

CHƯƠNG 3: NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

BÀI 1: NGUYÊN HÀM VÀ PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. NGUYÊN HÀM VÀ TÍNH CHẤT

1. Nguyên hàm

Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K (K là khoảng hoặc đoạn hoặc nửa đoạn của $\mathbb{R}$). Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$.

Định lý 1: Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C , hàm số $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K .

Định lý 2: Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ đều có dạng $F(x) + C$, với C là một hằng số.

Hai định lý trên cho thấy:

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì $F(x) + C, C \in \mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K . Kí hiệu

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Chú ý: Biểu thức $f(x)dx$ chính là vi phân của nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$, vì $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$.

2. Tính chất của nguyên hàm

Tính chất 1

$$\int f'(x) dx = f(x) + C$$

Tính chất 2

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx, k \text{ là hằng số khác } 0.$$

Tính chất 3

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

3. Sự tồn tại của nguyên hàm

Định lý 3: Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K .

4. Bảng nguyên hàm

Nguyên hàm của hàm số sơ cấp	Nguyên hàm của hàm số hợp ($u = u(x)$)	Nguyên hàm của hàm số hợp ($u = ax + b; a \neq 0$)
$\int dx = x + C$	$\int du = u + C$	$\int d(ax + b) = ax + b + C$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$	$u = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$	$\int (ax + b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \frac{(ax + b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int \frac{1}{u} du = \ln u + C$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + C$
$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$	$\int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} + C$	$\int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} + C$
$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C$	$\int \sqrt{u} du = \frac{2}{3} u\sqrt{u} + C$	$\int \sqrt{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{2}{3} (ax+b)\sqrt{ax+b} + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{u}} du = 2\sqrt{u} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}} dx = \frac{1}{a} \cdot 2\sqrt{ax+b} + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^u du = e^u + C$	$\int e^{ax+b} dx = \frac{2}{a} e^{ax+b} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1)$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1)$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{1}{m} \cdot \frac{a^{mx+n}}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1)$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin u du = -\cos u + C$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos u du = \sin u + C$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$
$\int \tan x dx = -\ln \cos x + C$	$\int \tan u du = -\ln \cos u + C$	$\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln \cos(ax+b) + C$
$\int \cot x dx = \ln \sin x + C$	$\int \cot u du = \ln \sin u + C$	$\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln \sin(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\cot u + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \tan u + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left \tan \frac{x}{2} \right + C$	$\int \frac{1}{\sin u} du = \ln \left \tan \frac{u}{2} \right + C$	$\int \frac{dx}{\sin(ax+b)} = \frac{1}{a} \ln \left \tan \frac{ax+b}{2} \right + C$
$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$	$\int \frac{1}{\cos u} du = \ln \left \tan \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$	$\int \frac{1}{\cos(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \ln \left \tan \left(\frac{ax+b}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$

II. PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM

1. Phương pháp đổi biến số

Định lý 1: Nếu $\int f(u)du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục thì:

$$\int f[u(x)] \cdot u'(x) dx = F[u(x)] + C$$

Hệ quả: Với $u = ax + b (a \neq 0)$ ta có

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C.$$

2. Phương pháp tính nguyên hàm từng phần:

Định lý 2: Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên K thì:

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx.$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Tìm nguyên hàm bằng các phép biến đổi sơ cấp

1. Phương pháp giải

- Biến đổi các hàm số dưới dấu nguyên hàm về dạng tổng, hiệu của các biểu thức chứa x , trong đó mỗi biểu thức chứa x là những dạng cơ bản có trong bảng nguyên hàm.
- Áp dụng các công thức nguyên hàm trong bảng nguyên hàm cơ bản để tìm nguyên hàm.

2. Bài tập

Bài tập 1. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2^x - 1}{e^x}$ là

A. $\frac{2^x}{e^x \ln 2} + e^{-x} + C$

B. $\frac{2^x}{e^x (\ln 2 - 1)} - e^{-x} + C$

C. $\frac{2^x}{e^x (\ln 2 - 1)} + e^{-x} + C$

D. $\frac{2^x}{e^x (\ln 2 - 1)} + e^x + C$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $\int \frac{2^x - 1}{e^x} dx = \int \left(\frac{2}{e} \right)^x dx - \int e^{-x} dx = \frac{2^x}{e^x (\ln 2 - 1)} + e^{-x} + C.$

Bài tập 2. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(x+2)^{2019}$ là

A. $-\frac{(x+2)^{2021}}{2021} - \frac{(x+2)^{2020}}{1010} + C$

B. $\frac{(x+2)^{2020}}{2021} - \frac{(x+2)^{2018}}{1009} + C$

C. $\frac{(x+2)^{2021}}{2021} + \frac{(x+2)^{2020}}{1010} + C$

D. $\frac{(x+2)^{2021}}{2021} - \frac{(x+2)^{2020}}{1010} + C$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $\int x(x+2)^{2019} dx = \int [(x+2)-2](x+2)^{2019} dx$

$$= \int (x+2)^{2020} dx - 2 \int (x+2)^{2019} dx = \frac{(x+2)^{2021}}{2021} - \frac{(x+2)^{2020}}{1010} + C$$

Bài tập 3. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{e^{2x} + 1}$ là

A. $x + \ln \sqrt{e^{2x} + 1} + C$

B. $x - \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) + C$

C. $\ln(e^{2x} + 1) + C$

D. $x - \ln(e^{2x} + 1) + C$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $\frac{1}{e^{2x} + 1} = \frac{(e^{2x} + 1) - e^{2x}}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}$.

Do đó $\int \frac{1}{e^{2x} + 1} dx = \int \left(1 - \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}\right) dx = \int dx - \frac{1}{2} \int \frac{d(e^{2x} + 1)}{e^{2x} + 1} = x - \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) + C$

Bài tập 4. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}$ là:

A. $\frac{1}{6} \left[(\sqrt{x+2})^3 - (\sqrt{x-2})^3 \right] + C$

B. $\frac{1}{6} [\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}] + C$

C. $\frac{1}{6} \sqrt{x+2} + \frac{1}{6} (x-2) \sqrt{x-2} + C$

D. $\frac{1}{6} (x+2) \sqrt{x+2} - \frac{1}{6} \sqrt{x-2} + C$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $\int \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} dx = \int \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}}{4} dx$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{2}{3} (x+2) \sqrt{x+2} - \frac{2}{3} (x-2) \sqrt{x-2} \right] + C = \frac{1}{6} (x+2) \sqrt{x+2} - \frac{1}{6} (x-2) \sqrt{x-2} + C$$

Chú ý: Sử dụng kỹ thuật nhân liên hợp: $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}$.

Lưu ý: $\int \sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{3a} (ax+b) \sqrt{ax+b} + C$.

Bài tập 5. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{5x-13}{x^2-5x+6}$ là:

A. $2 \ln|x-3| - 3 \ln|x+2| + C$

B. $3 \ln|x-3| + 2 \ln|x-2| + C$

C. $2 \ln|x+3| + 3 \ln|x+2| + C$

D. $2 \ln|x-3| + 3 \ln|x-2| + C$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $\frac{5x-13}{x^2-5x+6} = \frac{5x-13}{(x-2)(x-3)}$

Ta sẽ phân tích: $5x-13 = A(x-2) + B(x-3)$ (1)

Thế $x=2$ và $x=3$ lần lượt vào (1) ta có $B=3$ và $A=2$.

$$\begin{aligned}\text{Khi đó } \int \frac{5x-13}{x^2-5x+6} dx &= \int \frac{2(x-2)+3(x-3)}{(x-2)(x-3)} dx = \int \frac{2}{x-3} dx + \int \frac{3}{x-2} dx \\ &= 2\ln|x-3| + 3\ln|x-2| + C\end{aligned}$$

Bài tập 6. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1-x^4}{x^5+x}$ là:

A. $\ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^4+1) + C$

B. $\ln|x| - \ln(x^4+1) + C$

C. $\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^4+1) + C$

D. $\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^4+1) + C$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $\int \frac{1-x^4}{x^5+x} dx = \int \frac{(1+x^4)-2x^4}{x(x^4+1)} dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{2x^3}{x^4+1} dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^4+1) + C$

Bài tập 7. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x^2+3x+3}{x^3-3x+2}$ là:

A. $\ln|x+2| + 2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + C$

B. $\ln|x+2| - 2\ln|x-1| + \frac{3}{x-1} + C$

C. $2\ln|x+2| + \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + C$

D. $2\ln|x+2| + \ln|x-1| + \frac{3}{x-1} + C$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $\int \frac{3x^2+3x+3}{x^3-3x+2} dx = \int \frac{3x^2+3x+3}{(x-1)^2(x+2)} dx$.

