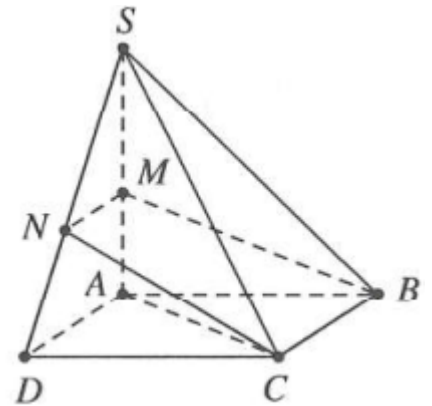
Qua M kẻ đường thẳng $d \parallel BC$, cắt SD tại $N \Rightarrow N \in (MBC)$

Đặt $\frac{SA}{SM} = k \Rightarrow \frac{SD}{SN} = k$

Khi đó $\frac{V_{S.MBCN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{\frac{SA}{SM} + \frac{SB}{SB} + \frac{SC}{SC} + \frac{SD}{SN}}{4 \cdot \frac{SA}{SM} \cdot \frac{SB}{SB} \cdot \frac{SC}{SC} \cdot \frac{SD}{SN}} = \frac{k+1}{2k^2}$

Theo bài: $\frac{V_{S.MBCN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{k+1}{2k^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow MA = 3 - \sqrt{5}$

Diện tích tam giác MAC là $S = \frac{1}{2}MA \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot (3 - \sqrt{5}) \cdot \sqrt{5} = \frac{3\sqrt{5} - 5}{2}$. **Chọn A.**



Ví dụ 29: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M thuộc cạnh SA , P thuộc cạnh SC sao cho $2SM = AM, SP = PC$. Mặt phẳng (α) chứa MP , chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Gọi V_1, V lần lượt là thể tích khối đa diện chứa đỉnh S và thể tích khối chóp $S.ABCD$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{V_1}{V}$ là

A. $\frac{5}{12}$

B. $\frac{1}{25}$

C. $\frac{1}{15}$

D. $\frac{2}{25}$

Lời giải

Giả sử mặt phẳng (α) chứa MP , cắt đường thẳng SB, SD lần lượt tại N, Q .

Khi đó $\frac{SA}{SM} + \frac{SC}{SP} = \frac{SB}{SN} + \frac{SD}{SQ} \Leftrightarrow 3 + 2 = x + y \Leftrightarrow x + y = 5$.

Và $\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{\frac{SA}{SM} + \frac{SB}{SN} + \frac{SC}{SP} + \frac{SD}{SQ}}{4 \cdot \frac{SA}{SM} \cdot \frac{SB}{SN} \cdot \frac{SC}{SP} \cdot \frac{SD}{SQ}} = \frac{x + y + 5}{4 \cdot 3 \cdot x \cdot 2 \cdot y} = \frac{x + y + 5}{24xy} = \frac{5}{12xy}$

Ta có $4xy \leq (x + y)^2 = 25 \Leftrightarrow 12xy \leq 75 \longrightarrow \frac{5}{12xy} \geq \frac{5}{75} = \frac{1}{15}$

Vậy tỉ số $\frac{V_1}{V}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{15}$. **Chọn C.**

Ví dụ 30: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M là điểm thuộc cạnh SB , N là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SB = 3BM, SN = 2ND$. Mặt phẳng (AMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối đa diện chứa đỉnh S và đỉnh C . Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$

A. $\frac{2}{3}$

B. 2

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{2}$

Lời giải

Giả sử mặt phẳng (AMN) cắt đường thẳng SC tại P .

Khi đó $\frac{SA}{SA} + \frac{SC}{SP} = \frac{SB}{SM} + \frac{SD}{SN} \Leftrightarrow 1 + \frac{SC}{SP} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{SC}{SP} = 2$

$$\text{Và } \frac{V_{S.AMPN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{\frac{SA}{SA} + \frac{SB}{SM} + \frac{SC}{SP} + \frac{SD}{SN}}{4 \cdot \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SB}{SM} \cdot \frac{SC}{SP} \cdot \frac{SD}{SN}} = \frac{1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{3}{2}}{4 \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.ABCD} = 3V_1$$

$$\text{Mà } V_{S.ABCD} = V_{S.AMPN} + V_{AMPN.BCD} = V_1 + V_2 = 3V_1 \Leftrightarrow V_2 = 2V_1 \Leftrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}. \text{ Chọn D.}$$

➤ Dạng 2: Tỷ số thể tích khối lăng trụ

Ví dụ 1: Gọi V là thể tích của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, V_1 là thể tích tứ diện $A'ABD$. Hệ thức nào sau đây đúng?

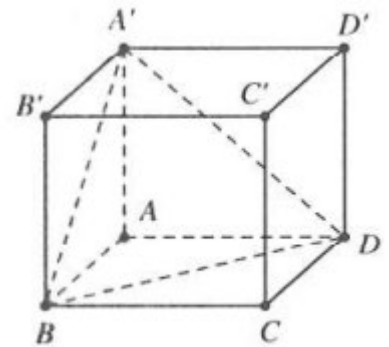
- A. $V = 6V_1$ B. $V = 4V_1$ C. $V = 3V_1$ D. $V = 2V_1$

Lời giải

$$\text{Ta có } V = S_{ABCD} \cdot AA' \text{ và } V_1 = \frac{1}{3} S_{\triangle ABD} \cdot AA'$$

$$\text{Mà } S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} \longrightarrow \frac{V}{V_1} = 6$$

Suy ra $V = 6V_1$. **Chọn A.**



Ví dụ 2: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Gọi D là trung điểm của AC . Tính tỷ số thể tích khối tứ diện $B'BAD$ và thể tích khối lăng trụ đã cho.

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{12}$ D. $\frac{1}{3}$

Lời giải

$$\text{Ta có } V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot BB' \text{ và } V_{B'BAD} = \frac{1}{3} S_{\triangle BAD} \cdot BB'.$$

$$\text{Mà } S_{\triangle BAD} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} \longrightarrow k = \frac{V_{B'BAD}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{6}. \text{ Chọn B.}$$

Ví dụ 3: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đường thẳng đi qua trọng tâm của tam giác ABC và song song với BC cắt các cạnh AB , AC lần lượt tại M , N . Mặt phẳng $(A'MN)$ chia khối lăng trụ thành hai phần. Tính tỷ số thể tích (phần bé chia phần lớn) của chúng.

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{4}{23}$ C. $\frac{4}{9}$ D. $\frac{4}{27}$

Lời giải

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC .

Gọi E là trung điểm của $BC \Rightarrow \frac{AG}{AE} = \frac{2}{3}$

Qua G kẻ đường thẳng $d \parallel BC$, cắt AB, AC lần lượt tại M, N .

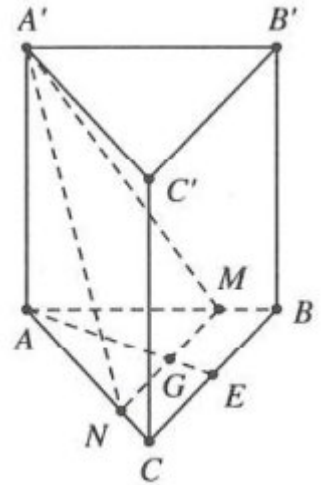
$$\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{AG}{AE} = \frac{2}{3} \text{ (định lý Talet)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AM = \frac{2}{3} AB \\ AN = \frac{2}{3} AC \end{cases} \Rightarrow S_{\triangle AMN} = \frac{4}{9} S_{\triangle ABC} \quad (1).$$

$$\text{Ta có } V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot AA' \text{ và } V_{A'.AMN} = \frac{1}{3} S_{\triangle AMN} \cdot AA' \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow V_{A'.AMN} = \frac{4}{27} V_{ABC.A'B'C'} \Rightarrow V_{BMNC,A'B'C'} = \frac{23}{27} V_{ABC.A'B'C'}$$

Vậy tỉ số cần tìm là $\frac{4}{27} : \frac{23}{27} = \frac{4}{23}$. **Chọn B.**



Ví dụ 4: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AC = 2\sqrt{2}$. Biết AC' tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60° và $AC' = 4$. Tính thể tích của khối đa diện $ABCC'B'$.

A. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $2\sqrt{3}$

D. $\frac{16\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Gọi H là hình chiếu của A trên mặt phẳng $(A'B'C')$.

Suy ra HC' là hình chiếu của AC' trên mặt phẳng $(A'B'C')$.

$$\text{Do đó } (\widehat{AC';(ABC)}) = (\widehat{AC';HC'}) = \widehat{AHC'} = 60^\circ$$

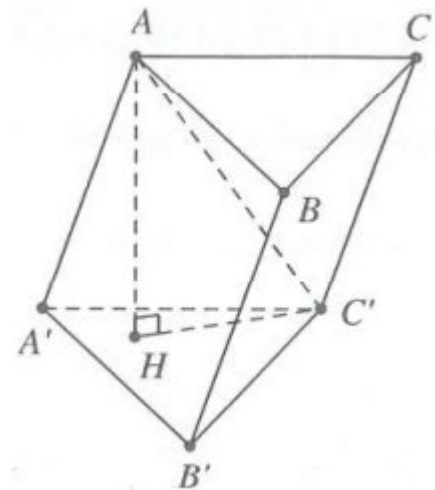
$$\text{Tam giác } AHC', \text{ có } AH = AC' \sin \widehat{AC'H} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{Diện tích tam giác } S_{\triangle ABC} = \frac{AC^2}{2} = 4$$

$$\text{Suy ra } V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot AH = 8\sqrt{3}$$

$$\text{Ta có } V_{A.A'B'C'} = \frac{1}{3} S_{\triangle A'B'C'} \cdot AH = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Suy ra } V_{ABCC'B'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A.A'B'C'} = \frac{16\sqrt{3}}{3}. \text{ Chọn D.}$$



Ví dụ 5: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích V . Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AC, AB', AD' sao cho $AM = 2AC, AN = 3AB', AP = 4AD'$. Tính thể tích của khối tứ diện $AMNP$ theo V .

A. $V_{AMNP} = 8V$

B. $V_{AMNP} = 4V$

C. $V_{AMNP} = 6V$

D. $V_{AMNP} = 12V$

Lời giải

Ta có $V = V_{AB'D'C'} + (V_{AA'B'D'} + V_{CC'B'D'} + V_{D'DAC} + V_{B'BAC})$.

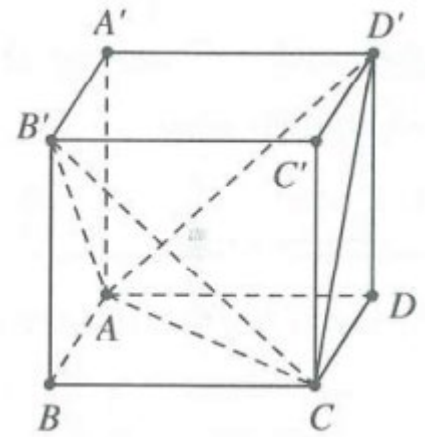
Mà $V_{AA'B'D'} = V_{CC'B'D'} = V_{D'DAC} = V_{B'BAC} = \frac{V}{6}$.

Suy ra $V_{AB'D'C'} = \frac{V}{3}$.

Từ giả thiết, ta có $\frac{AB'}{AN} = \frac{1}{3}; \frac{AC}{AM} = \frac{1}{2}; \frac{AD'}{AP} = \frac{1}{4}$.

Ta có $\frac{V_{A.B'D'C'}}{V_{A.NPM}} = \frac{AB'}{AN} \cdot \frac{AD'}{AP} \cdot \frac{AC}{AM} = \frac{1}{24}$.

→ $V_{A.NPM} = 24V_{A.B'D'C'} = 24 \cdot \frac{V}{3} = 8V$. **Chọn A.**



Nhận xét: Công thức giải nhanh: Thể tích của khối tứ diện (4 đỉnh nằm trên hai đường chéo của hai mặt đối diện) có thể tích bằng $\frac{1}{3}$ của khối lăng trụ tam giác.

Ví dụ 6: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 30° .

Điểm M nằm trên cạnh AA' . Biết cạnh $AB = a\sqrt{3}$, thể tích khối đa diện $MBCC'B'$ bằng

A. $\frac{3a^3}{4}$.

B. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$.

D. $\frac{2a^3}{3}$.

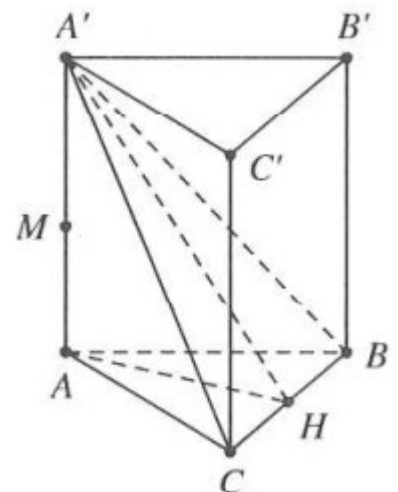
Lời giải

Gọi V là thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Do $AA' \parallel BB' \Rightarrow V_{M.BCC'B'} = V_{A'.BCC'B'} = V - V_{A'.ABC} = V - \frac{V}{3} = \frac{2V}{3}$

Dựng $AH \perp BC$ mà $AA' \perp BC \Rightarrow BC \perp (A'HA)$

Do đó $\widehat{(A'BC);(ABC)} = \widehat{A'HA} = 30^\circ \Rightarrow AH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2}$.



Khi đó $AA' = AH \cdot \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{9a^3}{8}$.

Vậy thể tích cần tính là $V_{M.BCC'B'} = 2 \frac{V}{3} = \frac{3a^3}{4}$. **Chọn A.**

Ví dụ 7: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V . Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $\frac{AM}{AA'} = \frac{1}{2}; \frac{BN}{BB'} = \frac{CP}{CC'} = \frac{2}{3}$. Tính thể tích của khối đa diện $ABC.MNP$

A. $V' = \frac{2}{3}V$

B. $V' = \frac{9}{16}V$

C. $V' = \frac{20}{27}V$

D. $V' = \frac{11}{18}V$

Lời giải

Công thức giải nhanh $V_{ABC.MNP} = \left(\frac{m+n+p}{3} \right) V$ với $m = \frac{AM}{AA'}, n = \frac{BN}{BB'}, p = \frac{CP}{CC'}$.

