

PHƯƠNG PHÁP PHẦN BÙ TÍNH THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN PHỨC TẠP

Tác giả: Vương Thanh Bình

Bản Full đáp án tại Facebook: <https://www.facebook.com/ThanhBinhKami>

Link video full miễn phí tại : <http://moon.vn/Pro/1/228>

Mọi góp ý và bài tập liên quan đến phương pháp vui lòng Inbox Facebook

A-LÝ THUYẾT CHUNG

1) Khái niệm khối đa diện phức tạp : Là khối đa diện không cơ bản (không phải chóp tam giác, chóp tứ giác, hình lăng trụ, hình hộp, hình lập phương ...) Hoặc cơ bản nhưng khó tính chiều cao và diện tích đáy.

2) Ý tưởng : Ta sẽ xây dựng khối đa diện phức tạp (H) nằm trong khối chóp cơ bản (A) . Ví dụ khối chóp (A) gồm khối đa diện phức tạp (H) và khối chóp cơ bản (B) khi đó

$$V_H = V_A - V_B$$

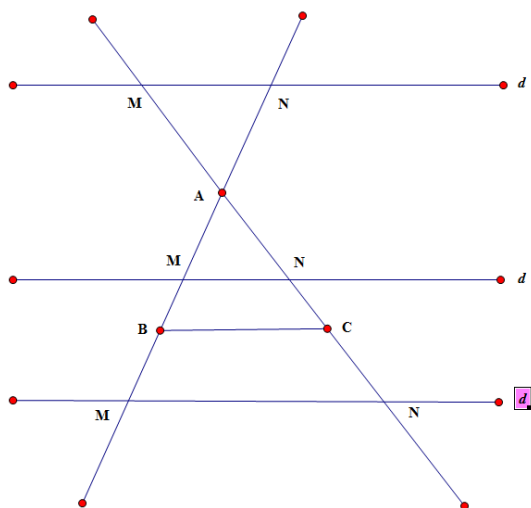
3) Các dạng thường gặp : +) Dạng 1: (Cơ bản) $A = H + B \Rightarrow V_H = V_A - V_B$

+ Dạng 2: (Nâng cao) $A = H + B + C \Rightarrow V_H = V_A - V_B - V_C$

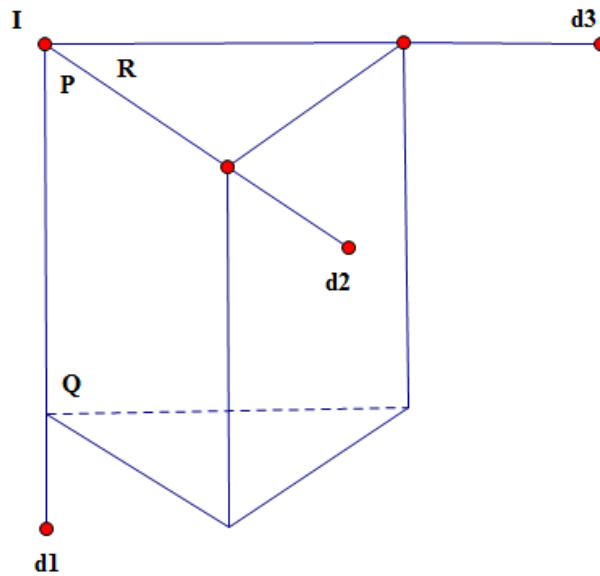
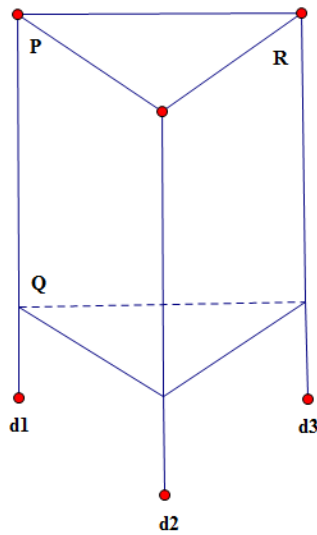
+ Dạng 3: (Sao) $A = H + B + C + D \Rightarrow V_H = V_A - V_B - V_C - V_D$

4) Kiến thức liên quan :

4.1. Định lý Talet: Cho tam giác ABC , đường thẳng d song song với BC đồng thời cắt các cạnh AB, AC hoặc các đường kéo dài của 2 cạnh này tại M, N thì ta có tỉ lệ: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$



4.2. Định lý 3 đường giao tuyến: Cho 3 mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ giao nhau theo 3 giao tuyến d_1, d_2, d_3 thì 3 giao tuyến này một là đôi một song song hai là đồng quy.



