

LÊ BÁ BẢO

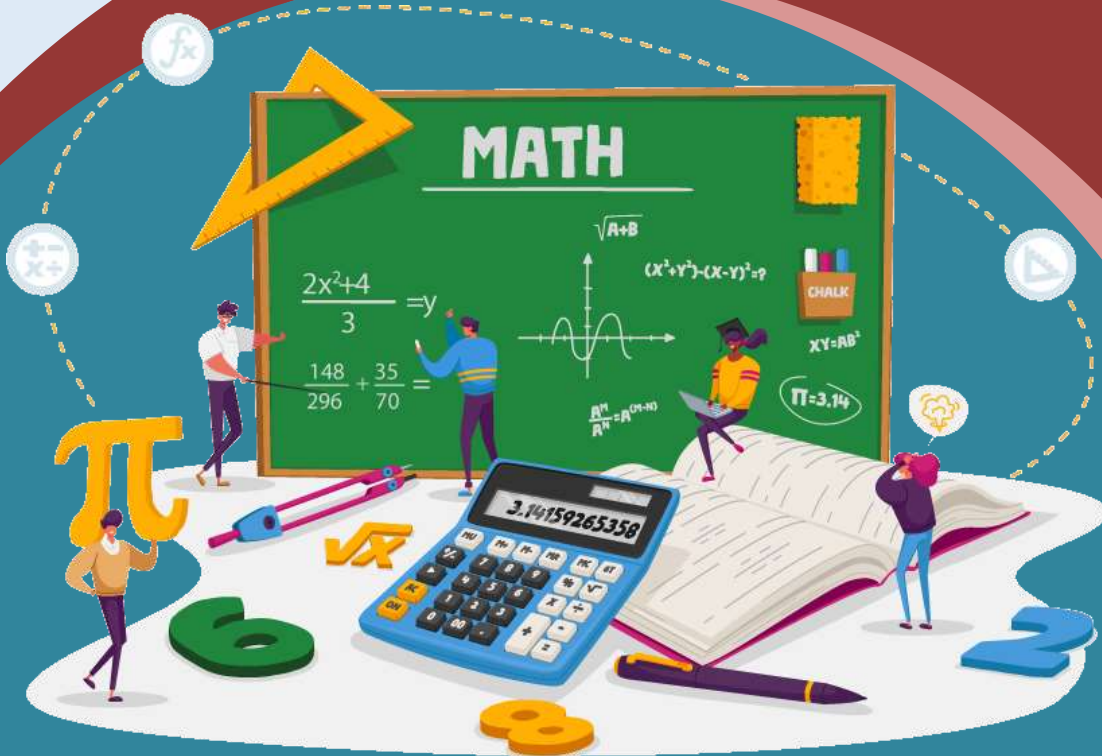
TRƯỜNG THPT ĐẶNG HUY TRỨ - ADMIN CLB GIÁO VIÊN TRẺ TP HUẾ

TOÁN 12

KHẢO SÁT HÀM SỐ

CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

- ~~✗~~ LUYỆN THI THPT QUỐC GIA
- ~~✗~~ CẬP NHẬT TỪ ĐỀ THI MỚI NHẤT





KHẢO SÁT HÀM SỐ

Môn: TOÁN 12 GIẢI TÍCH

Chủ đề 2:

CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

I- LÝ THUYẾT

- Định nghĩa:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $(a; b)$ (có thể a là $-\infty$, b là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a; b)$.
 - Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0 .
 - Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0 .
- Chú ý:** Nếu hàm số $f(x)$ đạt cực đại (cực tiểu) tại x_0 thì x_0 được gọi là **điểm cực đại** (**điểm cực tiểu**) của hàm số; $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** (**giá trị cực tiểu**) của hàm số, kí hiệu là f_{CD} (f_{CT}), còn điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực đại** (**điểm cực tiểu**) của đồ thị hàm số. Các điểm cực đại và cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị**. Giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) còn gọi là **cực đại** (**cực tiểu**) và được gọi chung là **cực trị** của hàm số.
- Điều kiện đủ để hàm số có cực trị:**

3-1. **Định lý:** Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 và đạt cực trị tại đó thì $f'(x_0) = 0$

Lưu ý: Định lý khẳng định tại các điểm x_0 mà $f'(x_0) \neq 0$ thì x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số. Nếu $f'(x_0) = 0$ thì chưa thể khẳng định x_0 là điểm cực trị.

3-2. Định lý: (DẤU HIỆU I)

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trong khoảng $(a; b)$ và $f'(x_0) = 0$, $x_0 \in (a; b)$.

- Nếu qua x_0 đạo hàm đổi dấu từ **âm sang dương**, tức là $f'(x) < 0$, $\forall x < x_0$ và $f'(x) > 0$, $\forall x > x_0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0 .
- Nếu qua x_0 đạo hàm đổi dấu từ **dương sang âm**, tức là $f'(x) > 0$, $\forall x < x_0$ và $f'(x) < 0$, $\forall x > x_0$ thì hàm số đạt cực đại tại x_0 .

x	a	x_0	b
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘ CT ↗		

x	a	x_0	b
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗ CD ↘		

3-3. Định lý: (DẤU HIỆU II)

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trong khoảng $(a; b)$ và $f'(x_0) = 0$, $x_0 \in (a; b)$.

- Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số đạt **cực đại** tại x_0 .
- Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số đạt **cực tiểu** tại x_0 .

4- Một số nhận xét quan trọng:

- a) Với các hàm số thường gặp, nếu x_0 là điểm cực trị thì $f'(x_0) = 0$. Nói cách khác x_0 là nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$. Hay $f'(x_{CB}) = f'(x_{CT}) = 0$

b) Các quy tắc tìm các điểm cực trị của hàm số:

QUY TẮC I	QUY TẮC II
Bước 1: Tìm TXĐ	Bước 1: Tìm TXĐ
Bước 2: Tính $f'(x)$. Xác định các <u>điểm tới hạn</u> .	Bước 2: Tính $f'(x)$. Giải $f'(x) = 0$ và kí hiệu $x_i (i = 1, 2, \dots)$ là các nghiệm của nó.
Bước 3: Lập bảng biến thiên. Kết luận.	Bước 3: Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$. Kết luận

II- BÀI TẬP TỰ LUẬN

1) Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{4}{3}$ b) $f(x) = 3x - x^3 + 1$ c) $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-2}$
 d) $f(x) = x + \frac{4}{x} - 3$ e) $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 6$ f) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x + 1$
 g) $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$ h) $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ k) $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 2$ l) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x-1}$

2) Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $f(x) = 2\sin 2x - 3$ b) $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ c) $f(x) = \sqrt{8-x^2}$ d) $f(x) = x - \sin 2x + 2$
 e) $f(x) = 3 - 2\cos x - \cos 2x$ f) $y = x^5 - x^3 - 2x + 1$ g) $f(x) = \sin x + \cos x$

3) Tìm a, b, c, d của hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sao cho hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, $f(0) = 0$ và đạt cực đại tại $x = 1$, $f(1) = 1$.

4) Xác định các hệ số a, b, c của hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực trị bằng 0 tại điểm $x = -2$ và đồ thị của hàm số đi qua điểm $A(1; 0)$.

5) CMR: Với mọi giá trị m thì hàm số $y = \frac{x^2 - m(m+1)x + m^3 + 1}{x - m}$ luôn có cực đại, cực tiểu.

6) Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3}$. Tìm m để hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

7) Xác định m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực đại tại $x = 2$.

8) Tìm a để hàm số $y = x^3 - mx^2 + 3x - 2$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

9) CMR: Với mọi giá trị m thì hàm số $y = x^3 - mx^2 - 2x + 1$ luôn có 1 cực đại, cực tiểu.

10) (ĐH B- 2002) Tìm giá trị tham số để: $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$ có 3 điểm cực trị.

11) (ĐH D-2012) Tìm m để hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$ có hai điểm cực trị x_1 và x_2 sao cho: $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$.

12) (ĐH A-2012) Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông.

13) (ĐH B-2012) Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^3$ có hai điểm cực trị A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 48.

14) (ĐH B-2013) Tìm m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx$ có hai điểm cực trị A và B sao cho đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng $y = x + 2$.

Đọc thêm: XỬ LÝ CỰC TRỊ VÀ XÁC ĐỊNH PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG QUA CÁC ĐIỂM CỰC TRỊ CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

I-1- LÝ THUYẾT

1- Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 và đạt **cực trị tại điểm** x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Hay: a) x_0 là nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$.

b) Kí hiệu: $x_{CB}, x_{CT} \Rightarrow f'(x_{CB}) = f'(x_{CT}) = y'_{CB} = y'_{CT} = 0$

Bài toán: Xác định tham số để hàm số $y = f(x)$ có cực trị thỏa điều kiện X.

Bước 1: Xác định tham số để hàm số $y = f(x)$ có cực trị. Có tập A .

Bước 2: Xử lý biểu thức cực trị theo định lý Viet,... Có tập B .

Bước 3: Kết luận. Tập giá trị thỏa yêu cầu là $A \cap B$.

2- Một số kết quả quan trọng:

Đặt vấn đề: Trong quá trình xử lý biểu thức cực trị hay tính giá trị cực trị chúng ta thường gặp những khó khăn sau:

+ Điểm cực trị x_0 “rườm rà, cồng kềnh” dẫn đến **tính giá trị cực trị khó khăn**.

+ Bài toán viết **phương trình đồ thị qua các điểm cực trị** của hàm số.

+ Xử lý **biểu thức giá trị cực trị** y_{CB}, y_{CT} .

Bài toán 1: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$). Chứng minh rằng: Giá trị cực trị của hàm số là:

$$y_{CTr} = kx_{CTr} + m \text{ hay } \begin{cases} y_{CT} = kx_{CT} + m \\ y_{CB} = kx_{CB} + m \end{cases}, \text{ trong đó } kx + m \text{ là phần dư của phép chia } y \text{ cho } y'.$$

Chứng minh: Thật vậy: Biểu diễn $y = (ex + f)y' + kx + m$. Gọi x_{CTr} là hoành độ điểm cực trị của đồ thị hàm số: $y_{CTr} = (ex_{CTr} + f)y'_{CTr} + kx_{CTr} + m = kx_{CTr} + m$ (Do $y'_{CTr} = 0$)

Từ đây gọi $A(x_{CB}; y_{CB}), B(x_{CT}; y_{CT})$ thì $\begin{cases} y_{CT} = kx_{CT} + m \\ y_{CB} = kx_{CB} + m \end{cases}$ (đ.p.c.m)

Nhận xét: Kết quả của bài toán trên chỉ rõ:

+ Phương trình đường thẳng qua 2 điểm cực trị của hàm bậc 3 là $y = kx + m$.

+ Xử lý tốt biểu thức giá trị cực trị là $y_{CTr} = kx_{CTr} + m$ thay vì phải là:

$$y_{CTr} = ax_{CTr}^3 + bx_{CTr}^2 + cx_{CTr} + d$$

+ Tư duy của phép chứng minh này còn áp dụng cho các hàm đa thức khác.

Bài toán 2: Cho hàm số $y = \frac{u(x)}{v(x)}$. Gọi x_{CTr} là hoành độ điểm cực trị của đồ thị hàm số. Chứng minh:

$$y_{CTr} = \frac{u'(x_{CTr})}{v'(x_{CTr})}.$$

Chứng minh: Ta có $y' = \frac{u'(x).v(x) - v'(x).u(x)}{[v(x)]^2}$

$$\Rightarrow y'_{CTr} = 0 \Leftrightarrow u'(x_{CTr}).v(x_{CTr}) - v'(x_{CTr}).u(x_{CTr}) = 0 \Leftrightarrow (y_{CTr} =) \frac{u(x_{CTr})}{v(x_{CTr})} = \frac{u'(x_{CTr})}{v'(x_{CTr})}$$

Nhận xét: Kết quả của bài toán trên chỉ rõ:

+ Phương trình đường thẳng qua 2 điểm cực trị của (C): $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ là $y = \frac{2ax + b}{d}$

+ Xử lý tốt biểu thức giá trị cực trị là $y_{CTr} = \frac{u'(x_{CTr})}{v'(x_{CTr})}$ thay vì phải là: $y_{CTr} = \frac{u(x_{CTr})}{v(x_{CTr})}$

(Bậc tử và mẫu giảm 1)

+ Tư duy của phép chứng minh này còn áp dụng cho các hàm phân thức khác.

I-2- VÍ DỤ MINH HOẠ

Bài tập: Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 3(m+2)x - m - 6$. Xác định m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm cùng phía với trục hoành.

Bài giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = 3x^2 - 12x + 3(m+2)$.

Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 :

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \Delta' = 36 - 9(m+2) > 0 \Leftrightarrow 2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 2$ (*).

* Biểu diễn: $y = y' \cdot \left(\frac{x-2}{3}\right) + 2(m-2)x + m - 2$. Gọi x_0 là điểm cực trị của hàm số, suy ra:

$$y_0 = y'(x_0) \cdot \left(\frac{x_0-2}{3}\right) + 2(m-2)x_0 + m - 2 = 2(m-2)x_0 + m - 2 \quad (\text{do } y'(x_0) = 0)$$

Như vậy: $y_0 = 2(m-2)x_0 + m - 2$.

Hàm số đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 suy ra:
$$\begin{cases} y_1 = 2(m-2)x_1 + m - 2 \\ y_2 = 2(m-2)x_2 + m - 2 \end{cases}$$

Để ý, do x_1, x_2 là nghiệm của $y' = 0$ nên theo định lý Vi-et, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = m + 2 \end{cases} \quad (**)$$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm cùng phía với trục hoành $\Leftrightarrow y_1 \cdot y_2 > 0$.

$$\Leftrightarrow [2(m-2)x_1 + m - 2][2(m-2)x_2 + m - 2] > 0 \Leftrightarrow (m+2)^2 [4x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 1] > 0 \quad (1)$$

$$\text{Thay (**) vào (1) ta được: } (m+2)^2 [4(m+2) + 2 \cdot 4 + 1] > 0 \Leftrightarrow (m+2)^2 (4m+17) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m > -\frac{17}{4} \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện (*), các giá trị m cần tìm là: $-\frac{17}{4} < m < 2$.

I-3- BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1) Cho hàm số $y = x^3 + 2(m-1)x^2 + (m^2 - 4m + 1)x - 2(m^2 + 1)$. Tìm m để hàm số có cực đại và

cực tiểu tại x_1, x_2 sao cho: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$.

2) Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 2}{x - 1}$. Tìm m để điểm cực tiểu của đồ thị hàm số thuộc (P): $y = x^2 + x - 4$

3) Cho hàm số $y = \frac{x^2 + (m+1)x + 1 - m}{x - m}$. Tìm m để đồ thị hàm số có điểm CĐ, CT:

a) Cùng phía Ox. b) Khác phía Ox. c) Cùng phía Oy. d) Khác phía Oy.

- 4) Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 3x + m}{x - 4}$. Tìm m để $y_1 = 4 + y_2$ với y_1, y_2 lần lượt là CĐ, CT của hàm số.
- 5) Cho hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$. Tìm m để hàm số có CĐ, CT thỏa $|y_{CD} - y_{CT}| > 8$.
- 6) Cho hàm số $y = \frac{2mx^2 + (4m^2 + 1)x + 32m^3 + 2m}{x + 2m}$. Tìm m để đồ thị hàm số có một điểm cực trị thuộc góc phần tư thứ hai và điểm cực trị kia thuộc góc phần tư thứ tư của mp(Oxy).
- 7) Cho hàm số $y = \frac{x^2 - (m+1)x + 4m - 2}{x - 1}$. Xác định m để:
- Tích giá trị CĐ và giá trị CT nhỏ nhất.
 - Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị.
- 8) Cho hàm số $y = x^2 - 3x + \frac{m}{x} + 3$. Xác định m để hàm số có ba điểm cực trị. Khi đó chứng minh rằng cả ba điểm cực trị đều nằm trên đường cong $y = 3(x - 1)^2$.
- 9) Cho hàm số $y = x^4 + (m+1)x^2 + 1$.
- Tìm m để hàm số có CĐ, CT.
 - Viết phương trình đường cong qua các điểm cực trị của hàm số.
- 10) Chứng minh các điểm cực trị của đt hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 3x^2 + 8x$ nằm trên 1 parabol.
- 11) Xác định m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có các điểm cực đại, cực tiểu lập thành một tam giác đều.
- 12) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m^2x + m$. Tìm m để đồ thị hàm số có các điểm CĐ, CT:
- Nằm hai phía với đường thẳng $\Delta: x - 2y = 5$.
 - Đối xứng qua đường thẳng $\Delta: x - 2y = 5$.
- 13) Cho hàm số: $y = \frac{x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m}{x + 2}$. Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu sao cho cực đại và cực tiểu cùng với gốc tọa độ tạo thành tam giác vuông tại O.
- 14) Cho hàm số: $y = \frac{x^2 + (m+1)x + m + 1}{x + 1}$. Chứng minh rằng: Với mọi m hàm số luôn có cực đại, cực tiểu và khoảng cách giữa hai điểm đó bằng $\sqrt{20}$.

III- BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: Lý thuyết và xác định cực trị hàm số

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM MINH HỌA

Câu 1: Phát biểu nào sau đây đúng?

- Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi qua điểm x_0 và $f(x)$ liên tục tại x_0 thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0 .
- Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 khi và chỉ khi $f'(x_0) = 0$.
- Nếu $f''(x_0) = 0$ thì x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số.
- Nếu $f''(x_0) > 0$ và $f'(x_0) = 0$ thì hàm số đạt cực đại tại x_0 .

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

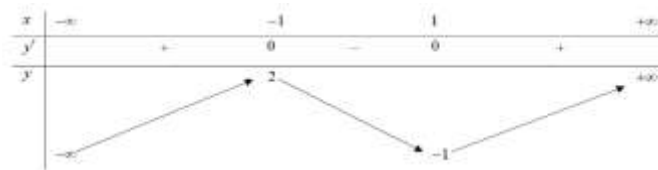
- $x = x_0$ là điểm cực tiểu của hàm số thì hàm số có giá trị cực tiểu là $f(x_0)$.

- B. Hàm số đạt cực trị tại điểm $x = x_0$ thì $f'(x_0) = 0$.
- C. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = x_0$ thì $f(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua x_0 .
- D. Nếu hàm số đơn điệu trên $\mathbb{R}$ thì hàm số không có cực trị.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đạt cực trị tại x_0 thì $f(x_0) = 0$.
- B. Hàm số đạt cực trị tại x_0 thì $f(x)$ đổi dấu qua x_0 .
- C. Nếu $f'(x_0) = 0$ thì hàm số đạt cực trị tại x_0 .
- D. Nếu hàm số đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Câu 4: Hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên sau:



Giá trị cực tiểu của hàm số là

- A. 4. B. 1. C. -1. D. $-\infty$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$

Khi đó số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + \frac{2}{3}$. Điểm cực đại của hàm số đã cho là

- A. $M(1; 2)$. B. $N\left(3; \frac{2}{3}\right)$. C. $x = 3$. D. $x = 1$.

Câu 7: Trong các hàm số sau, hàm số nào có duy nhất một điểm cực trị?

- A. $y = \frac{x+1}{x-2}$. B. $y = x^2 + x + 1$. C. $y = x^4 - 7x + 2$. D. $y = x^3$.

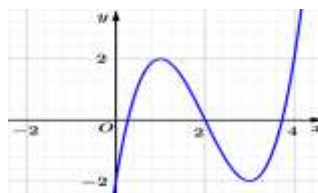
Câu 8: Cho hàm số $y = x^4 - 8x^2$ có đồ thị (C) . Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của (C) . Tính diện tích S của tam giác ABC .

- A. $S = 16$. B. $S = 8$. C. $S = 32$. D. $S = 64$.