Áp dụng với: $m = \frac{1}{2}; n = \frac{2}{3}; p = \frac{2}{3}$, ta được $V_{ABC.MNP} = \frac{11}{18}V$. **Chọn D.**

Ví dụ 8: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh $2a$, gọi M là trung điểm của BB' và P thuộc cạnh DD' sao cho $DP = \frac{1}{4}DD'$. Mặt phẳng (AMP) cắt CC' tại N . Thể tích khối đa diện $AMNPBCD$ bằng

A. $V = 2a^3$

B. $V = 3a^3$

C. $V = \frac{11a^3}{3}$

D. $V = \frac{9a^3}{4}$

Lời giải

Áp dụng công thức tính nhanh, ta được

$$\frac{V_{AMNPBCD}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{1}{2} \left(\frac{BM}{BB'} + \frac{DP}{DD'} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{8} \longrightarrow V_{AMNPBCD} = \frac{3}{8} \cdot (2a)^3 = 3a^3. \text{ **Chọn B**}$$

Ví dụ 9: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm thuộc CC' thỏa mãn $CC' = 4CM$. Mặt phẳng $(AB'M)$ chia khối hộp thành hai phần có thể tích là V_1 và V_2 . Gọi V_1 là phần thể tích có chứa điểm B . Tính

tỉ số $k = \frac{V_1}{V_2}$.

A. $k = \frac{7}{32}$

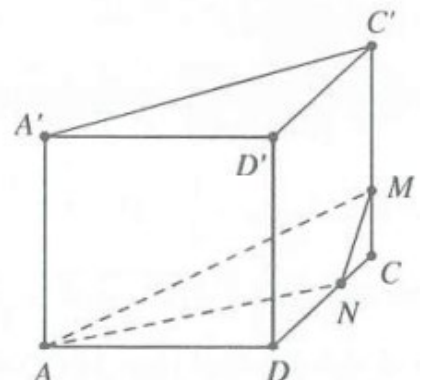
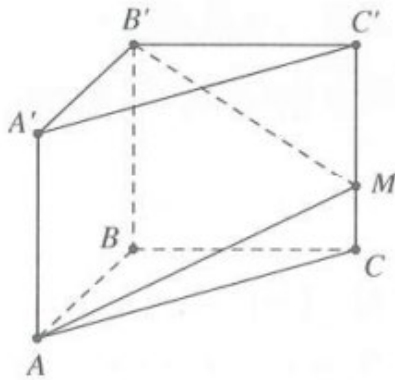
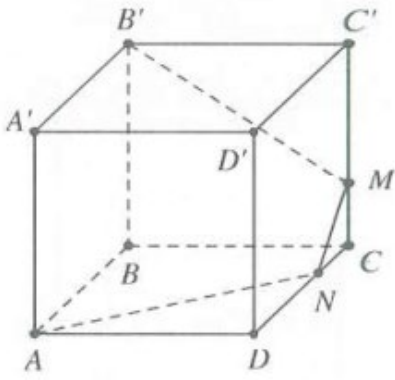
B. $k = \frac{7}{16}$

C. $k = \frac{7}{25}$

D. $k = \frac{25}{32}$

Lời giải

Trong mặt phẳng $(CDD'C')$, kẻ $MN \parallel C'D$. Suy ra $CN = \frac{1}{4}CD$ và V_1 là khối đa diện $ABB'NCM$.



Ta chia khối hộp thành hai phần (như hình vẽ). Khi đó $V_{ABB'NCM} = V_{ABB'CM} + V_{MACN}$.

• $V_{ABB'CM} = \frac{0 + \frac{1}{4} + 1}{3} \cdot V_{ABC.A'B'C'} = \frac{5}{12} \cdot \left(\frac{1}{2}V\right)$

• $V_{MACN} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} V_{C'.ADC} = \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{1}{3} V_{ADC.A'D'C'}\right) = \frac{1}{96} V$.

Vậy $V_1 = V_{ABB'NCM} = V_{ABB'CM} + V_{MACN} = \frac{7}{32} V \longrightarrow V_2 = \frac{25}{32} \longrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{25}$. **Chọn C**

Nhận xét: Ta có $V_{MACN} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} V_{C'.ADC}$ vì diện tích giảm 4 lần và chiều cao giảm 4 lần

Ví dụ 10: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M là trung điểm của $A'B'$, N là trung điểm của BC . Tính thể tích của khối tứ diện $ADMN$.

A. $V = \frac{a^3}{3}$.

B. $V = \frac{a^3}{12}$.

C. $V = \frac{a^3}{6}$.

D. $V = \frac{a^3}{2}$.

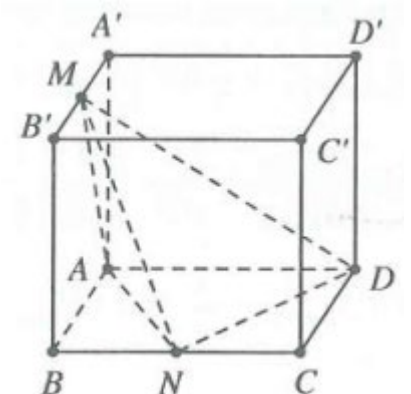
Lời giải

Ta có $V_{ADMN} = V_{M.ADN} = \frac{1}{3} \cdot d(M; (ABCD)) \cdot S_{\triangle ADN}$

Lại có $d(M; (ABCD)) = d(A'; (ABCD)) = AA'$

Và $S_{\triangle ADN} = S_{ABCD} - S_{\triangle ABN} - S_{\triangle CDN} = S_{ABCD} - \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$

Do đó $V_{ADMN} = \frac{1}{3} \cdot AA' \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{6} AA' \cdot S_{ABCD} = \frac{V_{ABCD.A'B'C'D'}}{6} = \frac{a^3}{6}$.



Chọn C.

Ví dụ 11: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = 2a$. Diện tích tam giác $A'DC$ bằng $\frac{a^2\sqrt{13}}{2}$. Tính thể tích khối chóp $A'.BCC'B'$ theo a .

A. a^3

B. $2a^3$

C. $3a^3$

D. $6a^3$

Lời giải

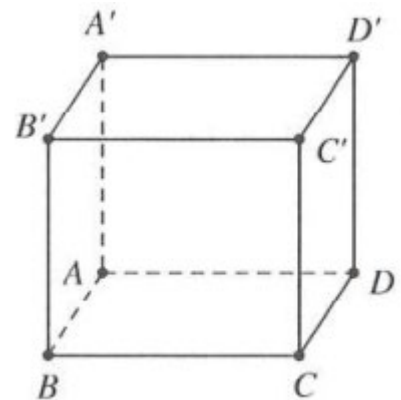
Ta có $\begin{cases} CD \perp DD' \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ADD'A') \Rightarrow CD \perp A'D$.

Suy ra $S_{\Delta A'DC} = \frac{1}{2} \cdot A'D \cdot CD = \frac{a^2\sqrt{13}}{2} \rightarrow A'D = a\sqrt{13}$

Do đó $AA' = \sqrt{A'D^2 - AD^2} = \sqrt{(a\sqrt{13})^2 - (2a)^2} = 3a$.

Thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là $V = AA' \cdot AB \cdot AD = 6a^3$.

Lại có $V_{A'.BCC'B'} = \frac{1}{3} V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{3} \cdot 6a^3 = 2a^3$. **Chọn B.**



Ví dụ 12: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M thuộc cạnh AB sao cho $MB = 2MA$. Mặt phẳng $(MB'D')$ chia khối hộp thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó.

A. $\frac{5}{12}$.

B. $\frac{7}{17}$.

C. $\frac{13}{41}$.

D. $\frac{5}{17}$.

Lời giải

Lý thuyết bổ sung:

Cho hình chóp cụt $ABC.A'B'C'$ có chiều cao h , S_1 là diện tích tam giác ABC , S_2 là diện tích tam giác

$A'B'C'$. Thể tích khối chóp cụt $ABC.A'B'C'$ là $V = \frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2})$

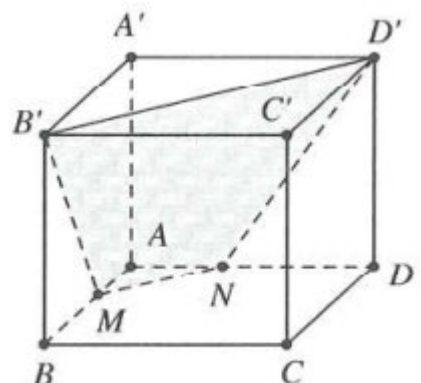
Qua M kẻ đường thẳng $d \parallel BD$, cắt AD tại N

Suy ra thiết diện cắt bởi mặt phẳng $(MB'D')$ là $MND'B'$

Khi đó $V_{ABCD.A'B'C'D'} = V_{AMN.A'B'D'} + V_{B'C'D'.MBCDN}$

Đặt $AA' = h; S_{ABCD} = S \rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = S.h$

Áp dụng công thức tính thể tích chóp cụt, ta có



$$V_{AMN.A'B'D'} = \frac{1}{3} AA' \cdot (S_{\Delta AMN} + S_{\Delta A'B'D'} + \sqrt{S_{\Delta AMN} \cdot S_{\Delta A'B'D'}})$$

$$\text{Mà } \frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ABD}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AD} = \frac{1}{9} \Rightarrow S_{\Delta AMN} = \frac{1}{9} S_{\Delta ABD} = \frac{S}{18}.$$

$$\text{Và } S_{\Delta A'B'D'} = \frac{S}{2} \longrightarrow V_{AMN.A'B'D'} = \frac{1}{3} h \left(\frac{S}{18} + \frac{S}{2} + \sqrt{\frac{S}{18} \cdot \frac{S}{2}} \right) = \frac{13}{54} V$$

$$\text{Vậy tỉ số thể tích cần tính là } \frac{13}{54} : \left(1 - \frac{13}{54} \right) = \frac{13}{41}. \text{ Chọn C.}$$

Ví dụ 13: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I là trung điểm của BB' , mặt phẳng (DIC') chia khối lập phương thành 2 phần có tỉ số thể tích phần bé chia phần lớn bằng

A. $\frac{3}{8}$

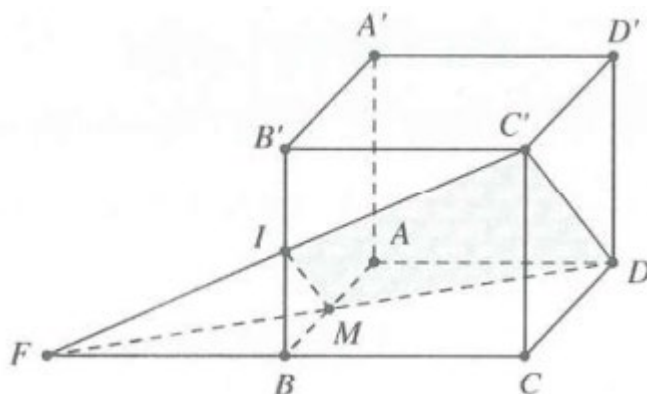
B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{7}{17}$

D. $\frac{5}{12}$

Lời giải

Tham khảo hình vẽ dưới đây:



$$\text{Đặt } AA' = h; S_{ABCD} = S \longrightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = S.h$$

Nối IC' cắt BC tại F ; nối FD cắt AB tại M .

Suy ra $mp(DIC')$ chia khối lập phương thành hai khối $IBM.C'DD'$ và $IMAA'B'.C'DD'$

$$\text{Vì } M \text{ là trung điểm của } AB \text{ mà } BM \parallel CD \Rightarrow \frac{FB}{FC} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ta có } BI \parallel CC' \Rightarrow \frac{IB}{CC'} = \frac{FB}{FC} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{\Delta IBM} = \frac{1}{4} S_{\Delta BAB'} = \frac{1}{8} S_{ABB'A'}$$

Áp dụng công thức tính thể tích chóp cụt, ta được

$$V_{IBM.C'DD'} = \frac{1}{3} BC \cdot (S_{\Delta IBM} + S_{\Delta C'DD'} + \sqrt{S_{\Delta IBM} \cdot S_{\Delta C'DD'}}) = \frac{1}{3} h \cdot \left(\frac{S}{8} + \frac{S}{2} + \sqrt{\frac{S}{8} \cdot \frac{S}{2}} \right) = \frac{7}{24} Sh$$

$$\text{Do đó, thể tích khối } IMAA'B'.C'DD' \text{ là } V_{IMAA'B'.C'DD'} = V - \frac{7}{24} V = \frac{17}{24} V.$$

Vậy tỉ số cần tính là $\frac{7}{24} : \frac{17}{24} = \frac{7}{17}$. **Chọn C.**

Ví dụ 14: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AA' và BB' . Đường thẳng CM cắt đường thẳng $C'A'$ tại P , đường thẳng CN cắt đường thẳng $C'B'$ tại Q . Thể tích của khối đa diện lồi $A'MPB'NQ$ bằng:

A. 1

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{2}{3}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } V_{C.ABNM} = \frac{1}{2}V_{C.ABB'A'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{3}.$$

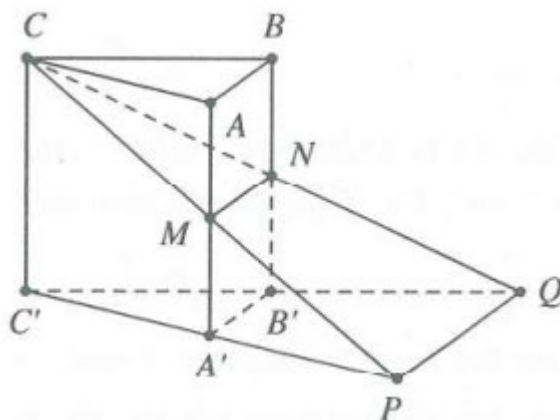
$$\text{Suy ra } V_{CMN.A'B'C'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{C.ABNM} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Lại có } V_{C.C'PQ} = V_{CMN.A'B'C'} + V_{A'MPB'NQ}$$

$$\Rightarrow V_{A'MPB'NQ} = V_{C.C'PQ} - \frac{2}{3}. \text{ Mà } S_{\Delta C'PQ} = 4S_{\Delta B'C'}$$

$$\Rightarrow V_{C.C'PQ} = 4V_{C'.A'B'C'} = 4 \cdot \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Vậy } V_{A'MPB'NQ} = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}. \text{ **Chọn D.**}$$



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho khối chóp $S.ABC$, trên ba cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm A', B', C' sao cho $SA' = \frac{1}{3}SA, SB' = \frac{1}{3}SB, SC' = \frac{1}{3}SC$. Gọi V và V' lần lượt là thể tích của các khối chóp $S.ABC$ và $S.A'B'C'$.

