

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

Thời gian: **180** phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ nhất: **30/8/2022**

(Đề thi có 01 trang, gồm 4 bài)

Bài 1. (5,0 điểm)

Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = 4$ và

$$x_{n+1} = \frac{9}{\sqrt{x_n + 1} + 1}, \forall n \geq 1.$$

a) Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

b) Với mỗi số nguyên dương n , chứng minh rằng

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq 3.$$

Bài 2. (5,0 điểm)

Tìm tất cả các bộ ba số thực không âm $(x; y; z)$ thỏa mãn

$$\begin{cases} x \leq y \leq z \\ x + y + z = xy + yz + zx \\ \sqrt{yz}(x + 1) = 2. \end{cases}$$

Bài 3. (4,0 điểm)

Cho p, q là các số nguyên tố và thỏa mãn: $q = 4p + 1$. Chứng minh rằng số

$$N_p = \frac{p^p - 1}{p - 1}$$

chia hết cho q .

Bài 4. (6,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại A của (O) cắt đường thẳng BC tại D . Gọi E, F tương ứng là giao điểm của đường thẳng OD với các đường thẳng AB, AC . Lấy các điểm K, H thuộc BC sao cho $EK \parallel AC, FH \parallel AB$. Gọi G là giao điểm của EK và FH .

a) Chứng minh rằng, đường tròn ngoại tiếp tam giác (GKH) tiếp xúc với (O) .

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác GEF cắt AB, AC tương ứng tại các điểm thứ hai P, Q (P khác E , Q khác F). Chứng minh rằng, PQ đi qua trực tâm của tam giác ABC .

-----HẾT-----

Ghi chú:

- Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị **KHÔNG** giải thích gì thêm.

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

Thời gian: **180** phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ hai: **31/8/2022**

(Đề thi có 01 trang, gồm 03 bài)

Bài 5. (7,0 điểm)

Cho dãy đa thức $(P_n(x))$ xác định bởi: $P_0(x) = x^3 - 4x$ và

$$P_{n+1}(x) = P_n(1+x) \cdot P_n(1-x) - 1$$

với mọi số tự nhiên n , mọi $x \in \mathbb{R}$.

a) Tính $P_{2022}(2)$.

b) Chứng minh rằng, tồn tại một đa thức $Q(x)$ với hệ số nguyên sao cho

$$P_{2022}(x) = x^{2023} \cdot Q(x) \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Bài 6. (6,0 điểm)

Cho số nguyên $n \geq 2$. Xét m là một số nguyên dương sao cho tồn tại một tập hợp T thỏa mãn đồng thời các tính chất sau đây:

- Mỗi phần tử của T là một tập con m phần tử của tập $\{1, 2, 3, \dots, mn\}$.
- Mỗi cặp phần tử của T có không quá 1 phần tử chung.
- Mỗi phần tử của tập $\{1, 2, 3, \dots, mn\}$ thuộc đúng hai phần tử của T .

Tìm giá trị lớn nhất có thể của m .

Bài 7. (7,0 điểm)

Cho tam giác không cân ABC nội tiếp đường tròn (O) . Đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC cắt AB, AC tương ứng tại A_b, A_c ; đường tròn ngoại tiếp tam giác COA cắt BA, BC tương ứng tại B_a, B_c ; và đường tròn ngoại tiếp tam giác AOB cắt CA, CB tương ứng tại C_a, C_b (các điểm $A_b, A_c, B_c, B_a, C_a, C_b$ không trùng với các đỉnh của tam giác ABC). Các cặp đường thẳng $(B_c B_a, C_a C_b), (C_a C_b, A_b A_c), (A_b A_c, B_c B_a)$ lần lượt có các giao điểm là X, Y, Z . Chứng minh rằng

a) Các điểm O, B_a, C_a thẳng hàng.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ tiếp xúc với (O) .

-----HẾT-----

Ghi chú:

- Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị **KHÔNG** giải thích gì thêm.