Câu 9: Số điểm cực trị của hàm số $y = (x+1)^2(x-2)^5$ là

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 1

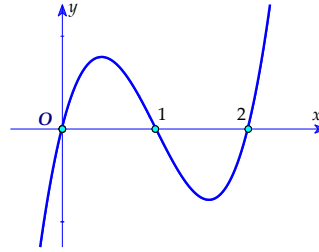
Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ là

- A. 5. B. 4. C. 3. D. 6.

Câu 11: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ và đồ thị đạo hàm $f'(x)$ được cho như hình bên dưới:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 4)(x - 3)^2(x - 1)$, $\forall x \in (0; +\infty)$. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 13: Hàm số nào dưới đây có 3 điểm cực trị?

- A. $y = x^3 - 3x$. B. $y = \frac{2x-2}{x+1}$. C. $y = x^4 - 2x^2 + 1$. D. $y = x^4 + 2x^2 + 1$.

Câu 14: Gọi A, B, C là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng

- A. $\sqrt{2} - 1$. B. $\sqrt{2} + 1$. C. $\sqrt{2}$. D. 1.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên khoảng K và $x_0 \in K$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Nếu x_0 là điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$ thì $f''(x) < 0$.
 B. Nếu $f''(x) = 0$ thì x_0 là điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.
 C. Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì $f'(x) = 0$.
 D. Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì $f'(x) \neq 0$.

Câu 16: Xét các khẳng định sau:

- (I). Nếu hàm số $y = f(x)$ có giá trị cực đại là M và giá trị cực tiểu là m thì $M > m$.
 (II). Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) luôn có ít nhất 1 điểm cực trị.
 (III). Tiếp tuyến (nếu có) tại điểm cực trị của đồ thị hàm số luôn song song với trục hoành. Số khẳng định đúng là:

- A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 17: Cho hàm $f(x)$ liên tục và có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Phát biểu nào sau đây **sai**?

- A. Nếu $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0 .
 B. Nếu $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại x_0 .
 C. Hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại x_0 khi và chỉ khi x_0 là nghiệm của đạo hàm.
 D. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x qua x_0 và $f'(x)$ liên tục tại x_0 thì hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại x_0 .

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm giá trị cực đại y_{CD} và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số đã cho.

A. $y_{CD} = 5$ và $y_{CT} = -1$.

B. $y_{CD} = 1$ và $y_{CT} = 0$.

C. $y_{CD} = -1$ và $y_{CT} = 1$.

D. $y_{CD} = 5$ và $y_{CT} = 0$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số là

A. 2 .

B. 1.

C. 0 .

D. 3 .

Câu 20: Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số dưới đây. Tìm hàm số đó.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
y'		+	0	+
y	$-\infty$	3	1	$+\infty$

A. $y = x^3 - 5x^2 + x + 6$.

B. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

C. $y = x^3 + 6x^2 - 9x + 6$.

D. $y = x^4 + x^2 - 3$.

Câu 21: Đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x$ có điểm cực tiểu là

A. $M(-1; -2)$.

B. $N(1; 0)$.

C. $P(1; -2)$.

D. $Q(-1; 0)$.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y			5		1	$+\infty$
	$-\infty$					

Hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 5.

C. 2.

D. 4.

Câu 23: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$. Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

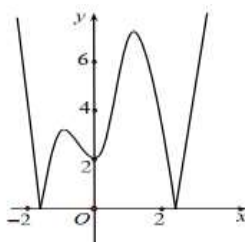
A. 2 .

B. 3.

C. -1.

D. 1.

Câu 24: Cho đồ thị hàm $y = f(x)$ như hình vẽ bên dưới:



Số điểm cực trị của hàm số là

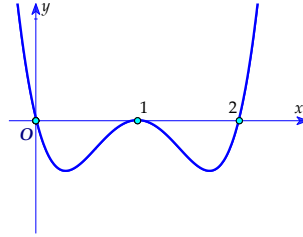
A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Câu 25: Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ và đồ thị đạo hàm $f'(x)$ được cho như hình bên dưới:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

Câu 26: Hàm số nào dưới đây **không** có cực trị?

- A. $y = \frac{x^2+1}{x}$. B. $y = \frac{2x-2}{x+1}$. C. $y = x^2 - 2x + 1$. D. $y = -x^3 + x + 1$.

Câu 27: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác, gọi là ΔABC . Tính diện tích ΔABC .

- A. $S = 2$. B. $S = 1$. C. $S = \frac{1}{2}$. D. $S = 4$.

Câu 28: Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - x - 20}$. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

- A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -4)$. B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 5$.
C. Hàm số đồng biến trên $(5; +\infty)$. D. Hàm số không có cực trị.

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^{2017}(x-1)^{2019}(x+2)^{2021}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tổng bình phương các điểm cực trị của hàm số là

- A. 5. B. 1. C. 4. D. 12229091.

Câu 30: Hàm số nào dưới đây có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu?

- A. $y = x^3 - 3x$. B. $y = x^4 + 2$. C. $y = x^4 - 2x^2 + 1$. D. $y = -x^4 + 2x^2$.

Dạng 2: Bài toán tham số không liên quan đến hàm ẩn

CỰC TRỊ HÀM BẬC BA $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a; b; c; d \in \mathbb{R}, a \neq 0$)

Ta xét: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ có $\Delta' = b^2 - 3ac$.

Điều kiện $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$	Điều kiện $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$	Điều kiện $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$	Điều kiện $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$

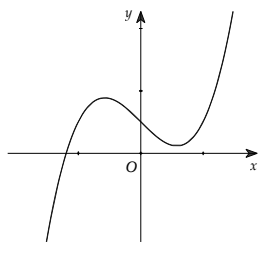
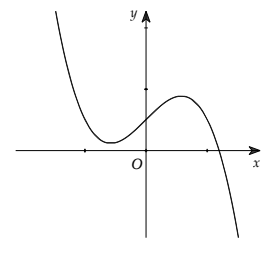
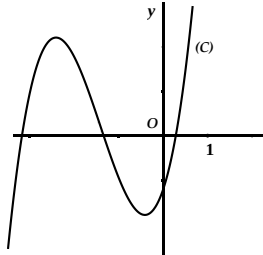
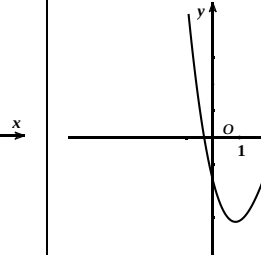
Lưu ý:

1) Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị nằm hai phía Oy. Gọi x_1, x_2 là các điểm cực trị của hàm số.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} b^2 - 3ac > 0 \\ x_1 \cdot x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 3ac > 0 \\ \frac{3c}{a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow ac < 0.$$

2) Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị nằm một phía Oy. Gọi x_1, x_2 là các điểm cực trị của hàm số.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} b^2 - 3ac > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 3ac > 0 \\ \frac{3c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 3ac > 0 \\ ac > 0 \end{cases}$$

Điều kiện $\begin{cases} a > 0 \\ c < 0 \end{cases}$	Điều kiện $\begin{cases} a < 0 \\ c > 0 \end{cases}$	Điều kiện $\begin{cases} a > 0 \\ c > 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$	Điều kiện $\begin{cases} a < 0 \\ c < 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$
			

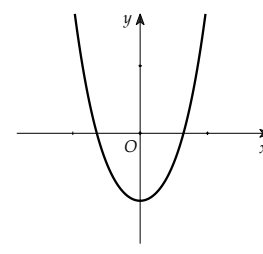
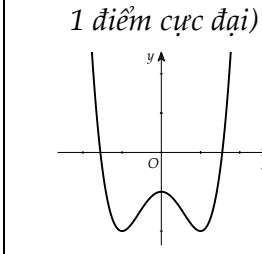
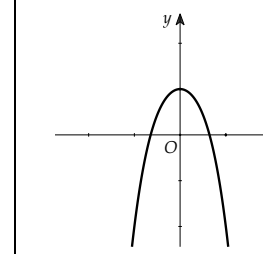
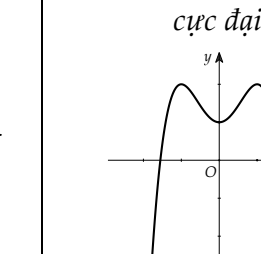
CỰC TRỊ HÀM TRÙNG PHƯƠNG $y = ax^4 + bx^2 + c, (a; b; c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$

1) Điều kiện để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a; b; c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ có 3 điểm cực trị: $ab < 0$

2) Điều kiện để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a; b; c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ có duy nhất một điểm cực trị: $ab \geq 0$

Lưu ý: Trong trường hợp a chứa tham số thì ta chia 2 trường hợp $a = 0$ và $a \neq 0$.

3) Một số dạng đồ thị $y = ax^4 + bx^2 + c, (a; b; c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ và điều kiện về cực trị:

Dạng 1	Dạng 2	Dạng 3	Dạng 4
Hàm số có duy nhất 1 điểm cực trị (cực tiểu)	Hàm số có ba điểm cực trị (2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại)	Hàm số có duy nhất 1 điểm cực trị (cực đại)	Hàm số có ba điểm cực trị (1 điểm cực tiểu và 2 điểm cực đại)
			
Điều kiện: $\begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$	Điều kiện: $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$	Điều kiện: $\begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$	Điều kiện: $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$

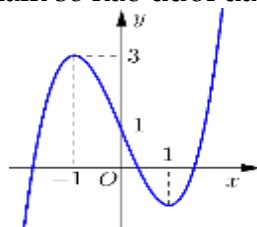
4) Một số công thức giải nhanh cần lưu ý: $y = ax^4 + bx^2 + c, (a; b; c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$

Dữ kiện	Công thức thỏa $ab < 0$
1). Tam giác ABC vuông cân tại A	$8a + b^3 = 0$
2). Tam giác ABC đều	$24a + b^3 = 0$
3). Tam giác ABC có góc $BAC = \alpha$	$8a + b^3 \cdot \tan^2 \frac{\alpha}{2} = 0$
4). Tam giác ABC có diện tích $S_{\triangle ABC} = S_0$	$32a^3(S_0)^2 + b^5 = 0$
5). Tam giác ABC có diện tích $\max(S_0)$	$S_0 = \sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}}$

6). Tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp $r_{\triangle ABC} = r_0$	$r_0 = \frac{b^2}{4 a \left(1 + \sqrt{1 - \frac{b^3}{8a}}\right)}$
7). Tam giác ABC có độ dài cạnh $BC = m_0$	$am_0^2 + 2b = 0$
8). Tam giác ABC có độ dài $AB = AC = n_0$	$16a^2n_0^2 - b^4 + 8ab = 0$
9). Tam giác ABC có cực trị $B, C \in Ox$	$b^2 - 4ac = 0$
10). Tam giác ABC có 3 góc nhọn	$b(8a + b^3) > 0$
11). Tam giác ABC có trọng tâm O	$b^2 - 6ac = 0$
12). Tam giác ABC có trực tâm O	$b^3 + 8a - 4ac = 0$
13). Tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R_{\triangle ABC} = R_0$	$R = \left \frac{b^3 - 8a}{8ab} \right $
14). Tam giác ABC cùng điểm O tạo hình thoi	$b^2 - 2ac = 0$
15). Tam giác ABC có O là tâm đường tròn nội tiếp	$b^3 - 8a - 4abc = 0$
16). Tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp	$b^3 - 8a - 8abc = 0$
17). Tam giác ABC có cạnh $BC = kAB = kAC$	$b^3 \cdot k^2 - 8a(k^2 - 4) = 0$
18). Trục hoành chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau	$b^2 = 4\sqrt{2} ac $
19). Tam giác ABC có điểm cực trị cách đều trục hoành	$b^2 - 8ac = 0$

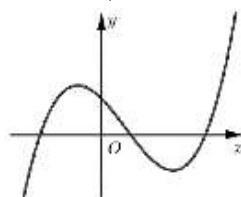
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM MINH HỌA

Câu 31: Đường cong trong hình vẽ là đồ thị hàm số nào dưới đây?



- A. $y = x^3 - 3x^2 + 1$. B. $y = -x^3 + 3x + 1$. C. $y = x^4 - 2x^2 + 1$. D. $y = x^3 - 3x + 1$.

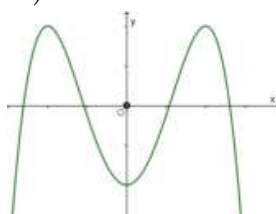
Câu 32: Cho hàm số $y = x^3 + bx^2 + cx + d$ ($b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ sau:



Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $b > 0, c < 0, d > 0$. B. $b > 0, c > 0, d > 0$. C. $b < 0, c > 0, d < 0$. D. $b < 0, c < 0, d > 0$.

Câu 33: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình bên dưới:



Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $a > 0, b < 0, c > 0$. B. $a < 0, b > 0, c < 0$. C. $a > 0, b < 0, c < 0$. D. $a < 0, b < 0, c < 0$.

Câu 34: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có bảng biến thiên dưới đây:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		+	0	-	0	+	0	-	
y			2		2		1		$-\infty$

Tính $P = a - 2b + 3c$.

- A. $P = 3$. B. $P = 6$. C. $P = -2$. D. $P = 2$.

Câu 35: Biết $M(0; 2)$, $N(2; -2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tính giá trị của hàm số tại $x = 3$.

- A. $y(3) = 2$. B. $y(3) = 11$. C. $y(3) = 0$. D. $y(3) = -3$

Câu 36: Đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2ax + b$ có điểm cực tiểu là $A(2; -2)$. Tính $a + b$.

- A. -4 . B. 2 . C. 4 . D. -2 .

Câu 37: Tập hợp các số thực m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m+2)x - m$ đạt cực tiểu tại $x = 1$ là

- A. $\{1\}$. B. $\{-1\}$. C. $\emptyset$. D. $\mathbb{R}$.

Câu 38: Tìm tất cả tham số thực m để hàm số $y = (m-1)x^4 - (m^2-2)x^2 + 2019$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.

- A. $m = 0$. B. $m = -2$. C. $m = 1$. D. $m = 2$.

Câu 39: Tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x + 1$ có hai cực trị là

- A. $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$ B. $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$ C. $(-1; 2)$ D. $[-1; 2]$

Câu 40: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m trên miền $[-10; 10]$ để hàm số $y = x^4 - 2(2m+1)x^2 + 7$ có ba điểm cực trị?

- A. 20 . B. 10 . C. Vô số. D. 11 .

Câu 41: Tất cả các giá trị của tham số m để $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 6$ là

- A. $m = -3$. B. $m = 3$. C. $m = -1$. D. $m = 1$.

Câu 42: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^2$ có hai điểm cực trị là A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 24 (với O là gốc tọa độ).

- A. $m = 2$. B. $m = 1$. C. $m = \pm 2$. D. $m = \pm 1$.

Câu 43: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx^4 + (m-1)x^2 + 1 - 2m$ có một cực trị.

- A. $m \geq 1$. B. $m \leq 0$. C. $0 \leq m \leq 1$. D. $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$.

Câu 44: Cho hàm số $y = mx^4 + (2m+1)x^2 + 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho có đúng một điểm cực tiểu.

- A. Không tồn tại m . B. $m \geq 0$. C. $m \geq -\frac{1}{2}$. D. $-\frac{1}{2} \leq m \leq 0$.

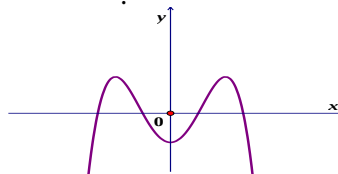
Câu 45: Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 2 - m$ có giá trị cực đại và giá trị cực tiểu trái dấu là

- A. 13 . B. 11 . C. 9 . D. 12 .

- Câu 46:** Tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + (m-1)x + 2$ có hai điểm cực trị nằm bên trái trục tung là
A. $(-\infty; 1)$. **B.** $(1; 2)$. **C.** $(-\infty; 2)$. **D.** $(1; +\infty)$.
- Câu 47:** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m + 1$ có giá trị cực tiểu bằng -1 . Tổng các phần tử thuộc S là
A. -2 . **B.** 0 . **C.** 1 . **D.** -1 .
- Câu 48:** Biết $m = m_0$ thì đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ có hai điểm cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực trị đó bằng 2 . Khẳng định nào sau đây đúng?
A. $m_0 \in (-2; -1)$. **B.** $m_0 \in (-1; 0)$. **C.** $m_0 \in (1; 2)$. **D.** $m_0 \in (0; 1)$.
- Câu 49:** Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị $A(0; 1)$, B , C thỏa mãn $BC = 4$.
A. $m = \sqrt{2}$. **B.** $m = \pm 4$. **C.** $m = \pm 2$. **D.** $m = 4$.
- Câu 50:** Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1 ?
A. 4 . **B.** 3 . **C.** 1 . **D.** 2 .
- Câu 51:** Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 - m$, với m là tham số. Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số và $I(2; -2)$. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m sao cho ba điểm I, A, B tạo thành tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{5}$. Tính tổng các phần tử của S .
A. $\frac{20}{17}$. **B.** $\frac{15}{17}$. **C.** $\frac{3}{17}$. **D.** $\frac{4}{17}$.
- Câu 52:** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m-2)x^2 - 9x + 1$, với m là tham số. Gọi x_1, x_2 là các điểm cực trị của hàm số đã cho thì giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|9x_1 - 25x_2|$ bằng
A. 15 . **B.** 90 . **C.** 450 . **D.** 45 .
- Câu 53:** Cho hàm số $y = x^4 - 2(1 - m^2)x^2 + m + 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành tam giác có diện tích là lớn nhất.
A. $m = \frac{1}{2}$. **B.** $m = -\frac{1}{2}$. **C.** $m = 0$. **D.** $m = 1$.
- Câu 54:** Có bao nhiêu số nguyên m để đồ thị hàm số $y = x + \frac{mx}{\sqrt{x^2 + 1}}$ có hai điểm cực trị và các cực trị này đều thuộc hình tròn có tâm là gốc tọa độ O bán kính bằng $\sqrt{30}$?
A. 9 . **B.** 8 . **C.** 7 . **D.** 6 .

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Câu 55:** Đường cong trong hình vẽ sau là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

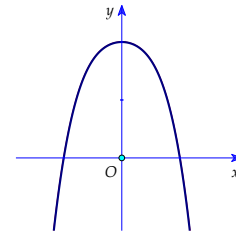


- A.** $y = x^4 - 3x^2 - 1$. **B.** $y = -x^4 + 3x^2 - 1$. **C.** $y = -x^3 + 3x^2 - 1$. **D.** $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

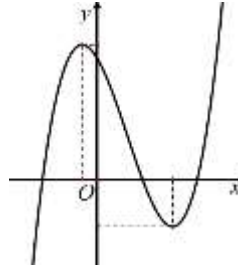
Câu 56: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên.

Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $a < 0, b \geq 0, c > 0$.
 B. $a > 0, b \geq 0, c < 0$.
 C. $a < 0, b \leq 0, c > 0$.
 D. $a < 0, b \leq 0, c \geq 0$.



Câu 57: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình bên dưới:



Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
 B. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.
 C. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.
 D. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

Câu 58: Biết a, b, c là các số thực tùy ý, $a \neq 0$ và hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx$ nhận $x = -1$ là một điểm cực trị. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $3a + 2b + c = 0$.
 B. $a + c = b$.
 C. $3a + c = 2b$.
 D. $2a - b = 0$.

Câu 59: Ta xác định được các số a, b, c để đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $(0;1)$ và có điểm cực trị $(-2;0)$. Tính giá trị của biểu thức $T = 4a + b + c$.

- A. 20.
 B. 23.
 C. 24.
 D. 22.

Câu 60: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 + (m-1)x^2 + m^2$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

- A. $m = 1$.
 B. $m \geq 1$.
 C. $m \in \mathbb{R}$.
 D. $m \leq 1$.

Câu 61: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

- A. $m = 0$.
 B. $m > 4$.
 C. $0 \leq m < 4$.
 D. $0 < m \leq 4$.

Câu 62: Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (m+1)x + 2$ có hai điểm cực trị là

- A. $m > 2$.
 B. $m < 2$.
 C. $m < -4$.
 D. $m \leq 2$.