Tính tỉ số $\frac{V}{V'}$

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{27}$ C. $\frac{1}{9}$ D. $\frac{1}{6}$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M là trung điểm cạnh SA và N là điểm trên cạnh SC sao cho $SN = 3NC$. Tính tỉ số k giữa thể tích khối chóp $ABMN$ và thể tích khối chóp $S.ABC$.

- A. $k = \frac{3}{8}$ B. $k = \frac{2}{5}$ C. $k = \frac{1}{3}$ D. $k = \frac{3}{4}$

Câu 3: Cho khối tứ diện có thể tích bằng V . Gọi V' là thể tích của khối đa diện có các đỉnh là các trung điểm của các cạnh của khối tứ diện đã cho, tính tỉ số $\frac{V'}{V}$.

- A. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{2}$ B. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{4}$ C. $\frac{V'}{V} = \frac{2}{3}$ D. $\frac{V'}{V} = \frac{5}{8}$

Câu 4: Cho khối chóp $S.ABC$ có thể tích bằng V . Điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB , N là điểm nằm giữa AC sao cho $AN = 2NC$. Gọi V' là thể tích khối chóp $S.AMN$. Tính tỉ số $\frac{V'}{V}$.

- A. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{3}$ B. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{2}$ C. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{6}$ D. $\frac{V'}{V} = \frac{2}{3}$

Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng V và G là trọng tâm tam giác BCD , M là trung điểm CD . Thể tích khối chóp $AGMC$ là

- A. $\frac{V}{18}$ B. $\frac{V}{9}$ C. $\frac{V}{6}$ D. $\frac{V}{3}$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AC = 2a, SA$ vuông góc với đáy, $SA = a, I$ thuộc cạnh SB sao cho $SI = \frac{1}{3}SB$. Tính thể tích khối chóp $S.ACI$.

- A. $\frac{a^3}{3}$ B. $\frac{a^3}{6}$ C. $\frac{a^3}{12}$ D. $\frac{a^3}{9}$

Câu 7: Cho khối chóp $S.ABC$ có thể tích bằng V . Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA . Tính thể tích khối chóp

- A. $\frac{V}{2}$ B. $\frac{V}{3}$ C. $\frac{V}{4}$ D. $\frac{V}{8}$

Câu 8: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $SA = 3a$. D thuộc cạnh SB và $DB = a$. Mặt phẳng (α) đi qua AD và song song với BC cắt SC tại E . Tính tỉ số giữa thể tích khối tứ diện $SADE$ và thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{2}{9}$

B. $\frac{4}{9}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{4}$

Câu 9: Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích là V và điểm E trên cạnh AB sao $AE = 3EB$. Tính thể tích V' của khối tứ diện $EBCD$ theo V .

A. $V' = \frac{V}{2}$

B. $V' = \frac{V}{5}$

C. $V' = \frac{V}{3}$

D. $V' = \frac{V}{4}$

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABC$, $SA \perp (ABC)$, $SA = a$, ΔABC vuông cân, $AB = AC = a$, B' là trung điểm của SB , C' là chân đường cao hạ từ A của ΔSAC . Tính thể tích của khối chóp $S.AB'C'$

A. $\frac{a^3}{9}$

B. $\frac{a^3}{12}$

C. $\frac{a^3}{36}$

D. $\frac{a^3}{24}$

Câu 11: Cho khối chóp $S.ABC$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC . Mặt phẳng (α) qua AG và song song với BC cắt SB , SC lần lượt tại I , J . Tính tỉ số của hai khối tứ diện $SAIJ$ và $S.ABC$.

A. $\frac{2}{9}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{4}{9}$

D. $\frac{8}{27}$

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = a$. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính thể tích V của khối chóp $M.ABC$, với M là trung điểm của SB .

A. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{2}$.

B. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

C. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

D. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân, $AB = AC = a$, SC vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SC = a$. Mặt phẳng qua C , vuông góc với SB và cắt SA , SB lần lượt tại E , F . Tính thể tích khối chóp $S.CEF$.

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{36}$

C. $\frac{a^3}{36}$

D. $\frac{a^3}{12}$

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có thể tích V . Gọi H , K lần lượt là trung điểm của SB và SC . Tính thể tích khối chóp $S.AHK$ theo V .

A. $V_{S.AHK} = \frac{1}{2}V$

B. $V_{S.AHK} = \frac{1}{4}V$

C. $V_{S.AHK} = \frac{1}{12}V$

D. $V_{S.AHK} = \frac{1}{6}V$

Câu 15: Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích là $3a^3$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB . Thể tích của khối chóp $G.ABCD$ là

A. $V = a^3$

B. $V = 2a^3$

C. $V = \frac{1}{3}a^3$

D. $V = \frac{4}{3}a^3$

Câu 16: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có độ dài cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a . Gọi M , N , O lần lượt là trung điểm SC , SD , AC . Tính tỉ số thể tích $\frac{V_{S.OMN}}{V_{S.ABCD}}$.

A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{12}$

D. $\frac{1}{16}$

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SC = 2a$ và $SC \perp (ABC)$. Đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và có $AB = a\sqrt{2}$. Mặt phẳng (α) đi qua C vuông góc với SA và cắt SA, SB lần lượt tại D, E . Tính thể tích khối chóp $S.CDE$.

A. $\frac{4a^3}{9}$

B. $\frac{2a^3}{3}$

C. $\frac{2a^3}{9}$

D. $\frac{a^3}{9}$

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC thỏa mãn $AB = 2a, BC = 4a, AC = 2\sqrt{5}a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC . Tính thể tích V của khối chóp $S.AMN$.

A. $V = \frac{2a^3}{9}$

B. $V = \frac{a^3}{12}$

C. $V = \frac{a^3\sqrt{5}}{2}$

D. $V = \frac{a^3\sqrt{5}}{3}$

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B , cạnh SA vuông góc với đáy, góc $\widehat{ACB} = 60^\circ$, $BC = a, SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của SB . Tính thể tích V của khối tứ diện $MABC$.

A. $V = \frac{a^3}{2}$

B. $V = \frac{a^3}{3}$

C. $V = \frac{a^3}{6}$

D. $V = \frac{a^3}{4}$

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $SA = 2a$ và SA vuông góc với đáy (ABC) . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB và P là hình chiếu vuông góc của A lên SC . Tính thể tích V của khối chóp $S.MNP$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{30}a^3$

B. $\frac{\sqrt{3}}{6}a^3$

C. $\frac{\sqrt{3}}{15}a^3$

D. $\frac{\sqrt{3}}{10}a^3$

Câu 21: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = \widehat{CSB} = 60^\circ, \widehat{ASC} = 90^\circ$. $SA = SB = 1, SC = 3$. Gọi M là điểm trên cạnh SC sao cho $SM = \frac{1}{3}SC$. Khi đó, thể tích của khối chóp $S.ABM$ bằng

A. $V = \frac{\sqrt{6}}{36}$

B. $V = \frac{\sqrt{3}}{36}$

C. $V = \frac{\sqrt{2}}{12}$

D. $V = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 4, SB = 5, SC = 6, \widehat{ASB} = \widehat{BSC} = 45^\circ, \widehat{CSA} = 60^\circ$. Các điểm M, N, P thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BN}; \overrightarrow{CA} = 4\overrightarrow{CP}$. Tính thể tích khối chóp $S.MNP$.

A. $\frac{128\sqrt{2}}{3}$

B. $\frac{35}{8}$

C. $\frac{245}{32}$

D. $\frac{35\sqrt{2}}{8}$

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $SA \perp (ABC)$. Biết $AB = a, SA = 2a$, mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC và cắt SB, SC lần lượt tại H và K . Tính thể tích V của hình chóp $S.AHK$.

$$\text{A. } V = \frac{8a^3}{15}$$

$$\text{B. } V = \frac{8a^3}{45}$$

$$\text{C. } V = \frac{3a^3}{15}$$

$$\text{D. } V = \frac{4a^3}{45}$$

Câu 24: (Sở GD và ĐT Bắc Giang) Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 1$, $AD = 2$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy ($ABCD$) và $SA = 2$. Điểm M điểm trên cạnh SA sao cho mặt phẳng (MBC) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần có thể tích bằng nhau. Tính diện tích S của tam giác MAC .

$$\text{A. } S = \frac{3\sqrt{5} - 5}{2}$$

$$\text{B. } S = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{C. } S = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{D. } S = \frac{5 - \sqrt{5}}{4}$$

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, $SA = a$. Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC cắt SB , SC , SD lần lượt tại B' , C' , D' . Tính thể tích V của khối đa diện $ABCDD'C'B'$.

$$\text{A. } V = \frac{5a^3}{18}$$

$$\text{B. } V = \frac{5a^3}{9}$$

$$\text{C. } V = \frac{5a^3}{12}$$

$$\text{D. } V = \frac{5a^3}{6}$$

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = a$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AD , DC . Góc giữa mặt phẳng (SBM) và mặt phẳng (ABC) bằng 45° . Tính thể tích khối chóp $S.ABNM$.

$$\text{A. } \frac{25a^3}{8}$$

$$\text{B. } \frac{25a^3}{16}$$

$$\text{C. } \frac{25a^3}{18}$$

$$\text{D. } \frac{25a^3}{24}$$

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi A' , B' , C' , D' theo thứ tự là trung điểm của các cạnh SA , SB , SC , SD . Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.A'B'C'D'$ và $S.ABCD$

$$\text{A. } \frac{1}{4}$$

$$\text{B. } \frac{1}{16}$$

$$\text{C. } \frac{1}{8}$$

$$\text{D. } \frac{1}{2}$$

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích V , có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi N là trung điểm của SC . Một mặt phẳng đi qua AN cắt các cạnh SB , SD lần lượt tại M , P . Gọi V' là thể tích của khối chóp $S.AMNP$.

Tính giá trị nhỏ nhất của $T = \frac{V'}{V}$

$$\text{A. } \frac{3}{8}$$

$$\text{B. } \frac{1}{3}$$

$$\text{C. } \frac{2}{3}$$

$$\text{D. } \frac{1}{8}$$

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M là trung điểm của SC . Mặt phẳng (P) chứa AM và song song với BD chia khối chóp thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích của phần chứa đỉnh S và V_2 là thể tích phần còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

$$\text{A. } \frac{2}{9}$$

$$\text{B. } \frac{2}{3}$$

$$\text{C. } \frac{1}{3}$$

$$\text{D. } \frac{1}{2}$$

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình tứ giác lồi với O là giao điểm của AC và BD . Gọi M, N, P, Q lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SBC, SCD và SDA . Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và $O.MNPQ$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

- A. 8 B. $\frac{27}{4}$ C. $\frac{27}{2}$ D. 9

Câu 31: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi N là trung điểm của SB , M là điểm đối xứng với B qua A . Mặt phẳng (MNC) chia khối $S.ABCD$ thành hai phần có thể tích lần lượt là V_1, V_2 với $V_1 < V_2$. Tính tỉ số $k = \frac{V_1}{V_2}$.

- A. $k = \frac{5}{7}$ B. $k = \frac{5}{9}$ C. $k = \frac{5}{11}$ D. $k = \frac{5}{13}$

Câu 32: (Sở GD và ĐT Thừa Thiên Huế 2017) Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$. Mặt bên hình chóp tạo với đáy một góc bằng 60° . Mặt phẳng (P) chứa AB đi qua trọng tâm G của tam giác SAC cắt SC, SD lần lượt tại M, N . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABMN$.

- A. $V = \sqrt{3}a^3$ B. $V = \frac{\sqrt{3}}{4}a^3$ C. $V = \frac{\sqrt{3}}{2}a^3$ D. $V = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^3$

Câu 33: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có $SA = a$, góc giữa mặt bên và mặt đáy là 60° . Gọi M là trung điểm SA , mặt phẳng (P) đi qua CM và song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại E, F . Tính thể tích khối chóp $S.CEMF$

- A. $\frac{a^3\sqrt{15}}{75}$ B. $\frac{a^3\sqrt{15}}{225}$ C. $\frac{4a^3\sqrt{15}}{225}$ D. $\frac{4a^3\sqrt{15}}{75}$

Câu 34: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V_1 . Gọi E là trung điểm của $A'C'$, F là giao điểm của AE và $A'C$. Biết khối chóp $F.A'B'C'$ có thể tích là V_2 . Tính tỉ số $\frac{V_2}{V_1}$

- A. $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{3}$ B. $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{6}$ C. $\frac{V_2}{V_1} = \frac{2}{9}$ D. $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{9}$

Câu 35: (Sở GD&ĐT Cần Thơ 2017) Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ và M là điểm tùy ý thuộc cạnh bên BB' . Gọi V, V' lần lượt là thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khối chóp $M.AA'C'C$. Tính tỉ số $k = \frac{V'}{V}$

- A. $k = \frac{2}{3}$ B. $k = \frac{1}{6}$ C. $k = \frac{5}{6}$ D. $k = \frac{1}{3}$

Câu 36: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 18. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', BB' . Tính thể tích V của khối đa diện $CNMA'B'C'$.

- A. 12 B. 6 C. 9 D. 15

Câu 37: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Tính thể tích khối chóp $G.A'BC$ theo V .

- A. $\frac{V}{12}$ B. $\frac{V}{6}$ C. $\frac{V}{5}$ D. $\frac{V}{9}$

Câu 38: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích V . Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Khi đó thể tích khối chóp $G.A'B'C'$ là

- A. $\frac{V}{3}$ B. $3V$ C. $2V$ D. $\frac{V}{2}$

Câu 39: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích V_0 . Gọi P là một điểm trên đường thẳng AA' . Tính thể tích khối chóp tứ giác $P.BCC'B'$ theo V_0

- A. $\frac{2V_0}{3}$ B. $\frac{V_0}{2}$ C. $\frac{V_0}{3}$ D. $\frac{V_0}{4}$

Câu 40: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, B'C$. Mặt phẳng $(A'MN)$ cắt cạnh BC tại P . Tính thể tích của khối đa diện $MBP.A'B'N$

- A. $\frac{7a^3\sqrt{3}}{32}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{32}$ C. $\frac{7a^3\sqrt{3}}{68}$ D. $\frac{7a^3\sqrt{3}}{96}$

Câu 41: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc các cạnh bên AA', CC' sao cho $MA = MA'$ và $NC = 4NC'$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Trong bốn khối tứ diện $GA'B'C', BB'MN, ABB'C', A'BCN$ khối nào có thể tích nhỏ nhất?