A. HƯỚNG DẪN CHẤM

- Nếu học sinh giải theo cách khác đáp án mà vẫn logic, đúng thì giám khảo xem xét cho điểm tương ứng.

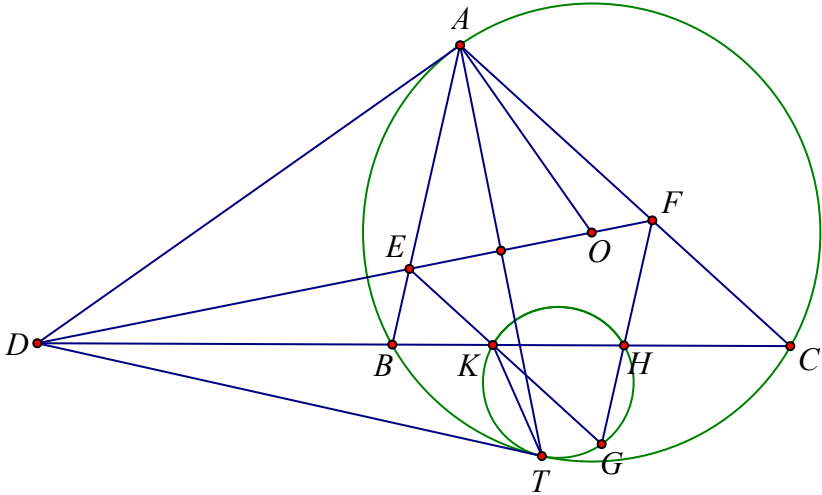
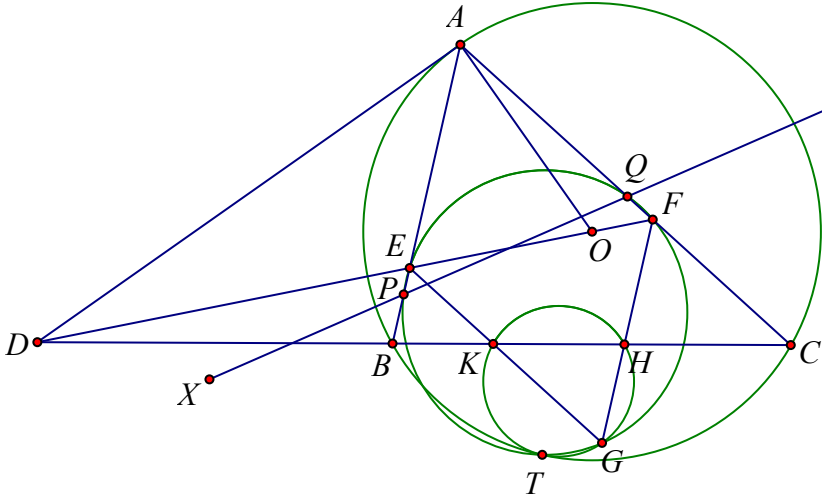
- Nếu học sinh có sử dụng các định lí, các hệ quả, các bổ đề... phổ biến trong các chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi và nêu được tên thì giám khảo vẫn chấm đúng.

- Điểm số toàn bài, mỗi câu, mỗi ý **không làm tròn**, giám khảo có thể thống nhất đáp án, chia các ý điểm lớn thành bội của 0,25.