Câu 63: Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(7m-3)x$. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để hàm số **không** có cực trị. Số phần tử của S là

- A. 2.
 B. 4.
 C. 0.
 D. Vô số.

Câu 64: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ có cực trị và các điểm cực đại, điểm cực tiểu nhận giá trị dương.

- A. $m < 2$.
 B. $m > 2$.
 C. $0 < m < 2$.
 D. $m = 2$.

Câu 65: Biết m_0 là giá trị của tham số để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

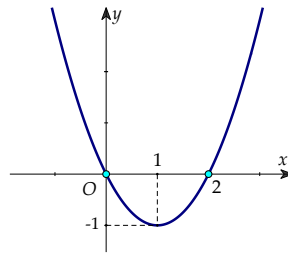
- A. $m_0 \in (-1; 7)$.
 B. $m_0 \in (-7; -1)$.
 C. $m_0 \in (-15; -7)$.
 D. $m_0 \in (7; 10)$.

- Câu 66:** Để đồ thị hàm số $y = -x^4 - (m-3)x^2 + m+1$ có điểm cực đại mà **không** có điểm cực tiểu thì tất cả các giá trị thực của tham số m là
A. $m \leq 3$. **B.** $m < 3$. **C.** $m \geq 3$. **D.** $m > 3$.
- Câu 67:** Cho hàm số $y = mx^4 - (2m+1)x^2 + 1$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đã cho có một điểm cực đại.
A. $-\frac{1}{2} \leq m < 0$. **B.** $m \leq -\frac{1}{2}$. **C.** $m \geq -\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{1}{2} \leq m \leq 0$.
- Câu 68:** Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = mx^4 - (m-3)x^2 + m^2$ **không** có điểm cực đại là
A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 0.
- Câu 69:** Gọi S là tập các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m + 4$ có ba điểm cực trị cách đều trục hoành. Tổng tất cả các phần tử của tập S bằng
A. 2. **B.** 6. **C.** 0. **D.** 4.
- Câu 70:** Cho hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 6)x^2 + 4$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số có ba điểm cực trị trong đó có đúng hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại?
A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.
- Câu 71:** Gọi S tập hợp các giá trị m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân. Tổng bình phương các phần tử của S bằng
A. 2. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 6.
- Câu 72:** Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 3m^2$ có ba điểm cực trị lập thành một tam giác nhận $G(0;7)$.
A. $m = 1$. **B.** $m = -\sqrt{\frac{3}{7}}$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = -\sqrt{3}$.
- Câu 73:** Gọi m_1, m_2 là các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + m - 1$ có hai điểm cực trị là B, C sao cho tam giác OBC có diện tích bằng 2, với O là gốc tọa độ. Tính $m_1.m_2$.
A. 6. **B.** -15. **C.** 12. **D.** -20.
- Câu 74:** Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + x - 2$ có giá trị tuyệt đối của hoành độ hai điểm cực trị là độ dài hai cạnh của tam giác vuông có cạnh huyền $\sqrt{7}$. Số phần tử của S là
A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.
- Câu 75:** Cho biết đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 2m^2 + m^4$ có 3 điểm cực trị A, B, C cùng với điểm $D(0; -3)$ là 4 đỉnh của một hình thoi. Gọi S là tổng các giá trị m thỏa mãn đề bài thì S thuộc khoảng nào sau đây?
A. $S \in (2; 4)$. **B.** $S \in \left(\frac{9}{2}; 6\right)$. **C.** $S \in \left(1; \frac{5}{2}\right)$. **D.** $S \in \left(0; \frac{5}{2}\right)$.

Dạng 3: Bài toán cực trị liên quan đến hàm ẩn

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM MINH HỌA

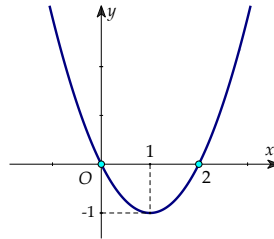
- Câu 76:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm là $f'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây:



Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.

Câu 77: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm là $f'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây:



Hỏi hàm số $y = f(x) - 2x$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.

Câu 78: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = (x-1)(x-2)(x+1), \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số $g(x) = f(3-x)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

- A. $x = 0$. B. $x = 1$. C. $x = 4$. D. $x = 2$.

Câu 79: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x^2-1)(x-3)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ là

- A. 2. B. 5. C. 3. D. 1.

Câu 80: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = (x-1)(x-2)(x+1), \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số $g(x) = f(2x-1)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

- A. $x = -1$. B. $x = 1$. C. $x = \frac{3}{2}$. D. $x = 2$.

Câu 81: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = (x-1)(x-2)(x+1), \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số $g(x) = f(3-2x)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

- A. $x = \frac{1}{2}$. B. $x = 1$. C. $x = -1$. D. $x = 2$.

Câu 82: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x^2(x-1)(x+2), \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số $g(x) = f(2x-3)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

- A. $x = \frac{1}{2}$. B. $x = 1$. C. $x = -2$. D. $x = 2$.

Câu 83: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x^2(x-1)(x+2), \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số $g(x) = f(5-2x)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

- A. $x = 1$. B. $x = \frac{7}{2}$. C. $x = -2$. D. $x = \frac{5}{2}$.

Câu 84: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-

Hỏi hàm số $g(x) = f(2x-1)$ đạt cực tiểu tại điểm nào sau đây?

- A. $x = 2$. B. $x = 1$. C. $x = 3$. D. $x = 5$.

Câu 85: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-	0	+

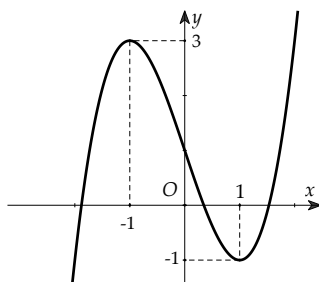
Hỏi hàm số $g(x) = f(3-2x)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

- A. $x = -\frac{1}{2}$. B. $x = 2$. C. $x = \frac{1}{2}$. D. $x = \frac{3}{2}$.

Câu 86: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = (x+1)(x-3), \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 + 2x)$ là

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 2.

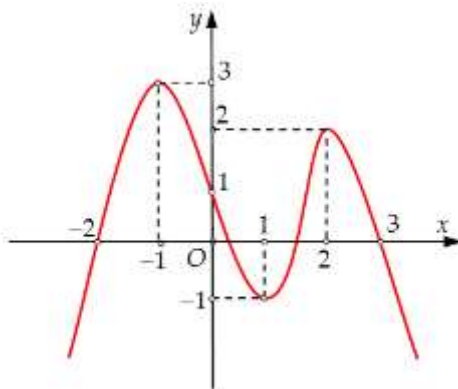
Câu 87: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị cho bởi hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = [f(x)]^2 - 2f(x)$ là

- A. 4. B. 6. C. 7. D. 5.

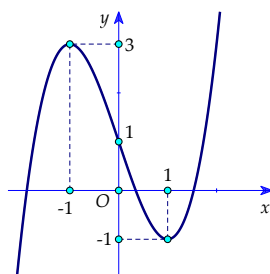
Câu 88: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị cho bởi hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(f(x))$ là

- A. 11. B. 10. C. 9. D. 8.

Câu 89: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm $f'(x)$ cho bởi hình vẽ sau:



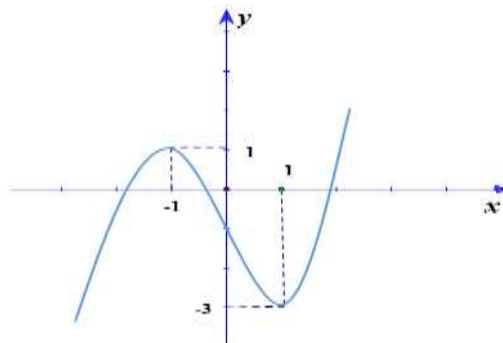
Hàm số $g(x) = f(x) + x^2 - x - 1$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

- A. $x = 1$. B. $x = 0$. C. $x = -1$. D. $x = 2$.

Câu 90: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-2)^{2019} (x^2 - x - 2)^{2020} (x+3)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ là

- A. 5. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 91: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x+2|)$.

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 5.

Câu 92: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	3	1	$+\infty$	

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x) - 2|$ là

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 93: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	0	$+\infty$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để hàm số $h(x) = |f(x) - m|$ có đúng 3 điểm cực trị?

- A. 21. B. 19. C. 18. D. 20.

Câu 94: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	4	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2021	2020	2016	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(|x|) - 2019|$ là

- A. 5. B. 9. C. 3. D. 7.

Câu 95: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |x^3 - 3x - m|$ có đúng 5 điểm cực trị?

- A. Vô số. B. 2. C. 5. D. 3.

Câu 96: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(|x|^3 - 3x^2)$ là

- A. 6. B. 5. C. 7. D. 8.

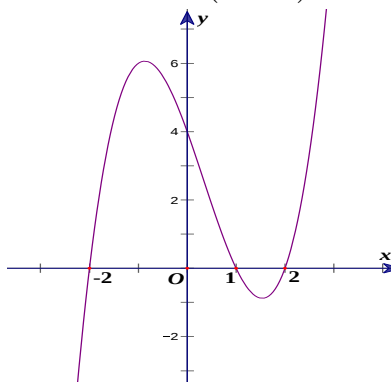
Câu 97: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-9)(x^2-16)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x^3 + 7x| + m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

- A. 16. B. 9. C. 4. D. 8.

Câu 98: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + (3m-6)x$, với m là tham số thực, có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

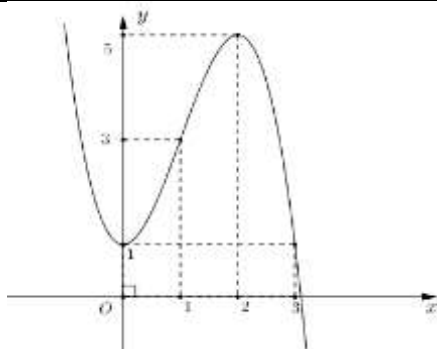
Câu 99: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của $y = f'(3-2x)$ như hình vẽ sau:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2021; 2021]$ để hàm số $g(x) = f(|x^3 + 2021x| + m)$ có ít nhất 5 điểm cực trị?

- A. 2019. B. 2020. C. 2021. D. 2022.

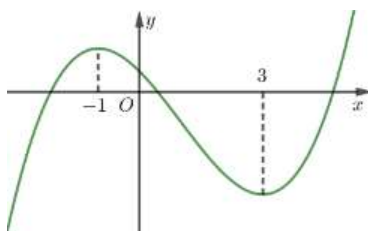
Câu 100: Cho hàm đa thức bậc ba $y = f(x)$ như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(f(x) + m)$ có đúng 6 điểm cực trị?

- A. 4. B. 5. C. 3. D. 2.

Câu 101: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(x^2 - 4x + m)$ có 3 điểm cực trị. Số phần tử của S là

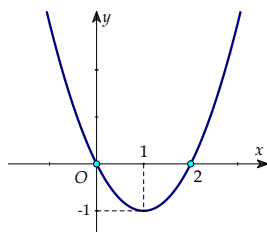
- A. 4. B. 3. C. 2. D. 5.

Câu 102: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x^2 + 10x, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(x^4 - 8x^2 + m)$ có đúng 9 điểm cực trị?

- A. 16. B. 9. C. 15. D. 10.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 103: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm là $f'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây:



Hỏi hàm số $y = f(x) + x$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.

Câu 104: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

Hỏi hàm số $g(x) = f(3 - 2x)$ đạt cực tiểu tại điểm nào sau đây?

- A. $x = -1$. B. $x = 1$. C. $x = 0$. D. $x = 3$.

Câu 105: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

Hỏi hàm số $g(x) = f(2x - 4)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

- A. $x = 3$. B. $x = 2$. C. $x = 0$. D. $x = 4$.

Câu 106: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = (x+1)(x-3), \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 + 2x)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

- A. $x = 0$. B. $x = 1$. C. $x = -1$. D. $x = -3$.

Câu 107: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = (x-1)^2(x+1)(x-5), \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 + 3x + 1)$ là

- A. 5. B. 3. C. 7. D. 4.

Câu 108: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = (x-1)^2(x+1)(x-5), \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 + 3x + 1)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

- A. $x = -4$. B. $x = -3$. C. $x = -1$. D. $x = 1$.

Câu 109: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - 1)$ là

- A. 3. B. 5. C. 4. D. 2.

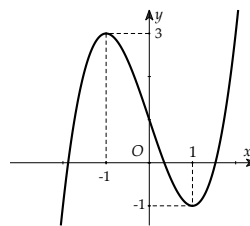
Câu 110: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $g(x) = f(x^2 - 1)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

- A. $x = 0$. B. $x = -1$. C. $x = 1$. D. $x = 2$.

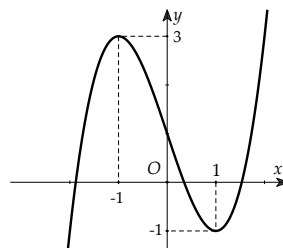
Câu 111: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm $f'(x)$ cho bởi hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x) - 2x$ là

- A. 3. B. 5. C. 4. D. 2.

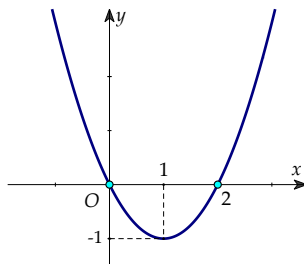
Câu 112: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm $f'(x)$ cho bởi hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x) - 3x$ là

- A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.

Câu 113: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm là $f'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây:



Hỏi hàm số $g(x) = f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x^2$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

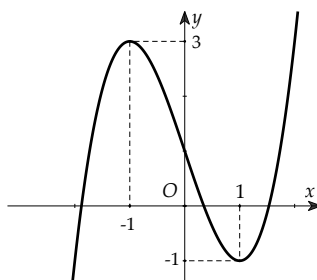
A. $x = 2$.

B. $x = 0$.

C. $x = 1$.

D. $x = -1$.

Câu 114: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị cho bởi hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(f(x))$ là

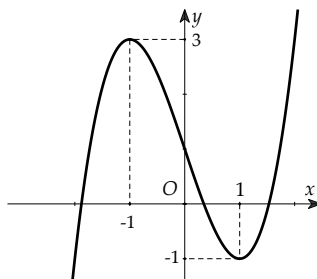
A. 7.

B. 6.

C. 4.

D. 5.

Câu 115: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị cho bởi hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = [f(x)]^2$ là

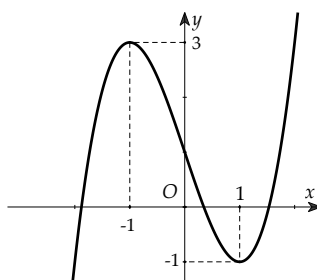
A. 7.

B. 6.

C. 4.

D. 5.

Câu 116: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị cho bởi hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(f(x) - 1)$ là

A. 7.

B. 6.

C. 8.

D. 5.

Câu 117: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$					$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(|x-1|)$ là

- A. 4. B. 5. C. 3. D. 2.

Câu 118: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$				$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(|x-1|-1)$ là

- A. 4. B. 5. C. 3. D. 2.

Câu 119: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$			5		-3		$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $h(x) = |f(x) - m|$ có đúng 5 điểm cực trị?

- A. Vô số. B. 7. C. 5. D. 4.

Câu 120: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để hàm số $y = |x^3 - 3x - m|$ có đúng 3 điểm cực trị?

- A. 21. B. 19. C. 20. D. 18.

Câu 121: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(|x|^3 - 3x^2 - 1)$ là

- A. 9. B. 11. C. 7. D. 8.

Câu 122: Cho hàm số $f(x) = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + (4-m)x$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị?

- A. 27. B. 31. C. 28. D. 30.

Câu 123: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-3)^2(x-1)[x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1]$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

Câu 124: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	1	5	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		-4		2		0		$+\infty$

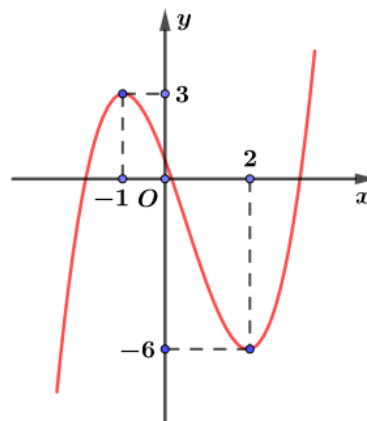
Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = |f(4x^3 + 1) + m|$ có 7 điểm cực trị?

- A. Vô số. B. 3. C. 0. D. 1.

Câu 125: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x^2 - 4x)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số thực m để hàm số $g(x) = f(2x^2 - 12x + m)$ có đúng 5 điểm cực trị?

- A. 17. B. 18. C. 16. D. 19.

Câu 126: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(|f^2(x) - 4f(x) - m|)$ có 17 điểm cực trị bằng

- A. 1652. B. 1653. C. 1654. D. 1651.

IV- LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Phát biểu nào sau đây đúng?

- A. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi qua điểm x_0 và $f(x)$ liên tục tại x_0 thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0 .
 B. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 khi và chỉ khi $f'(x_0) = 0$.
 C. Nếu $f''(x_0) = 0$ thì x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số.
 D. Nếu $f''(x_0) > 0$ và $f'(x_0) = 0$ thì hàm số đạt cực đại tại x_0 .

Lời giải:

- B sai vì $f'(x)$ có thể không xác định tại điểm x_0 mà hàm số vẫn đạt cực trị tại điểm x_0 .
 Chẳng hạn với $f(x) = |x|$ đạt cực tiểu tại $x = 0$ nhưng không có đạo hàm tại đó.
 C sai vì $f''(x_0) = 0$ chưa thể kết luận được hàm số đạt cực trị tại x_0 . Chẳng hạn $f(x) = x^4$ có $f''(0) = 0$ và nó vẫn đạt cực tiểu tại $x = 0$.
 D sai vì nếu $f''(x_0) > 0$ và $f'(x_0) = 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0 .

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

- A. $x = x_0$ là điểm cực tiểu của hàm số thì hàm số có giá trị cực tiểu là $f(x_0)$.
 B. Hàm số đạt cực trị tại điểm $x = x_0$ thì $f'(x_0) = 0$.
 C. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = x_0$ thì $f(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua x_0 .
 D. Nếu hàm số đơn điệu trên $\mathbb{R}$ thì hàm số không có cực trị.

Lời giải:

Hàm số đạt cực trị tại điểm $x = x_0$ thì $f'(x_0) = 0$ hoặc hàm số không có đạo hàm tại x_0 .

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đạt cực trị tại x_0 thì $f(x_0) = 0$.
 B. Hàm số đạt cực trị tại x_0 thì $f(x)$ đổi dấu qua x_0 .
 C. Nếu $f'(x_0) = 0$ thì hàm số đạt cực trị tại x_0 .
 D. Nếu hàm số đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

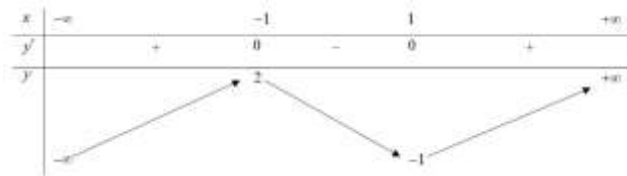
Lời giải:

Đáp án A sai, sửa lại là $f'(x_0) = 0$.

Đáp án B sai vì $f'(x)$ đổi dấu chứ không phải $f(x)$.

Đáp án C sai vì hàm số $y = x^3$ có $f'(0) = 0$ nhưng không đạt cực trị tại $x = 0$.

Câu 4: Hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên sau:



Giá trị cực tiểu của hàm số là

- A. 4. B. 1. C. -1. D. $-\infty$.

Lời giải:

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và giá trị cực tiểu là $y_{CT} = -1$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$

Khi đó số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là:

- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.