- A. Khối $A'BCN$ B. Khối $GA'B'C'$ C. Khối $ABB'C'$ D. Khối $BB'MN$

Câu 42: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B . $AB = BC = 2a, AA' = a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối chóp $A.BCC'B'$ theo a .

- A. $V = \frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$ B. $V = a^3\sqrt{3}$ C. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$ D. $V = 2a^3\sqrt{3}$

Câu 43: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = a, AC = 2a, AA' = 2a\sqrt{3}, \widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi K, I lần lượt là trung điểm của các cạnh CC', BB' . Tính thể tích V của khối tứ diện $IA'BK$

- A. $V = \frac{a^3}{2}$ B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ C. $V = \frac{a^3\sqrt{5}}{2}$ D. $V = \frac{a^3}{6}$

Câu 44: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính thể tích V của khối tứ diện $ACD'B'$

A. $V = \frac{1}{3}a^3$ B. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ C. $V = \frac{a^3}{4}$ D. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$

Câu 45: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Tỉ số thể tích của khối tứ diện $A'ABC$ và khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{3}$

Câu 46: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích V . Gọi V_1 là thể tích của tứ diện $ACB'D'$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V}$.

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

Câu 47: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M là trung điểm của $A'B'$ và N là trung điểm của BC . Tính thể tích của khối tứ diện $ADMN$.

A. $V = \frac{a^3}{3}$ B. $V = \frac{a^3}{12}$ C. $V = \frac{a^3}{6}$ D. $V = \frac{a^3}{2}$

Câu 48: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a . Tính thể tích của khối tứ giác $D.ABC'D'$.

A. $\frac{a^3}{3}$ B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{a^3}{4}$

Câu 49: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm trên đường chéo CA' sao cho $\overrightarrow{MC} = -3\overrightarrow{MA'}$. Tính tỉ số giữa thể tích V_1 của khối chóp $M.ABCD$ và thể tích V_2 của khối lập phương.

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}$ B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{4}$ C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{9}$ D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{4}$

Câu 50: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M thuộc cạnh AB sao cho $MB = 2MA$. Mặt phẳng $(MB'D')$ chia khối hộp thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó.

A. $\frac{5}{12}$ B. $\frac{7}{17}$ C. $\frac{13}{41}$ D. $\frac{5}{17}$

Câu 51: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 1 và G là trọng tâm của tam giác BCD' . Tính thể tích V của khối chóp $GABC'$

A. $V = \frac{1}{18}$ B. $V = \frac{1}{12}$ C. $V = \frac{1}{3}$ D. $V = \frac{1}{6}$

Câu 52: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Tỉ số thể tích của khối tứ diện $A'ABC$ khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{3}$

Câu 53: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD , mặt phẳng $(C'MN)$ chia khối lập phương thành hai khối đa diện. Gọi V_1 là thể tích của khối đa diện có thể tích nhỏ hơn, V_2 là thể tích của khối đa diện có thể tích lớn. Tính $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}$

B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{13}{23}$

C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$

D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{25}{47}$

Câu 54: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I là trung điểm của BB' , mặt phẳng (DIC') chia khối lập phương thành hai phần có tỉ số thể tích phần bé chia phần lớn bằng

A. $\frac{3}{8}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{7}{17}$

D. $\frac{5}{12}$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

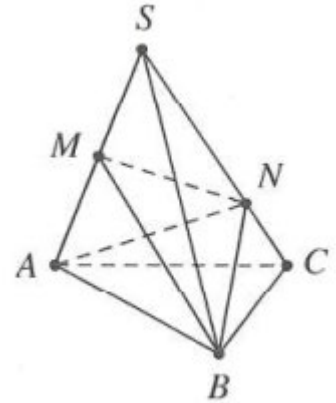
Câu 1: Ta có $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$. **Chọn B**

Câu 2: Ta có $\frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta SAN}} = \frac{AM}{SA} = \frac{1}{2}$; $\frac{S_{\Delta SAN}}{S_{\Delta SAC}} = \frac{SN}{SC} = \frac{3}{4}$.

$$\text{Suy ra } S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} S_{\Delta SAC} = \frac{3}{8} S_{\Delta SAC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} d(B; (SAC)) \cdot S_{\Delta AMN} = \frac{3}{8} \times \frac{1}{3} d(B; (SAC)) \cdot S_{\Delta SAC}$$

$$\Leftrightarrow V_{B.AMN} = \frac{3}{8} V_{B.SAC} \Leftrightarrow k = \frac{V_{ABMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{3}{8}. \text{ **Chọn A**}$$

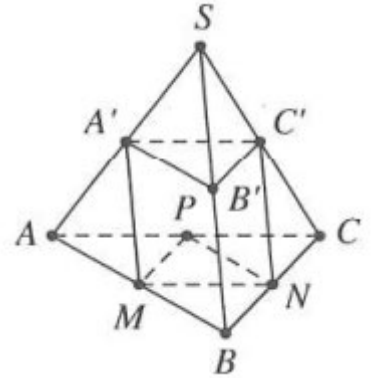


Câu 3: Kí hiệu tứ diện và các điểm như hình vẽ.

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{S.A'B'C'} = \frac{V}{8}$$

$$\text{Tương tự } V_{A.A'MP} = V_{B.B'MN} = V_{C.C'NP} = \frac{V}{8}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } V' &= V_{S.ABC} - (V_{S.A'B'C'} + V_{A.A'MP} + V_{B.B'MN} + V_{C.C'NP}) \\ &= V - \left(\frac{V}{8} + \frac{V}{8} + \frac{V}{8} + \frac{V}{8} \right) = \frac{V}{2} \Rightarrow \frac{V'}{V} = \frac{1}{2}. \text{ **Chọn A**} \end{aligned}$$



$$\text{Câu 4: Ta có } \frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Lại có } V_{S.AMN} = \frac{1}{3} d(A; (ABC)) \cdot S_{\Delta AMN}; V_{S.ABC} = \frac{1}{3} d(A; (ABC)) \cdot S_{\Delta ABC}$$

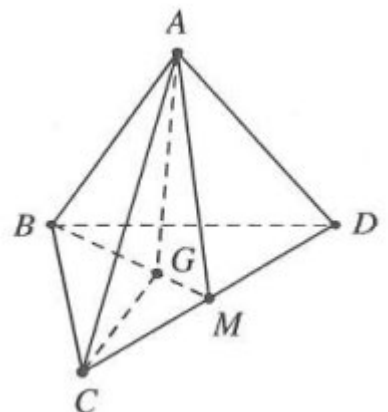
$$\text{Suy ra } \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{3} \longrightarrow V_{S.AMN} = \frac{V}{3}. \text{ **Chọn A**}$$

$$\text{Câu 5: Ta có } \frac{S_{\Delta MCG}}{S_{\Delta MCB}} = \frac{MG}{MB} = \frac{1}{3} \text{ mà } S_{\Delta MCB} = \frac{1}{2} S_{\Delta BCD}$$

$$\text{Suy ra } S_{\Delta MCG} = \frac{1}{3} S_{\Delta MCB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{\Delta BCD} = \frac{1}{6} S_{\Delta BCD}$$

$$\text{Lại có } V_{A.GMC} = \frac{1}{3} d(A; (BCD)) \cdot S_{\Delta MGC}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} d(A; (BCD)) \cdot S_{\Delta BCD} = \frac{V}{6}. \text{ **Chọn C**}$$



Câu 6: Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{AC^2}{4} = a^2 \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{a^3}{3}$

Vậy $\frac{V_{S.AIC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SI}{SB} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.AIC} = \frac{1}{3} V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{a^3}{9}$. **Chọn D**

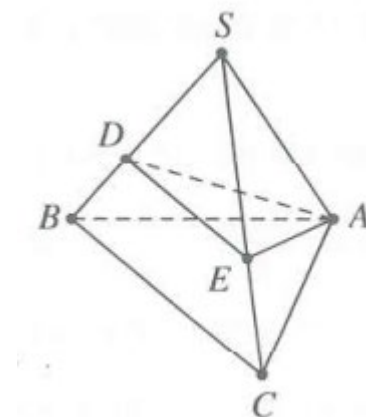
Câu 7: Ta có $S_{\Delta MNK} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \longrightarrow \frac{V_{S.MNK}}{V_{S.ABC}} = \frac{\frac{1}{3} h \cdot S_{\Delta MNK}}{\frac{1}{3} h \cdot S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{S.MNK} = \frac{V}{4}$. **Chọn C**

Câu 8: Qua D kẻ đường thẳng $d \parallel BC$, cắt SC tại E

$\Rightarrow$ Mặt phẳng (α) cắt khối chóp theo thiết diện là ΔADE

Theo định lí Talet, ta có $\frac{SD}{SB} = \frac{SE}{SC} = \frac{2}{3}$

Do đó $\frac{V_{S.ADE}}{V_{S.ABC}} = \frac{SD}{SB} \cdot \frac{SE}{SC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. **Chọn B**



Câu 9: Ta có $\frac{V_{E.BCD}}{V_{A.BCD}} = \frac{\frac{1}{3} d(E; (BCD)) \cdot S_{\Delta BCD}}{\frac{1}{3} d(A; (BCD)) \cdot S_{\Delta BCD}} = \frac{AE}{AB}$ mà $\frac{EB}{AB} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{V_{E.BCD}}{V_{A.BCD}} = \frac{1}{4}$. **Chọn D**

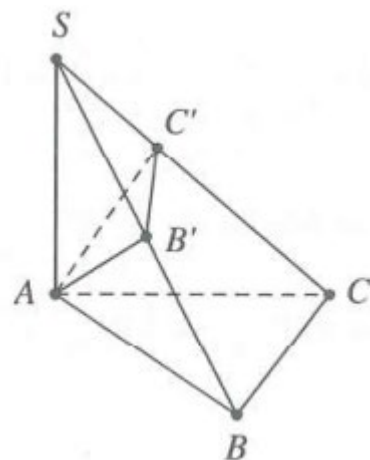
Câu 10: Tam giác SAC cân tại A mà $AC' \perp SC$

Suy ra C' là trung điểm của $SC \longrightarrow \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2}$

Tam giác ABC vuông cân tại $A \longrightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{AB^2}{2} = \frac{a^2}{2}$

Do đó, thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{a^3}{6}$

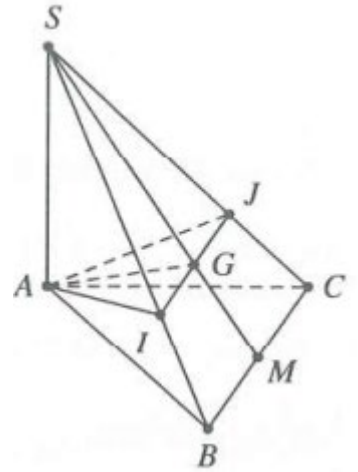
Vậy $\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{SC}{SC'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{S.AB'C'} = \frac{a^3}{24}$. **Chọn D**



Câu 11: Qua G kẻ đường thẳng $d // BC$, cắt SB, SC tại I, J .

Ta có $d // BC \Rightarrow \frac{SG}{SM} = \frac{SI}{SB} = \frac{SJ}{SC} = \frac{2}{3}$ (M là trung điểm của BC)

Khi đó $\frac{V_{S.AIJ}}{V_{S.ABC}} = \frac{SI}{SB} \cdot \frac{SJ}{SC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. **Chọn C**



Câu 12: Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{a^2}{2}$

Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{SB; (ABC)} = \widehat{(SB; AB)} = \widehat{SBA} = 60^\circ$

Tam giác SAB vuông tại A , có $SA = AB \cdot \tan \widehat{SBA} = a\sqrt{3}$

Suy ra thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Vì M là trung điểm của $SB \rightarrow V_{M.ABC} = \frac{1}{2} V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **Chọn C**

Câu 13: Kẻ $CF \perp SB (F \in SB)$

Ta có $\begin{cases} SC \perp AB \\ AC \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAC)$

Kẻ $CE \perp SA (E \in SA)$ mà $AB \perp CE \Rightarrow CE \perp (SAB) \Rightarrow CE \perp SB$

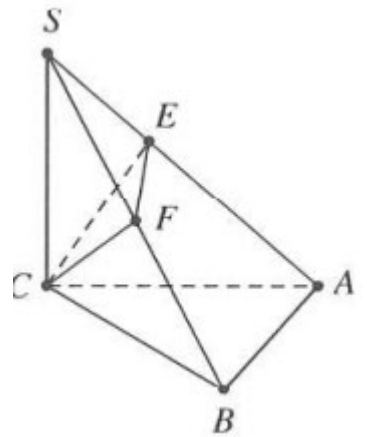
Do đó C, E, F đồng phẳng $\Rightarrow \frac{V_{S.CEF}}{V_{S.CAB}} = \frac{SE}{SA} \cdot \frac{SF}{SB}$

Tam giác SAC vuông cân tại $C \rightarrow \frac{SE}{SA} = \frac{1}{2}$

Tam giác SBC vuông tại C , có $\frac{1}{CF^2} = \frac{1}{SC^2} + \frac{1}{BC^2} \Rightarrow CF = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

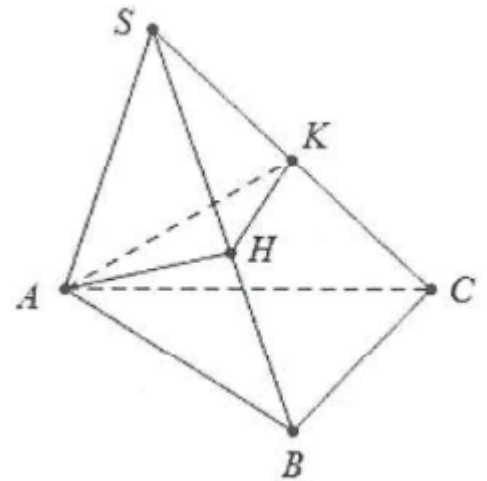
Tam giác SCF vuông tại F , có $SF = \sqrt{SC^2 - CF^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{SF}{SB} = \frac{1}{3}$

