

## CHỦ ĐỀ 5: NGUYÊN HÀM CỦA HÀM HỮU TỈ

### A. LÝ THUYẾT

#### I. Các công thức cần nhớ

$$(1). \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C \rightarrow \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$$

$$(2). \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$(3). \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \rightarrow \int \frac{1}{u^2+a^2} du = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C$$

#### II. Nguyên hàm dạng $I = \int \frac{P(x)dx}{Q(x)}$

Nếu bậc của tử số lớn hơn hoặc của mẫu số thực hiện phép chia đa thức ta có:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = g(x) + \frac{P'(x)}{Q(x)}. \text{ Dưới đây là một số dạng thường gặp.}$$

✎ **Dạng 1:**  $I = \int \frac{P(x)dx}{ax+b}$

Phân tích:  $\frac{P(x)}{ax+b} = g(x) + \frac{k}{ax+b}$  khi đó  $I = \int g(x) dx + k \int \frac{dx}{ax+b}$

✎ **Dạng 2:**  $I = \int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx$

☑ **Trường hợp 1:**  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

Phân tích:  $\frac{mx+n}{ax^2+bx+c} = \frac{mx+m}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{a} \left( \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} \right)$

(Đồng nhất hệ số để tìm A, B).

$$\Rightarrow I = \frac{1}{a} (A \ln|x-x_1| + B \ln|x-x_2|) + C.$$

☑ **Trường hợp 2:**  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

$$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c} = \frac{mx+n}{a(x-x_0)^2} = \frac{m(x-x_0)+p}{a(x-x_0)^2} = \frac{m}{a(x-x_0)} + \frac{p}{a(x-x_0)^2}$$

☑ **Trường hợp 3:**  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

Phân tích:  $\frac{mx+n}{ax^2+bx+c} = \frac{k(2ax+b)}{ax^2+bx+c} + \frac{p}{a(x-x_0)^2+q}$

Khi đó  $I = \int \frac{kd(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c} + \frac{p}{a} \int \frac{1}{(x-x_0)^2+n^2} dx$

✎ **Dạng 3:**  $I = \int \frac{P(x)dx}{Q(x)}$  với  $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

☑ **Trường hợp 1:**  $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

Phân tích: 
$$\frac{P(x)}{ax^3 + bx^2 + cx + d} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \frac{C}{x - x_3}$$

☑ **Trường hợp 2:**  $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)^2$

Phân tích: 
$$\frac{P(x)}{ax^3 + bx^2 + cx + d} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{Bx + C}{(x - x_2)^2}$$

☑ **Trường hợp 3:**  $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(mx^2 + nx + p)$  trong đó  $mx^2 + nx + p = 0$  vô nghiệm.

Phân tích: 
$$\frac{P(x)}{ax^3 + bx^2 + cx + d} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{Bx + C}{mx^2 + nx + p}$$

✎ **Dạng 4: [Tham khảo và nâng cao]:**  $I = \int \frac{P(x)dx}{x^4 \pm a^2}$  trong đó bậc của  $P(x)$  nhỏ hơn 4.

☑ **Trường hợp 1:**  $I = \int \frac{P(x)dx}{x^4 + a^2}$

Phân tích: 
$$\frac{P(x)}{x^4 + a^2} = \frac{A(x^2 + a) + B(x^2 - a) + Cx^3 + Dx}{x^4 + a^2}$$

Khi đó ta có: 
$$I_1 = \int \frac{x^2 + a}{x^4 + a^2} dx = \int \frac{1 + \frac{a}{x^2}}{x^2 + \frac{a^2}{x^2}} dx = \int \frac{d\left(x - \frac{a}{x}\right)}{\left(x - \frac{a}{x}\right)^2 + 2a} \rightarrow I_1 = \int \frac{du}{u^2 + 2a}$$

$$I_2 = \int \frac{x^2 - a}{x^4 + a^2} dx = \int \frac{1 - \frac{a}{x^2}}{x^2 + \frac{a^2}{x^2}} dx = \int \frac{d\left(x + \frac{a}{x}\right)}{\left(x + \frac{a}{x}\right)^2 - 2a} \rightarrow I_2 = \int \frac{du}{u^2 - 2a}$$

$$I_3 = \int \frac{x^3 dx}{x^4 + a^2} = \frac{1}{4} \int \frac{d(x^4 + a^2)}{x^4 + a^2} = \frac{1}{4} \ln|x^4 + a^2| + C$$

$$I_4 = \int \frac{xdx}{x^4 + a^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{x^4 + a^2} \rightarrow I_4 = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 + a^2}.$$