DẠNG 1: $V_{(H)} = V_{(A)} - V_{(B)}$

Ví dụ minh họa: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn $AB = 3a$, đáy nhỏ $CD = a$, cạnh bên $AD = 2a, BC = \frac{4a}{3}$. Chiều cao $SA = 3a$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$

- A. $\frac{8a^3\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{16a^3\sqrt{2}}{9}$ C. $\frac{11a^3\sqrt{3}}{9}$ D. $\frac{7a^3\sqrt{5}}{9}$

❖ **Phân tích ý tưởng**

+) Để tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ ta phải tính được diện tích đáy $ABCD$ là một hình thang rất khó tính diện tích (Vì không phải hình thang cân, không phải hình thang vuông và chiều cao trong hình thang khó tính được)

+) Trong trường hợp này ta sẽ sử dụng **phương pháp phân bù tính thể tích**

Ta xây dựng khối chóp $S.ABCD$ nằm trong khối chóp $S.IAB$ khi đó

$$V_{(S.ABCD)} = V_{(S.IAB)} - V_{(S.ICD)}$$

Đương nhiên ta phải chọn sao cho khối chóp $S.IAB$ và khối chóp $S.ICD$ đều dễ dàng tính được thể tích.


$$V_{(S.ABCD)} = V_{(S.IAB)} - V_{(S.ICD)} = \frac{1}{3}SA.(S_{IAB} - S_{ICD})$$

+) Từ $AD = 2a, BC = \frac{4a}{3}$ dễ tính được $IA = 3a, IB = 2a$.

$$\text{Vậy } V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_A \cdot \frac{8}{9} S_{IAB} = \frac{1}{3} \cdot 3a \cdot \frac{8}{9} \cdot 2\sqrt{2}a^2 = \frac{16a^3\sqrt{2}}{9}$$

Bài 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích là a^3 đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Mặt phẳng (α) qua AM và song song với BD cắt SB, SD tại E và F . Tính thể tích của khối đa diện $AEMCB$

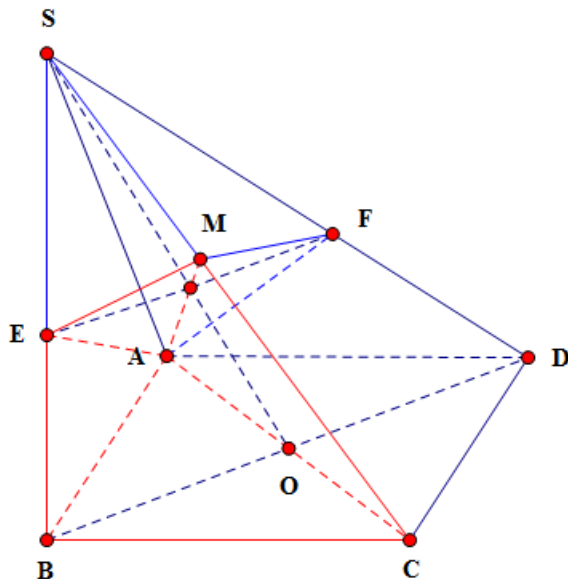
A. $\frac{a^3}{2\sqrt{2}}$

B. $\frac{a^3}{3}$

C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$

D. $\frac{5a^3}{14}$

GIẢI



+) Ta xây dựng khối đa diện $AEMCB$ nằm trong khối chóp $S.ABC$.

Khi đó: $V_{AEMCB} = V_{S.ABC} - V_{S.AEM}$

+) Ta có: $\frac{V_{S.AEM}}{V_{S.ABC}} = \frac{SE}{SB} \cdot \frac{SM}{SC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.AEM} = \frac{1}{3} V_{S.ABC}$

$\Leftrightarrow V_{AEMCB} = V_{S.ABC} - V_{S.AEM} = \frac{2}{3} V_{S.ABC} = \frac{1}{3} V_{ABCD} = \frac{a^3}{3}$

Bài 2: Cho lăng đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân, $AB = BC = a$ cạnh bên $AA' = 2a$. Gọi M và N là 2 điểm thỏa mãn sao cho $\frac{B'M}{BA'} = \frac{B'N}{B'C'} = \frac{1}{3}$. Tính thể tích khối đa diện $B'MNCBA$