Vậy $\frac{V_{S.CEF}}{V_{S.CAB}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow V_{S.CEF} = \frac{1}{6} V_{S.ABC} = \frac{1}{6} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{36}$. **Chọn C**



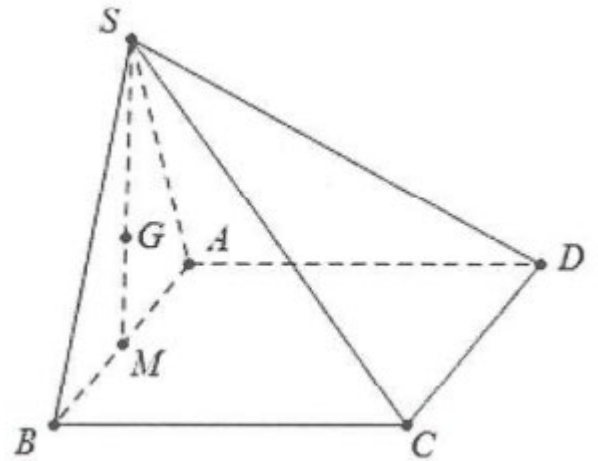
Câu 14: Ta có $\frac{V_{S.AHK}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SH}{SB} \cdot \frac{SK}{SC} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Do đó $V_{S.AHK} = \frac{1}{4}V_{S.ABC} = \frac{1}{4}V$. **Chọn B**



Câu 15: Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow A, G, M$ thẳng hàng và $SM = 3GM \Rightarrow d(G; (ABC)) = \frac{1}{3}d(S; (ABC))$

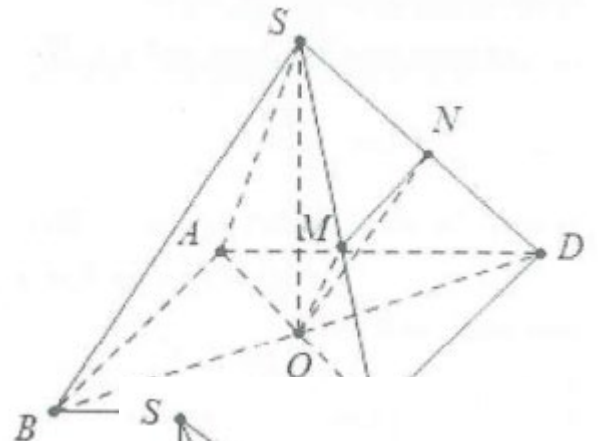
Ta có: $V_{G.ABCD} = \frac{1}{3}d(G; (ABCD)) \cdot S_{ABCD}$
 $= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}d(S; (ABCD)) \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3}V_{S.ABCD} = a^3$. **Chọn A**



Câu 16: Do $S_{ABCD} = 4S_{OCD} \Rightarrow V_{S.ABCD} = 4V_{S.OCD}$

Mặt khác $\frac{V_{S.OMN}}{V_{S.OCD}} = \frac{SO}{SO} \cdot \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SN}{SD} = \frac{1}{4}$

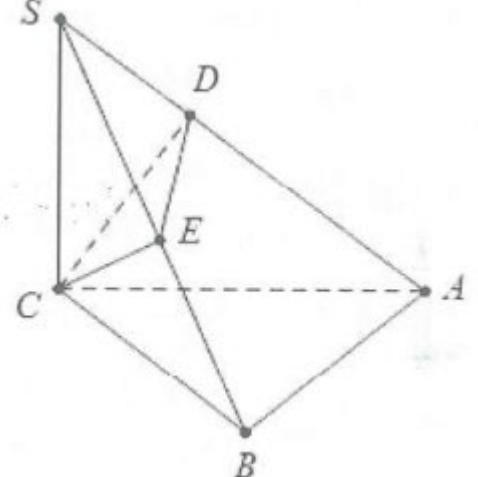
$\Rightarrow V_{S.OMN} = \frac{V_{S.OCD}}{4} = \frac{1}{16}V_{S.ABCD}$. **Chọn D**



Câu 17: $BC = AB = a\sqrt{2}, AC = AB\sqrt{2} = 2a$

Do $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp SC \end{cases} \Rightarrow AB \perp CE$.

Mặt khác $CE \subset (\alpha) \Rightarrow CE \perp SA \Rightarrow CE \perp (SAB) \Rightarrow CE \perp SB$



Tam giác SCB vuông tại S có đường cao CE có:

$$SC^2 = SE \cdot SB \Rightarrow \frac{SC^2}{SB^2} = \frac{SE}{SB} \Rightarrow \frac{SE}{SB} = \frac{SC^2}{SC^2 + BC^2} = \frac{4}{6}$$

$SC = AC \Rightarrow \Delta SCA$ vuông cân tại C nên D là trung điểm của SA

$$\text{Suy ra } \frac{V_{S.CED}}{V_{S.CBA}} = \frac{SC}{SC} \cdot \frac{SE}{SB} \cdot \frac{SD}{SA} = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Mặt khác } V_{S.CAB} = \frac{1}{3} \cdot SC \cdot S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} (a\sqrt{2})^2 = \frac{2}{3} a^3 \Rightarrow V_{S.CDE} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} a^3 = \frac{2}{9} a^3. \text{ Chọn C}$$

Câu 18: Ta có $AB^2 + BC^2 = AC^2 = 20a^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại B

$$\text{Do đó } S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = 4a^2 \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABC} = \frac{8a^3}{3}.$$

Xét tam giác SAB vuông tại S có đường cao AM có:

$$SA^2 = SM \cdot SB \Rightarrow \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{SM}{SB} \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SA^2}{SA^2 + AB^2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Tương tự } \frac{SN}{SC} = \frac{SA^2}{SA^2 + AC^2} = \frac{4}{4+20} = \frac{1}{6}$$

$$\text{Mặt khác } \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{12} \Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{1}{12} \cdot \frac{8a^3}{3} = \frac{2a^3}{9}.$$

Chọn A.

Câu 19: ΔABC vuông tại B

$$\Rightarrow AB = BC \tan B = \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$$

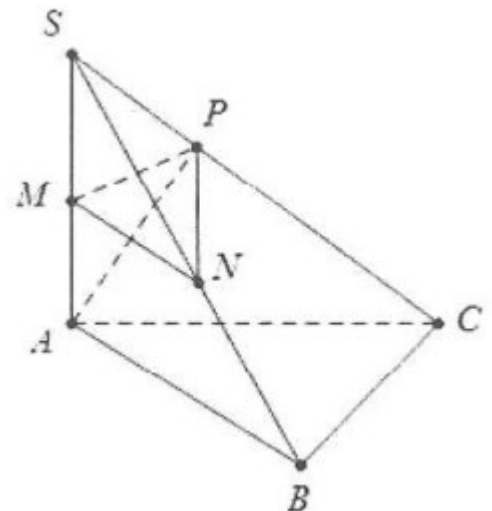
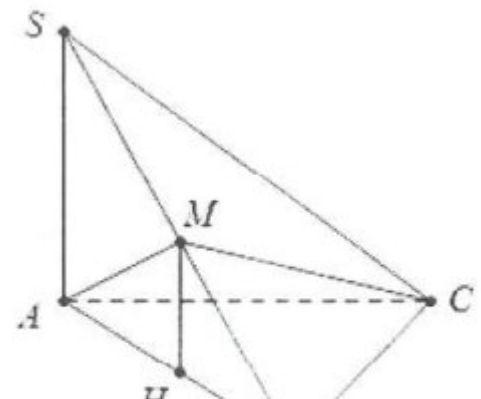
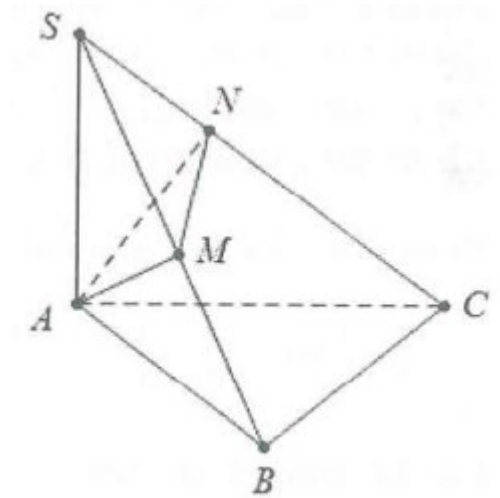
Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow MH$ là đường trung bình của tam

$$\text{giác } SAB \Rightarrow \begin{cases} MH \parallel SA \Rightarrow MH \perp (ABC) \\ MH = \frac{SA}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Do đó } V_{M.ABC} = \frac{1}{3} MH \cdot S_{ABC} = \frac{a^3}{4}. \text{ Chọn D.}$$

Câu 20: Xét tam giác SAC vuông tại S có đường cao AP có:

$$SA^2 = SP \cdot SC \Rightarrow \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{SP}{SC} \Rightarrow \frac{SP}{SC} = \frac{SA^2}{SA^2 + AC^2} = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}.$$



$$\text{Do đó } \frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\text{Lại có } S_{ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABC} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Suy ra } V_{S.MNP} = \frac{1}{5} \cdot \frac{a^3 \sqrt{3}}{6} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{30}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 21: Ta có $SA = SB = SM = 1 \Rightarrow$ hình chiếu của đỉnh S xuống mặt phẳng (ABM) là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABM$.

$$\text{Mặt khác } \widehat{ASC} = 90^\circ \Rightarrow AS \perp SM \Rightarrow AM \perp \sqrt{SA^2 + SM^2} = \sqrt{2}.$$

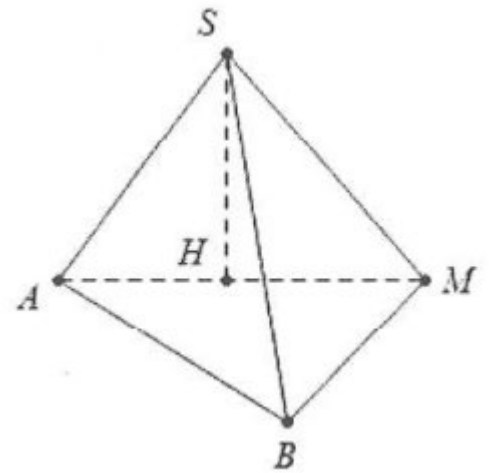
Các tam giác ASB, ASM là các tam giác đều nên $AB = BM = 1$.

$$\text{Suy ra } AB^2 + BM^2 = AM^2 = 2 \Rightarrow \triangle ABM \text{ vuông tại } B.$$

Khi đó $SH \perp (ABM)$ thì H là trung điểm của cạnh huyền AM .

$$\text{Ta có } AH = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$V_{S.ABM} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{AB \cdot BM}{2} = \frac{\sqrt{2}}{12}. \text{ Chọn C.}$$



Câu 22: Trên SB lấy điểm E sao cho $SE = 1$

Dựng $EF \perp SA, EG \perp SC$ ($F \in SA, G \in SC$).

Khi đó $\triangle SEF, \triangle SEG$ vuông cân tại E .

$$\text{Ta có } EF = EG = 1 \Rightarrow SF = SG = \sqrt{2}$$

$$\text{Do } \widehat{CSA} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{FSG} = 60^\circ \Rightarrow \triangle FSG \text{ đều suy ra } FG = \sqrt{2}.$$

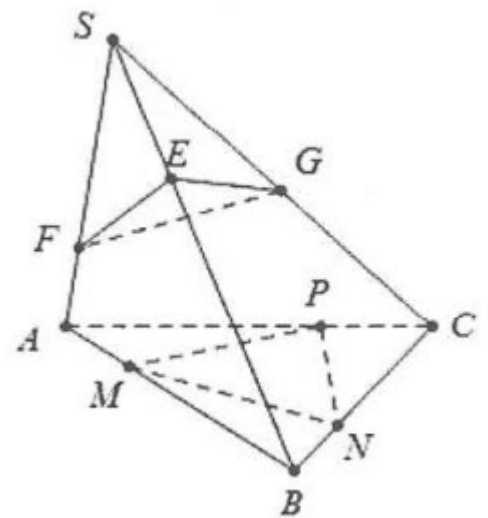
$$\text{Khi đó } \triangle EFG \text{ vuông cân tại } E \Rightarrow S_{EFG} = \frac{1}{2} EF \cdot FG = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow V_{S.EFG} = \frac{1}{3} SE \cdot S_{EFG} = \frac{1}{6}.$$

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.EFG}}{V_{S.ABC}} = \frac{SF}{SA} \cdot \frac{SE}{SB} \cdot \frac{SG}{SC} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{1}{60}.$$

$$\text{Suy ra } V_{S.ABC} = 60 V_{S.EFG} = 10$$

$$\text{Mặt khác } \frac{S_{AMP}}{S_{ABC}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AP}{AC} = \frac{3}{16} \Rightarrow S_{AMP} = \frac{3}{16} S_{ABC}$$



$$\text{Tương tự} \Rightarrow S_{AMP} = S_{BMN} = S_{CNP} = \frac{3}{16} S_{ABC} \Rightarrow S_{MNP} = \left(1 - 3 \cdot \frac{3}{16}\right) S_{ABC} = \frac{7}{16} S_{ABC}$$

$$\text{Suy ra } V_{S.MNP} = \frac{7}{16} V_{S.ABC} = \frac{7}{16} \cdot 10 = \frac{35}{8}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 23: Dễ dàng chứng minh được $AH \perp SB$,

$$AC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}.$$

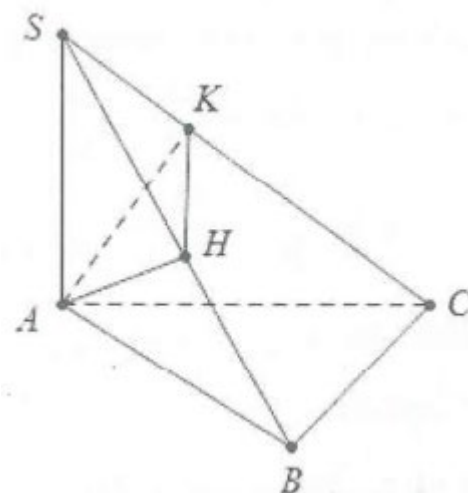
Tam giác SAB vuông tại A , có đường cao AH nên

$$SA^2 = SH \cdot SB \Rightarrow \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SA^2 + AB^2} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Tương tự, ta tính được } \frac{SK}{SC} = \frac{SA^2}{SA^2 + AC^2} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Vậy } \frac{V_{S.AHK}}{V_{S.ABC}} = \frac{SH}{SB} \cdot \frac{SK}{SC} = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15} \Rightarrow V_{S.AHK} = \frac{8}{15} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{8a^3}{45}.$$

Chọn B.