B. ĐÁP ÁN – BIỂU ĐIỂM

Bài	Ý	Nội dung	Điểm
1		Cho dãy số (x_n) ...	5,0
	a)	Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.	3,0
		Bằng quy nạp, ta có $0 < x_n < \frac{9}{2}$ với mọi $n \geq 1$.	1,0
		Với mỗi số nguyên dương n , ta có $ x_{n+1} - 3 = \frac{3 x_n - 3 }{(2 + \sqrt{x_n + 1})(1 + \sqrt{x_n + 1})} \leq \frac{1}{2} x_n - 3 $ Suy ra $ x_n - 3 \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \forall n \geq 1.$ Từ đó suy ra $\lim x_n = 3$.	2,0
	b)	Với mỗi số nguyên dương n , chứng minh rằng $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq 3.$	2,0
		Do hàm số $f(t) = \frac{9}{\sqrt{t+1}+1}$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$ và $0 < x_n < 9/2$ nên $x_n > f\left(\frac{9}{2}\right) > 1, \forall n \geq 1.$	0,5
		Bằng quy nạp chứng minh được: $x_{2n} < 3 < x_{2n-1}, \forall n \geq 1$.	0,5
		Xét hàm số $g(t) = t + f(t), t \in (1; +\infty)$, ta có $g'(t) = 1 + f'(t) = 1 - \frac{9}{2\sqrt{t+1}(1 + \sqrt{t+1})^2} > 0, \forall t > 1.$ Suy ra, $g(t)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$. Do đó, với mỗi số nguyên dương k ta có $x_k + x_{k+1} = g(x_k) > g(3) = 6.$	0,5

		TH1. $n = 2m$: Khi đó $x_1 + x_2 + \dots + x_n = (x_1 + x_2) + (x_2 + x_3) + \dots + (x_{2m-1} + x_{2m}) \geq 6m$. Suy ra $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq 3.$ TH2. $n = 2m + 1$: Khi đó $x_1 + x_2 + \dots + x_n = (x_1 + x_2) + \dots + (x_{2m-1} + x_{2m}) + x_{2m+1} \geq 6m + 3$. Suy ra $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq 3.$	0,5
2		Tìm tất cả các bộ ba số thực không âm $(x; y; z)$ thỏa mãn ...	5,0
		Giả sử $(x; y; z)$ là một bộ ba cần tìm. Từ $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$ ta suy ra $xy + yz + zx \geq 3$.	0,5
		Vì $x \leq y \leq z$ nên $yz \geq 1$. Từ $\sqrt{yz}(x + 1) = 2$ ta suy ra $x + 1 \leq 2$ hay $x \leq 1$.	0,5
		Mặt khác, $y + z - 1 \geq 2\sqrt{yz} - 1 > 0$ nên $x = \frac{y + z - yz}{y + z - 1} = 1 - \frac{yz - 1}{y + z - 1} \geq 1 - \frac{yz - 1}{2\sqrt{yz} - 1} = \frac{\sqrt{yz}(2 - \sqrt{yz})}{2\sqrt{yz} - 1}.$	1,5
		Đặt $t = \sqrt{yz}$. Do $t(x + 1) = 2$ nên $t \leq 2$. Từ đó $tx \geq \frac{t^2(2 - t)}{2t - 1} \geq 2 - t \Rightarrow t(x + 1) \geq 2.$ Dấu bằng xảy ra khi $t = 1$ hoặc $t = 2$.	1,5
		TH1. $t = 1$: Khi đó, $x = 1$. Do $y \geq z \geq x = 1$ và $yz = 1$ nên $y = z = 1$. TH2. $t = 2$: Khi đó, $x = 0$. Ta có $y + z = yz = 4$ nên $y = z = 2$.	1,0
3		Cho p, q là các số nguyên tố và thỏa mãn: $q = 4p + 1 \dots$	4,0
		Do $p - 1 < q$ nên $\gcd(p - 1; q) = 1$. Do đó, điều phải chứng minh tương đương với $p^p \equiv 1 \pmod{q}.$ Nhận xét: p lẻ. Ta có $4p \equiv -1 \pmod{q} \Rightarrow 4^p \cdot p^p \equiv -1 \pmod{q} \Rightarrow p^p \cdot 2^{\frac{q-1}{2}} \equiv -1 \pmod{q}$	2,0
		Ta chứng minh: $2^{\frac{q-1}{2}} \equiv -1 \pmod{q}$. Ta có $2 \mid \frac{q-1}{2}$ nên $2^{\frac{q-1}{2}} \left(\frac{q-1}{2}\right)! \equiv 2 \cdot 4 \dots \frac{q-1}{2} \cdot \frac{q+5}{2} \dots (q-1) \pmod{q}$ $\equiv (-1)^{\frac{q-1}{4}} \cdot \left(\frac{q-1}{2}\right)! \pmod{q}.$ Từ đó suy ra $2^{\frac{q-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{q-1}{4}} \pmod{q}$. Mà $q \equiv 5 \pmod{8}$ nên $\frac{q-1}{4}$ là số lẻ. Do đó, $2^{\frac{q-1}{2}} \equiv -1 \pmod{q}$ (đpcm).	2,0