Ta phân tích $3x^2+3x+3 = A(x-1)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x+2)$.

Ta có thể dùng các giá trị riêng, tính ngay $A=1, C=3$ và $B=2$.

(thay $x=-2 \Rightarrow A=1; x=1 \Rightarrow C=3$ và $x=0 \Rightarrow B=2$).

$$\text{Khi đó } \int \frac{3x^2+3x+3}{(x-1)^2(x+2)} dx = \int \frac{1}{x+2} dx + 2 \int \frac{1}{x-1} dx + 3 \int \frac{1}{(x-1)^2} dx = \ln|x+2| + 2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + C.$$

Lưu ý: Ta có kiến thức tổng quát dùng cho các nguyên hàm hữu tỉ $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, với $P(x)$ và

$Q(x)$ là các đa thức, cụ thể như sau:

- Nếu $\deg(P(x)) \geq \deg(Q(x))$ thì ta thực hiện phép chia $P(x)$ cho $Q(x)$ (ở đây, kí hiệu $\deg(P(x))$ là bậc của đa thức $P(x)$).
- Khi $\deg(P(x)) < \deg(Q(x))$ thì ta quan sát mẫu số $Q(x)$ ta tiến hành phân tích thành các nhân tử, sau đó, tách $P(x)$ theo các tổ hợp của các nhân tử đó. Đến đây, ta sẽ sử dụng đồng nhất thức (hoặc giá trị riêng) để đưa về dạng tổng của các phân thức.

Một số trường hợp đồng nhất thức thường gặp

Trường hợp 1:
$$\frac{1}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{1}{ad-bc} \left(\frac{a}{ax+b} - \frac{c}{cx+d} \right).$$

Trường hợp 2:
$$\frac{mx+n}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{cx+d} = \frac{(Ax+Ba)x + Ad + Bb}{(ax+b)(cx+d)}.$$

Ta đồng nhất thức $mx+n = (Ax+Ba)x + Ad + Bb$ (1).

Cách 1. Phương pháp đồng nhất hệ số.

Đồng nhất đẳng thức, ta được
$$\begin{cases} Ac + Ba = m \\ Ad + Bb = n \end{cases}. \text{ Suy ra } A, B.$$

Cách 2. Phương pháp giá trị riêng.

Lần lượt thay $x = -\frac{b}{a}; x = -\frac{d}{c}$ vào hai vế của (1), tìm được A, B .

Trường hợp 3:
$$\frac{mx+n}{(ax+b)^2} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+b)^2}.$$

Trường hợp 4:
$$\frac{mx+n}{(ax+b)^2(cx+d)} = \frac{A}{(ax+b)^2} + \frac{B}{cx+d} + \frac{C}{ax+b}$$
$$\Rightarrow mx+n = A(cx+d) + B(ax+b)^2 + C(ax+b)(cx+d) \quad (*)$$

Lần lượt thay $x = -\frac{b}{a}; x = -\frac{d}{c}; x = 0$ vào hai vế của (*) để tìm A, B, C .

Trường hợp 5:
$$\frac{1}{(x-m)(ax^2+bx+c)} = \frac{A}{x-m} + \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c} \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac < 0.$$

Trường hợp 6:
$$\frac{1}{(x-a)^2(x-b)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b} + \frac{D}{(x-b)^2}.$$

Bài tập 8. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$; $f(0) = 1$ và $f(1) = 2$. Giá trị của biểu thức $P = f(-1) + f(3)$ là:

A. $3\ln 5 + \ln 2$

B. $3\ln 2 + \ln 5$

C. $3 + 2\ln 5$

D. $3 + \ln 15$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{2}{2x-1} dx = \ln|2x-1| + C = \begin{cases} \ln(2x-1) + C_1 & \text{khi } x > \frac{1}{2} \\ \ln(1-2x) + C_2 & \text{khi } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\forall \begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 1 \\ C_1 = 2 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } f(x) = \begin{cases} \ln(2x-1) + 2 & \text{khi } x > \frac{1}{2} \\ \ln(1-2x) + 1 & \text{khi } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } P = f(-1) + f(3) = 3 + \ln 3 + \ln 5 = 3 + \ln 15$$

Bài tập 9. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{x^2-1}$; $f(-3) + f(3) = 2\ln 2$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Giá trị của biểu thức $P = f(-2) + f(0) + f(4)$ là:

A. $2\ln 2 - \ln 5$

B. $6\ln 2 + 2\ln 3 - \ln 5$

C. $2\ln 2 + 2\ln 3 - \ln 5$

D. $6\ln 2 - 2\ln 5$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{2}{x^2-1} dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

$$\text{Hay } f(x) = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C = \begin{cases} \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) + C_1 & \text{khi } x > 1 \\ \ln \frac{1-x}{1+x} + C_2 & \text{khi } -1 < x < 1 \\ \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) + C_3 & \text{khi } x < -1 \end{cases}$$

$$\text{Theo bài ra, ta có: } \begin{cases} f(-3) + f(3) = 2\ln 2 \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_3 = 2\ln 2 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

Do đó $f(-2) + f(0) + f(4) = \ln 3 + C_3 + C_2 + \ln \frac{3}{5} + C_1 = 2 \ln 2 + 2 \ln 3 - \ln 5$.

Bài tập 10. Nguyên hàm $P = \int x \sqrt[3]{x^2 + 1} dx$ là:

A. $P = \frac{3}{8}(x^2 + 1)\sqrt[3]{x^2 + 1} + C$

B. $P = \frac{3}{8}(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} + C$

C. $P = \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^2 + 1} + C$

D. $P = \frac{3}{4}(x^2 + 1)\sqrt[3]{x^2 + 1} + C$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $\int x \sqrt[3]{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int (x^2 + 1)^{\frac{1}{3}} d(x^2 + 1) = \frac{3}{8}(x^2 + 1)^{\frac{4}{3}} + C$.

Bài tập 11. Nguyên hàm của hàm số $\int (\sin x - \cos x) \sin x dx$ là:

A. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x + C$

B. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$

C. $x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + C$

D. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $\int (\sin x - \cos x) \sin x dx = \int (\sin^2 x - \sin x \cos x) dx$
 $= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{\sin 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x \right) + C$

Bài tập 12. Nguyên hàm của hàm số $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$ là:

A. $-\tan x - \cot x + C$

B. $\tan x - \cot x + C$

C. $\tan x + \cot x + C$

D. $\cot x - \tan x + C$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \tan x - \cot x + C$.

Bài tập 13. Nguyên hàm của hàm số $\int \frac{1}{4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1} dx$ là:

A. $\frac{\cot 2x}{2} + C$

B. $\tan 2x + C$

C. $\cot 2x + C$

D. $\frac{\tan 2x}{2} + C$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $\int \frac{1}{4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1} dx = \int \frac{1}{(2\cos^2 x - 1)^2} dx = \int \frac{1}{\cos^2 2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos^2 2x} d(2x) = \frac{\tan 2x}{2} + C$

Bài tập 14. Nguyên hàm của hàm số $\int \tan^3 x dx$ là:

A. $\frac{\tan^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C$

B. $\frac{\tan^2 x}{2} - \ln|\sin x| + C$

C. $\frac{\tan^2 x}{2} - \ln|\cos x| + C$

D. $\frac{\tan^4 x}{4 \cos^2 x} + C$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Từ $\tan^3 x = \tan x (1 + \tan^2 x) - \tan x$

Suy ra $\int \tan^3 x dx = \int \tan x d(\tan x) + \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \frac{\tan^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C$.