Từ đó suy ra nguyên hàm  $I = \int \frac{P(x)dx}{x^4 + a^2}$

☑ **Trường hợp 2:**  $I = \int \frac{P(x)dx}{x^4 - a^2}$

Phân tích:  $\frac{P(x)}{x^4 - a^2} = \frac{Ax^3 + Bx + (Cx^2 + D)}{x^4 - a^2}$

Khi đó xét:  $I_1 = \int \frac{Ax^3 + Bx}{x^4 - a^2} dx = \frac{A}{4} \int \frac{d(x^4 - a^2)}{x^4 - a^2} + \frac{B}{2} \int \frac{d(x^2)}{x^4 - a^2} \rightarrow I_1 = \frac{A}{4} \int \frac{du}{u} + \frac{B}{2} \int \frac{dv}{v^2 - a^2}$

Phân tích  $I_2 = \int \frac{Cx^2 + D}{x^4 - a^2} dx = \int \left( \frac{M}{x^2 - a} + \frac{N}{x^2 + a} \right) dx$  (Đồng nhất tìm M, N).

✎ **Dạng 5 [Tham khảo và nâng cao]:** Một số nguyên hàm hữu tỷ khi  $Q(x)$  là đa thức bậc 6.

- $I_1 = \int \frac{dx}{x^6 - 1} = \int \frac{dx}{(x^3 - 1)(x^3 + 1)} = \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{x^3 - 1} - \frac{1}{x^3 + 1} \right)$

- $I_2 = \int \frac{xdx}{x^6 - 1} = \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{(x^2)^3 - 1} \rightarrow I_2 = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^3 - 1}$

- $I_3 = \int \frac{x^2 dx}{x^6 - 1} = \frac{1}{3} \int \frac{d(x^3)}{x^6 - 1} \rightarrow I_3 = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u^2 - 1}$

- $I_4 = \int \frac{x^3 dx}{x^6 - 1} = \frac{1}{2} \int \frac{x^2 d(x^2)}{x^6 - 1} \rightarrow I_4 = \frac{1}{2} \int \frac{udu}{u^3 - 1}$

- $I_5 = \int \frac{x^4 dx}{x^6 - 1} = \int \frac{(x^4 + x^2 + 1) + (x^2 - 1) - 2}{(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)} dx = \int \frac{dx}{x^2 - 1} - \int \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1} - 2 \int \frac{dx}{x^6 - 1}$

Với  $K = \int \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2 + 1) - (x^2 - 1)}{x^4 + x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 - 1}{x^4 + x^2 + 1} dx$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 3} - \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x + \frac{1}{x}\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 1}$$

$$\rightarrow K = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 + 3} - \frac{1}{2} \int \frac{dv}{v^2 - 1}$$

## B. VÍ DỤ MINH HỌA

**Ví dụ 1:** Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

**A.**  $I_1 = \int \frac{4}{2x - 1} dx$

**B.**  $I_2 = \int \frac{x + 1}{x - 1} dx$

**C.**  $I_3 = \int \frac{2x + 1}{3 - 4x} dx$

**D.**  $I_4 = \int \frac{x^2 + x + 4}{x + 3} dx$

*Lời giải*

**a)**  $I_1 = \int \frac{4}{2x - 1} dx = \frac{4}{2} \int \frac{d(2x - 1)}{2x - 1} = 2 \ln |2x - 1| + C$

**b)**  $I_2 = \int \frac{x + 1}{x - 1} dx = \int \frac{x - 1 + 2}{x - 1} dx = \int \left( 1 + \frac{2}{x - 1} \right) dx = \int dx + 2 \int \frac{dx}{x - 1} = x + 2 \ln |x - 1| + C.$

$$\begin{aligned} \text{c) } I_3 &= \int \frac{2x+1}{3-4x} dx = \int \frac{-\frac{1}{2}(3-4x) + \frac{5}{2}}{3-4x} dx = \int \left( -\frac{1}{2} + \frac{5}{2(3-4x)} \right) dx = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \int \frac{dx}{3-4x} = \\ &= -\frac{1}{2}x - \frac{5}{8} \int \frac{d(3-4x)}{3-4x} = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{8} \ln|3-4x| + C \rightarrow I_3 = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{8} \ln|3-4x| + C \end{aligned}$$

$$\text{d) } I_4 = \int \frac{x^2+x+4}{x+3} dx = \int \left( x-2 + \frac{10}{x+3} \right) dx = \int (x-2) dx + 10 \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \frac{x^2}{2} - 2x + 10 \ln|x+3| + C.$$

**Ví dụ 2:** Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

A.  $I_5 = \int \frac{x^3 - x + 7}{2x + 5} dx$

B.  $I_6 = \int \frac{3x^3 + 3x^2 + x + 2}{x - 1} dx$

C.  $I_7 = \int \frac{4x^4 + 3x^2 + x + 2}{2x + 1} dx$

**Lời giải**

a) Chia tử số cho mẫu số ta được  $\frac{x^3 - x + 7}{2x + 5} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{21}{8} - \frac{\frac{49}{8}}{2x + 5}$