4		Cho tam giác nhọn ABC , với $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O) ...	6,0
	a)	Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác (GKH) tiếp xúc với (O) .	3,0
		 Lấy T đối xứng A qua DO. Vì $EFTG$ là hình thang cân nên E, F, T, G đồng viên. Ta có: $(TE, TD) = -(AE, AD) = (AD, AE) = (CA, CB) = (KE, KD) \pmod{\pi}$. Suy ra các điểm D, E, K, T đồng viên. Vậy điểm T là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $EFHKDG$. Suy ra T, K, H, G đồng viên. Ta có: $(TD, TK) = (ED, EK) = (EF, EK) = (GT, GK) \pmod{\pi}$. Do đó DT tiếp xúc với đường tròn (KHG).	2,0
			1,0
	b)	Chứng minh rằng, PQ đi qua trực tâm của tam giác ABC .	3,0
		 Lấy X, Y theo thứ tự đối xứng với T qua AB, AC. Ta có: $(PX, PB) = (PB, PT) = (PE, PT) = (FE, FT) = (EG, EF) = (FA, FE) = (FQ, FE) = (PQ, PA) \pmod{\pi}$ nên X, P, Q thẳng hàng. Tương tự, Y, P, Q thẳng hàng. Ta có $XY \equiv PQ$ là đường thẳng Steiner của tam giác ABC nên PQ đi qua trực tâm tam giác ABC.	

-----Hết-----

HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ THI CHÍNH THỨC

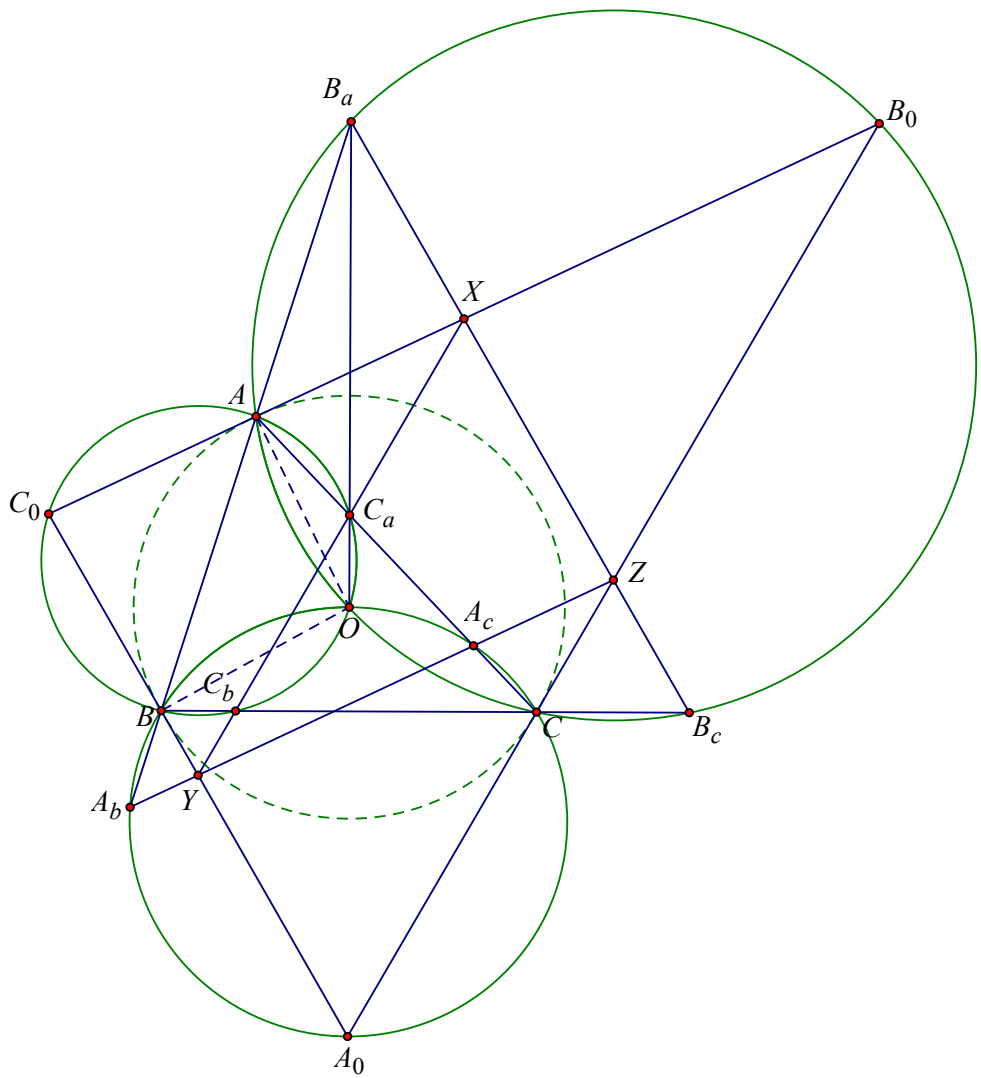
Môn: TOÁN
Ngày thi thứ hai: 31/8/2022
(Hướng dẫn chấm có 02 trang)