A. $\frac{a^3}{2}$

B. $\frac{4\sqrt{3}a^3}{15}$

C. $\frac{9a^3\sqrt{2}}{28}$

D. $\frac{13a^3}{27}$

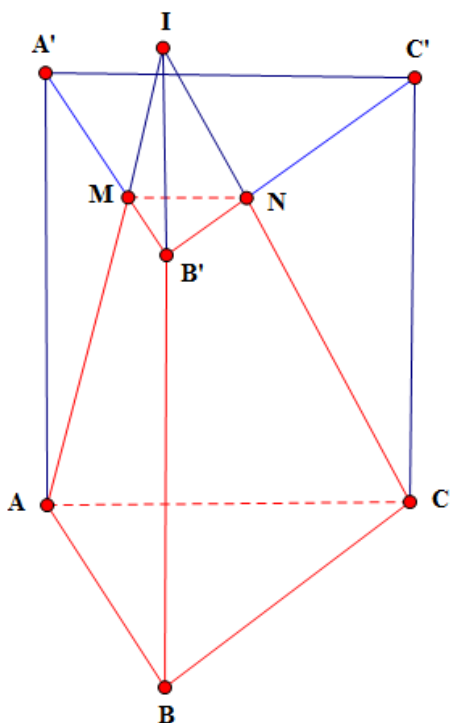
GIẢI

+) Ta xây dựng khối đa diện $B'MNCBA$ nằm trong khối chóp tam giác $I.ABC$

+) Ta có $\frac{V_{I.B'MN}}{V_{I.ABC}} = \frac{IM}{IA} \cdot \frac{IN}{IC} \cdot \frac{IB'}{IB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27} \Rightarrow V_{I.B'MN} = \frac{1}{27} V_{I.ABC} \Rightarrow V_{B'MNCBA} = \frac{26}{27} V_{I.ABC}$

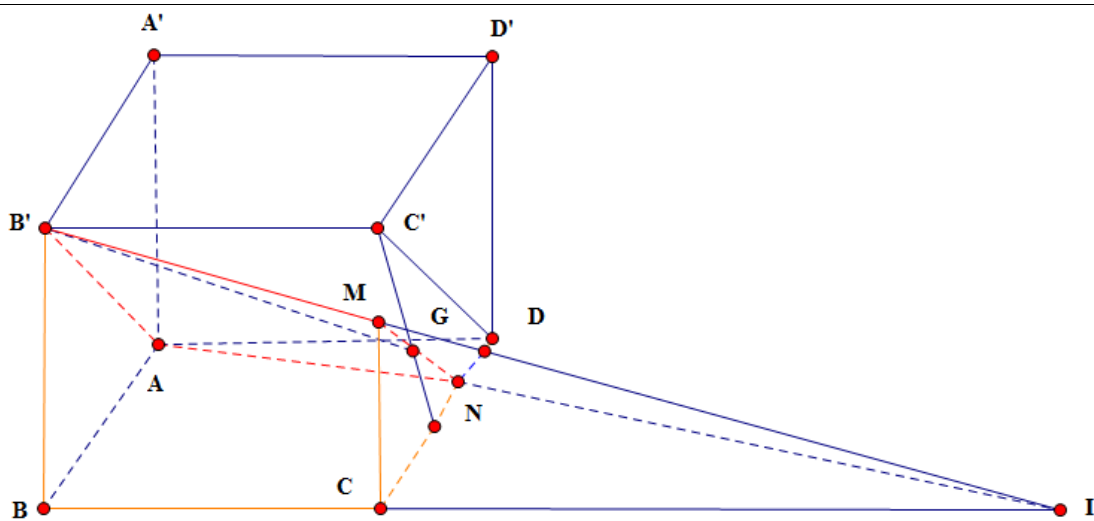
+) Mà $V_{I.ABC} = \frac{1}{3} IB \cdot \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{1}{3} \cdot 3a \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a = \frac{a^3}{2}$

+) Vậy $V_{B'MNCBA} = \frac{26}{27} \cdot \frac{a^3}{2} = \frac{13a^3}{27}$



Bài 3: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 3a, AD = 4a, AA' = 3a$. Gọi G là trọng tâm tam giác $CC'D$. Mặt phẳng chứa $B'G$ và song song với $C'D$ chia khối hộp thành 2 phần. Gọi (H) là khối đa diện chứa C . Tính tỉ số $\frac{V_{(H)}}{V}$ với V là thể tích khối hộp đã cho.