Câu 24: Gọi $N = (MBC) \cap SD$.

Ta có: $BC \parallel AD \Rightarrow (MAC) \cap (SAD) = MN$ suy ra

$$MN \parallel BC \parallel AD. V_{S.ABC} = V_{S.ACD} = \frac{V_{S.ABCD}}{2}.$$

$$\text{Đặt } \frac{SM}{SA} = x. \text{ Ta có } \frac{V_{S.ACM}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} = x.$$

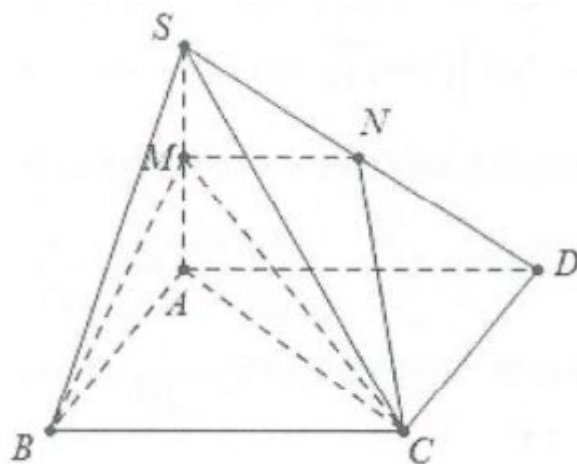
$$\Rightarrow \frac{V_{S.ACM}}{\frac{V_{S.ABCD}}{2}} = x \Rightarrow V_{S.ACM} = \frac{x}{2} V_{S.ABCD}.$$

$$\text{Lại có: } \frac{V_{S.CMN}}{V_{S.CAD}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SD} = x^2 \Rightarrow V_{S.CMN} = \frac{x^2}{2} V_{S.ABCD}$$

$$\Rightarrow V_{S.ACNM} = \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}\right) V_{S.ABCD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow SM = -1 + \sqrt{5}$$

$$\text{Lại có } AC = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}, MA = 2 - (-1 + \sqrt{5}) = 3 - \sqrt{5}, AC = \sqrt{5}$$

$$\text{Suy ra } S_{MAC} = \frac{1}{2} MA \cdot AC = \frac{3\sqrt{5} - 5}{2}. \text{ Chọn A.}$$



Câu 25: Do $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp AB'$

Ta có: $\begin{cases} AB' \perp SC \\ AB' \perp BC \end{cases} \Rightarrow AB' \perp (SBC) \Rightarrow AB' \perp SB$

Do hình chóp có (SAC) là mặt phẳng đối xứng nên

$$\frac{V_{S.AB'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}.$$

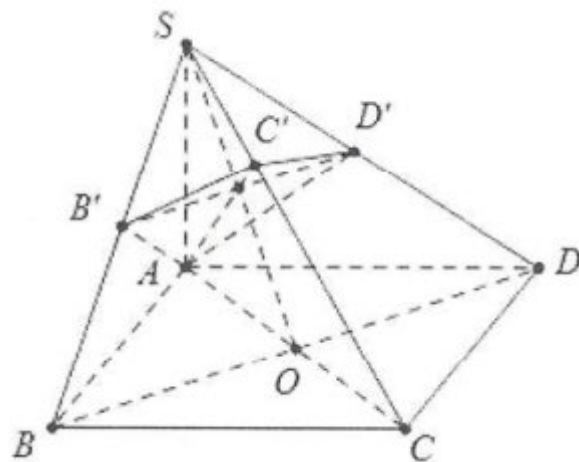
Xét tam giác SAB vuông tại S có đường cao AB' có:

$$SA^2 = SB' \cdot SB \Rightarrow \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{SB'}{SB} \Rightarrow \frac{SB'}{SB} = \frac{SA^2}{SA^2 + AB^2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Tương tự } \frac{SC'}{SC} = \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AC^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{6} = \frac{V_{S.AB'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$$

$$\text{Mặt khác } V_{ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} a^3 \Rightarrow V_{S.AB'C'D'} = \frac{1}{18} a^3 \Rightarrow V_{AB'C'D'.ABCD} = V_{S.ABCD} - V_{S.AB'C'D'} = \frac{5a^3}{18}.$$

Chọn A.



Câu 26: Dựng $AH \perp BM$

Ta có $BM \perp SA \Rightarrow BM \perp (SHA)$.

Khi đó $\left(\widehat{(SBM);(ABCD)} \right) = \widehat{SHA} = 45^\circ$

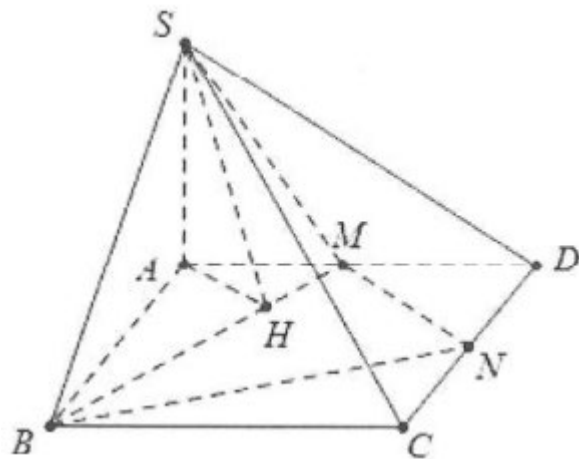
$$\text{Đặt } AB = AD = x \Rightarrow AM = MD = DN = \frac{x}{2}$$

$$\text{Mặt khác } AH = \frac{AM \cdot AB}{\sqrt{AM^2 + AB^2}} = \frac{x}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Suy ra } SA = AH \tan 45^\circ = \frac{x}{\sqrt{5}} = a \Rightarrow x = a\sqrt{5}$$

$$S_{AMNB} = S_{ABCD} - S_{DMN} - S_{BCN} = x^2 - \frac{x^2}{8} - \frac{x^2}{4} = \frac{5x^2}{8} = \frac{25a^2}{8}$$

$$\text{Do đó } V_{S.ABNM} = \frac{1}{3} S_{ABNM} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{25}{8} a^2 \cdot a = \frac{25a^3}{24}. \text{ Chọn D.}$$



$$\text{Câu 27: Ta có } \frac{V_{S.AB'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{\frac{SA}{SA'} + \frac{SB'}{SB} + \frac{SC'}{SC} + \frac{SD}{SD'}}{4 \cdot \frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD}{SD'}} = \frac{2+2+2+2}{4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{8}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 28: Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$

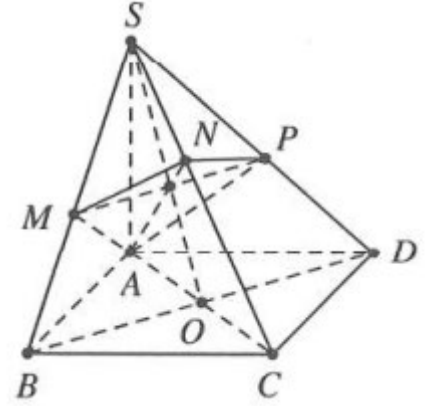
Nối $AN \cap SO = I \Rightarrow I$ là trọng tâm tam giác SAC

Qua I kẻ đường thẳng d cắt SB, SD lần lượt tại M, P

$$\text{Đặt } \frac{SA}{SA} = 1; \frac{SB}{SM} = x; \frac{SC}{SN} = 2; \frac{SD}{SP} = y$$

$$\text{Suy ra } 1 + 2 = x + y \Leftrightarrow x + y = 3 \text{ và } \frac{V'}{V} = \frac{x + y + 3}{8xy} = \frac{x + y + 3}{8xy}$$

$$\text{Ta có } 4xy \leq (x + y)^2 = 9 \Rightarrow \frac{V'}{V} \geq \frac{2.3}{2.9} = \frac{1}{3}. \text{ Chọn B.}$$



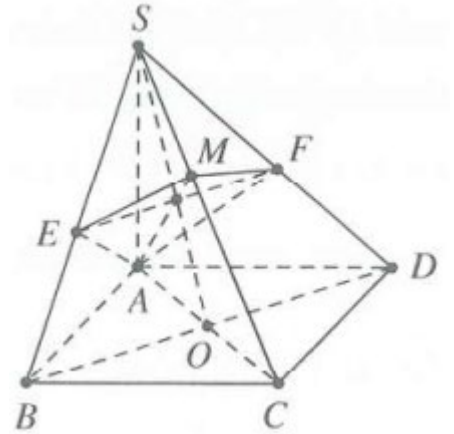
Câu 29: Nối $AN \cap SO = I \Rightarrow I$ là trọng tâm tam giác SAC

Qua I kẻ đường thẳng $d \parallel BD$, cắt SB, SD lần lượt tại E, F

$$\text{Suy ra } \frac{SE}{SB} = \frac{SF}{SD} = \frac{2}{3}; E, F \text{ thuộc mặt phẳng } (P)$$

$$\text{Khi đó } \frac{V_1}{V_{S.ABCD}} = \frac{\frac{SA}{SA} + \frac{SB}{SE} + \frac{SC}{SM} + \frac{SD}{SF}}{4 \cdot \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SB}{SE} \cdot \frac{SC}{SM} \cdot \frac{SD}{SF}} = \frac{1 + 2 \cdot \frac{3}{2} + 2}{4 \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Mà } V_{S.ABCD} = V_1 + V_2 \longrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}. \text{ Chọn D.}$$



Câu 30: Ta có $(MNPQ) \parallel (ABCD) \Rightarrow d(S; (MNPQ)) = \frac{2}{3} d(S; (ABCD))$

$$\text{Mà } O \in (ABCD) \longrightarrow d(O; (MNPQ)) = \frac{1}{3} d(S; (ABCD))$$

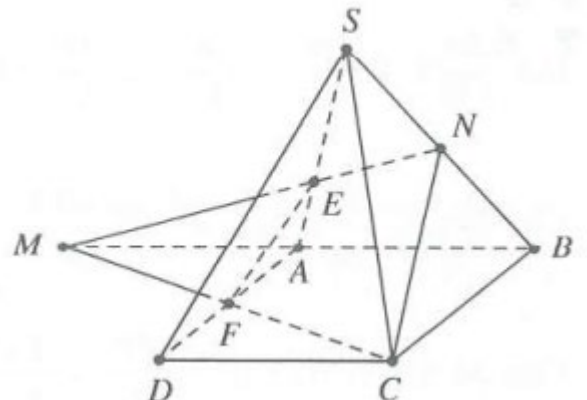
$$\text{Lại có } S_{MNPQ} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{2}{9} S_{ABCD} \longrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9}} = \frac{27}{2}. \text{ Chọn C}$$

Câu 31: Nối $MN \cap SA = E \Rightarrow E$ là trọng tâm ΔSMB

Nối $MC \cap AD = F \Rightarrow F$ là trung điểm AD

$$\text{Ta có } V_{AEF.BNC} = V_{N.MBC} - V_{E.MAF}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot d(N; (ABCD)) \cdot S_{\Delta MBC} - \frac{1}{3} \cdot d(E; (ABCD)) \cdot \frac{1}{4} S_{\Delta MAF}$$



$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} d(S; (ABCD)) \cdot S_{ABCD} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot d(A; (ABCD)) \cdot \frac{1}{4} S_{ABCD}$$

$$= \frac{1}{2} V_{S.ABCD} - \frac{1}{12} V_{S.ABCD} = \frac{5}{12} V_{S.ABCD} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{7} . \text{ Chọn A.}$$

Câu 32: Gọi O là tâm hình vuông $ABCD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

Gọi E là trung điểm $BC \Rightarrow BC \perp (SEO)$

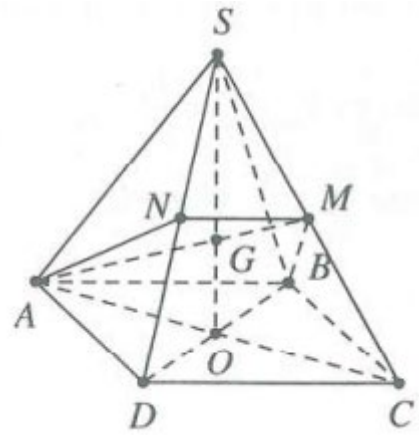
Do đó $(\widehat{SNO}); (\widehat{ABCD}) = (\widehat{SN}; \widehat{ON}) = \widehat{SNO} = 60^\circ$

Tam giác SEO vuông tại O , có $SO = OE \cdot \tan \widehat{SEO} = a\sqrt{3}$

Suy ra thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$

Vì (P) chứa AG nên $(P) \cap SC = M$ là trung điểm của SC

Qua M kẻ đường thẳng $d // CD$, cắt SD tại N



$$\text{Khi đó } \frac{V_{S.ABMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{\frac{SA}{SA} + \frac{SB}{SB} + \frac{SC}{SM} + \frac{SD}{SN}}{a \cdot \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SB}{SB} \cdot \frac{SC}{SM} \cdot \frac{SD}{SN}} = \frac{1+1+2+2}{4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{3}{8} \Rightarrow V_{S.ABMN} = \frac{\sqrt{3}}{2} a^3 . \text{ Chọn C}$$

Câu 33: Gọi O là tâm hình vuông $ABCD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

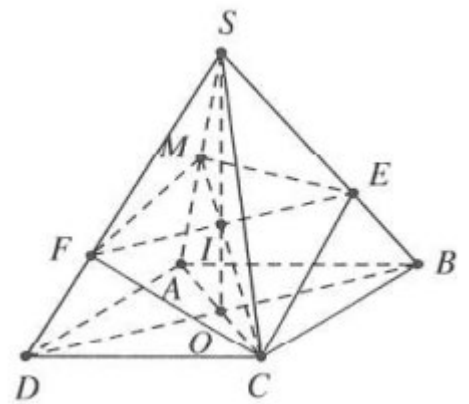
Gọi N là trung điểm $BC \Rightarrow BC \perp (SNO)$