Lời giải:

Ta có y' đổi dấu khi x qua x_1, x_2, x_3 nên hàm số có ba điểm cực trị.

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + \frac{2}{3}$. Điểm cực đại của hàm số đã cho là

- A. $M(1; 2)$. B. $N\left(3; \frac{2}{3}\right)$. C. $x = 3$ **D. $x = 1$.**

Lời giải:

Ta có: $y' = x^2 - 4x + 3$ và $y'' = 2x - 4$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Ta có: $y''(1) = -2 < 0$; $y''(3) = 2 > 0$.

$\Rightarrow x = 1$ là điểm cực đại của hàm số.

Câu 7: Trong các hàm số sau, hàm số nào có duy nhất một điểm cực trị?

- A. $y = \frac{x+1}{x-2}$. **B. $y = x^2 + x + 1$.** C. $y = x^4 - 7x + 2$. D. $y = x^3$.

Lời giải:

Ta có, hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ và $y = x^3$ không có cực trị, hàm $y = x^4 - 7x + 2$ có ba điểm cực trị. Hàm số $y = x^2 + x + 1$ có duy nhất một điểm cực tiểu.

Câu 8: Cho hàm số $y = x^4 - 8x^2$ có đồ thị (C). Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của (C). Tính diện tích S của tam giác ABC.

- A. $S = 16$. B. $S = 8$. **C. $S = 32$.** D. $S = 64$.

Lời giải:

Cách 1:

Hàm số $y = x^4 - 8x^2$ có tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$\text{Ta có: } y' = 4x^3 - 16x; y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Hàm số có 3 cực trị và tọa độ 3 điểm lần lượt là: $A(0; 0); B(-2; -16); C(2; -16)$

$$\text{Ta có } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |y_B| \cdot |2x_C| = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 4 = 32.$$

Cách 2: Áp dụng công thức tính nhanh:

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có 3 cực trị tạo thành tam giác có diện tích S thì ta có công thức tính nhanh: $32a^3 \cdot S^2 + b^5 = 0$.

Câu 9: Số điểm cực trị của hàm số $y = (x+1)^2(x-2)^5$ là

- A. 2** B. 3 C. 4 D. 1

Lời giải:

$$\text{Ta có } y' = 2(x+1)(x-2)^5 + 5(x+1)^2(x-2)^4 = (x+1)(x-2)^4(7x+1)$$

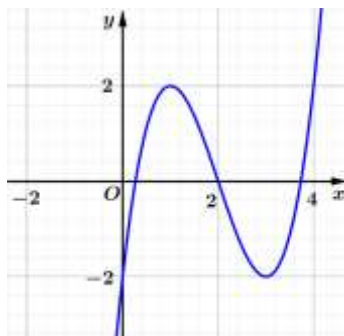
$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \\ x = -\frac{1}{7} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{7}$	2	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+
y					

Vậy hàm số có hai điểm cực trị.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ là

A. 5.

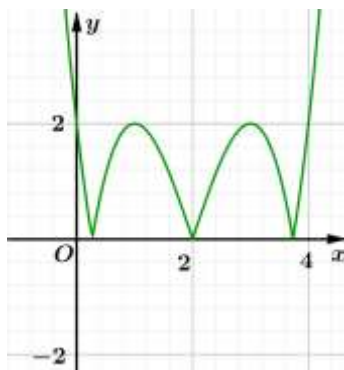
B. 4.

C. 3.

D. 6.

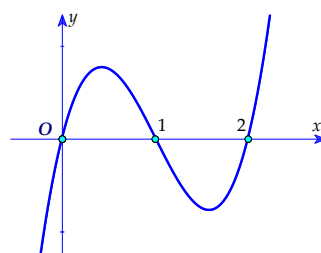
Lời giải:

Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có được bằng cách giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ nằm phía trên trục Ox hợp với phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ nằm phía dưới Ox lấy đối xứng qua Ox . Ta được đồ thị như sau:



Từ đồ thị suy ra hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 11: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ và đồ thị đạo hàm $f'(x)$ được cho như hình bên dưới:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải:

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 4)(x - 3)^2(x - 1)$, $\forall x \in (0; +\infty)$. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3. \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	0	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị.

Câu 13: Hàm số nào dưới đây có 3 điểm cực trị?

- A. $y = x^3 - 3x$. B. $y = \frac{2x-2}{x+1}$. C. $y = x^4 - 2x^2 + 1$. D. $y = x^4 + 2x^2 + 1$.

Lời giải:

+ Xét hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ có $ab = -2 < 0$.

Câu 14: Gọi A, B, C là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng

- A. $\sqrt{2} - 1$. B. $\sqrt{2} + 1$. C. $\sqrt{2}$. D. 1.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } y = x^4 - 2x^2 + 4 \Rightarrow y' = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$$

$$\text{Nên } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 4 \\ x = 1 \Rightarrow y = 3 \\ x = -1 \Rightarrow y = 3 \end{cases} \quad \text{Vậy tọa độ các điểm cực trị: } A(0;4), B(1;3), C(-1;3)$$

$$\text{Ta có: } AB = AC = \sqrt{2}; BC = 2 \quad p = \frac{2 + \sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

$$\text{Diện tích tam giác: } S = \sqrt{p(p-BC)(p-AC)(p-AB)} \\ = \sqrt{(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2}-2)(1+\sqrt{2}-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}-\sqrt{2})} = \sqrt{(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)} = 1$$

$$\text{Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác là: } r = \frac{S}{p} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên khoảng K và $x_0 \in K$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Nếu x_0 là điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$ thì $f''(x) < 0$.
B. Nếu $f''(x) = 0$ thì x_0 là điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

C. Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì $f'(x) = 0$.

D. Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì $f'(x) \neq 0$.

Câu 16: Xét các khẳng định sau:

(I). Nếu hàm số $y = f(x)$ có giá trị cực đại là M và giá trị cực tiểu là m thì $M > m$.

(II). Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c (a \neq 0)$ luôn có ít nhất 1 điểm cực trị.

(III). Tiếp tuyến (nếu có) tại điểm cực trị của đồ thị hàm số luôn song song với trục hoành. Số khẳng định đúng là:

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải:

Nhận xét (I) chỉ đúng với hàm bậc 3 và hàm bậc 4 trong chương trình học phổ thông.

Nhận xét (II) đúng vì hàm bậc 4 trùng phương có 1 hoặc 3 cực trị.

Nhận xét (III) sai vì có thể tiếp tuyến tại điểm cực trị có thể trùng với trục hoành.

Câu 17: Cho hàm $f(x)$ liên tục và có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Phát biểu nào sau đây **sai**?

A. Nếu $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0 .

B. Nếu $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại x_0 .

C. Hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại x_0 khi và chỉ khi x_0 là nghiệm của đạo hàm.

D. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x qua x_0 và $f'(x)$ liên tục tại x_0 thì hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại x_0 .

Lời giải:

+) Các đáp án A, B đúng vì đó là định lý về điều kiện đủ để có cực trị.

+) Đáp án C **sai** vì chưa thỏa mãn điều kiện đủ của định lý. Cần thêm điều kiện $f'(x)$ đổi dấu tại x_0 .

+) Đáp án D đúng vì đó là nội dung của cách phát biểu khác của định lý 1

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm giá trị cực đại y_{CD} và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số đã cho.

A. $y_{CD} = 5$ và $y_{CT} = -1$.

B. $y_{CD} = 1$ và $y_{CT} = 0$.

C. $y_{CD} = -1$ và $y_{CT} = 1$.

D. $y_{CD} = 5$ và $y_{CT} = 0$.

Lời giải:

Ta thấy vì đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm qua $x = -1$ và $y(-1) = 5$

Đạo hàm đổi dấu từ âm sang âm qua $x = 1$ và $y(1) = 0$.

Vậy $y_{CD} = 5$ và $y_{CT} = 0$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	$ $	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số là

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Lời giải:

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số có đạo hàm cấp 1 và $y' = 0$ tại $x = -1$ và không xác định tại $x = 0$, đồng thời y' đổi dấu khi đi qua các điểm $x = -1$ và $x = 0$.

Do đó hàm số có hai điểm cực trị là $x = -1$ và $x = 0$.

Câu 20: Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số dưới đây. Tìm hàm số đó.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	3	1	$+\infty$	

A. $y = x^3 - 5x^2 + x + 6$.

B. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

C. $y = x^3 + 6x^2 - 9x + 6$.

D. $y = x^4 + x^2 - 3$.

Lời giải:

Kiểm tra đồ thị hàm số có các điểm cực đại và điểm cực tiểu tương ứng là $(1;3)$, $(3;-1)$.

Câu 21: Đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x$ có điểm cực tiểu là

A. $M(-1;-2)$.

B. $N(1;0)$.

C. $P(1;-2)$.

D. $Q(-1;0)$.

Lời giải:

Ta có: $f'(x) = -3x^2 + 3$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Vậy $M(-1;-2)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	5	1	$+\infty$	

Hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

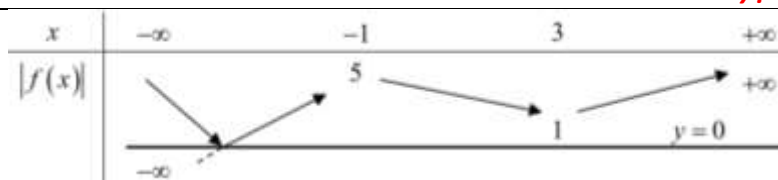
B. 5.

C. 2.

D. 4.

Lời giải:

Từ bảng biến thiên và cách suy đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ từ hàm số $y = f(x)$ ta được bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x)|$ như sau:



Vậy đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có 3 điểm cực trị.

Câu 23: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$. Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 2.

B. 3.

C. -1.

D. 1.

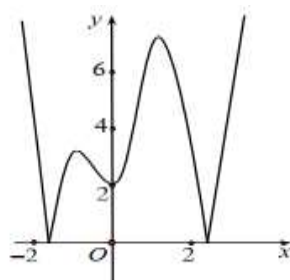
Lời giải:

Ta có: $y = x^4 - 2x^2 + 3 \Rightarrow y' = 4x^3 - 4x \Rightarrow y'' = 12x^2 - 4$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$y''(0) = -4 < 0$; $y''(1) = y''(-1) = 8 > 0$. Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$; $x = -1$ và giá trị cực tiểu của hàm số là $y_{CT} = y(1) = y(-1) = 2$.

Câu 24: Cho đồ thị hàm $y = f(x)$ như hình vẽ bên dưới:



Số điểm cực trị của hàm số là

A. 5.

B. 4.

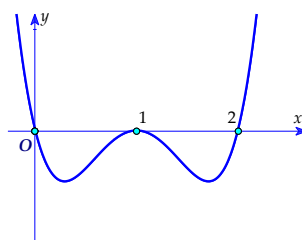
C. 3.

D. 2.

Lời giải:

Dựa vào đồ thị hàm số ta dễ dàng thấy số điểm cực trị của hàm số là 5.

Câu 25: Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ và đồ thị đạo hàm $f'(x)$ được cho như hình bên dưới:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải:

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

Câu 26: Hàm số nào dưới đây **không** có cực trị?

A. $y = \frac{x^2+1}{x}$.

B. $y = \frac{2x-2}{x+1}$.

C. $y = x^2 - 2x + 1$.

D. $y = -x^3 + x + 1$.

Lời giải:

+ Xét hàm số $y = \frac{2x-2}{x+1}$.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $y' = \frac{4}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in D$.

Nên hàm số luôn đồng biến trên từng khoảng xác định.

Do đó hàm số $y = \frac{2x-2}{x+1}$ không có cực trị.

Câu 27: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác, gọi là ΔABC . Tính diện tích ΔABC .

A. $S = 2$.

B. $S = 1$.

C. $S = \frac{1}{2}$.

D. $S = 4$.

Lời giải:

Ta có $y' = 4x^3 - 4x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

Tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0;1), B(-1;0), C(1;0)$

$$\overrightarrow{AB} = (-1; -1); \overrightarrow{AC} = (1; -1) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ AB = AC = \sqrt{2} \end{cases}$$

Suy ra ΔABC vuông cân tại A do đó $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = 1$.

Câu 28: Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - x - 20}$. Khẳng định nào dưới đây sai?

A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -4)$.

B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 5$.

C. Hàm số đồng biến trên $(5; +\infty)$.

D. Hàm số không có cực trị.

Lời giải:

Tập xác định $D = (-\infty; -4] \cup [5; +\infty)$.

Ta có: $y' = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-20}}$.

Do $y' > 0 \forall x > 5$ và $y' < 0 \forall x < -4$ nên hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -4)$, đồng biến trên $(5; +\infty)$ và không có cực trị.

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^{2017} (x-1)^{2019} (x+2)^{2021}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tổng bình phương các điểm cực trị của hàm số là

A. 5.

B. 1.

C. 4.

D. 12229091.

Lời giải:

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$				$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta được tổng bình phương các điểm cực trị của hàm số: $(-2)^2 + 0^2 + 1^2 = 5$.

Câu 30: Hàm số nào dưới đây có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu?

A. $y = x^3 - 3x$.

B. $y = x^4 + 2$.

C. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

D. $y = -x^4 + 2x^2$.

Lời giải:

+ Xét hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ có $\begin{cases} a = -1 < 0 \\ ab = -2 < 0 \end{cases}$.

Dạng 2: Bài toán tham số không liên quan đến hàm ẩn

CỰC TRỊ HÀM BẬC BA $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a; b; c; d \in \mathbb{R}, a \neq 0)$

Ta xét: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ có $\Delta' = b^2 - 3ac$.

Điều kiện $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$	Điều kiện $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$	Điều kiện $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$	Điều kiện $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$

Lưu ý:

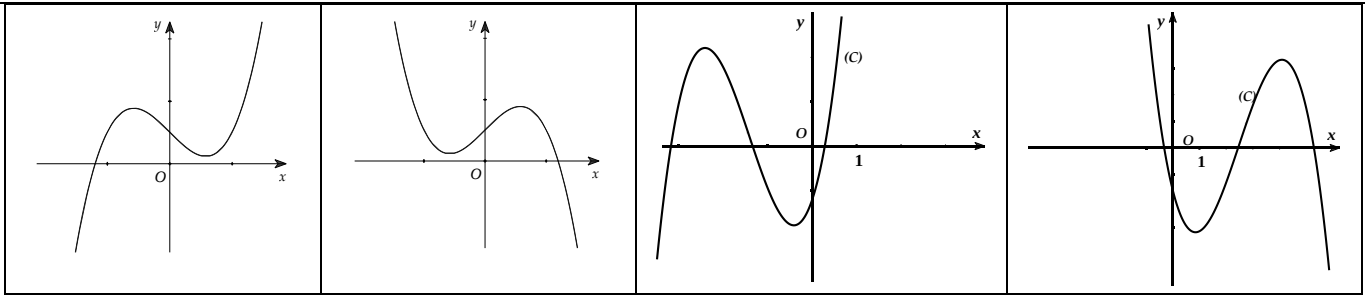
1) Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị nằm hai phía Oy. Gọi x_1, x_2 là các điểm cực trị của hàm số.

Ta có: $\begin{cases} b^2 - 3ac > 0 \\ x_1 \cdot x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 3ac > 0 \\ \frac{3c}{a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow ac < 0$.

2) Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị nằm một phía Oy. Gọi x_1, x_2 là các điểm cực trị của hàm số.

Ta có: $\begin{cases} b^2 - 3ac > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 3ac > 0 \\ \frac{3c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 3ac > 0 \\ ac > 0 \end{cases}$.

Điều kiện $\begin{cases} a > 0 \\ c < 0 \end{cases}$	Điều kiện $\begin{cases} a < 0 \\ c > 0 \end{cases}$	Điều kiện $\begin{cases} a > 0 \\ c > 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$	Điều kiện $\begin{cases} a < 0 \\ c < 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$
--	--	---	---



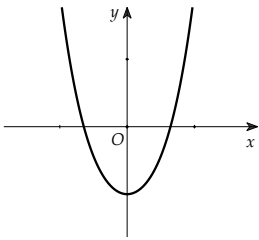
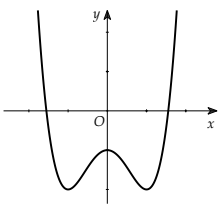
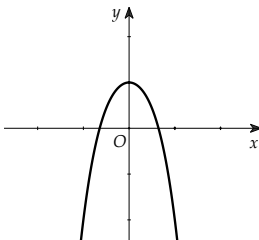
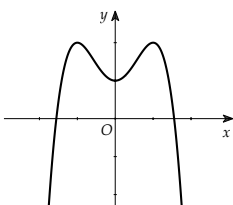
CỰC TRỊ HÀM TRỪNG PHƯƠNG $y = ax^4 + bx^2 + c, (a; b; c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$

1) Điều kiện để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a; b; c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ có 3 điểm cực trị: $ab < 0$

2) Điều kiện để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a; b; c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ có duy nhất một điểm cực trị: $ab \geq 0$

Lưu ý: Trong trường hợp a chứa tham số thì ta chia 2 trường hợp $a = 0$ và $a \neq 0$.

3) Một số dạng đồ thị $y = ax^4 + bx^2 + c, (a; b; c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ và điều kiện về cực trị:

Dạng 1	Dạng 2	Dạng 3	Dạng 4
Hàm số có duy nhất 1 điểm cực trị (cực tiểu)	Hàm số có ba điểm cực trị (2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại)	Hàm số có duy nhất 1 điểm cực trị (cực đại)	Hàm số có ba điểm cực trị (1 điểm cực tiểu và 2 điểm cực đại)
			
Điều kiện: $\begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$	Điều kiện: $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$	Điều kiện: $\begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$	Điều kiện: $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$

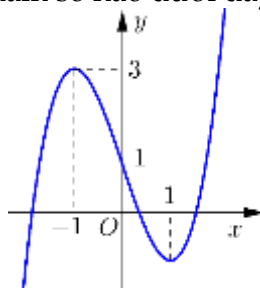
4) Một số công thức giải nhanh cần lưu ý: $y = ax^4 + bx^2 + c, (a; b; c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$

Dữ kiện	Công thức thỏa $ab < 0$
1). Tam giác ABC vuông cân tại A	$8a + b^3 = 0$
2). Tam giác ABC đều	$24a + b^3 = 0$
3). Tam giác ABC có góc $BAC = \alpha$	$8a + b^3 \cdot \tan^2 \frac{\alpha}{2} = 0$
4). Tam giác ABC có diện tích $S_{\triangle ABC} = S_0$	$32a^3(S_0)^2 + b^5 = 0$
5). Tam giác ABC có diện tích $\max(S_0)$	$S_0 = \sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}}$
6). Tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp $r_{\triangle ABC} = r_0$	$r_0 = \frac{b^2}{4 a \left(1 + \sqrt{1 - \frac{b^3}{8a}}\right)}$
7). Tam giác ABC có độ dài cạnh $BC = m_0$	$am_0^2 + 2b = 0$
8). Tam giác ABC có độ dài $AB = AC = n_0$	$16a^2n_0^2 - b^4 + 8ab = 0$
9). Tam giác ABC có cực trị $B, C \in Ox$	$b^2 - 4ac = 0$
10). Tam giác ABC có 3 góc nhọn	$b(8a + b^3) > 0$
11). Tam giác ABC có trọng tâm O	$b^2 - 6ac = 0$

12). Tam giác ABC có trực tâm O	$b^3 + 8a - 4ac = 0$
13). Tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R_{\triangle ABC} = R_0$	$R = \left \frac{b^3 - 8a}{8ab} \right $
14). Tam giác ABC cùng điểm O tạo hình thoi	$b^2 - 2ac = 0$
15). Tam giác ABC có O là tâm đường tròn nội tiếp	$b^3 - 8a - 4abc = 0$
16). Tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp	$b^3 - 8a - 8abc = 0$
17). Tam giác ABC có cạnh $BC = kAB = kAC$	$b^3 \cdot k^2 - 8a(k^2 - 4) = 0$
18). Trục hoành chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau	$b^2 = 4\sqrt{2} ac $
19). Tam giác ABC có điểm cực trị cách đều trục hoành	$b^2 - 8ac = 0$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM MINH HỌA

Câu 31: Đường cong trong hình vẽ là đồ thị hàm số nào dưới đây?