- A. $\frac{25a^3}{2}$ B. $\frac{57a^3}{5}$ C. $\frac{38a^3}{3}$ D. $\frac{23a^3\sqrt{3}}{4}$



+) Khối đa diện (H) chứa C là: $CMNABB'$

+) Ta xây dựng khối đa diện (H) nằm trong khối chóp $I.ABB'$

Khi đó $V_H = V_{I.BB'A} - V_{ICMN}$

+) Tính $V_{I.BB'A} = \frac{1}{3} IB \cdot \frac{1}{2} BB' \cdot BA = \frac{1}{3} \cdot 12a \cdot \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 3a = 18a^3$

+) Tính $\frac{V_{ICMN}}{V_{IBB'A}} = \frac{8}{27} \Rightarrow V_H = \frac{19}{27} V_{IBB'A} = \frac{38}{3} a^3$

DẠNG 2: $V_{(H)} = V_{(A)} - V_{(B)} - V_{(C)}$

Ví dụ minh họa: [THPT THẮNG LONG 2016] Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a có M và N lần lượt là trung điểm $A'B', BC$. Mặt phẳng (DMN) chia hình lập phương thành 2

phần. Khối đa diện đỉnh A kí hiệu là (H_1), phần còn lại kí hiệu là (H_2). Tính tỉ số $\frac{V_{(H_1)}}{V_{(H_2)}}$

A. $\frac{37}{48}$

B. $\frac{55}{89}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{1}{2}$

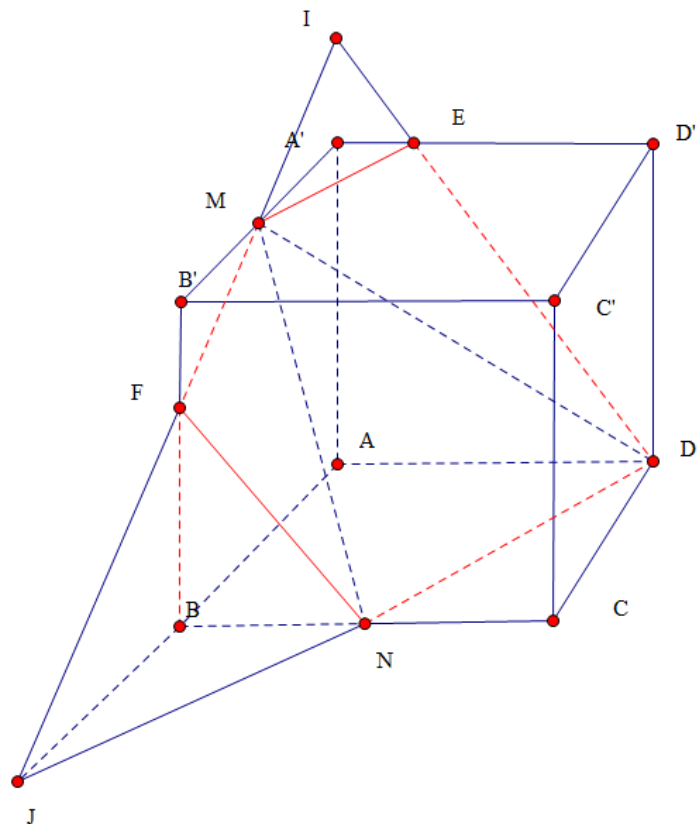
❖ **Phân tích tư duy**

+) Nhìn vào hình vẽ ta thấy mặt phẳng (DMN) chia khối lập phương thành 2 khối đa diện trong đó khối đa diện (H_1) là $ABNDENF$ và phần còn lại

+) Khối đa diện (H_1) cực kì phức tạp (không phải chóp, không phải lăng trụ, không phải hộp...) nên việc tính toán là rất phức tạp

+) Để dễ tính ta sẽ sử dụng **phương pháp phần bù tính thể tích khối đa diện phức tạp**
Ta sẽ đi xây dựng khối đa diện (H_1) nằm trong khối đa diện dễ tính $I.ADJ$

Khi đó $V_{(H_1)} = V_{I.ADJ} - V_{IANE} - V_{FBNJ}$



❖ **Giải**

+) Theo định lý Talet ta có: $\frac{JB}{JA} = \frac{JN}{JD} = \frac{JF}{JI} = \frac{1}{2}$ và $\frac{IA'}{IA} = \frac{IN}{IJ} = \frac{IE}{ID} = \frac{A'N}{AJ} = \frac{1}{4}$

Từ đó ta có thể tính được hết các đoạn thẳng ví dụ như: $JB = \frac{a}{2}$; $BF = \frac{2a}{3}$, $IA = \frac{a}{4}$...