A. HƯỚNG DẪN CHẤM

- Nếu học sinh giải theo cách khác đáp án mà vẫn logic, đúng thì giám khảo xem xét cho điểm tương ứng.
- Nếu học sinh có sử dụng các định lý, các hệ quả, các bổ đề... phổ biến trong các chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi và nêu được tên thì giám khảo vẫn chấm đúng.
- Điểm số toàn bài, mỗi câu, mỗi ý **không làm tròn**, giám khảo có thể thống nhất đáp án, chia các ý điểm lớn thành bội của 0,25.

B. ĐÁP ÁN – BIỂU ĐIỂM

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
5			7,0
	a)	Tính $P_{2022}(2)$	3,0
		Đầu tiên, ta có $\{\pm 2; 0\}$ là nghiệm của $P_0(x) = 0$, và $\{\pm 1; 3\}$ là nghiệm của $P_1(x) = -1$. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp: $P_{2n}(x) = 0$ nhận $\{\pm 2; 0\}$ là nghiệm và $P_{2n+1}(x) = -1$ nhận $\{\pm 1; 3\}$ là nghiệm. Thật vậy, khẳng định đúng với $n = 0$. Giả sử khẳng định đã đúng tới $n \in \mathbb{N}$. Ta có $P_{2n+2}(x) = P_{2n+1}(1+x) \cdot P_{2n+1}(1-x) - 1$ nên $P_{2n+2}(0) = P_{2n+1}(1) \cdot P_{2n+1}(-1) - 1 = 0,$ $P_{2n+2}(2) = P_{2n+1}(3) \cdot P_{2n+1}(-1) - 1 = 0$ và $P_{2n+2}(-2) = 0$. Từ đó, $P_{2n+3}(x) = -1$ nhận $\{\pm 1; 3\}$ là nghiệm. Vậy khẳng định được chứng minh. Vậy $P_{2022}(2) = 0$.	
	b)		4,0
		Đầu tiên, bằng quy nạp dễ dàng chứng minh được $P_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$.	0,5
		Ta sẽ chứng minh $x^{2n+1} \mid P_{2n}(x)$ trong $\mathbb{Z}[x]$ với mọi số tự nhiên n. Thật vậy, do $P_0(x) = x(x^2 - 4)$ nên khẳng định đúng với $n = 0$. Giả sử đã đúng tại $n \in \mathbb{N}$ nào đó. Theo giả thiết, ta có $P_{2n+2}(x) = (P_{2n}(2+x) \cdot P_{2n}(-x) - 1)(P_{2n}(2-x) \cdot P_{2n}(x) - 1) - 1.$ Đề ý rằng, $P_k(x)$ là đa thức chẵn, với mọi $k \geq 1$. Do đó $P_{2n+2}(x) = P_{2n}(x) \cdot Q_n(x),$ trong đó $Q_n(x) = P_{2n}(2+x) \cdot P_{2n}(2-x) \cdot P_{2n}(x) + P_{2n}(2+x) + P_{2n}(2-x).$	2,0