Bài tập 15. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x \tan x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Giá

trị của $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$ là:

A. $\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\pi}{12}$

B. $\frac{\sqrt{3}+1}{2} - \frac{\pi}{12}$

C. $\frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\pi}{12}$

D. $\frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\pi}{12}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $F(x) = \int \sin 2x \cdot \tan x dx = \int 2 \sin x \cdot \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} dx = 2 \int \sin^2 x dx$.

Suy ra $F(x) = \int (1 - \cos 2x) dx = x - \frac{\sin 2x}{2} + C$.

Theo giả thiết, ta có: $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{3} + C = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow C = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}$.

Vậy $F(x) = x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}$.

Do đó $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\pi}{12}$.

Bài tập 16. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^4 2x$ thỏa mãn $F(0) = 2019$. Giá trị

của $F\left(\frac{\pi}{8}\right)$ là:

A. $\frac{3\pi+16153}{64}$

B. $\frac{3\pi+129224}{8}$

C. $\frac{3\pi+129224}{64}$

D. $\frac{3\pi-129224}{32}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } \cos^4 2x &= \left(\frac{1 + \cos 4x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (1 + 2\cos 4x + \cos^2 4x) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + 2\cos 4x + \frac{1 + \cos 8x}{2} \right) = \frac{1}{8} (3 + 4\cos 4x + \cos 8x)\end{aligned}$$

$$\text{Do đó } F(x) = \frac{1}{8} \int (3 + 4\cos 4x + \cos 8x) dx = \frac{1}{8} \left(3x + \sin 4x + \frac{1}{8} \sin 8x \right) + C$$

Mà $F(0) = 2019$ nên ta có $C = 2019$.

$$\text{Vậy } F(x) = \frac{1}{8} \left(3x + \sin 4x + \frac{1}{8} \sin 8x \right) + 2019.$$

$$\text{Do đó } F\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{3\pi + 129224}{64}$$

Bài tập 17. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\cos^5 x}{1 - \sin x}$, với $x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và thỏa

mãn $F(\pi) = \frac{3}{4}$. Giá trị của $F\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ là:

A. $\frac{2}{3}$

B. 0.

C. $\frac{5}{3}$

D. $\frac{1}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\text{Ta thấy: } \frac{\cos^5 x}{1 - \sin x} = \cos^3 x (1 + \sin x) = (1 - \sin^2 x) \cos x + \cos^3 x \cdot \sin x$$

$$\Rightarrow F(x) = \int (1 - \sin^2 x) d(\sin x) - \int \cos^3 x d(\cos x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\cos^4 x}{4} + C$$

Theo giả thiết, ta có $F(\pi) = \frac{3}{4}$ nên $C = 1$.

$$\text{Vậy } F(x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\cos^4 x}{4} + C$$

$$\text{Do đó } F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3}.$$

Chú ý:

$$\text{Với } n \in \mathbb{N}^*, \quad \text{ta có: } \int \cos^n x \cdot \sin x dx = -\int \cos^n x d(\cos x) = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C \quad \text{và}$$

$$\int \sin^n x \cdot \cos x dx = \int \sin^n x d(\sin x) = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C.$$

Bài tập 18. Biết $\int \frac{\cos x}{5 \sin x - 9} dx = \frac{a}{b} \ln |5 \sin x - 9| + C, (a, b \in \mathbb{Z}^+)$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị $2a - b$ là

A. 10.

B. -4.

C. 7.

D. -3.

Hướng dẫn giải

CHỌN D

$$\int \frac{\cos x}{5\sin x - 9} dx = \frac{1}{5} \int \frac{d(5\sin x - 9)}{5\sin x - 9} = \frac{1}{5} \ln|5\sin x - 9| + C$$

Vậy $a = 1, b = 5$. Nên $2a - b = -3$.

Bài tập 19. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = (1 + \sin x)^2$ biết $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$.

A. $F(x) = \frac{3}{2}x + 2\cos x - \frac{1}{4}\sin 2x$.

B. $F(x) = \frac{3}{2}x - 2\cos x - \frac{1}{4}\sin 2x$.

C. $F(x) = \frac{3}{2}x - 2\cos x + \frac{1}{4}\sin 2x$.

D. $F(x) = \frac{3}{2}x + 2\cos x + \frac{1}{4}\sin 2x$.

Hướng dẫn giải

CHỌN B

Ta có

$$\begin{aligned} \int (1 + \sin x)^2 dx &= \int (1 + 2\sin x + \sin^2 x) dx = \int \left(1 + 2\sin x + \frac{1 - \cos 2x}{2}\right) dx \\ &= \frac{3}{2}x - 2\cos x - \frac{1}{4}\sin 2x + c \end{aligned}$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - 2\cos \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\sin \pi + c = \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow c = 0.$$

Vậy $F(x) = \frac{3}{2}x - 2\cos x - \frac{1}{4}\sin 2x$.

Bài tập 20. Cho $\int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} dx = F(x) + C$ và $F(\pi) = a + b$. Tính $A = (a + b)^6$.

A. -2.

B. 2.

C. 1.

D. -1.

Hướng dẫn giải

CHỌN C

Ta có: $F(x) = \int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} dx$

$$= \int \frac{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{\sin x + \cos x} dx = \int (\cos x - \sin x) dx = \sin x + \cos x.$$

$$\Rightarrow F(\pi) = -1 = a + b \Rightarrow A = 1.$$

Bài tập 21. Cho tích phân $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = a$. Tính $A = 12 \cot^2 2x$ theo a .

A. $4a^2$.

B. $2a^2$.

C. $3a^2$.

D. a^2 .

Hướng dẫn giải

CHỌN C

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } F(x) &= \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx \\ &= \tan x - \cot x. \end{aligned}$$

Theo đề:

$$\begin{aligned} \tan x - \cot x &= \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{-2 \cos 2x}{\sin 2x} = a \\ \Rightarrow \frac{\cos 2x}{\sin 2x} &= -\frac{a}{2} \\ A = 12 \cdot \frac{\cos^2 2x}{\sin^2 2x} &= 12 \cdot \left(-\frac{a}{2} \right)^2 = 3a^2. \end{aligned}$$

Bài tập 22. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4 \sin^2 x}} dx$ và

$$F(0) + 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. \text{ Tính } 2F(0) - F\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

A. $\frac{7}{9}$.

B. $-\frac{7}{9}$.

C. 0.

D. 1

Lời giải

CHỌN B

Ta có

$$\begin{aligned} d(\cos^2 x + 4 \sin^2 x) &= (-2 \sin x \cos x + 8 \sin x \cos x) dx = 6 \sin x \cos x dx = 3 \sin 2x dx \\ \Rightarrow \sin 2x dx &= \frac{1}{3} d(\cos^2 x + 4 \sin^2 x). \end{aligned}$$

Do đó :

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4 \sin^2 x}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{d(\cos^2 x + 4 \sin^2 x)}{\sqrt{\cos^2 x + 4 \sin^2 x}} = \frac{2}{3} \int \frac{d(\cos^2 x + 4 \sin^2 x)}{2 \sqrt{\cos^2 x + 4 \sin^2 x}} = \frac{2}{3} \sqrt{\cos^2 x + 4 \sin^2 x} + C$$

$$F(0) + 2F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} + 3C = 1 \Rightarrow C = -\frac{7}{9}.$$

$$\text{Vậy } 2F(0) - F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \frac{2}{3} + 2C - \frac{4}{3} - C = C = -\frac{7}{9}$$

Bài tập 23. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{8-x^2}}$ trên khoảng $(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$ thỏa mãn $F(2) = 0$. Khi đó phương trình $F(x) = x$ có nghiệm là:

A. $x = 0$

B. $x = 1$

C. $x = -1$

D. $x = 1 - \sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $F(x) = \int \frac{x}{\sqrt{8-x^2}} dx = -\int \frac{1}{2\sqrt{8-x^2}} d(8-x^2) = -\sqrt{8-x^2} + C$

Mặt khác $F(2) = 0 \Rightarrow -\sqrt{8-x^2} + C = 0 \Leftrightarrow C = 2$

Vậy $F(x) = -\sqrt{8-x^2} + 2$.