Khi đó:  $I_5 = \int \frac{x^3 - x + 7}{2x + 5} dx = \int \left( \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{21}{8} - \frac{\frac{49}{8}}{2x + 5} \right) dx = \int \left( \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{21}{8} \right) dx - \frac{49}{8} \int \frac{dx}{2x + 5}$   
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{5}{4} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{21}{8}x - \frac{49}{16} \int \frac{d(2x+5)}{2x+5} = \frac{x^3}{6} - \frac{5x^2}{8} + \frac{21x}{8} - \frac{49}{16} \ln|2x+5| + C.$

b) Ta có  $I_6 = \int \frac{3x^3 + 3x^2 + x + 2}{x - 1} dx = \int \left( 3x^2 + 6x + 7 + \frac{9}{x-1} \right) dx = x^3 + 3x^2 + 7x + 9 \ln|x-1| + C.$

c) Chia tử số cho mẫu số ta được  $\frac{4x^4 + 3x^2 + x + 2}{2x + 1} = 2x^3 - x^2 + 2x - \frac{1}{2} + \frac{\frac{5}{2}}{2x + 1}$

$I_7 = \int \frac{4x^4 + 3x^2 + x + 2}{2x + 1} dx = \int \left( 2x^3 - x^2 + 2x - \frac{1}{2} + \frac{\frac{5}{2}}{2x + 1} \right) dx = \int \left( 2x^3 - x^2 + 2x - \frac{1}{2} \right) dx + \frac{5}{2} \int \frac{dx}{2x + 1}$   
 $= 2 \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} \int \frac{d(2x+1)}{2x+1} = \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} \ln|2x+1| + C$

**Ví dụ 3:** Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

A.  $I_1 = \int \frac{dx}{x^2 - 2x - 3} dx$

B.  $I_2 = \int \frac{2dx}{-3x^2 + 4x - 1}$

C.  $I_3 = \int \frac{2x + 3}{x^2 - 3x - 4} dx$

D.  $I_4 = \int \frac{3x + 4}{5x^2 + 6x + 1} dx$

**Lời giải**

$$a) I_1 = \int \frac{dx}{x^2 - 2x - 3} dx = \int \frac{dx}{(x+1)(x-3)} = \frac{1}{4} \int \frac{(x+1) - (x-3)}{(x+1)(x-3)} dx = \frac{1}{4} \left( \int \frac{dx}{x-3} - \int \frac{dx}{x+1} \right) = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-3}{x+1} \right| + C$$

$$b) \text{Ta có } I_2 = \int \frac{2dx}{-3x^2 + 4x - 1} = -2 \int \frac{dx}{3x^2 - 4x + 1} = -2 \int \frac{dx}{(x-1)(3x-1)} = \frac{-2}{4} \int \frac{(3x-1) - 3(x-1)}{(x-1)(3x-1)} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \left( \int \frac{dx}{x-1} - 3 \int \frac{dx}{3x-1} \right) = -\frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \int \frac{d(3x-1)}{3x-1} = -\frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|3x-1| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{3x-1}{x-1} \right| + C.$$

$$c) I_3 = \int \frac{2x+3}{x^2-3x-4} dx$$

**Cách 1:**

Nhận thấy mẫu số có hai nghiệm  $x = -1$  và  $x = 4$ , khi đó  $\frac{2x+3}{x^2-3x-4} = \frac{2x+3}{(x+1)(x-4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-4}$

$$\text{Đồng nhất ta được } 2x+3 \equiv A(x-4)+B(x+1) \rightarrow \begin{cases} 2 = A+B \\ 3 = -4A+B \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{5} \\ B = \frac{11}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_3 = \int \frac{2x+3}{x^2-3x-4} dx = \int \left( \frac{-\frac{1}{5}}{x+1} + \frac{\frac{11}{5}}{x-4} \right) dx = -\frac{1}{5} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{11}{5} \int \frac{dx}{x-4} = -\frac{1}{5} \ln|x+1| + \frac{11}{5} \ln|x-4| + C.$$

$$\text{Vậy } I_3 = -\frac{1}{5} \ln|x+1| + \frac{11}{5} \ln|x-4| + C$$

**Cách 2:**

Do mẫu số có đạo hàm là  $2x-3$  nên ta sẽ phân tích tử số có chứa đạo hàm của mẫu như sau:

$$I_3 = \int \frac{2x+3}{x^2-3x-4} dx = \int \frac{2x-3+6}{x^2-3x-4} dx = \int \frac{(2x-3)dx}{x^2-3x-4} + 6 \int \frac{dx}{x^2-3x-4} = \int \frac{d(x^2-3x-4)}{x^2-3x-4} + 6 \int \frac{dx}{(x+1)(x-4)}$$

$$= \ln|x^2-3x-4| + \frac{6}{5} \int \frac{(x+1)-(x-4)}{(x+1)(x-4)} dx = \ln|x^2-3x-4| + \frac{6}{5} \left( \int \frac{dx}{x-4} - \int \frac{dx}{x+1} \right) = \ln|x^2-3x-4| + \frac{6}{5} \ln \left| \frac{x-4}{x+1} \right| + C$$

*Nhận xét:*

Nhìn hai cách giải, thoạt nhìn chúng ta lầm tưởng là bài toán ra hai đáp số. Nhưng, chỉ bằng một vài phép biến đổi logarit đơn giản ta có ngay cùng kết quả.