+) Tính $V_{IADJ} = \frac{1}{3} IA \cdot S_{ADJ} = \frac{1}{3} IA \cdot \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AJ = \frac{1}{3} \cdot \frac{4a}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a = \frac{4}{9} a^3$

+) Tính $V_{IANE} = \frac{1}{3} IA \cdot \frac{1}{2} AE \cdot AN = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{144}$

+) Tính $V_{FBNJ} = \frac{1}{3} \cdot FB \cdot \frac{1}{2} BN \cdot BJ = \frac{1}{3} \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a = \frac{a^3}{18}$

Vậy $V_{(H_1)} = V_{IADJ} - V_{IANE} - V_{FBNJ} = \frac{55}{144} a^3 \Rightarrow V_{(H_2)} = a^3 - V_{(H_1)} = \frac{89}{144} a^3$

Vậy $\frac{V_{(H_1)}}{V_{(H_2)}} = \frac{55}{89}$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài 1: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ cạnh đáy là a , cạnh bên là $2a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh $B'C'$, CC' . Mặt phẳng (AMN) chia khối lăng trụ thành 2 khối đa

diện. Gọi (H) là khối đa diện chứa đỉnh B . Tính tỉ số $\frac{V_{(H)}}{V}$ với V là thể tích của khối lăng trụ đều.

A. $\frac{a^3}{3}$

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$

C. $\frac{7a^3\sqrt{2}}{15}$

D. $\frac{23a^3\sqrt{3}}{72}$

GIẢI

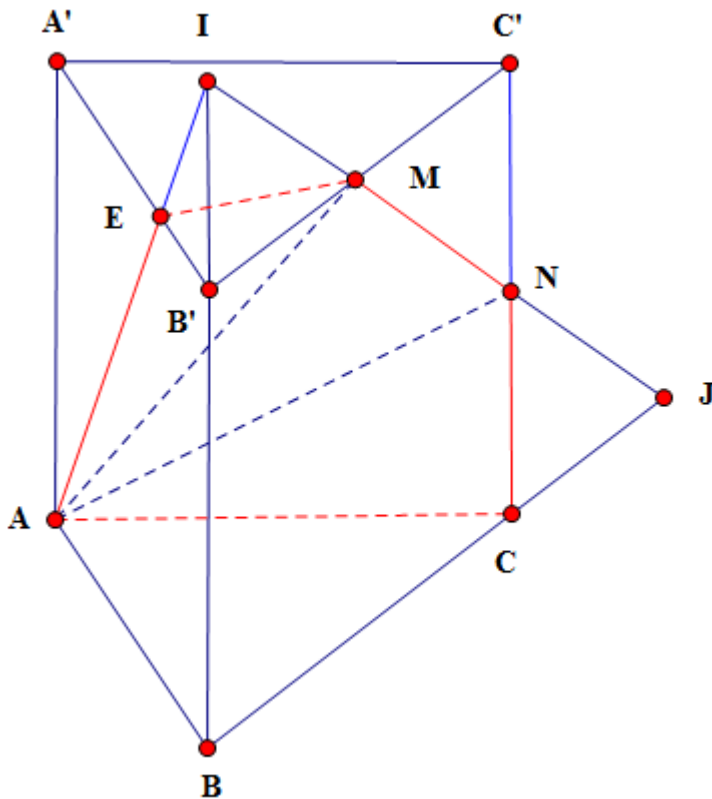
+) Khối đa diện chứa đỉnh B là $B'MEABCN$ (khối đa diện H)

+) Ta xây dựng khối đa diện H nằm trong khối chóp $I.ABJ$

Khi đó: $V_H = V_{I.ABJ} - V_{I.EB'M} - V_{N.ACJ}$

+) Tính $V_{I.ABJ} = \frac{1}{3} IB \cdot \frac{1}{2} BA \cdot BJ \sin 60^\circ = \frac{1}{3} \cdot 3a \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{3a}{2} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

+) Theo công thức tỉ số thể tích thì $\frac{V_{IEB'M}}{V_{IABC}} = \frac{1}{27}, \frac{V_{N.ACJ}}{V_{IABC}} = \frac{1}{9} \Rightarrow V_H = \frac{23}{27} V_{I.ABC} = \frac{23a^3\sqrt{3}}{72}$



Bài 2: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M và N lần lượt là trung điểm