Xét phương trình $F(x) = x \Leftrightarrow -\sqrt{8-x^2} + 2 = x \Leftrightarrow \sqrt{8-x^2} = 2-x \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 8-x^2 = (2-x)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ 2x^2 - 4x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x = 1 - \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{3} \\ x = 1 + \sqrt{3} \end{cases}$$

Bài tập 24. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$

và $F(1) = \frac{1}{2}$. Tổng $S = F(1) + F(2) + F(3) + \dots + F(2019)$ là

A. $\frac{2019}{2020}$

B. $\frac{2019 \cdot 2021}{2020}$

C. $2018 \frac{1}{2020}$

D. $-\frac{2019}{2020}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phân tích $f(x) = \frac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2} = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{2x+1}{(x^2+x)^2}$

Khi đó $F(x) = \int \frac{2x+1}{(x^2+x)^2} dx = \int \frac{1}{(x^2+x)^2} d(x^2+x) = -\frac{1}{x^2+x} + C$.

Mặt khác $F(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} + C = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 1$.

Vậy $F(x) = -\frac{1}{x^2+x} + 1 = -\frac{1}{x(x+1)} + 1 = -\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + 1$.

$$\begin{aligned}\text{Do đó } S &= F(1) + F(2) + F(3) + \dots + F(2019) = -\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}\right) + 2019 \\ &= -\left(1 - \frac{1}{2020}\right) + 2019 = 2018 + \frac{1}{2020} = 2018\frac{1}{2020}\end{aligned}$$

Bài tập 25. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0) = 2\sqrt{2}$, $f(x) > 0$ và $f(x) \cdot f'(x) = (2x+1)\sqrt{1+f^2(x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị $f(1)$ là:

- A. $6\sqrt{2}$ B. $\sqrt{10}$ C. $5\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{6}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\text{Ta có: } f(x) \cdot f'(x) = (2x+1)\sqrt{1+f^2(x)} \Leftrightarrow \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = 2x+1.$$

$$\text{Suy ra } \int \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} dx = \int (2x+1) dx \Leftrightarrow \int \frac{d(1+f^2(x))}{2\sqrt{1+f^2(x)}} = \int (2x+1) dx \Leftrightarrow \sqrt{1+f^2(x)} = x^2 + x + C$$

$$\text{Theo giả thiết } f(0) = 2\sqrt{2}, \text{ suy ra } \sqrt{1+(2\sqrt{2})^2} = C \Leftrightarrow C = 3$$

$$\text{Với } C = 3 \text{ thì } \sqrt{1+f^2(x)} = x^2 + x + 3 \Rightarrow f(x) = \sqrt{(x^2 + x + 3)^2 - 1}$$

$$\text{Vậy } f(1) = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

Bài tập 26. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-2;1]$ thỏa mãn $f(0) = 3$ và $(f(x))^2 \cdot f'(x) = 3x^2 + 4x + 2$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ là:

- A. $2\sqrt[3]{42}$ B. $2\sqrt[3]{15}$ C. $\sqrt[3]{42}$ D. $\sqrt[3]{15}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có: } (f(x))^2 \cdot f'(x) = 3x^2 + 4x + 2 \quad (*)$$

Lấy nguyên hàm hai vế của đẳng thức (*) ta được:

$$\int (f(x))^2 \cdot f'(x) dx = \int (3x^2 + 4x + 2) dx \Leftrightarrow \frac{1}{3} f^3(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + C \Leftrightarrow f^3(x) = 3x^3 + 6x^2 + 6x + 3C$$

Theo giả thiết, ta có $f(0) = 3$ nên

$$(f(0))^3 = 3(0^3 + 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + C) \Leftrightarrow 27 = 3C \Leftrightarrow C = 9 \Rightarrow f^3(x) = 3x^3 + 6x^2 + 6x + 27$$

Ta tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = 3x^3 + 6x^2 + 6x + 27$ trên đoạn $[-2;1]$.

Ta có $g'(x) = 9x^2 + 12x + 6 > 0, \forall x \in [-2;1]$ nên đồng biến trên đoạn $[-2;1]$.

Vậy $\max_{[-2;1]} f(x) = \sqrt[3]{\max_{[-2;1]} g(x)} = \sqrt[3]{42}$.

Dạng 2: Phương pháp đổi biến dạng 1, đặt $u = u(x)$

1. Phương pháp giải

Định lý: Cho $\int f(u)du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$$\int f[u(x)]u'(x)dx = F[u(x)] + C$$

Các bước thực hiện đổi biến:

Xét $I = \int f(u(x))u'(x)dx$

Bước 1: Đặt $u = u(x)$, suy ra $du = u'(x)dx$

Bước 2: Chuyển nguyên hàm ban đầu về ẩn u ta được $I = \int f(u)du = F(u) + C$, trong đó $F(u)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(u)$.

Bước 3: Trả về biến x ban đầu, ta có nguyên hàm cần tìm là $I = F(u(x)) + C$

Hệ quả: nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K và $a, b \in \mathbb{R}; a \neq 0$ ta có:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

2. Bài tập

Bài tập 1. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x^2 \cdot e^{x^3+1}$, biết $F(-1) = \frac{1}{3}$ là:

A. $F(x) = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + C$ B. $F(x) = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + 2019$ C. $F(x) = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + \frac{1}{3}$ D. $F(x) = \frac{1}{3}e^{x^3+1}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đặt $u = x^3 + 1$ ta có $du = 3x^2 dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{1}{3} du$

Suy ra $\int f(x)dx = \int e^u \frac{1}{3} du = \frac{1}{3} e^u + C$

Do đó $F(x) = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C$.

Mặt khác $F(-1) = \frac{1}{3}$ nên $C = 0$. Vậy $\int f(x)dx = \frac{1}{3} e^{x^3+1}$.

Lưu ý: Ta có thể viết như sau: $\int f(x)dx = \int x^2 e^{x^3+1} dx = \frac{1}{3} \int e^{x^3+1} d(x^3+1) = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C$

Chú ý: Với các viết $x^2 dx = \frac{1}{3} d(x^3 + 1)$, ta có thể tính nguyên hàm đã cho một cách đơn giản và nhanh gọn.

Bài tập 2. Nguyên hàm $M = \int \frac{2 \sin x}{1 + 3 \cos x} dx$ là:

A. $M = \frac{1}{3} \ln(1 + 3 \cos x) + C$

B. $M = \frac{2}{3} \ln|1 + 3 \cos x| + C$

C. $M = -\frac{2}{3} \ln|1 + 3 \cos x| + C$

D. $M = -\frac{1}{3} \ln|1 + 3 \cos x| + C$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $u = 1 + 3 \cos x$, ta có $du = -3 \sin x dx$ hay $2 \sin x dx = -\frac{2}{3} du$.

Khi đó $M = -\frac{2}{3} \int \frac{1}{u} du = -\frac{2}{3} \ln|u| + C$

Vậy $M = \int \frac{2 \sin x}{1 + 3 \cos x} dx = -\frac{2}{3} \ln|1 + 3 \cos x| + C$

Bài tập 3. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2x + 2(1 + \sin x + \cos x)} dx = \frac{4 - 3\sqrt{a}}{b}, (a, b \in \mathbb{Z}^+)$. Tìm tỉ lệ $\frac{a}{b}$.

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{2}{1}$.

D. $\frac{3}{1}$.

Hướng dẫn giải

CHỌN B

$$\text{Đặt } t = \sin x + \cos x \Rightarrow \begin{cases} dt = (\cos x - \sin x) dx = -\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx \\ \sin 2x = t^2 - 1 \end{cases}$$

và $x: 0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$ thì $t: 1 \rightarrow \sqrt{2}$.

$$\Rightarrow I_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t^2 - 1 + 2(1 + t)} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{(t+1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{t+1} \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{4 - 3\sqrt{2}}{4}.$$

Bài tập 4. Cho $\int \cos^3 x \sin x dx = F(x) + C$ và $F(0) = a + b - \frac{1}{4}$.

Tính $A = a^2 + b^2 + 2018$.