Thật vậy, thao cách 2 ta có:

$$\ln|x^2-3x-4| + \frac{6}{5} \ln \left| \frac{x-4}{x+1} \right| = \ln|x-4| + \ln|x+1| + \frac{6}{5} \ln|x-4| - \frac{6}{5} \ln|x+1| + C = -\frac{1}{5} \ln|x+1| + \frac{11}{5} \ln|x-4|.$$

Rõ ràng, chúng ta thấy ngay ưu điểm của cách 2 là không phải đồng nhất, và cũng không cần đến giấy nháp ta có thể giải quyết nhanh gọn bài toán, và đó là điều mà tôi mong muốn các bạn thực hiện được!

$$d) I_4 = \int \frac{3x+4}{5x^2+6x+1} dx = \int \frac{3x+4}{(x+1)(5x+1)} dx$$

▪ **Cách 1:**

$$\frac{3x+4}{(x+1)(5x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{5x+1} \rightarrow 3x+4 \equiv A(5x+1) + B(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 5A + B \\ 4 = A + B \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{4} \\ B = \frac{17}{4} \end{cases}$$

$$\text{Từ đó } I_4 = \int \frac{3x+4}{(x+1)(5x+1)} dx = \int \left( -\frac{1}{4(x+1)} + \frac{17}{4(5x+1)} \right) dx = -\frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{17}{4} \int \frac{dx}{5x+1}$$

$$\rightarrow I_4 = -\frac{1}{4} \ln|x+1| + \frac{17}{20} \ln|5x+1| + C$$

▪ **Cách 2:**

Do mẫu số có đạo hàm là  $10x+6$  nên ta sẽ phân tích tử số có chứa đạo hàm của mẫu như sau:

$$\begin{aligned} I_4 &= \int \frac{3x+4}{5x^2+6x+1} dx = \int \frac{\frac{3}{10}(10x+6) + \frac{22}{10}}{5x^2+6x+1} dx = \frac{3}{10} \int \frac{(10x+6)}{5x^2+6x+1} dx + \frac{22}{10} \int \frac{dx}{5x^2+6x+1} \\ &= \frac{3}{10} \int \frac{d(5x^2+6x+1)}{5x^2+6x+1} + \frac{22}{10} \int \frac{dx}{(5x+1)(x+1)} = \frac{3}{10} \ln|5x^2+6x+1| - \frac{22}{40} \int \frac{(5x+1)-5(x+1)}{(5x+1)(x+1)} dx \\ &= \frac{3}{10} \ln|5x^2+6x+1| - \frac{22}{40} \left( \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{5x}{5x+1} \right) = \frac{3}{10} \ln|5x^2+6x+1| - \frac{11}{20} \ln \left| \frac{x+1}{5x+1} \right| + C. \end{aligned}$$

**Ví dụ 4:** Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

**A.**  $I_5 = \int \frac{4x^3+2x-1}{x^2-1} dx$

**B.**  $I_6 = \int \frac{5-x}{3-2x-x^2} dx$

**Lời giải**

Do tử số có bậc lớn hơn mẫu nên chia đa thức ta được  $I_5 = \int \frac{4x^3+2x-1}{x^2-1} dx = \int \left( 4x + \frac{6x-1}{x^2-1} \right) dx$

Mà  $\frac{6x-1}{x^2-1} = \frac{6x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow 6x-1 \equiv A(x-1) + B(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = A + B \\ -1 = -A + B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{7}{2} \\ B = \frac{5}{2} \end{cases}$

$$\rightarrow I_5 = \int \left( 4x + \frac{7}{2(x-1)} + \frac{5}{2(x+1)} \right) dx = 2x^2 + \frac{7}{2} \ln|x-1| + \frac{5}{2} \ln|x+1| + C$$

b) Ta có:  $\frac{5-x}{3-2x-x^2} = \frac{x-5}{x^2+2x-3} = \frac{x-5}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} \rightarrow x-5 \equiv A(x+3) + B(x-1)$

$$\rightarrow \begin{cases} 1 = A + B \\ -5 = 3A - B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 2 \end{cases} \rightarrow I_6 = \int \frac{5-x}{3-2x-x^2} dx = \int \left( \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x+3} \right) dx = -\int \frac{dx}{x-1} + 2 \int \frac{dx}{x+3}$$

$$= -\ln|x-1| + 2\ln|x+3| + C = \ln\left|\frac{(x-3)^2}{x-1}\right| + C \rightarrow I_6 = \ln\left|\frac{(x-3)^2}{x-1}\right| + C.$$