Do đó $(\widehat{SNO}); (\widehat{ABCD}) = (\widehat{SN}; \widehat{ON}) = \widehat{SNO} = 60^\circ$

Tam giác SNO vuông tại O , có $SO = ON \cdot \tan \widehat{SNO} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$

Tam giác SAO vuông tại O , có $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{2}}$

$$\text{Suy ra } \frac{x\sqrt{3}}{2} = \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow \frac{3x^2}{4} = a^2 - \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow AB = x = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$



$$\text{Thể tích khối chóp } S.ABCD \text{ là } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{2a\sqrt{5}}{5} \right)^2 = \frac{4a^3\sqrt{15}}{75}$$

$$\text{Nối } SO \cap CM = I \longrightarrow I \text{ là trọng tâm } \Delta SAC \Rightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Qua } I \text{ kẻ đường thẳng } d // BD, \text{ cắt } SB, SD \text{ lần lượt tại } E, F \Rightarrow \frac{SE}{SB} = \frac{SF}{SD} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Đặt } \frac{SA}{SM} = x; \frac{SB}{SE} = y; \frac{SC}{SF} = z; \frac{SD}{SF} = t \Rightarrow \frac{V_{S.MECF}}{V_{S.ABCD}} = \frac{x+y+z+t}{4xyzt} = \frac{2+2+\frac{3}{2}+1}{4 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 1} = \frac{1}{3}$$

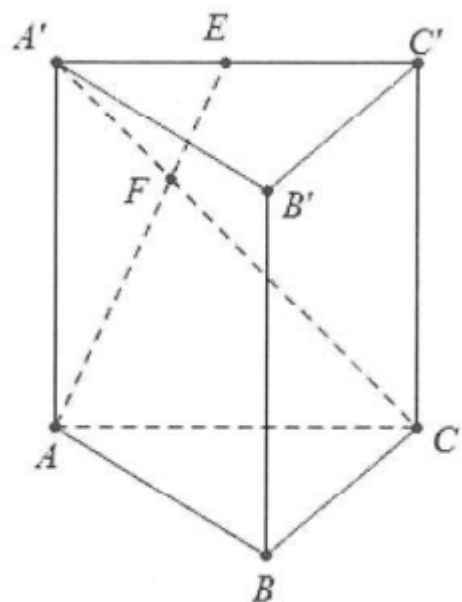
$$\text{Vậy } V_{S.MECF} = \frac{1}{3} \cdot V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4a^3\sqrt{15}}{75} = \frac{4a^3\sqrt{15}}{225}. \text{ Chọn C}$$

$$\text{Câu 34: Do } A'E // AC \Rightarrow \frac{FA'}{FC} = \frac{A'E}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{FA'}{CA'} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Do đó } d(F; (A'B'C')) = \frac{1}{3} d(C; (A'B'C'))$$

$$\text{Suy ra } V_{F.AB'C'} = \frac{1}{3} V_{C.A'B'C'} = \frac{1}{9} V_{ABCD.ABC'}$$

$$\text{Vậy } \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{9}. \text{ Chọn D}$$

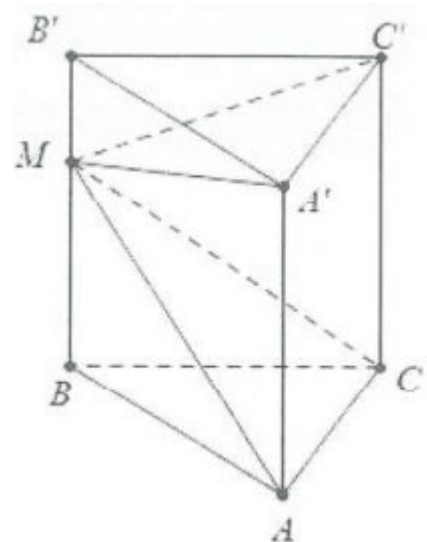


Câu 35: Ta có $MB' // (ACC'A')$ nên

$$d(M; (A'AC)) = d(B'; (A'AC)).$$

$$\text{Do đó } V' = V_{B'.ACC'A'} = V - V_{B'.ABC} = V - \frac{1}{3}V = \frac{2}{3}V$$

$$\text{Vậy } k = \frac{V'}{V} = \frac{2}{3}. \text{ Chọn A}$$



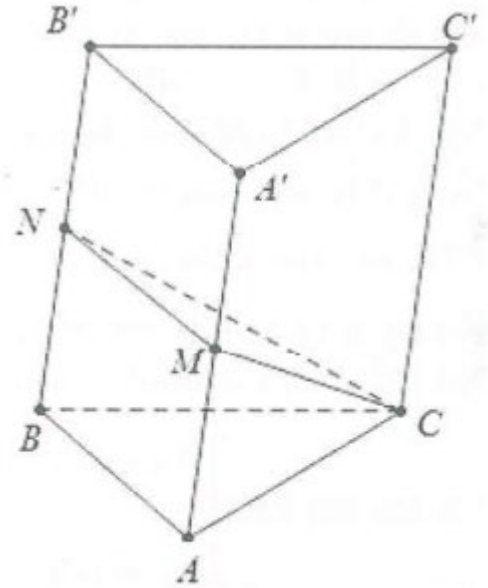
Câu 36: Gọi V là thể tích của khối trụ.

Ta có: $S_{MNBA} = \frac{1}{2}S_{A'B'BA} \Rightarrow V_{C.MNBA} = \frac{1}{2}V_{C.A'B'BA}$.

Mặt khác $V_{C.A'B'BA} = V_{ABC.A'BC'} - V_{C.A'B'C'} = V - \frac{V}{3} = \frac{2V}{3}$

$\Rightarrow V_{C.MNBA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2V}{3} = \frac{1}{3} \cdot 18 = 6$

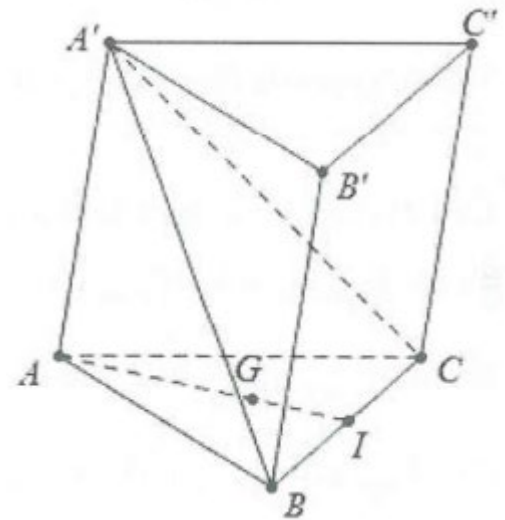
Do đó $V_{CNMAB'C'} = V - V_{C.MNBA} = 12$. **Chọn A.**



Câu 37: Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow AI = 3GI$

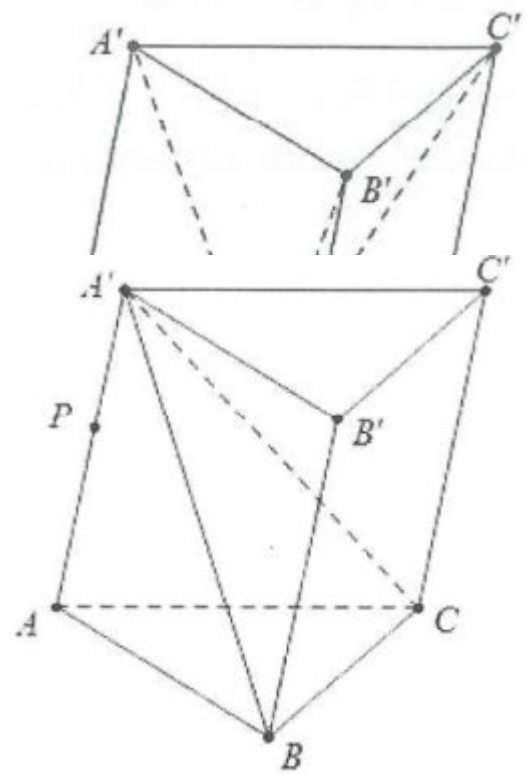
Khi đó $d(A; (A'BC)) = 3d(G; (A'BC)) \Rightarrow V_{A.A'BC} = 3V_{G.A'BC'}$

Mặt khác $V_{A.A'BC} = V_{A'ABC} = \frac{V}{3} \Rightarrow V_{G.A'BC} = \frac{V}{9}$ **Chọn D**



Câu 38: Do $(ABC) // (A'B'C') \Rightarrow d(G; (A'B'C')) = h$ với h là chiều cao khối lăng trụ.

Do đó $V_{G.AB'C'} = \frac{1}{3}h.S_{A'B'C'} = \frac{1}{3}V$. **Chọn A**



Câu 39: Do $AA' // (BCC'B')$ và $P \in AA'$ nên ta có:

$$V_{P.BCC'B'} = V_{A'.BCC'B'} = V_0 - V_{A'.ABC} = V_0 - \frac{V_0}{3} = \frac{2V_0}{3}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 40: Gọi E là trung điểm của BC , F là trung điểm của BE .

Khi đó $MF \parallel AE$ mà $AE \parallel A'N$ nên $MF \parallel A'N$

Suy ra các điểm A', M, F, N thuộc cùng một mặt phẳng.

Vậy $(A'MN)$ cắt cạnh BC tại điểm $P \Rightarrow P$ trùng với F .

Công thức tổng quát tính thể tích khối đa diện

“Thể tích khối chóp cụt là $V = \frac{h}{3}(B + B' + \sqrt{BB'})$ với h là chiều cao,

B, B' lần lượt là diện tích hai đáy”

Xét khối chóp cụt $MBP.A'B'N$ có chiều cao $h = BB' = a$.

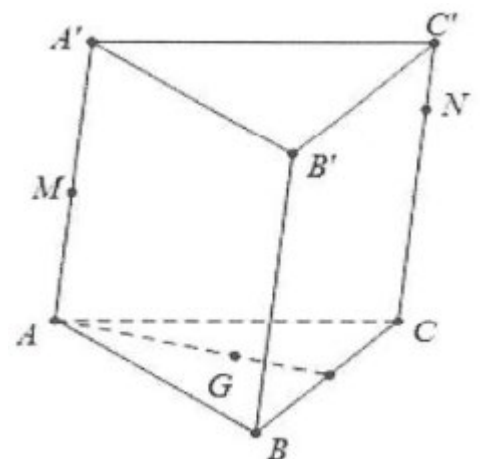
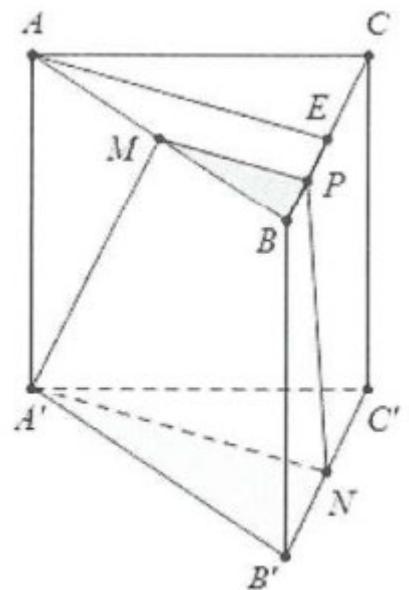
$$\text{Và diện tích đáy} \begin{cases} B = S_{MBP} = \frac{S_{ABC}}{8} = \frac{S}{8} \\ B' = S_{A'B'N} = \frac{S_{A'B'C'}}{2} = \frac{S}{2} \end{cases} \text{ với } S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Thể tích khối đa diện $MBP.A'B'N$ là

$$V = \frac{BB'}{3} \cdot \left(\frac{S}{8} + \frac{S}{2} + \sqrt{\frac{S}{8} \cdot \frac{S}{2}} \right) = \frac{7\sqrt{3}a^3}{96}. \text{ Chọn D}$$

Câu 41: Gọi V là thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$

$$\text{Ta có: } V_{A.BCC'B'} = V - V_{A'.ABC} = V - \frac{V}{3} = \frac{2V}{3}$$



Khi đó $V_{G.A'B'C'} = \frac{V}{3}, V_{M.BB'N} = V_{A'.BB'N} = \frac{1}{2}V_{A'.BCC'B'}$

(Do $S_{NBB'} = \frac{1}{2}S_{CC'B'B}$). Do đó $V_{M.BB'N} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2V}{3} = \frac{V}{3}$.

Tương tự $V_{A.C'B'B} = V_{A'.C'B'B} = \frac{1}{2}V_{A'.BCC'B'} = \frac{V}{3}$.

Do $S_{BCN} < S_{BCC'} = \frac{1}{2}S_{BCC'B'} \Rightarrow V_{A'.BCN} < \frac{1}{2}V_{A'.BCC'B'} = \frac{V}{3}$.