$A'B', A'D'$ và điểm P thỏa mãn $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{4} \overrightarrow{CC'}$. Mặt phẳng (MNP) chia khối lập phương thành 2

khối đa diện. Gọi (H_1) là khối đa diện chứa đỉnh C' . Gọi (H_2) là khối đa diện còn lại. Tính tỉ

số $\frac{V_{H_1}}{V_{H_2}}$

A. $\frac{a^3}{4}$

B. $\frac{4a^3}{25}$

C. $\frac{25a^3}{96}$

D. $\frac{41}{155}a^3$

GIẢI

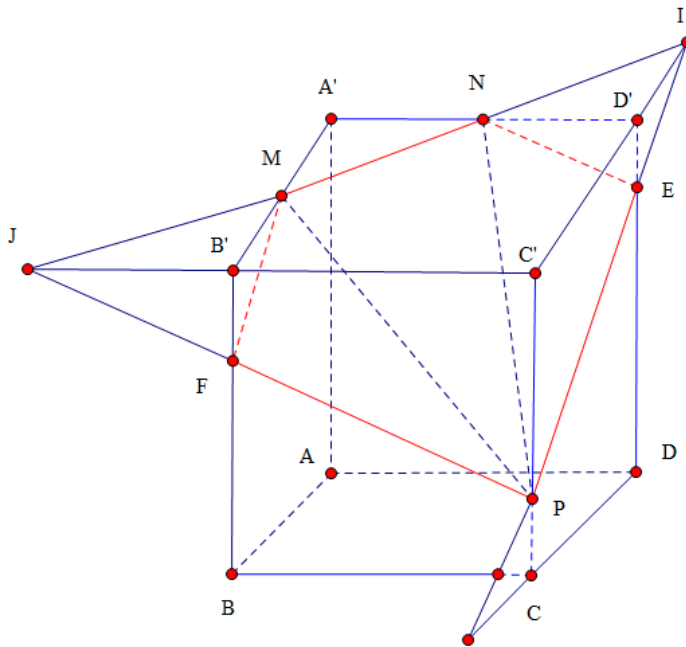
+) Khối đa diện chứa đỉnh C' là : $PFB'MND'EC'$ là khối đa diện (H_1)

+) Ta xây dựng khối đa diện (H_1) trong chóp $P.C'IJ$

Khi đó: $V_{H_1} = V_{P.C'IJ} - V_{E.D'IN} - V_{F.B'MJ}$

+) Tính $V_{P.C'IJ} = \frac{1}{3}PC' \cdot \frac{1}{2}CI \cdot CJ = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{9a^3}{32}$

+) Theo công thức tỉ số thể tích thì: $V_{E.D'IN} = V_{F.B'MJ} = \frac{1}{27}V_{P.CIJ} \Rightarrow V_H = \frac{25}{27}V_{P.C'IJ} = \frac{25a^3}{96}$



DẠNG 3: $V_{(H)} = V_{(A)} - V_{(B)} - V_{(C)} - V_{(D)}$

Ví dụ minh họa: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a , có M và N là trung điểm của $A'B'$ và CD . Mặt phẳng (α) qua MN và song song với $B'D'$ chia khối đa diện thành 2 phần. Tính thể tích của khối đa diện chứa đỉnh A .