**Ví dụ 5:** Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

**A.**  $I_1 = \int \frac{2dx}{x^2 - 2x + 1}$

**B.**  $I_2 = \int \frac{dx}{6x^2 + 9x + 1}$

**C.**  $I_3 = \int \frac{dx}{25x^2 - 10x + 1}$

**Lời giải**

a)  $I_1 = \int \frac{2dx}{x^2 - 2x + 1} = 2 \int \frac{dx}{(x-1)^2} = 2 \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} = -\frac{2}{x-1} + C \rightarrow I_1 = -\frac{2}{x-1} + C$

b)  $I_2 = \int \frac{dx}{6x^2 + 9x + 1} = \int \frac{dx}{(3x+1)^2} = \frac{1}{3} \int \frac{d(3x+1)}{(3x+1)^2} = -\frac{1}{3(3x+1)} + C \rightarrow I_2 = -\frac{1}{3(3x+1)} + C.$

c)  $I_3 = \int \frac{dx}{25x^2 - 10x + 1} = \int \frac{dx}{(5x-1)^2} = \frac{1}{5} \int \frac{d(5x-1)}{(5x-1)^2} = -\frac{1}{5(5x-1)} + C \rightarrow I_3 = -\frac{1}{5(5x-1)} + C$

**Ví dụ 6:** Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

**a.**  $I_4 = \int \frac{2x-1}{4x^2 + 4x + 1} dx$

**b.**  $I_5 = \int \frac{4x^2 - 3}{4x^2 + 12x + 9} dx$

**c.**  $I_6 = \int \frac{1-5x}{9x^2 - 24x + 16} dx$

**Lời giải**

a)  $I_4 = \int \frac{2x-1}{4x^2 + 4x + 1} dx = \int \frac{2x-1}{(2x+1)^2} dx$

▪ **Cách 1:**

Đặt  $t = 2x + 1 \rightarrow \begin{cases} 2x = t - 1 \\ dt = 2dx \end{cases} \rightarrow I_4 = \int \frac{2x-1}{(2x+1)^2} dx = \int \frac{t-2}{t^2} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \left( \int \frac{dt}{t} - \int \frac{2dt}{t^2} \right) = \frac{1}{2} \ln|t| + \frac{1}{t} + C$

$\rightarrow I_4 = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + \frac{1}{2x+1} + C.$

▪ **Cách 2:**

$I_4 = \int \frac{2x-1}{4x^2 + 4x + 1} dx = \int \frac{\frac{1}{4}(8x+4) - 2}{4x^2 + 4x + 1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{(8x+4)}{4x^2 + 4x + 1} dx - 2 \int \frac{dx}{(2x+1)^2}$

$= \frac{1}{4} \int \frac{d(4x^2 + 4x + 1)}{4x^2 + 4x + 1} = -\int \frac{d(2x+1)}{(2x+1)^2} = \frac{1}{4} \int \frac{d(4x^2 + 4x + 1)}{4x^2 + 4x + 1} - \int \frac{d(2x+1)}{(2x+1)^2}$

$= \frac{1}{4} \ln|4x^2 + 4x + 1| + \frac{1}{2x+1} + C = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + \frac{1}{2x+1} + C$

b)  $I_5 = \int \frac{4x^2 - 3}{4x^2 + 12x + 9} dx = \int \left( 1 - \frac{12x+12}{4x^2 + 12x + 9} \right) dx = x - 12 \int \frac{dx}{(2x+3)^2} = x - 6 \int \frac{d(2x+3)}{(2x+3)^2} = x + \frac{6}{2x+3} + C$

$$c) I_6 = \int \frac{1-5x}{9x^2-24x+16} dx = \int \frac{1-5x}{(3x-4)^2} dx$$

▪ **Cách 1:**

$$\text{Đặt } t = 3x - 4 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{t+4}{3} \\ dt = 3dx \end{cases} \rightarrow I_6 = \int \frac{1-5x}{(3x-4)^2} dx = \int \frac{1-\frac{5(t+4)}{3}}{t^2} \frac{dt}{3} = -\frac{1}{9} \int \frac{5t+17}{t^2} dt$$

$$= -\frac{1}{9} \left( 5 \ln|t| - \frac{17}{t} \right) + C \rightarrow I_6 = -\frac{1}{9} \left( 5 \ln|3x-4| - \frac{17}{3x-4} \right) + C = -\frac{5}{9} \ln|3x-4| + \frac{17}{9(3x-4)} + C$$