A. 2018.

B. 2016.

C. 2022.

D. 2020.

Hướng dẫn giải

CHỌN A

$$\int \cos^3 x \sin x dx$$

Đặt $u = \cos x \Rightarrow -du = \sin x dx$.

$$\int \cos^3 x \sin x dx = -\int u^3 du = -\frac{u^4}{4} + C = -\frac{\cos^4 x}{4} + C$$

$$\Rightarrow F(0) = -\frac{1}{4} = a + b - \frac{1}{4} \Rightarrow a + b = 0.$$

$$A = a^3 + b^3 + 2018 = (a + b)^2 - 2ab(a + b) + 2018 = 2018.$$

Chú ý: chú ý rằng với $a > 0$ và $m, n \in \mathbb{Z}; n > 0$ ta luôn có: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Bài tập 5. Nguyên hàm $R = \int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx$ là:

A. $R = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} \right| + C$

B. $R = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + C$

C. $R = \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} \right| + C$

D. $R = \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + C$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đặt $u = \sqrt{x+1} \Rightarrow u^2 = x+1$. Suy ra $x = u^2 - 1$ và $dx = 2u du$.

Khi đó $R = \int \frac{2u}{(u^2-1)u} du = \int \frac{2}{u^2-1} du = \int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) du = \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + C$.

Vậy $R = \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + C$

Bài tập 6. Nguyên hàm $S = \int x^3 \sqrt{x^2+9} dx$ là:

A. $S = \frac{(x^2+9)^2 \sqrt{x^2+9}}{5} - 3(x^2+9)\sqrt{x^2+9} + C$

B. $S = \frac{(x^2+9)^4 \sqrt{x^2+9}}{5} - 3(x^2+9)\sqrt{x^2+9} + C$

C. $S = \frac{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}{5} - 3(x^2+9)^2 \sqrt{x^2+9} + C$

D. $S = \frac{(x^2+9)^2 \sqrt{x^2+9}}{5} - 3\sqrt{x^2+9} + C$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Xét } S = \int x^3 \sqrt{x^2 + 9} dx = \int x^2 \sqrt{x^2 + 9} x dx.$$

$$\text{Đặt } u = \sqrt{x^2 + 9} \Rightarrow u^2 = x^2 + 9. \text{ Suy ra } x^2 = u^2 - 9 \text{ và } x dx = u du.$$

$$\text{Khi đó } S = \int (u^2 - 9) u \cdot u du = \int (u^4 - 9u^2) du = \frac{u^5}{5} - 3u^3 + C.$$

$$\text{Vậy } S = \frac{(x^2 + 9)^2 \sqrt{x^2 + 9}}{5} - 3(x^2 + 9) \sqrt{x^2 + 9} + C$$

Bài tập 7. Nguyên hàm $T = \int \frac{1}{x\sqrt{\ln x + 1}} dx$ là:

$$\text{A. } T = \frac{1}{2\sqrt{\ln x + 1}} + C$$

$$\text{B. } T = 2\sqrt{\ln x + 1} + C$$

$$\text{C. } T = \frac{2}{3}(\ln x + 1)\sqrt{\ln x + 1} + C$$

$$\text{D. } T = \sqrt{\ln x + 1} + C$$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Ta có: } T = \int \frac{1}{x\sqrt{\ln x + 1}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{\ln x + 1}} d(\ln x + 1) = 2\sqrt{\ln x + 1} + C.$$

Bài tập 8. Nguyên hàm $U = \int \frac{(x-2)^{2020}}{(x+1)^{2022}} dx$ là:

$$\text{A. } U = \frac{1}{3} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{2021} + C$$

$$\text{B. } U = \frac{1}{6060} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{2020} + C$$

$$\text{C. } U = \frac{1}{6063} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{2021} + C$$

$$\text{D. } U = \frac{1}{6069} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{2023} + C$$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Xét } U = \int \frac{(x-2)^{2020}}{(x+1)^{2022}} dx = \int \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{2020} \frac{1}{(x+1)^2} dx$$

$$\text{Đặt } u = \frac{x-2}{x+1} \Rightarrow du = \frac{3}{(x+1)^2} dx \Rightarrow \frac{1}{3} du = \frac{1}{(x+1)^2} dx.$$

$$\text{Suy ra. } U = \frac{1}{3} \int u^{2020} du = \frac{1}{6063} u^{2021} + C. \text{ Vậy } U = \frac{1}{6063} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{2021} + C$$

Lưu ý:

$$\int \frac{(ax+b)^n}{(cx+d)^{n+2}} dx = \frac{1}{n+1} \frac{1}{ad-bd} \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{n+1} + C$$

Bài tập 9. Xét nguyên hàm $V = \int \frac{\ln^2 x}{x(1+\sqrt{\ln x+1})} dx$. Đặt $u = 1 + \sqrt{1 + \ln x}$, khẳng định nào sau đây sai?

A. $\frac{dx}{x} = (2u-2) du$

B. $V = \int \frac{(u^2-2u)^2}{u} \cdot (2u-2) du$

C. $V = \frac{2}{5}u^5 - \frac{5}{2}u^4 + \frac{16}{3}u^3 - 4u^2 + C$

D. $V = \frac{u^5}{5} + \frac{u^4}{2} - \frac{16}{3}u^3 + 4u^2 + C$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $u = 1 + \sqrt{1 + \ln x} \Rightarrow (u-1)^2 = 1 + \ln x \Leftrightarrow \ln x = u^2 - 2u \Rightarrow \frac{dx}{x} = (2u-2) du$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } V &= \int \frac{\ln^2 x}{x(1+\sqrt{\ln x+1})} dx = \int \frac{(u^2-2u)^2}{u} \cdot (2u-2) du \\ &= 2 \int (u^4 - 5u^3 + 8u^2 - 4u) du = \frac{2}{5}u^5 - \frac{5}{2}u^4 + \frac{16}{3}u^3 - 4u^2 + C \end{aligned}$$

Bài tập 10. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^2 2x \cdot \cos^3 2x$ thỏa $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$. Giá trị $F(2019\pi)$ là:

A. $F(2019\pi) = -\frac{1}{15}$

B. $F(2019\pi) = 0$

C. $F(2019\pi) = -\frac{2}{15}$

D. $F(2019\pi) = \frac{1}{15}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $u = \sin 2x \Rightarrow du = 2 \cos 2x dx \Rightarrow \frac{1}{2} du = \cos 2x dx$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } F(x) &= \int \sin^2 2x \cdot \cos^3 2x dx = \frac{1}{2} \int u^2 \cdot (1-u^2) du = \frac{1}{2} \int (u^2 - u^4) du \\ &= \frac{1}{6}u^3 - \frac{1}{10}u^5 + C = \frac{1}{6}\sin^3 2x - \frac{1}{10}\sin^5 2x + C \end{aligned}$$

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{6}\sin^3 \frac{\pi}{2} - \frac{1}{10}\sin^5 \frac{\pi}{2} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{15}$$

$$\text{Vậy } F(x) = \frac{1}{6}\sin^3 2x - \frac{1}{10}\sin^5 2x - \frac{1}{15}$$

$$\text{Do đó } F(2019\pi) = -\frac{1}{15}$$

Bài tập 11. Biết rằng $\int \frac{(2x+3)dx}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} = -\frac{1}{g(x)} + C$ (với C là hằng số). Gọi S là tập nghiệm của phương trình $g(x) = 0$. Tổng các phần tử của S bằng:

A. 0.

B. $-3 + \sqrt{5}$

C. -3

D. $-3 - \sqrt{5}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Vì $x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = (x^2+3x)(x^2+3x+2)+1 = [(x^2+3x)+1]^2$ nên ta đặt $u = x^2+3x$, khi đó $du = (2x+3)dx$

Nguyên hàm ban đầu trở thành $\int \frac{du}{(u+1)^2} = -\frac{1}{u+1} + C$.

Suy ra $\int \frac{(2x+3)dx}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} = -\frac{1}{x^2+3x+1} + C$

Vậy $g(x) = x^2+3x+1$; $g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2+3x+1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$.

Do đó $S = \left\{ \frac{-3+\sqrt{5}}{2}; \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \right\}$.

Tổng giá trị các phần tử của S bằng -3 .

Bài tập 12. $I = \int \frac{3\cos 2x - \sin 4x}{2 - \sin x - \cos x} dx = F(x) + C$. Tính $F(1)$, biết rằng $F(x)$ không chứa hệ số tự do.