- A. $y = x^3 - 3x^2 + 1$. B. $y = -x^3 + 3x + 1$. C. $y = x^4 - 2x^2 + 1$. D. $y = x^3 - 3x + 1$.

Lời giải:

Quan sát hình dạng đồ thị ta loại đáp án hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ do trên hình hàm số có hai cực trị mà đáp án này hàm số có 3 cực trị.

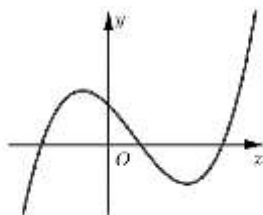
Do nhánh bên phải của đồ thị đi lên nên loại đáp án $y = -x^3 + 3x + 1$.

Mặt khác quan sát đồ thị có hai điểm cực trị là $x = \pm 1$.

Xét đáp án A có $y' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ nên loại đáp án này.

Vậy hình trên là đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$.

Câu 32: Cho hàm số $y = x^3 + bx^2 + cx + d$ ($b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ sau:



Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $b > 0, c < 0, d > 0$. B. $b > 0, c > 0, d > 0$. C. $b < 0, c > 0, d < 0$. D. $b < 0, c < 0, d > 0$.

Lời giải:

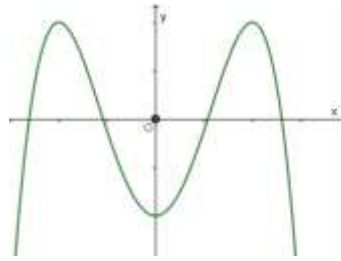
+ Dựa vào giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung (nằm phía trên trục hoành) ta kết luận được $d > 0$. Loại đáp án C.

+ Ta có $y' = 3x^2 + 2bx + c$. Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục tung nên $x_1 x_2 = \frac{c}{3} < 0$. Suy ra $c < 0$. Loại đáp án B.

+ Dựa vào đồ thị, hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 và $x_1 + x_2 = \frac{-2b}{3} > 0$ ($x_1 < 0 < x_2, |x_1| < |x_2|$).

Suy ra $b < 0$. Đáp án D.

Câu 33: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình bên dưới:



Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a > 0, b < 0, c > 0$. B. $a < 0, b > 0, c < 0$. C. $a > 0, b < 0, c < 0$. D. $a < 0, b < 0, c < 0$.

Lời giải:

Do nhánh tiến đến $+\infty$ của đồ thị đi xuống nên $a < 0$

Do đồ thị cắt trục tung tạo điểm có tung độ nhỏ hơn 0 nên $c < 0$

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị nên: $ab < 0 \Rightarrow b > 0$.

Câu 34: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có bảng biến thiên dưới đây:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+	0	-	0	-
y	$-\infty$	2	1	2	$-\infty$

Tính $P = a - 2b + 3c$.

A. $P = 3$.

B. $P = 6$.

C. $P = -2$.

D. $P = 2$.

Lời giải:

Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -\frac{b}{2a} \end{cases}$.

Căn cứ vào bảng biến thiên ta thấy $a < 0$; $b > 0$, hàm đạt cực đại tại $x = \pm 1$ và $y(\pm 1) = 2$, hàm

đạt cực tiểu tại $x = 0$ và $y(0) = 1$. Suy ra, $\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ a + b + c = 2 \\ c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$. Do đó: $P = a - 2b + 3c = -2$.

Câu 35: Biết $M(0; 2)$, $N(2; -2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tính giá trị của hàm số tại $x = 3$.

A. $y(3) = 2$.

B. $y(3) = 11$.

C. $y(3) = 0$.

D. $y(3) = -3$

Lời giải:

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} y(0) = 2 \\ y(2) = -2 \\ y'(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 2 \\ 8a + 4b + 2c + d = -2 \\ c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow y = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow y(3) = 2$

Câu 36: Đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2ax + b$ có điểm cực tiểu là $A(2; -2)$. Tính $a + b$.

A. -4.

B. 2.

C. 4.

D. -2.

Lời giải:

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2a$

Đồ thị (C): $y = f(x)$ có điểm cực tiểu là $A(2; -2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} A \in (C) \\ f'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - 12 + 4a + b = -2 \\ 12 - 12 + 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 0 \end{cases} \Rightarrow a + b = 2.$$

Câu 37: Tập hợp các số thực m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m+2)x - m$ đạt cực tiểu tại $x = 1$ là

A. $\{1\}$.

B. $\{-1\}$.

C. $\emptyset$.

D. $\mathbb{R}$.

Lời giải:

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + m + 2$ và $y'' = 6x - 6m$.

Hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m+2)x - m$ đạt cực tiểu tại

$$x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 6m + m + 2 = 0 \\ 6 - 6m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m < 1 \end{cases} \Rightarrow \text{không có giá trị của } m \text{ thỏa mãn yêu}$$

cầu bài toán.

Câu 38: Tìm tất cả tham số thực m để hàm số $y = (m-1)x^4 - (m^2-2)x^2 + 2019$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.

A. $m = 0$.

B. $m = -2$.

C. $m = 1$.

D. $m = 2$.

Lời giải:

TXĐ $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4(m-1)x^3 - 2(m^2-2)x$

$$y'' = 12(m-1)x^2 - 2(m^2-2)$$

+ Điều kiện cần : để hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(-1) = 0 \\ f''(-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4(m-1) + 2(m^2-2) = 0 \\ 12(m-1) - 2(m^2-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$$

+ Điều kiện đủ : Với $m = 2$ hàm số trở thành $y = x^4 - 2x^2 + 2019$

$$\text{Ta có: } y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$		2019		$+\infty$		
		2018		2018			

Như vậy, hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Câu 39: Tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x + 1$ có hai cực trị là

A. $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$

B. $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$

C. $(-1; 2)$

D. $[-1; 2]$

Lời giải:

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m + 2$. Để hàm số có hai cực trị thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt nên

$$y' > 0 \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \end{cases}.$$

Câu 40: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m trên miền $[-10;10]$ để hàm số $y = x^4 - 2(2m+1)x^2 + 7$ có ba điểm cực trị?

A. 20.

B. 10.

C. Vô số.

D. 11.

Lời giải:

$$\text{Ta có } y' = 4x[x^2 - (2m+1)]; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 2m+1 \end{cases} (*)$$

Hàm số đã cho có ba cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt, hay (*) có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow 2m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}$. Do $m \in [-10;10]$ nên có 11 giá trị thỏa mãn.

Câu 41: Tất cả các giá trị của tham số m để $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 6$ là

A. $m = -3$.

B. $m = 3$.

C. $m = -1$.

D. $m = 1$.

Lời giải:

$y' = 3x^2 - 6x + m$. Hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 . Vậy x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $y' = 0$

Để hàm số có 2 điểm cực trị thì $\Delta_{y'} > 0 \Leftrightarrow 36 - 12m > 0 \Leftrightarrow m < 3 (*)$

$$\text{Theo Viet ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4 - \frac{2m}{3} \Rightarrow 4 - \frac{2m}{3} = 6 \Rightarrow m = -3 \text{ thỏa } (*).$$

Câu 42: Tìm tất các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^2$ có hai điểm cực trị là A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 24 (với O là gốc tọa độ).

A. $m = 2$.

B. $m = 1$.

C. $m = \pm 2$.

D. $m = \pm 1$.

Lời giải:

$$\text{Xét } y' = 3x^2 - 6mx = 3x(x - 2m); y' = 0 \Rightarrow 3x(x - 2m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}.$$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $\Rightarrow m \neq 0$.

Tọa độ hai điểm cực trị là $A(0; 3m^2), B(2m; 3m^2 - 4m^3)$.

Phương trình đường thẳng OA : $x = 0$.

$$\text{Ta có: } S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot d(B; OA) = \frac{1}{2} 3m^2 \cdot |2m| = 24 \Rightarrow m^2 |m| = 8 \Leftrightarrow m = \pm 2.$$

Câu 43: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx^4 + (m-1)x^2 + 1 - 2m$ có một cực trị.

A. $m \geq 1$.

B. $m \leq 0$.

C. $0 \leq m \leq 1$.

D. $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$.

Lời giải:

Ta có: $y' = 4mx^3 + 2(m-1)x$

TH 1: Xét $m = 0 \Rightarrow y' = -2x$. Ta thấy phương trình $y' = 0$ đổi dấu một lần nên hàm số có một điểm cực trị. Suy ra $m = 0$ (thỏa YCBT) (1)

TH 2: Xét $m = 1 \Rightarrow y' = 4x^3$. Ta thấy phương trình $y' = 0$ đổi dấu một lần nên hàm số có một điểm cực trị. Suy ra $m = 1$ (thỏa YCBT) (2)

$$\text{TH 3: Xét } m \neq 0, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{1-m}{2m} \end{cases}$$

$$\text{Để hàm số có một điểm cực trị thì } \frac{1-m}{2m} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \geq 1 \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) suy ra } \begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$$

Ghi chú: Dùng công thức tính nhanh

$$\text{Hàm số có một điểm cực trị khi và chỉ khi } m(m-1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases}.$$

Câu 44: Cho hàm số $y = mx^4 + (2m+1)x^2 + 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho có đúng một điểm cực tiểu.

A. Không tồn tại m .

B. $m \geq 0$.

C. $m \geq -\frac{1}{2}$.

D. $-\frac{1}{2} \leq m \leq 0$.

Lời giải:

Với $m = 0$, ta có $y = x^2 + 1 \Rightarrow y' = 2x$. Khi đó hàm số có 1 cực trị và cực trị đó là cực tiểu. Suy ra $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. (1)

Với $m \neq 0$, ta có $y' = 4mx^3 + 2(2m+1)x = 2x(2mx^2 + 2m+1)$

$$\text{Hàm số có một cực trị là cực tiểu} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 2mx^2 + 2m + 1 = 0 \text{ vô nghiệm} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \frac{-2m-1}{2m} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m > 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra hàm số có một cực trị là cực tiểu khi $m \geq 0$.

Câu 45: Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 2 - m$ có giá trị cực cực đại và giá trị cực tiểu trái dấu là

A. 13.

B. 11.

C. 9.

D. 12.

Lời giải:

$$\diamond y = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 2 - m$$

$$y' = 6x^2 - 10x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = -10 - m \\ x = -\frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{73}{27} - m \end{cases}$$

$$\text{Giá trị cực cực đại và giá trị cực tiểu trái dấu} \Leftrightarrow (-10 - m) \cdot \left(\frac{73}{27} - m\right) < 0 \Leftrightarrow -10 < m < \frac{73}{27}.$$

Mà $m \in \mathbb{Z}$. Vậy có 12 có giá trị nguyên thỏa mãn.

- Câu 46:** Tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + (m-1)x + 2$ có hai điểm cực trị nằm bên trái trục tung là
- A. $(-\infty; 1)$. B. $(1; 2)$. C. $(-\infty; 2)$. D. $(1; +\infty)$.

Lời giải:

Ta có: $y' = x^2 + 2x + m - 1$.

Đồ thị hàm số đã cho có 2 điểm cực trị nằm bên trái trục tung $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m + 1 > 0 \\ -2 < 0 \\ m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 2.$$

- Câu 47:** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m + 1$ có giá trị cực tiểu bằng -1 . Tổng các phần tử thuộc S là
- A. -2 . B. 0 . C. 1 . D. -1 .

Lời giải:

Ta có: $y' = 4x^3 - 4mx$.

TH 1: Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m) = 0$ có 1 nghiệm thực, tức là hàm số

$y = x^4 - 2mx^2 + m + 1$ có điểm cực tiểu là $x = 0$. Khi đó $m \leq 0$. Theo bài ra:

$$y(0) = m + 1 = -1 \Leftrightarrow m = -2 \text{ (thỏa mãn đk } m \leq 0).$$

TH 2: Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m) = 0$ có 3 nghiệm thực, tức là hàm số

$y = x^4 - 2mx^2 + m + 1$ có điểm cực tiểu là $x = \pm\sqrt{m}$. Khi đó $m > 0$. Theo bài ra:

$$y(\pm\sqrt{m}) = -m^2 + m + 1 = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -1 \end{cases}. \text{ So sánh với đk } m > 0, \text{ giá trị thỏa mãn là } m = 2.$$

Vậy $S = \{-2; 2\}$, tổng các phần tử thuộc S bằng 0.

- Câu 48:** Biết $m = m_0$ thì đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ có hai điểm cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực trị đó bằng 2. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $m_0 \in (-2; -1)$. B. $m_0 \in (-1; 0)$. C. $m_0 \in (1; 2)$. D. $m_0 \in (0; 1)$.

Lời giải:

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 3m$. Để đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m > 0$.

$$\text{Khi đó: } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{m} \Rightarrow y = -2m\sqrt{m} + 2 \\ x = -\sqrt{m} \Rightarrow y = 2m\sqrt{m} + 2 \end{cases}$$

Giả sử hai điểm cực trị $A(\sqrt{m}; -2m\sqrt{m} + 2), B(-\sqrt{m}; 2m\sqrt{m} + 2)$

$$\text{Ta có } AB = 2 \Leftrightarrow AB^2 = 4 \Leftrightarrow (-2\sqrt{m})^2 + (4m\sqrt{m})^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow 4m + 16m^3 = 4 \Leftrightarrow 4m^3 + m - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2m-1)(2m^2+m+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1=0 \\ 2m^2+m+1=0(VN) \end{cases} \Leftrightarrow m=\frac{1}{2} (TM).$$

Câu 49: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị $A(0;1)$, B , C thỏa mãn $BC = 4$.

A. $m = \sqrt{2}$.

B. $m = \pm 4$.

C. $m = \pm 2$.

D. $m = 4$.

Lời giải:

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$.

Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow ab < 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Lúc đó: $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y(0) = 1 \\ x = \pm\sqrt{m} \Rightarrow y(\pm\sqrt{m}) = 1 - m^2 \end{cases}$

Suy ra $A(0;1)$, $B(\sqrt{m}; 1 - m^2)$, $C(-\sqrt{m}; 1 - m^2)$.

Lúc đó: $BC = 4 \Leftrightarrow \sqrt{4m} = 4 \Leftrightarrow m = 4$ (thỏa mãn)

Câu 50: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1?

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải:

Ta có: $y' = 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$

Theo yêu cầu bài toán ta có: $m > 0$

Ta có $A(0; m-1)$; $B(\sqrt{m}; -m^2 + m - 1)$; $C(-\sqrt{m}; -m^2 + m - 1)$

Gọi H là trung điểm của cạnh BC . Ta có $H(0; -m^2 + m - 1)$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R} \Leftrightarrow AB^2 = 2AH \cdot R$ trong đó $\begin{cases} AH = m^2 \\ AB = \sqrt{m + m^4} \end{cases}$

Suy ra $m + m^4 = 2m^2 \Leftrightarrow m(m^3 - 2m + 1) = 0 \Leftrightarrow m(m-1)(m^2 + m - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \\ m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ m = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$. Đối chiếu điều kiện ta được $S = \left\{ 1; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$.

Câu 51: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 - m$, với m là tham số. Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số và $I(2; -2)$. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m sao cho ba điểm I, A, B tạo thành tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{5}$. Tính tổng các phần tử của S .

A. $\frac{20}{17}$.

B. $\frac{15}{17}$.

C. $\frac{3}{17}$.

D. $\frac{4}{17}$.

Lời giải:

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3m^2 - 3$.

Vì $\Delta' = 1 > 0$ nên hàm số luôn có hai cực trị với mọi m . Gọi

$A(m+1; -4m-2); B(m-1; -4m+2)$ suy ra $AB = 2\sqrt{5}$ nên AB là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB .

Ta có $\overrightarrow{IA} = (m-1; -4m); \overrightarrow{IB} = (m-3; -4m+4)$

$$\text{Vì } \overrightarrow{IA} \perp \overrightarrow{IB} \Rightarrow \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = 0 \Leftrightarrow (m-1)(m-3) - 4m(-4m+4) = 0 \Leftrightarrow 17m^2 - 20m + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=\frac{3}{17} \end{cases}$$

Tổng các phần tử của S là $\frac{20}{17}$.

Câu 52: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m-2)x^2 - 9x + 1$, với m là tham số. Gọi x_1, x_2 là các điểm cực trị của hàm số đã cho thì giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|9x_1 - 25x_2|$ bằng

A. 15.

B. 90.

C. 450.

D. 45.

Lời giải:

Ta có: $y' = x^2 - 2(m-2)x - 9$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m-2)x - 9 = 0$.

Do $\Delta' = (m-2)^2 + 9 > 0, \forall m$ nên hàm số có hai cực trị.

Theo định lý Vi-et: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-2) \\ x_1 \cdot x_2 = -9 \end{cases}$.

Khi đó x_1, x_2 trái dấu.

$$+ \text{ Nếu } x_1 > 0 \text{ thì } |9x_1 - 25x_2| = \left| 9x_1 - 25 \cdot \left(-\frac{9}{x_1} \right) \right| = \left| 9x_1 + \frac{225}{x_1} \right| \geq \left| 2 \cdot \sqrt{9x_1 \cdot \frac{225}{x_1}} \right| = 90$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } 9x_1 = \frac{225}{x_1} \Leftrightarrow x_1^2 = 25 \Leftrightarrow x_1 = 5.$$

+ Nếu $x_1 < 0$ thì $-x_1 > 0$, khi đó

$$|9x_1 - 25x_2| = \left| 9x_1 - 25 \cdot \left(-\frac{9}{x_1} \right) \right| = \left| 9(-x_1) + \frac{225}{-x_1} \right| \geq \left| 2 \cdot \sqrt{9(-x_1) \cdot \frac{225}{(-x_1)}} \right| = 90$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } 9x_1 = \frac{225}{x_1} \Leftrightarrow x_1^2 = 25 \Leftrightarrow x_1 = -5.$$

Vậy GTNN $|9x_1 - 25x_2|$ là 90. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = \pm 5$.

Câu 53: Cho hàm số $y = x^4 - 2(1-m^2)x^2 + m + 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành tam giác có diện tích là lớn nhất.

A. $m = \frac{1}{2}$.

B. $m = -\frac{1}{2}$.

C. $m = 0$.

D. $m = 1$.

Lời giải:

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } y' = 4x^3 - 4(1-m^2)x = 4x[x^2 - (1-m^2)]; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 1 - m^2 \end{cases}$$

Hàm số có ba điểm cực trị khi $1 - m^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$.

Khi đó ba điểm cực trị là $A(0; m+1)$; $B(-\sqrt{1-m^2}; -m^4+2m^2+m)$; $C(\sqrt{1-m^2}; -m^4+2m^2+m)$.

Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow H(0; -m^4+2m^2+m)$.

Khi đó: $\overrightarrow{AH} = (0; -(1-m^2)^2)$; $\overrightarrow{BC} = (2\sqrt{1-m^2}; 0)$.

Vì $\triangle ABC$ cân tại A nên $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = \frac{1}{2} (1-m^2)^2 \cdot 2\sqrt{1-m^2} = (1-m^2)^2 \cdot \sqrt{1-m^2}$.

Mà $m^2 \geq 0; \forall m \Rightarrow 1-m^2 \leq 1 \Rightarrow S \leq 1$.

Dấu "=" xảy ra khi $m = 0$ (thỏa mãn).

Câu 54: Có bao nhiêu số nguyên m để đồ thị hàm số $y = x + \frac{mx}{\sqrt{x^2+1}}$ có hai điểm cực trị và các cực trị này đều thuộc hình tròn có tâm là gốc tọa độ O bán kính bằng $\sqrt{30}$?