▪ **Cách 2:**

$$I_6 = \int \frac{1-5x}{(3x-4)^2} dx = \int \frac{-\frac{5}{3}(3x-4) - \frac{17}{3}}{(3x-4)^2} dx = -\frac{5}{3} \int \frac{dx}{3x-4} - \frac{17}{3} \int \frac{dx}{(3x-4)^2} =$$

$$= -\frac{5}{9} \int \frac{d(3x-4)}{(3x-4)} - \frac{17}{9} \int \frac{d(3x-4)}{(3x-4)^2} = -\frac{5}{9} \ln|3x-4| + \frac{17}{9} \cdot \frac{1}{3x-4} + C$$

$$\rightarrow I_6 = -\frac{5}{9} \ln|3x-4| + \frac{17}{9(3x-4)} + C$$

**Ví dụ 7:** Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a.  $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+2x+3}$

b.  $I_2 = \int \frac{dx}{4x^2+4x+2}$

c.  $I_3 = \int \frac{dx}{9x^2+24x+20}$

**Lời giải**

a)  $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+2x+3} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+2} = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C$

b)  $I_2 = \int \frac{dx}{4x^2+4x+2} = \int \frac{dx}{(2x+1)^2+1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x+1)}{(2x+1)^2+1^2} = \frac{1}{2} \arctan(2x+1) + C$

c)  $I_3 = \int \frac{dx}{9x^2+24x+20} = \int \frac{dx}{(3x+4)^2+4} = \int \frac{d(3x+4)}{(3x+4)^2+2^2} = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{3x+4}{2}\right) + C$

**Ví dụ 8:** Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a.  $I_4 = \int \frac{3x+5}{2x^2+x+10} dx$

b.  $I_5 = \int \frac{4x-1}{6x^2+9x+4} dx$

c.  $I_6 = \int \frac{2x^4-x}{x^2+2x+7} dx$

**Lời giải**

a)  $I_4 = \int \frac{3x+5}{2x^2+x+10} dx = \int \frac{\frac{3}{4}(4x+1) + \frac{17}{4}}{2x^2+x+10} dx = \frac{3}{4} \int \frac{(4x+1)dx}{2x^2+x+10} + \frac{17}{4} \int \frac{dx}{2x^2+x+10}$



$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{4} \int \frac{d(2x^2 + x + 10)}{2x^2 + x + 10} + \frac{17}{8} \int \frac{dx}{x^2 + \frac{x}{2} + 5} = \frac{3}{4} \ln(2x^2 + x + 10) + \frac{17}{8} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{79}{16}} \\
&= \frac{3}{4} \ln(2x^2 + x + 10) + \frac{17}{8} \int \frac{d\left(x + \frac{1}{4}\right)}{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{79}}{4}\right)^2} = \frac{3}{4} \ln(2x^2 + x + 10) + \frac{17}{8} \cdot \frac{4}{\sqrt{79}} \arctan\left(\frac{4x+1}{\sqrt{79}}\right) + C
\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } I_4 = \frac{3}{4} \ln(2x^2 + x + 10) + \frac{17}{2\sqrt{79}} \arctan\left(\frac{4x+1}{\sqrt{79}}\right) + C$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } I_5 &= \int \frac{4x-1}{6x^2+9x+4} dx = \int \frac{\frac{1}{3}(12x+9)-4}{6x^2+9x+4} dx = \frac{1}{3} \int \frac{(12x+9)dx}{6x^2+9x+4} dx - 4 \int \frac{dx}{6x^2+9x+4} \\
&= \frac{1}{3} \int \frac{d(6x^2+9x+4)}{6x^2+9x+4} dx - 4 \int \frac{dx}{(3x+1)^2+3} = \frac{1}{3} \ln(6x^2+9x+4) - \frac{4}{3} \int \frac{d(3x+1)}{(3x+1)^2+(\sqrt{3})^2} \\
&= \frac{1}{3} \ln(6x^2+9x+4) - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{3x+1}{\sqrt{3}}\right) + C
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_5 = \frac{1}{3} \ln(6x^2+9x+4) - \frac{4}{3\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{3x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$\text{c) } I_6 = \int \frac{2x^4-x}{x^2+2x+7} dx = \int \left(2x^2-4x+1 + \frac{25x-7}{x^2+2x+7}\right) dx = \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + x + \int \frac{25x-7}{x^2+2x+7} dx$$

$$\begin{aligned}
\text{Đặt } J &= \int \frac{25x-7}{x^2+2x+7} dx = \int \frac{\frac{25}{2}(2x+2)-32}{x^2+2x+7} dx = \frac{25}{2} \int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+7} dx - 32 \int \frac{dx}{x^2+2x+7} \\
&= \frac{25}{2} \int \frac{d(x^2+2x+7)}{x^2+2x+7} - \int \frac{dx}{(x+1)^2+6} = \frac{25}{2} \ln(x^2+2x+7) - 32 \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+(\sqrt{6})^2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{25}{2} \int \frac{d(x^2+2x+7)}{x^2+2x+7} - \frac{32}{\sqrt{6}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow I_6 = \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + x + \frac{25}{2} \ln(x^2+2x+7) - \frac{32}{\sqrt{6}} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{6}}\right) + C$$