A. $\frac{a^3}{2}$

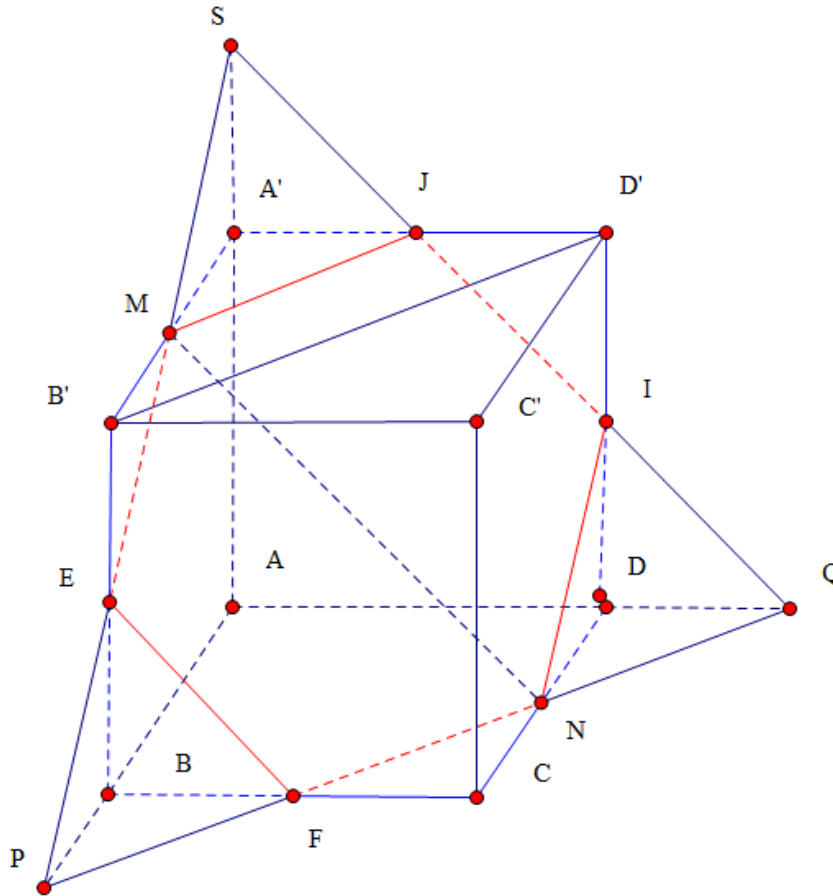
B. $\frac{2a^3}{3}$

C. $\frac{3a^3}{5}$

D. $\frac{4a^3}{7}$

❖ Phân tích ý tưởng

- +) Xác định thiết diện và ta xác định được khối đa diện chứa A là $A'MJINFEB$ (ta gọi đây là khối đa diện H)
- +) Đến dạng 3 thì chắc chúng ta đã quen với ý tưởng: Nếu tính thể tích 1 khối đa diện phức tạp ta sẽ sử dụng phương pháp phần bù
- +) Vậy ta sẽ xây dựng khối đa diện H nằm trong khối chóp tam giác $S.APQ$ (dễ tính thể tích) và $V_{(H)} = V_{S.APQ} - V_{S.A'MJ} - V_{E.BPF} - V_{IDNQ}$



♦ Giải

- +) Ta có $V_{(H)} = V_{S.APQ} - V_{S.A'MJ} - V_{E.BPF} - V_{IDNQ}$
- +) Sử dụng tính chất của quan hệ song song và định lý Talet ta dễ dàng tính được độ dài các đoạn thẳng $SA', A'J, ID....$
- +) Tính $V_{SAPQ} = \frac{1}{3} SA \cdot \frac{1}{2} AP \cdot AQ = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{9a^3}{16}$
- +) Tính $V_{S.A'MJ} = \frac{1}{3} SA' \cdot \frac{1}{2} A'M \cdot A'J = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{48}$

$$+) \text{ Tương tự } V_{E.BPF} = V_{IDNQ} = \frac{a^3}{48}$$

$$+) \text{ Vậy } V_{(H)} = V_{S.APQ} - V_{S.A'MJ} - V_{E.BPF} - V_{IDNQ} = \frac{a^3}{2}$$

❖ Bình luận

+) Bài này còn 1 cách làm nhanh nữa là dựa vào tính chất đối xứng của 2 khối đa diện tạo thành bởi mặt phẳng (α) ta thấy thể tích của 2 khối đa diện này đều bằng nhau và bằng 1 nửa thể tích khối lập phương.

+) Do dạng này khá phức tạp nên ví dụ minh họa tác giả đã cố tính cho các bạn tỉ số rất đẹp (toàn là trung điểm) nên mới sinh ra cách đặc biệt kia.

+) Nếu các bạn muốn bài toán mang tính chất tổng quát hơn. Tác giả sẽ sửa lại vị trí điểm thuộc cạnh $A'D'$ như trong bài tập tự luyện số 2 thì bài toán sẽ căng thẳng hơn rất nhiều.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài 1: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. M, N là trung điểm $A'B', CD$. H là điểm thuộc cạnh $A'D'$ sao cho $HA' = 3HD'$. Mặt phẳng (HMN) chia khối chóp thành 2 đa diện. Tính thể tích khối đa diện chứa điểm C.

A. $\frac{a^3}{\sqrt{2}}$

B. $\frac{a^3}{2}$

C. $\frac{a^3}{\sqrt{3}}$

D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

GIẢI

+) Khối đa diện chứa điểm C là CNFEB'C'D'HMG gọi tắt là hình (H)