A. 9.

B. 8.

C. 7.

D. 6.

Lời giải:

Ta có: $y' = 1 + \frac{m}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$ $y' = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{m}{\sqrt{(x^2+1)^3}} = 0 \Leftrightarrow -m = \sqrt{(x^2+1)^3}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = \sqrt[3]{-m} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1 = \sqrt[3]{m^2} \\ -m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \sqrt[3]{m^2} - 1 \\ m \leq 0 \end{cases}$$

Để đồ thị có hai cực trị thì phương trình $x^2 = \sqrt[3]{m^2} - 1$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{m^2} - 1 > 0 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1.$$

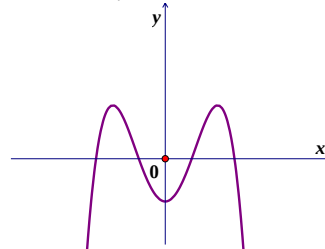
Vì 2 cực trị nằm trên đường tròn tâm O bán kính $\sqrt{30}$ nên $x^2 + y^2 \leq 30$.

$$\text{Suy ra } x^2 + y^2 \leq 30 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{m^2} - 1) \left(1 + \left(1 - \sqrt[3]{m^2} \right)^2 \right) \leq 30 \Leftrightarrow \sqrt[3]{m^2} \leq 4 \Leftrightarrow -8 \leq m \leq 8$$

So điều kiện suy ra $m \in \{-8; -7; \dots; -2\}$. Vậy có 7 giá trị m cần tìm

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 55: Đường cong trong hình vẽ sau là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y = x^4 - 3x^2 - 1$.

B. $y = -x^4 + 3x^2 - 1$.

C. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

D. $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

Lời giải:

Quan sát đồ thị ta có, đây là đồ thị của hàm số bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) nên loại phương án C, D.

Dựa vào dạng đồ thị nên có hệ số $a < 0$, suy ra chọn đáp án B.

Câu 56: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên.

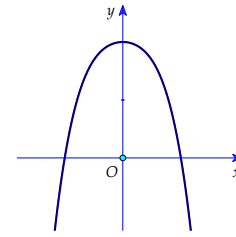
Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a < 0, b \geq 0, c > 0$.

B. $a > 0, b \geq 0, c < 0$.

C. $a < 0, b \leq 0, c > 0$.

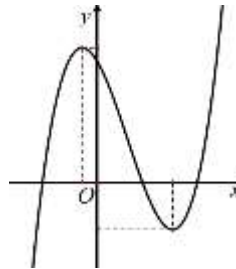
D. $a < 0, b \leq 0, c \geq 0$.



Lời giải:

+ Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty \Rightarrow a < 0$ và $(C) \cap Oy = (0; c) \Rightarrow c > 0$. Mặt khác hàm số có duy nhất một cực trị nên suy ra $ab \geq 0$, do $a < 0 \Rightarrow b \leq 0$.

Câu 57: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình bên dưới:



Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

B. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

C. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.

D. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

Lời giải:

Do nhánh tiến đến $+\infty$ của đồ thị đi lên nên $a > 0$

Do đồ thị cắt trục tung tạo điểm có tung độ lớn hơn 0 nên $d > 0$

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$\text{Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị } x_1, x_2 \text{ thỏa: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} > 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{3a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b < 0 \\ c < 0 \end{cases}$$

Câu 58: Biết a, b, c là các số thực tùy ý, $a \neq 0$ và hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx$ nhận $x = -1$ là một điểm cực trị. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $3a + 2b + c = 0$.

B. $a + c = b$.

C. $3a + c = 2b$.

D. $2a - b = 0$.

Lời giải:

Xét hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx$ ($a \neq 0$).

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$. Vì $x = -1$ là một điểm cực trị nên y' có 1 nghiệm là $x = -1$.

$$\text{Suy ra } 3a(-1)^2 + 2b(-1) + c = 0 \Leftrightarrow 3a - 2b + c = 0 \Leftrightarrow 3a + c = 2b$$

Câu 59: Ta xác định được các số a, b, c để đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $(0; 1)$ và có điểm cực trị $(-2; 0)$. Tính giá trị của biểu thức $T = 4a + b + c$.

A. 20.

B. 23.

C. 24.

D. 22.

Lời giải:

Ta có: $y = x^3 + ax^2 + bx + c$; $y' = 3x^2 + 2ax + b$.

Đồ thị hàm số qua điểm $(0; 1)$ nên $c = 1$

$$\text{Đồ thị hàm số có điểm cực trị } (-2;0) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 3b > 0 \\ y(-2) = 0 \\ y'(-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 3b > 0 \\ -8 + 4a - 2b + c = 0 \\ 12 - 4a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{17}{4} \\ b = 5 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó: } T = 4a + b + c = 4 \cdot \frac{17}{4} + 5 + 1 = 23.$$

Câu 60: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 + (m-1)x^2 + m^2$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

A. $m = 1$.

B. $m \geq 1$.

C. $m \in \mathbb{R}$.

D. $m \leq 1$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } y' = 4x^3 + 2(m-1)x, \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 = 1 - m \end{cases}; \quad y'' = 12x^2 + 2(m-1).$$

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} y'(0) = 0 \\ y''(0) > 0 \end{cases} \Rightarrow m \geq 1. \quad (\text{Do tính chất hàm trùng phương})$$

Câu 61: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

A. $m = 0$.

B. $m > 4$.

C. $0 \leq m < 4$.

D. $0 < m \leq 4$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } y' = 3x^2 - 6x + m; \quad y'' = 6x - 6.$$

$$\text{Hàm số đạt cực tiểu tại } x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(2) = 0 \\ y''(2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

Câu 62: Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (m+1)x + 2$ có hai điểm cực trị là

A. $m > 2$.

B. $m < 2$.

C. $m < -4$.

D. $m \leq 2$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 6x + m + 1$$

$$\text{Để hàm số } y = x^3 - 3x^2 + (m+1)x + 2 \text{ có hai điểm cực trị thì } y' = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt} \\ \Rightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 9 - 3(m+1) > 0 \Leftrightarrow m < 2.$$

Vậy với $m < 2$ thì hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (m+1)x + 2$ có hai điểm cực trị.

Câu 63: Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(7m-3)x$. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để hàm số **không** có cực trị. Số phần tử của S là

A. 2.

B. 4.

C. 0.

D. Vô số.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 3(7m-3); \quad y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + 7m-3 = 0.$$

$$\text{Để hàm số không có cực trị thì } \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - (7m-3) \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq m \leq 4. \text{ Do } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow S = \{1; 2; 3; 4\}. \text{ Vậy } S \text{ có 4 phần tử.}$$

Câu 64: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ có cực trị và các điểm cực đại, điểm cực tiểu nhận giá trị dương.

A. $m < 2$.

B. $m > 2$.

C. $0 < m < 2$.

D. $m = 2$.

Lời giải:

Ta có $y' = x^2 - 2mx + (m + 2)$.

Hàm số đã cho có các điểm cực đại và cực tiểu dương khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$

$$\text{có hai nghiệm phân biệt dương} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ 2m > 0 \\ m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2.$$

Câu 65: Biết m_0 là giá trị của tham số để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $m_0 \in (-1; 7)$. B. $m_0 \in (-7; -1)$. **C. $m_0 \in (-15; -7)$.** D. $m_0 \in (7; 10)$.

Lời giải:

$y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$; $y' = 3x^2 - 6x + m$. Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow \Delta' = 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$
 x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $3x^2 - 6x + m = 0$.

Áp dụng định lý Viét, ta có:
$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 2 \\ P = x_1x_2 = \frac{m}{3} \end{cases}$$

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 13 \Leftrightarrow 4 - m = 13 \Leftrightarrow m = -9 \in (-15; -7)$

Câu 66: Để đồ thị hàm số $y = -x^4 - (m - 3)x^2 + m + 1$ có điểm cực đại mà **không** có điểm cực tiểu thì tất cả các giá trị thực của tham số m là

- A. $m \leq 3$. B. $m < 3$. **C. $m \geq 3$.** D. $m > 3$.

Lời giải:

$$y' = -4x^3 - 2(m - 3)x; y' = 0 \Leftrightarrow -2x(2x^2 + m - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{-m + 3}{2} \end{cases}$$

Hàm số $y = -x^4 - (m - 3)x^2 + m + 1$ là hàm số bậc bốn trùng phương có hệ số $a = -1 < 0$ nên đồ thị hàm số có điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu khi và chỉ khi đồ thị hàm số có đúng một điểm cực trị $\Leftrightarrow \frac{-m + 3}{2} \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 3$.

Câu 67: Cho hàm số $y = mx^4 - (2m + 1)x^2 + 1$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đã cho có một điểm cực đại.

- A. $-\frac{1}{2} \leq m < 0$. B. $m \leq -\frac{1}{2}$. **C. $m \geq -\frac{1}{2}$.** D. $-\frac{1}{2} \leq m \leq 0$.

Lời giải:

Có 3 trường hợp sau thỏa mãn yêu cầu:

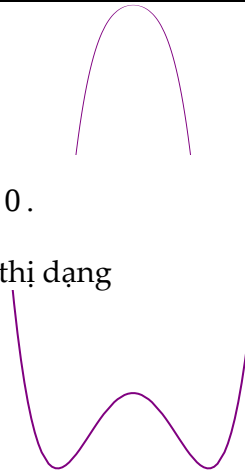
TH1: Hàm số là đa thức bậc 2 có hệ số của x^2 âm (đồ thị là parabol hướng bề lõm xuống dưới)

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ -(2m + 1) < 0 \end{cases} \Rightarrow m = 0.$$

TH2: Hàm số là đa thức bậc 4 có đồ thị dạng

$$\Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ a.b \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 2m+1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq m < 0.$$

TH3: Hàm số là đa thức bậc 4 có đồ thị dạng



$$\Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ ab < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 2m+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow m > 0.$$

$$\text{Vậy, } m \in \{0\} \cup \left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup (0; +\infty) \Rightarrow m \geq -\frac{1}{2}.$$

Câu 68: Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = mx^4 - (m-3)x^2 + m^2$ **không** có điểm cực đại là

A. 4.

B. 2.

C. 5.

D. 0.

Lời giải:

♦ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

♦ Với $m = 0$ hàm số trở thành $y = 3x^2$. Khi đó hàm số có một điểm cực tiểu, không có điểm cực đại. Vậy $m = 0$ thỏa mãn.

♦ Với $m \neq 0$ ta có: $y' = 4mx^3 - 2(m-3)x = 2x[2mx^2 - (m-3)]$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{m-3}{2m} \end{cases}$$

Hàm số không có điểm cực đại khi: $\begin{cases} m > 0 \\ \frac{m-3}{2m} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 3$. Vì $m \in \mathbb{Z} \rightarrow m \in \{1; 2; 3\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 69: Gọi S là tập các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m + 4$ có ba điểm cực trị cách đều trục hoành. Tổng tất cả các phần tử của tập S bằng

A. 2.

B. 6.

C. 0.

D. 4.

Lời giải:

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y' = 4x^3 - 4mx; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$$

Đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m + 4$ có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$.

Ta có $A(0; m+4), B(\sqrt{m}; -m^2 + m + 4), C(-\sqrt{m}; -m^2 + m + 4)$ là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

$$A, B, C \text{ cách đều trục hoành} \Leftrightarrow |y_A| = |y_B| = |y_C| \Leftrightarrow |m+4| = |-m^2+m+4|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+4 = -m^2+m+4 \\ m+4 = m^2-m-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \text{ (L)} \\ m=-2 \text{ (L)} \Leftrightarrow m=4. \\ m=4 \text{ (TM)} \end{cases}$$

Vậy $m=4$. Suy ra tổng tất cả các phần tử của tập S là 4.

- Câu 70:** Cho hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 6)x^2 + 4$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số có ba điểm cực trị trong đó có đúng hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại ?
- A. 4. B. 3. C. 2. D. 5.

Lời giải:

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4mx^3 + 2(m^2 - 6)x$.

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị trong đó có đúng hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4m > 0 \\ m(m^2 - 6) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \sqrt{6} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = 1; m = 2.$$

- Câu 71:** Gọi S tập hợp các giá trị m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân. Tổng bình phương các phần tử của S bằng
- A. 2. B. 4. C. 8. D. 6.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } y' = 4x^3 - 4m^2x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm m \end{cases}.$$

Để hàm số có 3 điểm cực trị thì $m \neq 0$.

+) Với $x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(0; 1) \in Oy$.

+) Với $x = \pm m \Rightarrow y = -m^4 + 1 \Rightarrow B(-m; -m^4 + 1), C(m; -m^4 + 1)$.

Để ý: $\triangle ABC$ luôn cân ở A .

Để 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -8m^6 + 8 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Vậy tổng bình phương các phần tử của S bằng 2.

- Câu 72:** Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 3m^2$ có ba điểm cực trị lập thành một tam giác nhận $G(0; 7)$.

A. $m = 1$. B. $m = -\sqrt{\frac{3}{7}}$. C. $m = -1$. D. $m = -\sqrt{3}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } y' = 4x^3 + 4mx; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{-m}, (m < 0) \end{cases}.$$

Khi đó ba điểm cực trị là $A(0; 3m^2), B(-\sqrt{-m}, 2m^2), C(\sqrt{-m}, 2m^2)$.

Tam giác ABC nhận điểm $G(0; 7)$ làm trọng tâm thì $\frac{7m^2}{3} = 7 \Leftrightarrow m^2 = 3 \Leftrightarrow m = -\sqrt{3}$.

- Câu 73:** Gọi m_1, m_2 là các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + m - 1$ có hai điểm cực trị là B, C sao cho tam giác OBC có diện tích bằng 2, với O là gốc tọa độ. Tính $m_1.m_2$.

A. 6.

B. -15.

C. 12.

D. -20.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } y' = 6x^2 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; y = m - 1 \\ x = 1; y = m - 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y					

$m-1$
 $\swarrow$
 $-\infty$

$m-2$
 $\searrow$
 $+\infty$

$$\text{Vậy } B(0; m-1), C(1; m-2); \overline{BC} = (1; -1) \Rightarrow BC = \sqrt{2}.$$

$$\text{Ta có } BC: x + y - m + 1 = 0; d(O; BC) = \frac{|1-m|}{\sqrt{2}}.$$

$$S_{OBC} = \frac{1}{2} d(O; BC) \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{|1-m|}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = 2 \Leftrightarrow |1-m| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m=4 \\ 1-m=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-3 \\ m=5 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } m_1 \cdot m_2 = -15.$$

Câu 74: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + x - 2$ có giá trị tuyệt đối của hoành độ hai điểm cực trị là độ dài hai cạnh của tam giác vuông có cạnh huyền $\sqrt{7}$. Số phần tử của S là

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } y' = x^2 - mx + 1; y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - mx + 1 = 0.$$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 4 > 0.$$

Khi đó, gọi các nghiệm của là x_1, x_2 thì x_1, x_2 chính là hoành độ hai điểm cực trị. Theo Viet ta có $x_1 + x_2 = m; x_1 \cdot x_2 = 1$.

$$\text{Theo bài ra ta có: } x_1^2 + x_2^2 = 7 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 7 \Leftrightarrow m^2 - 2 = 7 \Leftrightarrow m^2 = 9 \Leftrightarrow m = \pm 3).$$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 75: Cho biết đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 2m^2 + m^4$ có 3 điểm cực trị A, B, C cùng với điểm $D(0; -3)$ là 4 đỉnh của một hình thoi. Gọi S là tổng các giá trị m thỏa mãn đề bài thì S thuộc khoảng nào sau đây?

A. $S \in (2; 4)$.

B. $S \in \left(\frac{9}{2}; 6\right)$.

C. $S \in \left(1; \frac{5}{2}\right)$.

D. $S \in \left(0; \frac{5}{2}\right)$.

Lời giải:

$$\text{Hàm số có 3 điểm cực trị} \Leftrightarrow ab < 0 \Leftrightarrow 2m > 0 \Leftrightarrow m > 0 \quad (2)$$

$$\text{Với } m > 0, \text{ ta có: } y' = 4x^3 - 4mx; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = m^4 - 2m^2 \\ x = \sqrt{m} \Rightarrow y = m^4 - 3m^2 \\ x = -\sqrt{m} \Rightarrow y = m^4 - 3m^2 \end{cases}.$$

Vậy 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) là $A(0; m^4 - 2m^2); B(\sqrt{m}; m^4 - 3m^2); C(-\sqrt{m}; m^4 - 3m^2)$.

Vì tứ giác $ABDC$ có hai đường chéo vuông góc, do đó $ABDC$ là hình thoi $\Leftrightarrow$ hai đường chéo của tứ giác $ABDC$ cắt nhau tại trung điểm mỗi đường

$$\Leftrightarrow y_A + y_D = y_B + y_C \Leftrightarrow m^4 - 2m^2 - 3 = 2m^4 - 6m^2$$

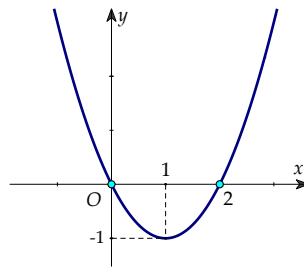
$$\Leftrightarrow m^4 - 4m^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m = \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện (2) suy ra $\begin{cases} m = 1 \\ m = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow S = 1 + \sqrt{3} \in (2; 4)$.

Dạng 3: Bài toán cực trị liên quan đến hàm ẩn

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM MINH HỌA

Câu 76: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm là $f'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây:



Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

B. 1.

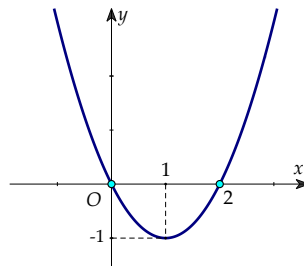
C. 3.

D. 0.

Lời giải:

Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = 2$.

Câu 77: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm là $f'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây:



Hỏi hàm số $y = f(x) - 2x$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 0.

Lời giải:

Hàm số $y' = [f(x) - 2x]' = f'(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2$ có hai nghiệm (đơn) phân biệt.

Vậy hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

Câu 78: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = (x-1)(x-2)(x+1), \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số $g(x) = f(3-x)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

A. $x = 0$.

B. $x = 1$.

C. $x = 4$.

D. $x = 2$.

Lời giải:

$$\text{Hàm số } g'(x) = -f'(3-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x=1 \\ 3-x=2 \\ 3-x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=1 \\ x=4 \end{cases}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		1		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$g(x)$									

Vậy hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại điểm $x=2$.

Câu 79: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x^2-1)(x-3)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ là

A. 2.

B. 5.

C. 3.

D. 1.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-1)(x-3)^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$									

Căn cứ BBT ta thấy số điểm cực trị dương của hàm số $y = f(x)$ là 2 ($x=1; x=3$) nên số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ là 5.

Câu 80: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = (x-1)(x-2)(x+1), \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số $g(x) = f(2x-1)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

A. $x = -1$.

B. $x = 1$.

C. $x = \frac{3}{2}$.

D. $x = 2$.

Lời giải:

$$\text{Hàm số } g'(x) = 2f'(2x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=1 \\ 2x-1=2 \\ 2x-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{3}{2} \\ x=0 \end{cases}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$g(x)$									

Vậy hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại điểm $x=1$.

Câu 81: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = (x-1)(x-2)(x+1), \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số $g(x) = f(3-2x)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

A. $x = \frac{1}{2}$.

B. $x = 1$.

C. $x = -1$.

D. $x = 2$.

Lời giải:

$$\text{Hàm số } g'(x) = -2f'(3-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x=1 \\ 3-2x=2 \\ 3-2x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{1}{2} \\ x=2 \end{cases}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$			
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$								

Vậy hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = 1$.

Câu 82: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x^2(x-1)(x+2), \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số $g(x) = f(2x-3)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

A. $x = \frac{1}{2}$.

B. $x = 1$.

C. $x = -2$.

D. $x = 2$.

Lời giải:

$$\text{Hàm số } g'(x) = 2f'(2x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3=0 \\ 2x-3=1 \\ 2x-3=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ x=2 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$			
$g'(x)$		+	0	-	0	-	0	+
$g(x)$								

Vậy hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x = \frac{1}{2}$.