### Tổng kết:

Qua ba phần trình bày về hàm phân thức có mẫu số là bậc hai, chúng ta nhận thấy điểm mấu chốt giải quyết bài toán là xử lý mẫu số.

$$\text{Nếu } \frac{P(x)}{ax^2+bx+c} \begin{cases} ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) \rightarrow \frac{P(x)}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a} \left( \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} \right) \\ ax^2+bx+c = (mx+n)^2 + k^2 \rightarrow \int \frac{du}{u^2+\alpha^2} = \frac{1}{\alpha} \arctan \frac{u}{\alpha} + C \\ ax^2+bx+c = (mx+n)^2 \rightarrow \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C \end{cases}$$

**Ví dụ 9:** Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a.  $I_1 = \int \frac{dx}{(x-2)(x^2-9)}$

b.  $I_2 = \int \frac{6x^2+x-2}{x(x^2-1)} dx$

c.  $I_3 = \int \frac{3x^4-x^2+3z-7}{x(x^2+x-2)} dx$

**Lời giải**

a)  $I_1 = \int \frac{dx}{(x-2)(x^2-9)} = \int \frac{dx}{(x-2)(x+3)(x-3)}$

Ta có  $\frac{1}{(x-2)(x+3)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-3} \Rightarrow 1 \equiv A(x^2-9) + B(x-2)(x-3) + C(x-2)(x+3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = A + B + C \\ 0 = -5B + C \\ 1 = -9A + 6B - 6C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{5} \\ B = \frac{1}{30} \\ C = \frac{1}{6} \end{cases}$$

**Nhận xét:**

Ngoài cách giải truyền thống trên, chúng ta có thể biến đổi cách khác như sau mà không mất nhiều thời gian cho việc tính toán. Suy nghĩ:

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x-2)(x+3)(x-3)} = \frac{1}{6} \int \frac{(x+3)-(x-3)}{(x-2)(x+3)(x-3)} dx = \frac{1}{6} \int \frac{dx}{(x-2)(x-3)} - \frac{1}{6} \int \frac{dx}{(x-2)(x+3)}$$

Đến đây, bài toán trở về các dạng biến đổi đơn giản đã xét đến!

b)  $I_2 = \int \frac{6x^2+x-2}{x(x^2-1)} dx = \int \frac{6x^2+x-2}{x(x+1)(x-1)} dx$

▪ **Cách 1:**

Ta có  $\frac{6x^2+x-2}{x(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1} \rightarrow 6x^2+x-2 \equiv A(x^2-1) + Bx(x-1) + Cx(x+1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 = A + B + C \\ 1 = -B + C \\ -2 = -A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = \frac{3}{2} \\ C = \frac{5}{2} \end{cases} \rightarrow I_2 = \int \left( \frac{2}{x} + \frac{\frac{3}{2}}{x+1} + \frac{\frac{5}{2}}{x-1} \right) dx = 2 \ln|x| + \frac{3}{2} \ln|x+1| + \frac{5}{2} \ln|x-1| + C$$

▪ **Cách 2:**

$$I_2 = \int \frac{6x^2 + x - 2}{x(x^2 - 1)} dx = \int \frac{2(3x^2 - 1) + (x - 1) + 1}{x^3 - x} dx = 2 \int \frac{(3x^2 - 1) dx}{x^3 - x} + \int \frac{(x - 1) dx}{x^3 - x} + \int \frac{dx}{x^3 - x} =$$

$$= 2 \int \frac{d(x^3 - x)}{x^3 - x} + \int \frac{dx}{x(x+1)} + \int \frac{dx}{x(x-1)(x+1)} = 2 \ln|x^3 - x| + J + K$$

$$J = \int \frac{dx}{x(x+1)} = \int \frac{(x+1) - x}{x(x+1)} dx = \int \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \ln|x| - \ln|x+1| = \ln \left| \frac{x}{x+1} \right|$$

$$\begin{aligned} K &= \int \frac{dx}{x(x-1)(x+1)} = \int \frac{(x+1) - x}{x(x-1)(x+1)} dx = \int \frac{dx}{x(x-1)} - \int \frac{dx}{(x+1)(x-1)} = \\ &= \int \frac{x - (x-1)}{x(x-1)} dx - \frac{1}{2} \int \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)(x-1)} dx = \int \frac{x - (x-1)}{x(x-1)} dx - \frac{1}{2} \int \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)(x-1)} dx \\ &= \int \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) dx - \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó ta được } I_2 = 2 \ln|x^3 - x| + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