Vậy khối chóp $BB'MN$ có thể tích nhỏ nhất. **Chọn D**

Câu 42: Gọi V là thể tích khối chóp $ABC.A'B'C'$

Ta có: $V_{A.BCC'B'} = V - V_{A'.ABC} = V - \frac{V}{3} = \frac{2V}{3}$

Lại có $V = S_{ABC}.AA' = \frac{AB.AC}{2}.AA' = 2a^3\sqrt{3}$

Suy ra $V_{A.BCC'B'} = \frac{2}{3}.2a^3\sqrt{3} = \frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$. **Chọn A**

Câu 43: Gọi V là thể tích khối chóp $ABC.A'B'C'$

Ta có $V_{A.BCC'B'} = V - V_{A'.ABC} = V - \frac{V}{3} = \frac{2V}{3}$

Lại có: $S_{IKB} = \frac{1}{2}S_{KICB} = \frac{1}{4}S_{BCC'B'}$

Suy ra $V_{A'.IKB} = \frac{1}{4}V_{A.BCC'B'} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}V = \frac{1}{6}V$

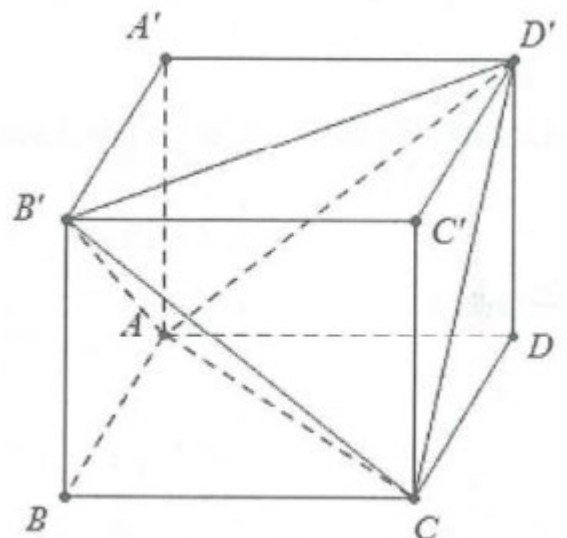
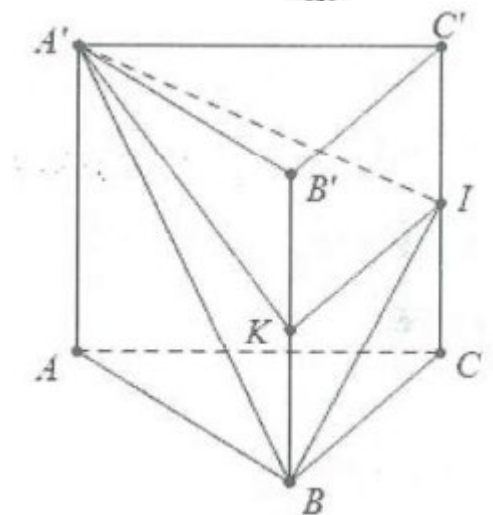
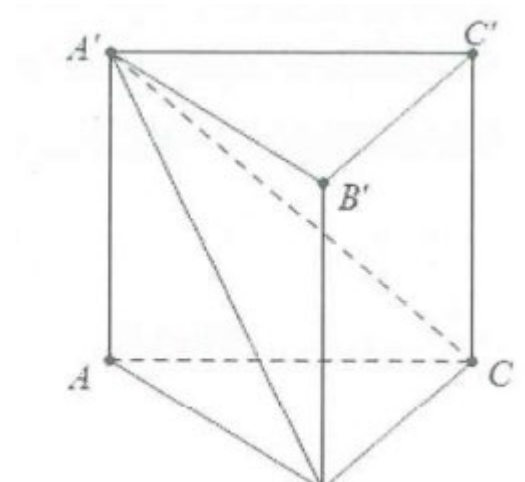
Mặt khác $V = S_{ABC}.AA' = \frac{1}{2}AB.AC.\sin \widehat{BAC}.AA'$

$= \frac{1}{2}.a.2a.\sin 120^\circ.2a\sqrt{3} = 3a^3 \Rightarrow V_{A'.IKB} = \frac{1}{6}V = \frac{a^3}{2}$. **Chọn**

A.

Câu 44: Thể tích khối lập phương là $V = a^3$.

Ta có $V_{A.A'B'D'} = V_{B'.ABC} = V_{D'.ACD} = V_{D'.B'C'C} = \frac{1}{6}a^3$



$$V_{ACD'B'} = V_{ABCD.A'B'C'D'} - V_{A.A'B'D'} - V_{B'.ABC} - V_{D'.ACD} - V_{D'.B'C'C}$$

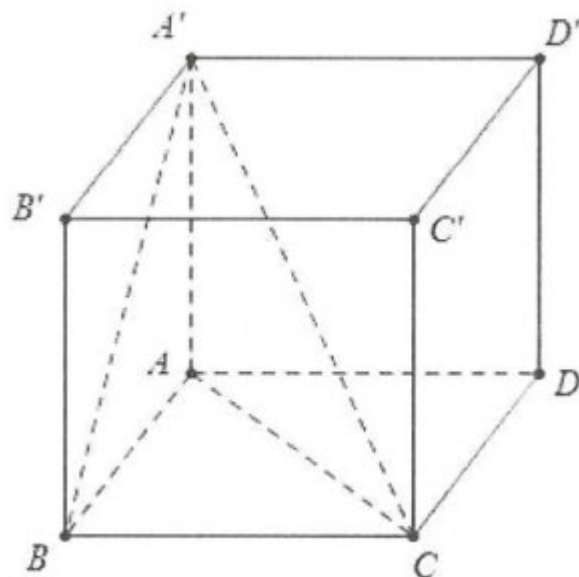
$$\text{Suy ra } V_{ACD'B'} = a^3 - 4 \cdot \frac{a^3}{6} = \frac{a^3}{3}. \text{ Chọn A}$$

Câu 45: Ta có $S_{ABCD} = 2S_{ABC} \Rightarrow V_{A'.ABCD} = 2V_{A'.ABC}$

Mặt khác $V_{A'.ABCD} = \frac{1}{3}V_{ABCD.A'B'C'D'}$

Do đó $V_{A'.ABC} = \frac{1}{2}V_{A'.ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}V_{ABCD.A'B'C'D'}$

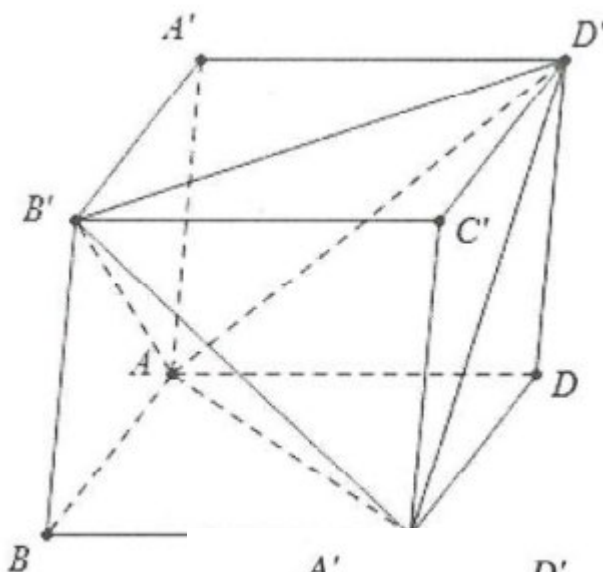
$$= \frac{1}{6}V_{ABCD.A'B'C'D'}. \text{ Chọn B}$$



Câu 46: Gọi h là chiều cao của khối hộp

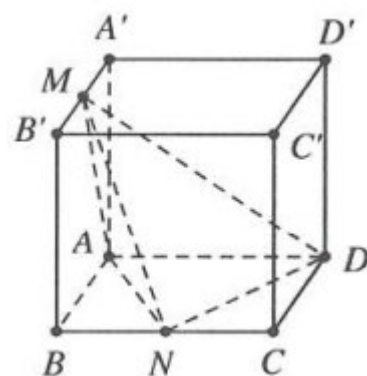
Ta có $V_{B'.ABC} = \frac{1}{3}h.S_{ABC} = \frac{1}{3}h \cdot \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{6}h.S_{ABCD} = \frac{1}{6}V$

$V_1 = V - 4.V_{B'.ABC} = V - 4 \cdot \frac{1}{6}V = \frac{1}{3}V. \text{ Chọn A}$



Câu 47: Ta có $V_{ADMN} = \frac{1}{3} \cdot d[M;(ABCD)] \cdot S_{\Delta AND}$

$$= \frac{1}{3} \cdot AA' \cdot (S_{ABCD} - S_{\Delta ABN} - S_{\Delta NCD})$$



$$= \frac{1}{3} \cdot AA' \cdot \left(S_{ABCD} - \frac{1}{4} S_{ABCD} - \frac{1}{4} S_{ABCD} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot AA' \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{a^3}{6}$$

Vậy thể tích cần tính là $V = \frac{a^3}{6}$. **Chọn C**

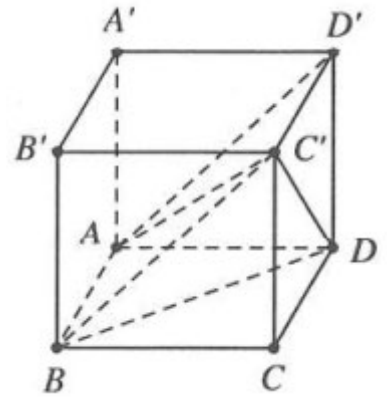
Câu 48: Ta có $V_{D.ABC'D'} = V_{C'.ABD} + V_{C'.ADD'}$

$$= \frac{1}{3} CC' \cdot S_{\triangle ABD} + \frac{1}{3} C'D' \cdot S_{\triangle ADD'}$$

$$= \frac{1}{3} CC' \cdot S_{ABCD} + \frac{1}{3} C'D' \cdot \frac{1}{2} S_{AA'DD'}$$

$$= \frac{1}{3} a \cdot \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{3} a \cdot \frac{1}{2} a^2 = \frac{a^3}{3}$$

Vậy thể tích cần tính là $V = \frac{a^3}{3}$. **Chọn A**



Câu 49: Ta có $MC = 3MA' \Rightarrow \frac{d(M; (ABCD))}{d(A'; (ABCD))} = \frac{MC}{A'C} = \frac{3}{4}$

Do đó $\frac{V_{M.ABCD}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{\frac{1}{3} d(M; (ABCD)) \cdot S_{ABCD}}{d(A'; (ABCD)) S_{ABCD}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$, **Chọn D**

Câu 50: Chuẩn hóa thành hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh 1

Qua M kẻ đường thẳng $d \parallel BD$, cắt AD tại $N \Rightarrow MN \parallel BD$,

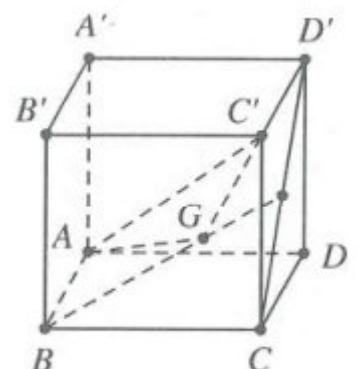
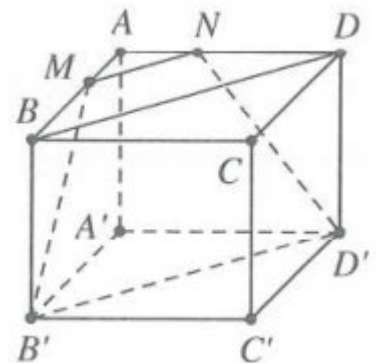
Mà $BD \parallel B'D' \Rightarrow MN \parallel B'D' \Rightarrow M, N, B', D'$ đồng phẳng

Dó đó $V_{AMN.A'B'D'} = \frac{1}{3} AA' \cdot (S_{\triangle AMN} + S_{\triangle A'B'D'} + \sqrt{S_{\triangle AMN} \cdot S_{\triangle A'B'D'}})$

$$= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{18} \cdot \frac{1}{2}} \right) = \frac{13}{54}$$

$\Rightarrow$ Thể tích khối còn lại là $\frac{13}{54} : \frac{41}{54} = \frac{13}{41}$. **Chọn C**

Câu 51: Dễ thấy $AB \parallel C'D' \Rightarrow A, B, C', D'$ đồng phẳng



$$\text{Do đó } d[G; (ABC')] = \frac{1}{3} d[C; (ABC')] \Rightarrow V_{G.ABC'} = \frac{1}{3} V_{C.ABC'}$$

$$\text{Ta có } V_{C.ABC'} = V_{C'.ABC} = \frac{1}{3} CC' \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} CC' \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{V}{6}$$

$$\text{Vậy } V_{G.ABC'} = \frac{1}{3} V_{C.ABC'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{V}{6} = \frac{V}{18} = \frac{1}{18}. \text{ Chọn A.}$$

$$\text{Câu 52: Ta có } \frac{V_{A'.ABC}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot AA' \cdot S_{\Delta ABC}}{AA' \cdot S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC}}{2 \cdot S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{6}. \text{ Chọn B}$$

Câu 53: Chọn $AB = 1$

Nối $MN \cap BC = P; MN \cap CD = Q$

Nối $C'P \cap BB' = E, C'Q \cap DD' = F$

Do đó thiết diện cắt bởi $mp(C'MN)$ là $C'EMNF$

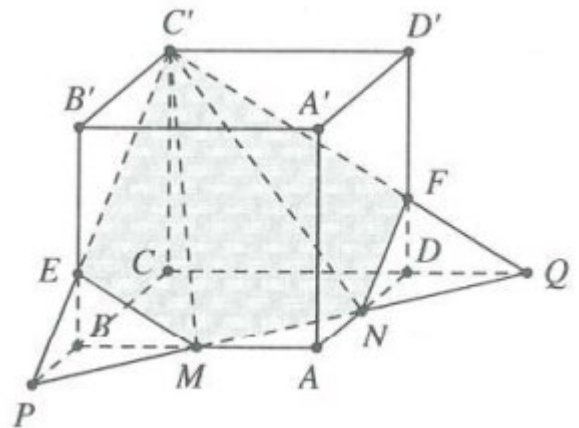
$$\text{Dễ thấy } BM = BP = DQ = DN = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{PB}{PC} = \frac{QD}{QC} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Khi đó } V_{E.BPM} = V_{F.DQN} = \frac{1}{3} \cdot EB \cdot S_{\Delta BPM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{72}$$

$$\text{Ta có } V_{C'.CPQ} = \frac{1}{3} CC' \cdot S_{\Delta CPQ} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right) = \frac{3}{8}$$

$$\text{Gọi } V_0 \text{ là thể tích đa diện chứa điểm } C \Rightarrow V_0 = V_{C'.CPQ} - V_{E.BPM} - V_{F.DQN} = \frac{25}{72}$$

$$\text{Vậy tỉ số thể tích cần tính là } \frac{V_1}{V_2} = \frac{25}{72}. \text{ Chọn D}$$



Câu 54: Gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow IM \parallel AB' \parallel C'D$

Do đó $mp(DIC')$ cắt hình lập phương theo thiết diện $IMDC'$

$$\text{Ta có } V_{IBM.C'D} = \frac{1}{3} BC \cdot (S_{\Delta IBM} + S_{\Delta C'D} + \sqrt{S_{\Delta IBM} \cdot S_{\Delta C'D}})$$

$$= \frac{1}{3} BC \cdot \left(\frac{1}{8} S_{ABCD} + \frac{1}{2} S_{ABCD} + \sqrt{\frac{1}{8} S_{ABCD} \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD}} \right)$$

$$= \frac{1}{3} BC \cdot \frac{7}{8} S_{ABCD} = \frac{7}{24} V_{ABCD.A'B'C'D'}$$

$$\text{Vậy tỉ số cần tính là } \frac{7}{17}. \text{ Chọn C}$$