A. $\frac{17}{3}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{15}{3}$.

D. $\frac{9}{3}$.

Hướng dẫn giải

CHỌN A

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3\cos 2x - \sin 4x}{2 - \sin x - \cos x} dx = \int \frac{(3 - 2\sin 2x)\cos 2x}{2 - \sin x - \cos x} dx \\ &= \int \frac{(3 - 2\sin 2x)(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{2 - (\sin x + \cos x)} dx \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = \sin x + \cos x \Rightarrow \begin{cases} dt = (\cos x - \sin x) dx \\ \sin 2x = t^2 - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{\left[3 - 2(t^2 - 1)\right] \cdot t}{2 - t} dt = \int \frac{2t^3 - 5t}{t - 2} dt = \int \left(2t^2 + 4t + 3 + \frac{6}{t - 2}\right) dt$$

$$= \left(\frac{2}{3}t^3 + 2t^2 + 3t + 6\ln|t - 2|\right) + C.$$

Dạng 3: Tìm nguyên hàm bằng cách đổi biến dạng 2

1. Phương pháp giải

Kiến thức cần nhớ:

Ta đã biết các đẳng thức sau:

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1, \text{ với mọi } t \in \mathbb{R}.$$

$$1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}, \forall t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$1 + \cot^2 t = \frac{1}{\sin^2 t}, \forall t \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Với các bài toán sau đây thì ta không thể giải quyết ngay bằng nguyên hàm cơ bản cũng như đổi biến số ở dạng 1, đòi hỏi người học phải trang bị tư duy đổi biến theo kiểu “**lượng giác hóa**” dựa vào các hằng đẳng thức lượng giác cơ bản và một số biến đổi thích hợp, cụ thể ta xem xét các nguyên hàm sau đây:

Bài toán 1: Tính $A_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

Bài toán 1: Tính $A_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

Đặt $x = |a|\sin t$, với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ hoặc

$x = |a|\cos t$ với $t \in (0; \pi)$

Bài toán 2: Tính $A_2 = \int \frac{dx}{a^2 + x^2}$

Bài toán 2: Tính $A_2 = \int \frac{dx}{a^2 + x^2}$

Đặt $x = |a|\tan t$, với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Bài toán 3: Tính $A_3 = \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx$

Bài toán 3: Tính $A_3 = \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx$

Đặt $x = a \cos 2t$ với $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Bài toán 4: Tính $A_4 = \int \sqrt{(x-a)(x-b)} dx$

Bài toán 4: Tính $A_4 = \int \sqrt{(x-a)(x-b)} dx$

Đặt $x = a + (b-a)\sin^2 t$ với $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Bài toán 5: Tính $A_5 = \int \sqrt{x^2 - a^2} dx$

Bài toán 5: Tính $A_5 = \int \sqrt{x^2 - a^2} dx$

$$\text{Đặt } x = \frac{|a|}{\sin t} \text{ với } t \in \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$$

2. Bài tập

Bài tập 1. Nguyên hàm $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$ là:

A. $\arcsin \frac{x}{2} - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{4} + C$

B. $2\arccos \frac{x}{2} - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + C$

C. $\arccos \frac{x}{2} - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{4} + C$

D. $2\arcsin \frac{x}{2} - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + C$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đặt $x = 2 \sin t$ với $t \in \left(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$. Ta có $\cos t > 0$ và $dx = 2 \cos t dt$.

Khi đó $I = \int \frac{4 \sin^2 t}{\sqrt{4-4 \sin^2 t}} 2 \cos t dt = \int 4 \sin^2 t dt$ (vì $\cos t > 0, \forall t \in \left(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$).

Suy ra $I = 2 \int (1 - \cos 2t) dt = 2t - \sin 2t + C$

Từ $x = 2 \sin t \Rightarrow t = \arcsin \frac{x}{2}$ và $\sin 2t = 2 \sin t \cdot \cos t = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}$

Vậy $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx = 2 \arcsin \frac{x}{2} - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + C$

Bài tập 2. Nguyên hàm $I = \int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$ là:

A. $\sqrt[3]{(1-x^2)^2} + C$

B. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$

C. $\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} + C$

D. $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $x = \cos t, t < 0 < \pi \Rightarrow dx = -\sin t \cdot dt$.

Khi đó $I = -\int \frac{\sin t \cdot dt}{\sin^3 t} = -\int \frac{dt}{\sin^2 t} = \cot t + C$ hay $I = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$

Vậy $\int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$

Ví dụ 3. Nguyên hàm $I = \int \frac{1}{1+x^2} dx$ là:

A. $\arctan x + C$

B. $\operatorname{arccot} x + C$

C. $\arcsin x + C$

D. $\arccos x + C$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $x = \tan t$ với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, ta có $dx = (1 + \tan^2 t) dt$.

Khi đó $I = \int \frac{1}{1 + \tan^2 t} (1 + \tan^2 t) dt = \int dt = t + C$

Vậy $I = \int \frac{1}{1 + x^2} dx = \arctan x + C$

Dạng 4: Tìm nguyên hàm bằng phương pháp nguyên hàm từng phần

1. Phương pháp giải

Với $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là các hàm số có đạo hàm trên khoảng K thì ta có: $(u.v)' = u'.v + u.v'$

Viết dưới dạng vi phân $d(uv) = vdu + u dv$

Khi đó lấy nguyên hàm hai vế ta được: $\int d(uv) = \int vdu + \int u dv$

Từ đó suy ra $\int u dv = uv - \int vdu$ (1)

Công thức (1) là công thức nguyên hàm từng phần.

Dấu hiệu nhận biết phải sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần.

Bài toán: Tìm $I = \int u(x).v(x)dx$, trong đó $u(x)$ và $v(x)$ là hai hàm có tính chất khác nhau, chẳng hạn:

$u(x)$ là hàm số đa thức, $v(x)$ là hàm số lượng giác.

$u(x)$ là hàm số đa thức, $v(x)$ là hàm số mũ.

$u(x)$ là hàm số logarit, $v(x)$ là hàm số đa thức.

$u(x)$ là hàm số mũ, $v(x)$ là hàm số lượng giác.

Phương pháp nguyên hàm từng phần

Bước 1: Đặt $\begin{cases} u = u(x) \\ dv = v(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = u'(x)dx \\ v = \int v(x)dx \end{cases}$

Bước 2: Áp dụng công thức (1), ta được: $\int u dv = uv - \int vdu$

Lưu ý: Đặt $u = u(x)$ (ưu tiên) theo thứ tự: “**Nhất lốc, nhì đa, tam lượng, tứ mũ**”. Tức là, nếu có logarit thì ưu tiên đặt u là logarit, không có logarit thì ưu tiên u là đa thức,... thứ tự ưu tiên sắp xếp như thế.

Còn đối với nguyên hàm $v = \int v(x) dx$ ta chỉ cần **Chọn một hằng số thích hợp**. Điều này sẽ được làm rõ qua các Bài tập minh họa ở cột bên phải.

2. Bài tập

Bài tập 1. Kết quả nguyên hàm $I = \int x \ln(2 + x^2) dx$ là:

- A. $\frac{x^2+2}{2} \ln(x^2+2) + \frac{x^2}{2} + C$ B. $(x^2+2) \ln(x^2+2) - \frac{x^2}{2} + C$
C. $(x^2+2) \ln(x^2+2) + x^2 + C$ D. $\frac{x^2+2}{2} \ln(x^2+2) - \frac{x^2}{2} + C$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(2 + x^2) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2x}{x^2+2} dx \\ v = \frac{x^2+2}{2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \frac{x^2+2}{2} \ln(x^2+2) - \int x dx = \frac{x^2+2}{2} \ln(x^2+2) - \frac{x^2}{2} + C$$

Chú ý: Thông thường thì với $dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

Tuy nhiên trong trường hợp này, ta để ý $v = \frac{x^2+2}{2}$ mang lại sự hiệu quả.