+) Ta có: $V_{(H)} = V_{J.CIA} - V_{JCNF} - V_{GD'IH} - V_{EB'MA}$

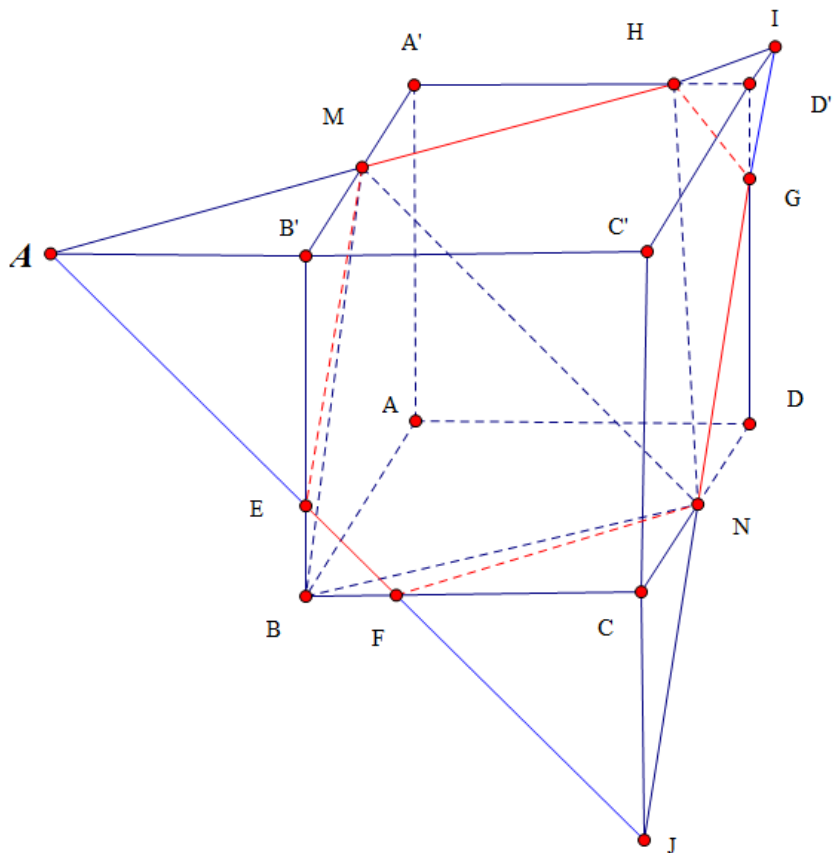
+) Tính $V_{J.CIA} = \frac{1}{3} JC \cdot \frac{1}{2} CA \cdot CI = \frac{1}{3} \cdot \frac{7a}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{7a}{4} \cdot \frac{7a}{6} = \frac{343}{576} a^3$

+) Tính $V_{J.CNF} = \frac{1}{3} JC \cdot \frac{1}{2} CN \cdot CF = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{3a}{4} = \frac{3a^3}{64}$

+) Tương tự $V_{E.AB'M} = \frac{3a^3}{64}$

+) Tính $V_{G.D'IH} = \frac{1}{3} \cdot GD' \cdot \frac{1}{2} \cdot D'I \cdot D'H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{a}{6} = \frac{a^3}{576}$

Vậy $V_{(H)} = V_{J.CIA} - V_{JCNF} - V_{GD'IH} - V_{EB'MA} = \frac{a^3}{2}$



Bài 2: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của $A'B', A'D'$. E là điểm thỏa mãn $\frac{D'E}{D'D} = \frac{5}{12}$. Mặt phẳng (MNE) chia khối lập phương thành 2 khối đa diện. Gọi (H) là khối đa diện chứa đỉnh (C') . Tính thể tích khối đa diện (H)

A. $\frac{a^3}{3}$

B. $\frac{15a^3}{37}$

C. $\frac{154a^3}{365}$

D. $\frac{1549a^3}{3600}$

GIẢI

+) Khối đa diện chứa đỉnh C' là $EPCQFMND'C'B'$ (khối đa diện H)

+) Ta có: $V_H = V_{K.C'IJ} - V_{K.CPQ} - V_{E.D'IN} - V_{F.B'MJ}$

+) Tính $V_{K.C'IJ} = \frac{1}{3} KC' \cdot \frac{1}{2} C'I \cdot C'J = \frac{1}{3} \cdot \frac{5a}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{15a^3}{32}$

+) Tính $V_{K.CPQ} = \frac{1}{3} KC' \cdot \frac{1}{2} CP \cdot CQ = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{10} \cdot \frac{3a}{10} = \frac{3a^3}{800}$

+) Tính $V_{E.D'IN} = \frac{1}{3} ED' \cdot \frac{1}{2} D'I \cdot D'N = \frac{1}{3} \cdot \frac{5a}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{5a^3}{288}$

+) Tính $V_{F.B'MJ} = \frac{1}{3} FB' \cdot \frac{1}{2} B'M \cdot B'J = \frac{1}{3} \cdot \frac{5a}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{5a^3}{288}$

Vậy $V_H = V_{K.C'IJ} - V_{K.CPQ} - V_{E.D'IN} - V_{F.B'MJ} = \frac{1549a^3}{3600}$