		Ta có $Q_n(x)$ cũng là đa thức chẵn và $Q_n(0) = 0$ (theo câu a) nên $x^2 \mid Q_n(x)$. Do đó, $x^{2n+3} \mid P_{2n+2}(x)$. Vậy khẳng định được chứng minh. Do đó $x^{2023} \mid P_{2022}(x)$.	1,5
6			6,0
		Để cho tiện, ta kí hiệu $S = \{1, 2, 3, \dots, mn\}$. Ta đi đếm số các cặp (a, A) trong đó $a \in S$ và $A \in T$ mà $a \in A$. Mỗi a có mn cách chọn, và mỗi a cố định thì A có đúng hai cách chọn. Do đó số các cặp như vậy là $2mn$. Mặt khác, mỗi A có T cách chọn, và mỗi A cố định thì có m cách chọn a. Từ đó suy ra số các cặp (a, A) như vậy là $m T$. Thành thử $T = 2n$.	2,0

		Ta đi đếm số các bộ ba (x, A, B) trong đó $x \in S$ và $A, B \in T$ sao cho $x \in A \cap B$. Lưu ý ta coi (x, A, B) và (x, B, A) là một. Với mỗi $x \in S$ có mn cách chọn và nếu x cố định ta có đúng một cách chọn cặp (A, B). Thành thử số các bộ là mn. Mặt khác số các cách chọn cặp (A, B) không tính thứ tự từ T là $C_{ T }^2 = C_{2n}^2$. Mỗi cặp như vậy có tối đa 1 số x thuộc. Thành thử số các bộ (x, A, B) như vậy không vượt quá C_{2n}^2. Vậy $C_{2n}^2 \geq mn$ hay $m \leq 2n - 1$.	2,0
		Lấy $2n$ đường thẳng, đôi một giao nhau và không có 3 đường thẳng nào đồng quy. Do đó số giao điểm là $(2n - 1)n$. Đánh số giao điểm là $1, 2, \dots, (2n - 1)n$. Ta kí hiệu A_i là tập các giao điểm thuộc đường thứ i và T là tập các tập A_i như thế. Hiển nhiên họ T thỏa mãn yêu cầu.	2,0
7			7,0
	a	 Giả sử các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A, B, C đôi một cắt nhau tạo thành tam giác $A_0B_0C_0$. Ta có: $(C_aO, BC) = (C_aO, AC) + (CA, CB) = (BO, BA) + (CA, CB) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.$ Suy ra $C_aO \perp BC$. Tương tự, $B_aO \perp BC$. Vậy bộ điểm (O, B_a, C_a) thẳng hàng.	4,0
	b)	Chứng minh tương tự, các bộ điểm $(O, C_b, A_b); (O, A_c, B_c)$ thẳng hàng. Áp dụng định lí Pascal cho bộ điểm (B, A_c, O, A_b, A_0, C), chú ý rằng $A_cC \cap A_0O = C_a, BC \cap OA_b = C_b$, ta suy ra C_aC_b, A_0B, A_bA_c đồng quy. Điều đó có nghĩa Y thuộc A_0C_0. Tương tự, X, Z lần lượt thuộc B_0C_0, C_0A_0.	3,0

-----Hết-----