Bài tập 2. Kết quả nguyên hàm $I = \int \frac{\ln(\sin x + 2 \cos x)}{\cos^2 x} dx$ là:

- A. $(\tan x + 2) \cdot \ln(\sin x + 2 \cos x) - x + 2 \ln|\cos x| + C$
B. $(\tan x + 2) \cdot \ln(\sin x + 2 \cos x) - x - 2 \ln|\cos x| + C$
C. $(\tan x + 2) \cdot \ln(\sin x + 2 \cos x) - x - 2 \ln(\cos x) + C$
D. $(\cot x + 2) \cdot \ln(\sin x + 2 \cos x) - x - 2 \ln|\cos x| + C$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(\sin x + 2 \cos x) \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{\cos x - 2 \sin x}{\sin x + 2 \cos x} dx \\ v = \tan x + 2 = \frac{\sin x + 2 \cos x}{\cos x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\text{Khi đó } I &= (\tan x + 2) \ln(\sin x + 2 \cos x) - \int \frac{\cos x - 2 \sin x}{\cos x} dx \\ &= (\tan x + 2) \ln(\sin x + 2 \cos x) - x - 2 \ln|\cos x| + C\end{aligned}$$

Chú ý: Ở Bài tập này, Chọn $v = \tan x + 2$ có thể rút gọn được ngay tử và mẫu trong nguyên hàm $\int v du$.

Bài tập 3. Kết quả nguyên hàm $I = \int x^2 \sin 5x dx$ là:

- A. $-\frac{1}{5}x^2 \cos 5x - \frac{2}{25}x \sin 5x + \frac{2}{125} \cos 5x + C$ B. $-\frac{1}{5}x^2 \cos 5x + \frac{2}{25}x \sin 5x - \frac{2}{125} \cos 5x + C$
 C. $\frac{1}{5}x^2 \cos 5x - \frac{2}{25}x \sin 5x + \frac{2}{125} \cos 5x + C$ D. $-\frac{1}{5}x^2 \cos 5x + \frac{2}{25}x \sin 5x + \frac{2}{125} \cos 5x + C$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phân tích: Ở đây ta sẽ ưu tiên $u = x^2$ là đa thức, tuy nhiên vì bậc của u là 2 nên ta sẽ từng phần hai lần mới thu được kết quả. Nhằm tiết kiệm thời gian, tôi gợi ý với phương pháp “sơ đồ đường chéo” cụ thể như sau:

Bước 1: Chia thành 3 cột:

- + Cột 1: Cột u luôn lấy đạo hàm đến 0.
- + Cột 2: Dùng để ghi rõ dấu của các phép toán đường chéo.
- + Cột 3: Cột dv luôn lấy nguyên hàm đến khi tương ứng với cột 1.

Bước 2: Nhân chéo kết quả của 2 cột với nhau. Dấu của phép nhân đầu tiên sẽ có dấu (+), sau đó đan dấu (-), (+), (-),... rồi cộng các tích lại với nhau.

Đạo hàm cho đến khi về 0	Dấu	Lấy nguyên hàm tương ứng
$u = x^2$	+	$dv = \sin 5x dx$
$2x$	-	$-\frac{1}{5} \cos 5x$
2	+	$-\frac{1}{25} \sin 5x$
0		$\frac{1}{125} \cos 5x$

$$\text{Khi đó } I = -\frac{1}{5}x^2 \cos 5x + \frac{2}{25}x \sin 5x + \frac{2}{125} \cos 5x + C$$

Chú ý:

Kỹ thuật này rất đơn giản và tiết kiệm nhiều thời gian.

Trong kỹ thuật tìm nguyên hàm theo sơ đồ đường chéo, yêu cầu độc giả cần tính toán chính xác đạo

hàm và nguyên hàm ở hai cột 1 và 3. Nếu nhầm lẫn thì rất đáng tiếc.

Bài tập 4. Nguyên hàm $I = \int x^4 e^{3x} dx$ là:

- A. $I = \left(\frac{x^4}{3} - \frac{4x^3}{3^2} + \frac{12x^2}{3^3} - \frac{24x}{3^4} + \frac{24}{3^5} \right) e^{3x} + C$ B. $I = \frac{x^5}{5} \cdot \frac{e^{3x}}{3} + C$
- C. $I = \left(\frac{x^4}{3} + \frac{4x^3}{3^2} - \frac{12x^2}{3^3} + \frac{24x}{3^4} - \frac{24}{3^5} \right) e^{3x} + C$ D. $I = \left(\frac{x^4}{3} - \frac{4x^3}{3^2} + \frac{12x^2}{3^3} \right) e^{3x} + C$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Nếu làm thông thường thì từng phần 4 lần ta mới thu được kết quả. Ở đây, chúng tôi trình bày theo sơ đồ đường chéo cho kết quả và nhanh chóng hơn.

Đạo hàm cho đến khi về 0	Dấu	Lấy nguyên hàm tương ứng
$u = x^4$	+	$dv = e^{3x} dx$
$4x^3$	-	$\frac{1}{3} e^{3x}$
$12x^2$	+	$\frac{1}{3^2} e^{3x}$
$24x$	-	$\frac{1}{3^3} e^{3x}$
24	+	$\frac{1}{3^4} e^{3x}$
0		$\frac{1}{3^5} e^{3x}$

Vậy $I = \left(\frac{x^4}{3} - \frac{4x^3}{3^2} + \frac{12x^2}{3^3} - \frac{24x}{3^4} + \frac{24}{3^5} \right) e^{3x} + C$.

Bài tập 5. Nguyên hàm $I = \int e^x \sin x dx$ là:

- A. $2e^x (\sin x + \cos x) + C$ B. $2e^x (\sin x - \cos x) + C$
- C. $\frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$ D. $\frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phân tích: Sự tồn tại của hàm số mũ và lượng giác trong cùng một nguyên hàm sẽ rất dễ gây cho người học sự nhầm lẫn, nếu ta sẽ không biết điểm dừng thì có thể sẽ bị lạc vào vòng luẩn quẩn. Ở đây, để tìm được kết quả thì ta phải từng phần hai lần như trong Bài tập 3. Tuy nhiên, với sơ đồ đường chéo thì sao? Khi nào sẽ dừng lại?

Đạo hàm u cho đến khi lặp lại	Dấu	Lấy nguyên hàm tương ứng
$u = \sin x$	+	$dv = e^x dx$
$\cos x$		e^x
$-\sin x$	+	e^x (dừng lại)

Khi đó, ta sẽ có thể kết luận $I = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$.

Hay $2I = e^x \sin x - e^x \cos x$. Vậy $I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$

Chú ý: Chỉ dừng lại khi đạo hàm của nó có dạng giống dòng đầu tiên. Dòng cuối thu được $-\int \sin x e^x dx = -I$.

Bài tập 6. Tìm $I = \int \ln^n(ax+b)v(x)dx$, trong đó $v(x)$ là hàm đa thức, $n \in \mathbb{N}^*$ và $a, b \in \mathbb{R}; a \neq 0$

Hướng dẫn giải

Phân tích: Vì ưu tiên $u(x) = \ln^n(ax+b)$ nên $du = \frac{na \cdot \ln^{n-1}(ax+b)}{ax+b} dx$ và tiếp tục đạo hàm thì cột 1

sẽ không về 0 được, vì vậy phải chuyển lượng $t(x) = \frac{na}{ax+b}$ từ cột 1 sang nhân với $v(x)$ ở cột 3 để rút gọn bớt; tiếp tục quá trình như thế cho đến khi đạo hàm cột 1 về 0, và chú ý sử dụng quy tắc đan dấu bình thường.

Bài tập 6.1. Kết quả nguyên hàm $I = \int x \cdot \ln x dx$ là:

- A. $\frac{x^2}{2} \cdot \ln 2 - \frac{x^2}{4} + C$ B. $\frac{x^2}{2} \cdot \ln 2 + \frac{x^2}{4} + C$ C. $\frac{x^2}{4} \cdot \ln 2 - \frac{x^2}{2} + C$ D. $\frac{x^2}{4} \cdot \ln 2 + \frac{x^2}{2} + C$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đạo hàm cho đến khi về 0	Dấu	Lấy nguyên hàm tương ứng	Lượng $t(x)$ phải chuyển từ cột 1 để nhân thêm với
$u = \ln x$	+	$dv = x dx$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x}$		$\frac{x^2}{2}$	
1	-	$\frac{x}{2}$	
0		$\frac{x^2}{4}$	

Vậy $I = \int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln 2 - \frac{x^2}{4} + C$

Chú ý: chuyển lượng $t(x) = \frac{1}{x}$ bên cột 1 sang nhân với $v(x) = \frac{x^2}{2}$ ta thu được kết quả $\frac{x}{2}$. Khi đó bên cột 1 còn lại 1, đạo hàm của nó bằng 0; bên cột 3 có nguyên hàm của $\frac{x}{2}$ là $\frac{x^2}{4}$.