Nhận xét: Do $f(x)$ không đạt cực trị tại $x=0$ nên ta không cần xét nghiệm $u=0$ đối với hàm số $f(u)$ khi tìm số điểm cực trị của hàm số $f(u)$.

Câu 83: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x^2(x-1)(x+2), \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số $g(x) = f(5-2x)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

A. $x = 1$.

B. $x = \frac{7}{2}$.

C. $x = -2$.

D. $x = \frac{5}{2}$.

Lời giải:

$$\text{Hàm số } g'(x) = -2f'(5-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5-2x=0 \\ 5-2x=1 \\ 5-2x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ x=2 \\ x=\frac{7}{2} \end{cases}.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		2		$\frac{5}{2}$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	+	0	-	
$g(x)$									

Vậy hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = \frac{7}{2}$.

Câu 84: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	

Hỏi hàm số $g(x) = f(2x-1)$ đạt cực tiểu tại điểm nào sau đây?

A. $x = 2$.

B. $x = 1$.

C. $x = 3$.

D. $x = 5$.

Lời giải:

$$\text{Hàm số } g'(x) = 2f'(2x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=1 \\ 2x-1=3 \\ 2x-1=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{cases}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$g(x)$									

Vậy hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 2$.

Câu 85: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	-	0	+	

Hỏi hàm số $g(x) = f(3-2x)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

A. $x = -\frac{1}{2}$.

B. $x = 2$.

C. $x = \frac{1}{2}$.

D. $x = \frac{3}{2}$.

Lời giải:

$$\text{Hàm số } g'(x) = -2f'(3-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x=0 \\ 3-2x=2 \\ 3-2x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ x=\frac{1}{2} \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$		
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$							

Vậy hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x = \frac{3}{2}$.

Câu 86: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = (x+1)(x-3), \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 + 2x)$ là

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 2.

Lời giải:

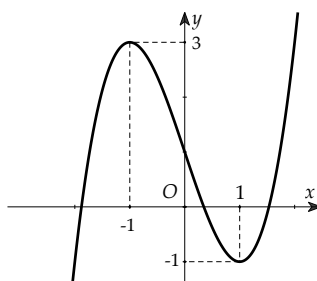
$$\text{Hàm số } g'(x) = (2x+2)f'(x^2+2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2=0 \\ x^2+2x=-1 \\ x^2+2x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-1 \text{ (bội 2)} \\ x=1 \\ x=-3 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$				
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$									

Vậy hàm số $g(x)$ có ba điểm cực trị.

Câu 87: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị cho bởi hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = [f(x)]^2 - 2f(x)$ là

A. 4.

B. 6.

C. 7.

D. 5.

Lời giải:

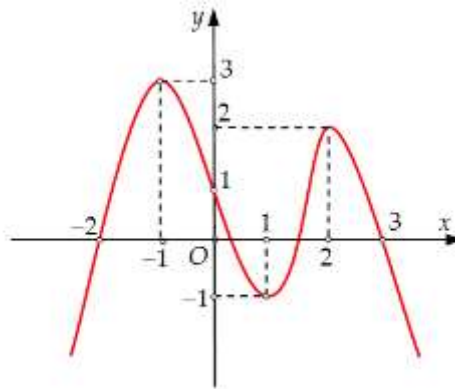
Hàm số $g'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) - 2f'(x) = 2f'(x)(f(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) - 1 = 0 \end{cases}$

+) Với $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$.

+) Với $f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 1$ có ba nghiệm đơn a, b, c phân biệt khác ± 1 .

Vậy hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 88: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị cho bởi hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(f(x))$ là

A. 11.

B. 10.

C. 9.

D. 8.

Lời giải:

Hàm số $g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(f(x)) = 0 \end{cases}$

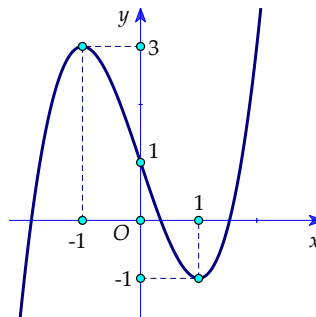
+) Với $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$ (Nghiệm đơn).

+) Với $f'(f(x)) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \text{ có bốn nghiệm đơn } a, b, c, d \text{ phân biệt khác } \pm 1; 2 \\ f(x) = -1 \text{ có hai nghiệm đơn phân biệt khác } \pm 1; 2; a, b, c, d \text{ và một nghiệm bội hai: } x = 1 \\ f(x) = 2 \text{ có hai nghiệm đơn phân biệt khác các nghiệm trên và một nghiệm bội hai: } x = 2 \end{cases}$

Vậy hàm số $g(x)$ có 11 điểm cực trị.

Câu 89: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm $f'(x)$ cho bởi hình vẽ sau:



Hàm số $g(x) = f(x) + x^2 - x - 1$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

A. $x = 1$.

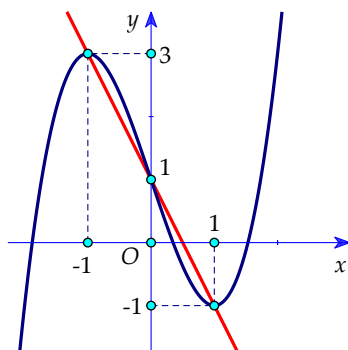
B. $x = 0$.

C. $x = -1$.

D. $x = 2$.

Lời giải:

$$\text{Hàm số } g'(x) = [f(x) + x^2 - x - 1]' = f'(x) - (-2x + 1) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -2x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$



Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$					

Vậy hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$.

Câu 90: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-2)^{2019} (x^2 - x - 2)^{2020} (x+3)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ là

A. 5.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải:

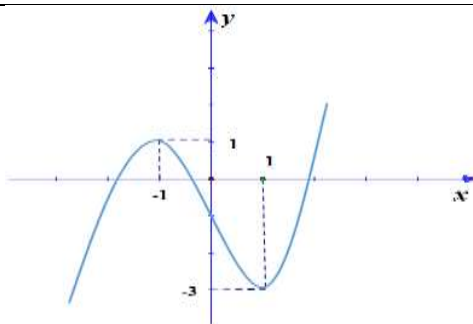
$$\text{+) Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)^{2019} (x^2 - x - 2)^{2020} (x+3)^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1. \\ x = -3 \end{cases}$$

+) Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-3	-1	2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y					

Hàm số $f(x)$ có 1 điểm cực trị dương $x = 2$ nên hàm số $y = f(|x|)$ có $2.1 + 1 = 3$ điểm cực trị.

Câu 91: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x+2|)$.

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 5.

Lời giải:

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x+2|)$ bằng số điểm cực trị hàm số $y = f(|x|)$.

Hàm số $f(x)$ có 1 điểm cực trị dương nên hàm số $y = f(|x|)$ có $2 \cdot 1 + 1 = 3$ điểm cực trị.

Câu 92: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	3	1	$+\infty$	

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x) - 2|$ là

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải:

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x) - 2|$ bằng $m + n$.

+) m là số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) - 2 \Rightarrow m = 2$.

+) n là số nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x) = 2 \Rightarrow n = 3$.

Suy ra, số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x) - 2|$ bằng 5.

Câu 93: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	0	$+\infty$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để hàm số $h(x) = |f(x) - m|$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. 21.

B. 19.

C. 18.

D. 20.

Lời giải:

Đặt $g(x) = f(x) - m$.

+) Số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là 2 (bằng số điểm cực trị của hàm số $f(x)$).

+) $h(x) = |g(x)|$ có đúng 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = m$ có đúng 1 nghiệm (không trùng với điểm cực trị của $f(x)$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq 0 \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}, m \in [-10; 10]} m \in \{-10; -9; \dots; -1; 0; 1; 2; \dots 10\}.$$

Câu 94: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	4	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		2021	2020	2016		$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(|x|) - 2019|$ là

A. 5.

B. 9.

C. 3.

D. 7.

Lời giải:

Xét $h(x) = f(x) - 2019$ có $h'(x) = f'(x)$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$

Phương trình giao điểm của đồ thị hàm số $y = h(x)$ với trục hoành:

$$f(x) - 2019 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2019 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a < -1 \\ x = b (0 < b < 4) \\ x = c > 4 \end{cases}$$

Vậy hàm số $y = |h(x)|$ có 3 điểm cực trị dương.

Vậy số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |h(|x|)|$ là $2 \cdot 3 + 1 = 7$.

Câu 95: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |x^3 - 3x - m|$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. Vô số.

B. 2.

C. 5.

D. 3.

Lời giải:

$$\text{Đặt } g(x) = x^3 - 3x; g'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

BBT:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$			2		-2		$+\infty$
	$-\infty$						

Xét hàm số $y = |g(x) - m|$.

+) Số điểm cực trị của hàm số $g(x) - m$ là 2 (bằng số điểm cực trị của hàm số $g(x)$).

+) $y = |g(x) - m|$ có đúng 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow g(x) - m = 0 \Leftrightarrow g(x) = m$ có đúng 3 nghiệm (không trùng với điểm cực trị của $g(x)$)

$$\Leftrightarrow -2 < m < 2 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-1; 0; 1\}.$$

Câu 96: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(|x|^3 - 3x^2)$ là

A. 6.

B. 5.

C. 7.

D. 8.

Lời giải:

Xét hàm số $h(x) = f(x^3 - 3x^2) \Rightarrow h(|x|) = g(x) = f(|x|^3 - 3x^2)$.

$$\text{Ta có: } h'(x) = (3x^2 - 6x)f'(x^3 - 3x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 2 \\ x^3 - 3x^2 = 1 \xrightarrow{\text{CB}} x \approx 3,1. \\ x^3 - 3x^2 = 3 \xrightarrow{\text{CT}} x \approx 3,3 \end{cases}$$

Vậy $h(x)$ có 3 điểm cực trị dương nên $h(|x|) = g(x)$ có $2 \cdot 3 + 1 = 7$ điểm cực trị.

Câu 97: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-9)(x^2-16)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x^3 + 7x| + m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 16.

B. 9.

C. 4.

D. 8.

Lời giải:

$$\text{Cách 1: Ta có: } f'(x) = (x-9)(x^2-16) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 4 \\ x = 9 \end{cases}.$$

Để ý rằng, do $x^3; 7x$ cùng dấu nên $|x^3 + 7x| = |x|^3 + 7|x|$.

Lúc đó: $g(x) = f(|x^3 + 7x| + m) = f(|x|^3 + 7|x| + m)$.

Xét hàm số $h(x) = f(x^3 + 7x + m) \Rightarrow g(x) = h(|x|)$.

Ta có: $h'(x) = (3x^2 + 7)f'(x^3 + 7x + m); h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x^3 + 7x + m) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 7x + m = -4 \\ x^3 + 7x + m = 4 \\ x^3 + 7x + m = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 7x = -4 - m \\ x^3 + 7x = 4 - m \\ x^3 + 7x = 9 - m \end{cases}; (9 - m > 4 - m > -4 - m).$$

BBT hàm $t(x) = x^3 + 7x$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$t'(x)$		+	
$t(x)$			$+\infty$

Hàm số $g(x)$ có ít nhất ba điểm cực trị $\Leftrightarrow h(x)$ có ít nhất một điểm cực trị dương

$$\Leftrightarrow 9 - m > 0 \Leftrightarrow m < 9 \xrightarrow{m \in \mathbb{N}^*} m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}.$$

Mở rộng:

d) Hàm số $g(x)$ có **đúng** ba điểm cực trị $\Leftrightarrow h(x)$ có **đúng** một điểm cực trị dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9-m > 0 \\ 4-m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4 \leq m < 9 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{4; 5; 6; 7; 8\}.$$

b) Hàm số $g(x)$ có ít nhất năm điểm cực trị $\Leftrightarrow h(x)$ có ít nhất hai điểm cực trị dương

$$\Leftrightarrow 4-m > 0 \Leftrightarrow m < 4 \xrightarrow{m \in \mathbb{N}^*} m \in \{1; 2; 3\}.$$

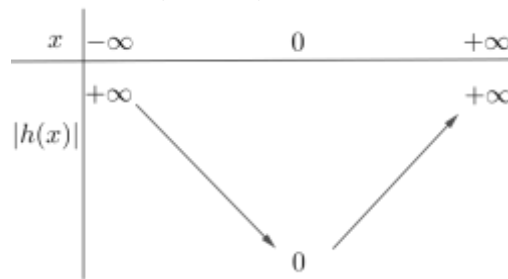
c) Hàm số $g(x)$ có **đúng** năm điểm cực trị $\Leftrightarrow h(x)$ có **đúng** hai điểm cực trị dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-m > 0 \\ -4-m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m < 4 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}.$$

d) Hàm số $g(x)$ có ít nhất bảy điểm cực trị $\Leftrightarrow h(x)$ có ít nhất ba điểm cực trị dương

$$\Leftrightarrow -4-m > 0 \Leftrightarrow m < -4.$$

Cách 2: Ta có BBT của hàm $y = |h(x)| = |x^3 + 7x|$ như sau:



Ta có $g'(x) = |x^3 + 7x|' \cdot f'(|x^3 + 7x| + m)$. Rõ ràng $x = 0$ là điểm cực trị của hàm $y = |h(x)|$.

$$\text{Ta có: } f'(|x^3 + 7x| + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x^3 + 7x| + m = 9 \\ |x^3 + 7x| + m = 4 \\ |x^3 + 7x| + m = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x^3 + 7x| = 9 - m \\ |x^3 + 7x| = 4 - m \\ |x^3 + 7x| = -4 - m \end{cases}.$$

Để hàm số $g(x)$ có ít nhất 3 điểm cực trị thì phương trình $g'(x) = 0$ có ít nhất 2 nghiệm phân biệt khác 0 và $g'(x)$ đổi dấu khi đi qua ít nhất 2 trong số các nghiệm đó.

Từ BBT ta có $9 - m > 0 \Leftrightarrow m < 9 \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7, 8\}$.

Vậy có 8 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 98: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + (3m - 6)x$, với m là tham số thực, có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6

Lời giải:

Hàm số $g(x) = f(|x|)$ là hàm chẵn, nên hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow y = f(x)$ có 2 điểm cực trị dương $\Leftrightarrow f'(x) = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 3m - 6 = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x + 2 = m$$

$$\text{Xét hàm số } h(x) = -x^2 + 4x + 2; h'(x) = -2x + 4$$

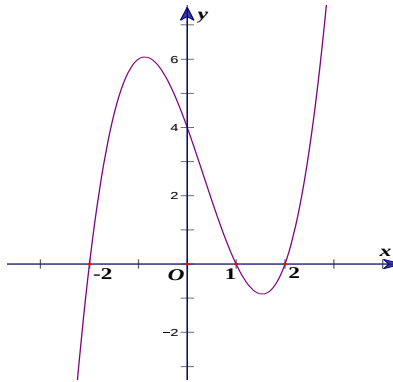
$$\text{Xét phương trình: } h'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$

x	0	2	$+\infty$
$h'(x)$		+	0
$h(x)$	2	6	$-\infty$

Để phương trình: $h(x) = m$ có 2 nghiệm dương phân biệt ta có: $2 < m < 6$
 Vậy có 3 giá trị nguyên của m .

Câu 99: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của $y = f'(3-2x)$ như hình vẽ sau:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2021; 2021]$ để hàm số $g(x) = f(|x^3 + 2021x| + m)$ có ít nhất 5 điểm cực trị?

A. 2019.

B. 2020.

C. 2021.

D. 2022.

Lời giải:

Đặt $x = 3 - 2t$ ta có $t = \frac{3-x}{2}$ và $f'(x) = f'(3-2t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \pm 2 \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$.

Vì $g(x) = f(|x^3 + 2021x| + m)$ là hàm số chẵn nên số điểm cực trị của $g(x)$ bằng 2 lần số cực trị dương của $f(x^3 + 2021x + m)$ cộng với 1.

Với $x > 0$, ta có $g(x) = f(x^3 + 2021x + m)$; $g'(x) = (3x^2 + 2021)f'(x^3 + 2021x + m)$.

Ta có: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 2021x + m = 7 \\ x^3 + 2021x + m = 1 \\ x^3 + 2021x + m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 2021x = 7 - m & (1) \\ x^3 + 2021x = 1 - m & (2) \\ x^3 + 2021x = -1 - m & (3) \end{cases}$

Hàm số $g(x)$ có ít nhất 5 điểm cực trị khi và chỉ khi có ít nhất 2 trong 3 phương trình (1), (2), (3) có nghiệm dương.

Xét hàm số $h(x) = x^3 + 2021x$ có $h'(x) = 3x^2 + 2021$.

Ta có BBT của $h(x)$ như sau:

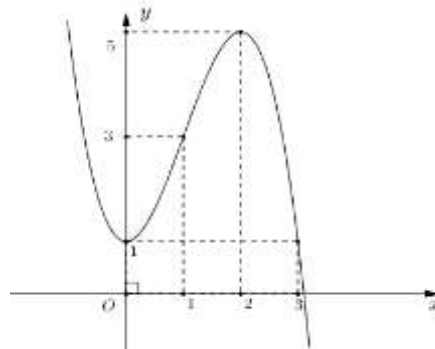
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$		+	
$h(x)$		0	

Vì $7 - m > 1 - m > -1 - m$ nên ta có $1 - m > 0 \Leftrightarrow m < 1$.

Mà $m \in [-2021; 2021] \cap \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2021; \dots; 0\}$.

Vậy có 2022 giá trị nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 100: Cho hàm đa thức bậc ba $y = f(x)$ như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(f(x) + m)$ có đúng 6 điểm cực trị?

A. 4.

B. 5.

C. 3.

D. 2.

Lời giải:

Giả sử $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Vì đồ thị của hàm số $y = f(x)$ đi qua các điểm có tọa độ là $(0; 1), (1; 3), (2; 5), (3; 1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = 1 \\ a + b + c + d = 3 \\ 8a + 4b + 2c + d = 5 \\ 27a + 9b + 3c + d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Xét hàm số } y = f(f(x) + m) \Rightarrow y' = f'(x) \cdot f'(f(x) + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(f(x) + m) = 0 \end{cases}$$

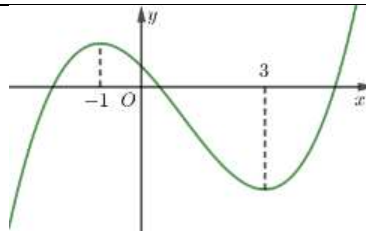
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ f(x) + m = 0 \\ f(x) + m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ f(x) = -m \\ f(x) = -m + 2 \end{cases}.$$

$$\text{Hàm số } y = f(f(x) + m) \text{ có đúng 6 điểm cực trị} \Leftrightarrow \begin{cases} -m \leq 1 \\ -m + 2 > 1 \\ -m + 2 \geq 5 \\ -m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m < 1 \\ -5 < m \leq -3 \end{cases}.$$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-4; -3; -1; 0\}$.

Vậy có 4 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 101: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(x^2 - 4x + m)$ có 3 điểm cực trị. Số phần tử của S là

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 5.

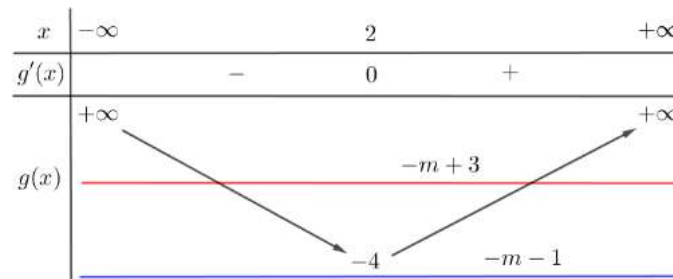
Lời giải:

Ta có: $y' = (2x - 4) f'(x^2 - 4x + m)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ f'(x^2 - 4x + m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - 4x + m = -1 \\ x^2 - 4x + m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - 4x = -m - 1 \\ x^2 - 4x = -m + 3 \end{cases} (*)$$

Hàm số $y = f(x^2 - 4x + m)$ có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có đúng 3 nghiệm bội lẻ.