Bài tập 6.2. Kết quả nguyên hàm $I = \int (4x-1) \cdot \ln^3(2x) dx$ là:

- A. $(2x^2 - x) \ln^3(2x) - (3x^2 - 3x) \ln^2(2x) - (3x^2 - 6x) \ln(2x) + \frac{3x^2}{2} + 6x + C$
- B. $(2x^2 - x) \ln^3(2x) - (3x^2 - 3x) \ln^2(2x) + (3x^2 - 6x) \ln(2x) - \frac{3x^2}{2} + 6x + C$
- C. $(2x^2 - x) \ln^3(2x) + (3x^2 - 3x) \ln^2(2x) + (3x^2 - 6x) \ln(2x) - \frac{3x^2}{2} + 6x + C$
- D. $(2x^2 - x) \ln^3(2x) + (3x^2 - 3x) \ln^2(2x) + (3x^2 - 6x) \ln(2x) - \frac{3x^2}{2} - 6x + C$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đạo hàm cho đến khi về 0	Dấu	Lấy nguyên hàm tương ứng	Lượng $t(x)$ phải chuyển từ cột 1 để nhân thêm với cột 3
$u = \ln^3(2x)$	+	$dv = (4x-1)dx$	
$\frac{3}{x} \cdot \ln^2(2x)$		$2x^2 - x$	$\boxed{\frac{3}{x}}$
$\ln^2(2x)$	-	$6x - 3$	
$\frac{2}{x} \cdot \ln(2x)$		$3x^2 - 3x$	$\boxed{\frac{2}{x}}$
$\ln(2x)$	+	$6x - 6$	
$\frac{1}{x}$		$3x^2 - 6x$	$\boxed{\frac{1}{x}}$
1	-	$3x - 6$	
0		$\frac{3x^2}{2} - 6x$	

Vậy $I = (2x^2 - x) \ln^3(2x) - (3x^2 - 3x) \ln^2(2x) + (3x^2 - 6x) \ln(2x) - \frac{3x^2}{2} + 6x + C$

Chú ý:

Chuyển $\frac{3}{x}$, nhân với $(2x^2 - x)$ thu được $(6x - 3)$

Chuyển $\frac{2}{x}$, nhân với $(3x^2 - 3x)$ thu được $(6x - 6)$.

Chuyển $\frac{1}{x}$, nhân với $(3x^2 - 6x)$ thu được $(3x - 6)$.

Bài tập 7. Cho $F(x) = (x-1)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Biết rằng hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$ là:

- A. $(2-x)e^x + C$ B. $(2+x)e^x + C$ C. $(1-x)e^x + C$ D. $(1+x)e^x + C$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $F'(x) = f(x)e^{2x} \Leftrightarrow e^x + (x-1)e^x = f(x).e^{2x} \Leftrightarrow f(x).e^{2x} = x.e^x$.

Xét $\int f'(x)e^{2x} dx$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = e^{2x} \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2e^{2x} dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

Do đó $I = f(x).e^{2x} - 2 \int f(x)e^x dx = xe^x - 2(x-1)e^x + C$

Vậy $I = \int f'(x)e^{2x} dx = (2-x)e^x + C$

Dạng 5: Các bài toán thực tế ứng dụng nguyên hàm

1. Phương pháp giải

Ý nghĩa vật lý của đạo hàm:

Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S = S(t)$, với $S(t)$ là quãng đường mà chất điểm đó đi được trong thời gian t , kể từ thời điểm ban đầu.

Gọi $v(t)$ và $a(t)$ lần lượt là vận tốc tức thời và gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t , ta có:

$$v(t) = S'(t) \text{ và } a(t) = v'(t).$$

Từ đó ta có: $S(t) = \int v(t) dt$ và $v(t) = \int a(t) dt$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Một vật chuyển động với gia tốc $a(t) = \frac{3}{t+1} (m/s^2)$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ thời điểm ban đầu. Vận tốc ban đầu của vật là. Hỏi vận tốc của vật tại giây thứ 10 bằng bao nhiêu?

- A. 10 m/s. B. 15,2 m/s. C. 13,2 m/s. D. 12 m/s.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Vận tốc của vật tại thời điểm t được tính theo công thức: $v(t) = \int a(t) dt = \int \frac{3}{t+1} dt = 3 \ln|t+1| + C$

Vì vận tốc ban đầu (lúc $t=0$) của vật là $v_0 = 6 \text{ m/s}$ nên:

$$v(0) = 3 \ln|0+1| + C = 6 \Leftrightarrow C = 6 \Rightarrow v(t) = 3 \ln|t+1| + 6.$$

Vận tốc của vật chuyển động tại giây thứ 10 là: $v(10) = 3 \ln|10+1| + 6 \approx 13,2 \text{ (m/s)}$.

Bài tập 2. Một vận động viên điền kinh chạy với gia tốc $a(t) = -\frac{1}{24}t^3 + \frac{5}{16}t^2 \text{ (m/s}^2\text{)}$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc xuất phát. Hỏi vào thời điểm 5 (s) sau khi xuất phát thì vận tốc của vận động viên là bao nhiêu?

A. 5,6 m/s.

B. 6,51 m/s.

C. 7,26 m/s.

D. 6,8 m/s.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Vận tốc $v(t)$ chính là nguyên hàm của gia tốc $a(t)$ nên ta có:

$$v(t) = \int a(t) dt = \int \left(-\frac{1}{24}t^3 + \frac{5}{16}t^2 \right) dt = -\frac{1}{96}t^4 + \frac{5}{48}t^3 + C$$

Tại thời điểm ban đầu ($t=0$) thì vận động viên ở tại vị trí xuất phát nên vận tốc lúc đó là:

$$v_0 = 0 \Rightarrow v(0) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{96}.0^4 + \frac{5}{48}.0^3 + C = 0 \Leftrightarrow C = 0.$$

$$\text{Vậy công thức vận tốc là } v(t) = -\frac{1}{96}t^4 + \frac{5}{48}t^3$$

Vận tốc của vận động viên tại giây thứ 5 là $v(5) = 6,51 \text{ m/s}$.

Chú ý: Gia tốc của vật chuyển động là $a(t) = \frac{3}{t+1} \text{ (m/s}^2\text{)}$. Ta tính $v(t) = \int a(t) dt$, kết hợp với điều kiện vận tốc ban đầu $v_0 = 6 \text{ m/s}$. Suy ra công thức tính vận tốc $v(t)$ tại thời điểm t và tính được $v(10)$.

Bài tập 3. Một nhà khoa học tự chế tên lửa và phóng tên lửa từ mặt đất với vận tốc ban đầu là 20 m/s. Giả sử bỏ qua sức cản của gió, tên lửa chỉ chịu tác động của trọng lực. Hỏi sau 2s thì tên lửa đạt đến tốc độ là bao nhiêu?

A. 0,45 m/s.

B. 0,4 m/s.

C. 0,6 m/s.

D. 0,8 m/s.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Xem như tại thời điểm $t_0=0$ thì nhà khoa học phóng tên lửa với vận tốc đầu 20 m/s. Ta có

$$s(0) = 0 \text{ và } v(0) = 20.$$

Vì tên lửa chuyển động thẳng đứng nên gia tốc trọng trường tại mọi thời điểm t là $s''(t) = -9,8 \text{ m/s}^2$.

Nguyên hàm của gia tốc là vận tốc nên ta có vận tốc của tên lửa tại thời điểm t là $v(t) = \int -9,8 dt = -9,8t + C_1$.

Do $v(0) = 20$ nên $-9,8t + C_1 = 20 \Leftrightarrow C_1 = 20 \Rightarrow v(t) = -9,8t + 20$.

Vậy vận tốc của tên lửa sau 2s là $v(2) = -9,8 \cdot 2 + 20 = 0,4 \text{ (m/s)}$.