Xét hàm số: $g(x) = x^2 - 4x$



Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy: Phương trình $(*)$ có đúng ba nghiệm bội lẻ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m + 3 > -4 \\ -m - 1 \leq -4 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq m < 7$$

$$\Rightarrow S = \{3; 4; 5; 6\}$$

Câu 102: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x^2 + 10x, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(x^4 - 8x^2 + m)$ có đúng 9 điểm cực trị?

A. 16.

B. 9.

C. 15.

D. 10.

Lời giải:

$$\text{Xét } f'(x) = x^2 + 10x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -10 \end{cases}$$

$$\text{Xét } y = f(x^4 - 8x^2 + m) \Rightarrow y' = (4x^3 - 16x) f'(x^4 - 8x^2 + m)$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 16x = 0 \\ f'(x^4 - 8x^2 + m) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Xét phương trình: } 4x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Xét phương trình: $f'(x^4 - 8x^2 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 8x^2 + m = 0 \\ x^4 - 8x^2 + m = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^4 + 8x^2 = m & (1) \\ -x^4 + 8x^2 = m + 10 & (2) \end{cases}$

Đề hàm số $y = f(x^4 - 8x^2 + m)$ có đúng 9 điểm cực trị thì phương trình $f'(x^4 - 8x^2 + m) = 0$ cần có 6 nghiệm đơn $x \neq 0$ và $x \neq \pm 2$.

Xét hàm số $g(x) = -x^4 + 8x^2$ có $g'(x) = -x^3 + 16x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	0	-
$g(x)$	$-\infty$	16	0	16	$-\infty$

Xét hai đường thẳng $d_1: y = m$, $d_2: y = m + 10$ song song với trục Ox .

Vì $m + 10 > m$ ($\forall m \in \mathbb{R}$), nên đường thẳng d_2 nằm trên đường thẳng d_1 .

Phương trình (1) có 2 nghiệm và phương trình (2) có 4 nghiệm

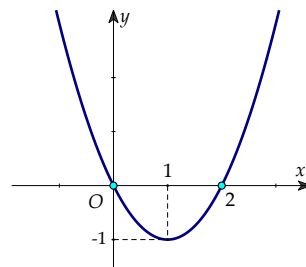
$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m + 10 < 16 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -10 < m < 0$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $\Leftrightarrow m \in \{-9; \dots; -1\}$.

Vì $x = 0$ đã là cực trị của hàm số $y = f(x^4 - 8x^2 + m)$ nên ta lấy cả trường hợp $m = 0$.

Vậy có 10 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 103: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm là $f'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây:



Hỏi hàm số $y = f(x) + x$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 0.

Lời giải:

Hàm số $y' = [f(x) + x]' = f'(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -1$ có duy nhất một nghiệm là $x = 1$ (bội hai).

Vậy hàm số đã cho không có cực trị.

Câu 104: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	-

Hỏi hàm số $g(x) = f(3 - 2x)$ đạt cực tiểu tại điểm nào sau đây?

A. $x = -1$.

B. $x = 1$.

C. $x = 0$.

D. $x = 3$.

Lời giải:

$$\text{Hàm số } g'(x) = -2f'(3-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x=1 \\ 3-2x=3 \\ 3-2x=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=0 \\ x=-1 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$								

Vậy hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x=0$.

Câu 105: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

Hỏi hàm số $g(x)=f(2x-4)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

A. $x=3$.

B. $x=2$.

C. $x=0$.

D. $x=4$.

Lời giải:

$$\text{Hàm số } g'(x) = 2f'(2x-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4=0 \\ 2x-4=2 \\ 2x-4=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \\ x=4 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	2	3	4	$+\infty$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$						

Vậy hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại điểm $x=2$.

Câu 106: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=(x+1)(x-3), \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số $g(x)=f(x^2+2x)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

A. $x=0$.

B. $x=1$.

C. $x=-1$.

D. $x=-3$.

Lời giải:

$$\text{Hàm số } g'(x) = (2x+2)f'(x^2+2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2=0 \\ x^2+2x=-1 \\ x^2+2x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-1 \text{ (bội 2)} \\ x=1 \\ x=-3 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$			
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$								

Vậy hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -1$.

Câu 107: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = (x-1)^2(x+1)(x-5), \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 + 3x + 1)$ là

A. 5.

B. 3.

C. 7.

D. 4.

Lời giải:

$$\text{Hàm số } g'(x) = (2x+3)f'(x^2+3x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3=0 \\ x^2+3x+1=1 \\ x^2+3x+1=-1 \\ x^2+3x+1=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ x=0 \vee x=-3 \\ x=-1 \\ x=-2 \\ x=1 \\ x=-4 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-4	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	0	1	$+\infty$			
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$												

Vậy hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 108: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = (x-1)^2(x+1)(x-5), \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 + 3x + 1)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

A. $x = -4$.

B. $x = -3$.

C. $x = -1$.

D. $x = 1$.

Lời giải:

$$\text{Hàm số } g'(x) = (2x+3)f'(x^2+3x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3=0 \\ x^2+3x+1=1 \\ x^2+3x+1=-1 \\ x^2+3x+1=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ x=0 \vee x=-3 \\ x=-1 \\ x=-2 \\ x=1 \\ x=-4 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-4	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$									

Vậy hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -1$.

Câu 109: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	3	$+\infty$
-----	-----------	------	-----	-----	-----------

$f'(x)$	-	0	+	0	+	0	-
---------	---	---	---	---	---	---	---

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - 1)$ là

A. 3.

B. 5.

C. 4.

D. 2.

Lời giải:

$$\text{Hàm số } g'(x) = 2xf'(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \\ x^2 - 1 = -1 \\ x^2 - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \vee x = 1 \\ x = 0 \text{ (Bội 2)} \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$								

Vậy hàm số $g(x)$ có ba điểm cực trị.

Câu 110: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	3	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $g(x) = f(x^2 - 1)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

A. $x = 0$.

B. $x = -1$.

C. $x = 1$.

D. $x = 2$.

Lời giải:

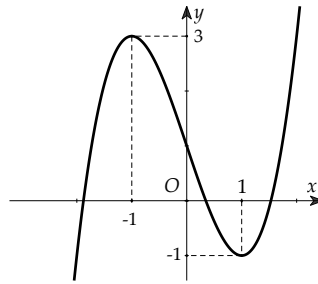
$$\text{Hàm số } g'(x) = 2xf'(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \\ x^2 - 1 = -1 \\ x^2 - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \vee x = 1 \\ x = 0 \text{ (Bội 2)} \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$								

Vậy hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại các điểm $x = -2; x = 2$.

Câu 111: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm $f'(x)$ cho bởi hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x) - 2x$ là

A. 3.

B. 5.

C. 4.

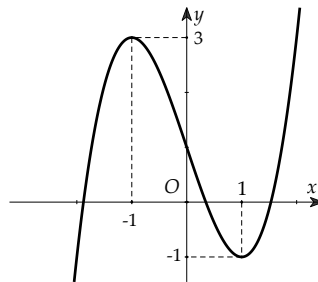
D. 2.

Lời giải:

Hàm số $g'(x) = [f(x) - 2x]' = f'(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2$ có ba nghiệm (đơn) phân biệt.

Vậy hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

Câu 112: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm $f'(x)$ cho bởi hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x) - 3x$ là

A. 3.

B. 1.

C. 4.

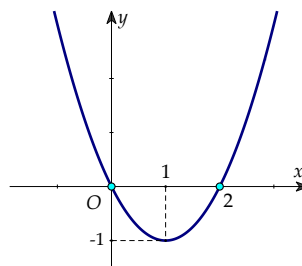
D. 2.

Lời giải:

Hàm số $g'(x) = [f(x) - 3x]' = f'(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 3$ có duy nhất một nghiệm đơn $x_0 > 1$ và một nghiệm bội chẵn $x = -1$.

Vậy hàm số đã cho có duy nhất một điểm cực trị.

Câu 113: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm là $f'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây:



Hỏi hàm số $g(x) = f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x^2$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

A. $x = 2$.

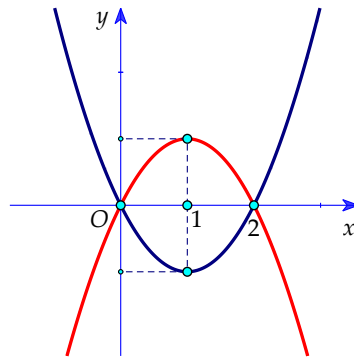
B. $x = 0$.

C. $x = 1$.

D. $x = -1$.

Lời giải:

Hàm số $g'(x) = \left[f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]' = f'(x) - (-x^2 + 2x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x^2 + 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

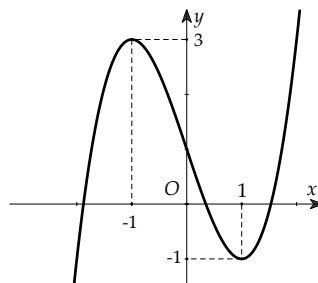


Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$				$+\infty$

Vậy hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x=0$.

Câu 114: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị cho bởi hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(f(x))$ là

A. 7.

B. 6.

C. 4.

D. 5.

Lời giải:

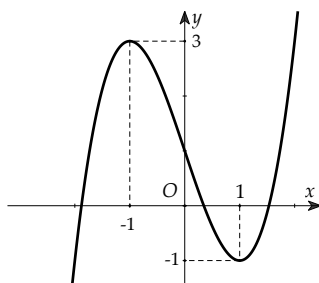
$$\text{Hàm số } g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(f(x)) = 0 \end{cases}$$

$$\text{+) Với } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

$$\text{+) Với } f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \text{ có ba nghiệm đơn } a, b, c \text{ phân biệt khác } \pm 1 \\ f(x) = -1 \text{ có một nghiệm đơn phân biệt khác } \pm 1; a, b, c \text{ và một nghiệm bội hai: } x = 1 \end{cases}$$

Vậy hàm số $g(x)$ có 6 điểm cực trị.

Câu 115: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị cho bởi hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = [f(x)]^2$ là

A. 7.

B. 6.

C. 4.

D. 5.

Lời giải:

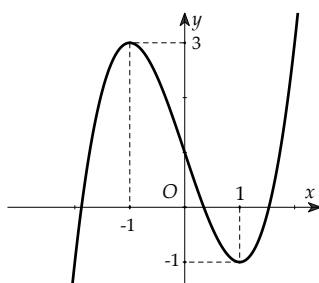
$$\text{Hàm số } g'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \end{cases}$$

$$+) \text{ Với } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

+) Với $f(x) = 0$ có ba nghiệm đơn a, b, c phân biệt khác ± 1 .

Vậy hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 116: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị cho bởi hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(f(x) - 1)$ là

A. 7.

B. 6.

C. 8.

D. 5.

Lời giải:

$$\text{Hàm số } g'(x) = f'(f(x) - 1) \cdot (f(x) - 1)' = f'(f(x) - 1) \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(f(x) - 1) = 0 \end{cases}$$

$$+) \text{ Với } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

$$+) \text{ Với } f'(f(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - 1 = 1 \Leftrightarrow f(x) = 2 \text{ có ba nghiệm đơn } a, b, c \text{ phân biệt khác } \pm 1 \\ f(x) - 1 = -1 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ có ba nghiệm đơn } d, e \text{ phân biệt khác } \pm 1 \end{cases}$$

Vậy hàm số $g(x)$ có 8 điểm cực trị.

Câu 117: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$				

Câu 120: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để hàm số $y = |x^3 - 3x - m|$ có đúng 3 điểm cực trị?

- A. 21. B. 19. C. 20. **D. 18.**

Lời giải:

$$\text{Đặt } g(x) = x^3 - 3x; g'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

BBT:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$							
	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Xét hàm số $y = |g(x) - m|$.

+) Số điểm cực trị của hàm số $g(x) - m$ là 2 (bằng số điểm cực trị của hàm số $g(x)$).

+) $y = |g(x) - m|$ có đúng 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow g(x) - m = 0 \Leftrightarrow g(x) = m$ có đúng 1 nghiệm (không trùng với điểm cực trị của $g(x)$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -2 \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}, m \in [-10;10]} m \in \{-10; -9; \dots; -2; 2; 3; \dots 10\}.$$

Câu 121: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(|x|^3 - 3x^2 - 1)$ là

- A. 9.** B. 11. C. 7. D. 8.

Lời giải:

$$\text{Xét hàm số } h(x) = f(x^3 - 3x^2 - 1) \Rightarrow h(|x|) = g(x) = f(|x|^3 - 3x^2 - 1).$$

$$\text{Ta có: } h'(x) = (3x^2 - 6x)f'(|x|^3 - 3x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 2 \\ x^3 - 3x^2 - 1 = 2 \xleftarrow{\text{CD}} \text{ Một nghiệm dương.} \\ x^3 - 3x^2 - 1 = -3 \xleftarrow{\text{CT}} \text{ Hai nghiệm dương} \end{cases}$$

Vậy $h(x)$ có 4 điểm cực trị dương nên $h(|x|) = g(x)$ có $2 \cdot 4 + 1 = 9$ điểm cực trị.

Câu 122: Cho hàm số $f(x) = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + (4 - m)x$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị?

- A. 27.** B. 31. C. 28. D. 30.

Lời giải:

$$\text{Xét hàm số } f(x) = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + (4 - m)x.$$

$$\text{Ta có } f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 60x + 4 - m; f'(x) = 0 \Leftrightarrow m = 4x^3 - 36x^2 + 60x + 4.$$

Hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ Hàm số $f(x)$ có đúng 3 điểm cực trị dương

$\Leftrightarrow$ Phương trình $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình $m = 4x^3 - 36x^2 + 60x + 4$ có 3 nghiệm dương phân biệt. (*)

Xét hàm số $h(x) = 4x^3 - 36x^2 + 60x + 4$.

Ta có: $h'(x) = 12x^2 - 72x + 60$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	0	1			5	$+\infty$
$h'(x)$		+	0	-	0	+
$h(x)$		<				

Dựa vào bảng biến thiên ta có (*) $\Leftrightarrow 4 < m < 32$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{5; 6; 7; \dots; 31\}$.

Vậy có 27 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 123: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-3)^2(x-1)[x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1]$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải:

Để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị thì hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị dương. Ta

$$\text{có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \\ x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0 \quad (*) \end{cases}.$$

Vì $x = 3$ là nghiệm bội chẵn nên để hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị dương thì (*) có 2 nghiệm phân biệt, trong đó có 1 nghiệm x dương khác 1 và một nghiệm $x \leq 0$

$$\text{Điều kiện tương đương } \begin{cases} m^2 - 1 \leq 0 \\ 1^2 - 2(m+1) \cdot 1 + m^2 - 1 \neq 0 \\ (m+1)^2 - (m^2 - 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m \leq 1 \\ m \neq 1 \pm \sqrt{3} \\ m > 1 \end{cases}.$$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; 1\}$.

Câu 124: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	1	5	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-4	2	0	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = |f(4x^3 + 1) + m|$ có 7 điểm cực trị?

A. Vô số.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } g'(x) = \frac{12x^2 f'(4x^3 + 1) [f(4x^3 + 1) + m]}{|f(4x^3 + 1) + m|}.$$

Để thấy: $12x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Từ bảng biến thiên ta có: } f'(4x^3 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 + 1 = -3 \\ 4x^3 + 1 = 1 \\ 4x^3 + 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } f(4x^3 + 1) + m = 0 (*) \Leftrightarrow f(4x^3 + 1) = -m.$$

$$\text{Đặt: } t = 4x^3 + 1 \Rightarrow t' = 12x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0			$+\infty$
t	$-\infty$	-3	1	5	$+\infty$
$f(t)$	$+\infty$	-4	2	0	$+\infty$

Để hàm số $g(x)$ có 7 điểm cực trị thì phương trình (*) phải có 4 nghiệm bội lẻ khác 0 và ± 1 .

$$\text{Suy ra } 0 < -m < 2 \Rightarrow -2 < m < 0.$$

Vậy có tất cả 1 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 125: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x^2 - 4x)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số thực m để hàm số $g(x) = f(2x^2 - 12x + m)$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 17.

B. 18.

C. 16.

D. 19.

Lời giải:

$$f'(x) = (x+1)^2(x^2 - 4x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 4 \end{cases} \quad (\text{Trong đó } x = -1 \text{ là nghiệm bội chẵn})$$

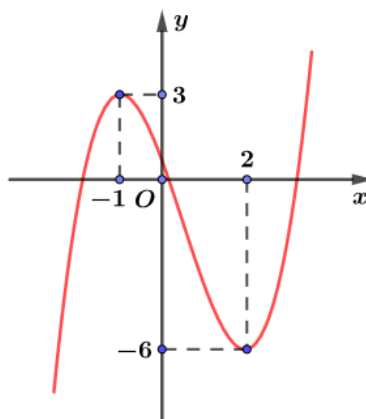
Yêu cầu bài toán tương đương với $g'(x) = (4x-12) \cdot f'(2x^2-12x+m) = 0$ phải có 5 nghiệm

$$\text{đơn} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ 2x^2-12x+m=0 \\ 2x^2-12x+m=4 \end{cases} \text{ có 5 nghiệm đơn} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ 2x^2-12x=-m \\ 2x^2-12x=-m+4 \end{cases} \text{ có 5 nghiệm đơn.}$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$h'(x) = 4x-12$	$-$	0	$+$
$h(x) = 2x^2-12x$	$+\infty$	-18	$+\infty$

Ta phải có $-m > -18 \Leftrightarrow m < 18$. Vậy có 17 giá trị nguyên dương của m thỏa bài toán.

Câu 126: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(|f^2(x) - 4f(x) - m|)$ có 17 điểm cực trị bằng

A. 1652.

B. 1653.

C. 1654.

D. 1651.

Lời giải:

$$\text{Đặt } u = u(x) = f^2(x) - 4f(x) \Rightarrow u' = 2f'(x)(f(x) - 2) \Rightarrow u' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{-1; 2\} \\ x \in \{a; b; c\} \end{cases}.$$

Các nghiệm trên được sắp thứ tự từ nhỏ đến lớn như sau: $a < -1 < b < 2 < c$.

Bảng biến thiên của hàm số $u = f^2(x) - 4f(x)$.

x	$-\infty$	a	-1	b	2	c	$+\infty$
u'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
u	$+\infty$	-4	-3	-4	60	-4	$+\infty$

Ta có $g(x) = f(|u-m|) \Rightarrow g'(x) = (|u-m|)' \cdot f'(|u-m|)$. Do đó số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(|f^2(x) - 4f(x) - m|)$ chính là số nghiệm bội lẻ của hệ sau:

$$\begin{cases} u-m=0 \\ (|u-m|)'=0 \\ f'(|u-m|)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=m \\ x \in \{a; -1; b; 2; c\} \\ |u-m|=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=m \\ x \in \{a; -1; b; 2; c\} \\ u \in \{m-2; m+2\} \end{cases}.$$

Do đó số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ phụ thuộc vào số giao điểm của các đường thẳng $y = m-2; y = m; y = m+2$ với đồ thị $u(x)$.

Vì không tính điểm tiếp xúc nên các đường thẳng này chỉ có thể cắt đồ thị hàm số $u(x)$ tại 2 điểm; 4 điểm; 6 điểm hoặc không cắt đồ thị hàm số $u(x)$.

Do đó yêu cầu bài toán trở thành tìm m nguyên để các đường thẳng trên cắt đồ thị $u(x)$ tại 12 điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq m-2 < 60 \\ -3 \leq m+2 < 60 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m < 58 \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1; \dots; 57\} \Rightarrow S = 1652.$$

HẾT

Huế, 10h00' Ngày 15 tháng 5 năm 2023