*Nhận xét: Cách phân tích như trên vẫn chưa thực sự tối ưu, xin dành cho các bạn đọc!*

$$c) I_3 = \int \frac{3x^4 - x^2 + 3x - 7}{x(x^2 + x - 2)} dx = \int \left[ 3x - 3 \frac{8x^2 - 3x + 7}{x(x^2 + x - 2)} \right] dx = \frac{3x^2}{2} - 3x + J$$

$$\text{Với } J = \int \frac{8x^2 - 3x + 7}{x(x^2 + x - 2)} dx = \int \frac{8x^2 - 3x + 7}{x(x-1)(x+2)} dx$$

$$\text{Ta có: } \frac{8x^2 - 3x + 7}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} \rightarrow 8x^2 - 3x + 7 \equiv A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8 = A + B + C \\ -3 = A + 2B - C \\ 7 = -2A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{7}{2} \\ B = 4 \\ C = \frac{15}{2} \end{cases} \Rightarrow J = -\frac{7}{2} \ln|x| + 4 \ln|x-1| + \frac{15}{2} \ln|x+2| + C.$$

$$\text{Vậy } I_3 = \frac{3x^2}{2} - 3x - \frac{7}{2} \ln|x| + 4 \ln|x-1| + \frac{15}{2} \ln|x+2| + C$$

**Ví dụ 10:** Tìm nguyên hàm:  $I = \int \frac{4x+1}{2x+3} dx$

A.  $I = 2x - \ln|2x+3| + C$

B.  $I = 2x - \frac{1}{2} \ln|2x+3| + C$

C.  $I = x - \frac{1}{2} \ln|2x+3| + C$

D.  $I = x - \ln|2x+3| + C$

**Lời giải**

Ta có:  $I = \int \frac{4x+1}{2x+3} dx = \int \frac{2(2x+1)-1}{2x+3} dx = \int 2dx - \int \frac{dx}{2x+3} = 2x - \frac{1}{2} \ln|2x+3| + C$ . **Chọn B.**

**Ví dụ 11:** Tính nguyên hàm:  $I = \int \frac{3x^2 + 2x + 1}{x+1} dx$

A.  $I = \frac{3}{2}x^2 + x + \ln|x+1| + C$

B.  $I = \frac{3}{2}x^2 - x - 2\ln|x+1| + C$

C.  $I = \frac{3}{2}x^2 - 2x + \ln|x+1| + C$

D.  $I = \frac{3}{2}x^2 - x + 2\ln|x+1| + C$

**Lời giải**

Ta có:  $\frac{3x^2 + 2x + 1}{x+1} = \frac{3x(x+1) - (x+1) + 2}{x+1} = 3x - 1 + \frac{2}{x+1}$

Khi đó  $I = \frac{3}{2}x^2 - x + 2\ln|x+1| + C$ . **Chọn D.**

**Ví dụ 12:** Tính nguyên hàm:  $I = \int \frac{dx}{2x^2 + x - 1}$ .

A.  $I = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{2x-1}{x+1} \right| + C$

B.  $I = \ln \left| \frac{2x-1}{x+1} \right| + C$

C.  $I = \frac{2}{3} \ln \left| \frac{2x-1}{x+1} \right| + C$

D.  $I = \frac{1}{3} \ln \frac{(2x-1)^2}{x+1} + C$

**Lời giải**

Ta có:  $I = \int \frac{dx}{2x^2 + x - 1} = \int \frac{dx}{(2x-1)(x+1)} = \frac{1}{3} \int \frac{2(x+1) - (2x-1)}{(2x-1)(x+1)} dx$

$= \frac{1}{3} \int \left( \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{3} \int \frac{2dx}{2x-1} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} = \frac{1}{3} \ln|2x-1| - \frac{1}{3} \ln|x+1| + C = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{2x-1}{x+1} \right| + C$ . **Chọn A.**

**Ví dụ 13:** Tính nguyên hàm:  $I = \int \frac{x-5}{x^2-1} dx$ .

A.  $I = \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + C$

B.  $I = \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$

C.  $I = \ln \left| \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} \right| + C$

D.  $I = \ln \left| \frac{(x+1)^2}{(x-1)^3} \right| + C$

**Lời giải**

Ta có:  $\frac{x-5}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{(A+B)x + A-B}{x^2-1}$

Đồng nhất 2 vế ta có:  $\begin{cases} A+B=1 \\ A-B=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=3 \end{cases}$

Suy ra  $I = \int \left( \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-1} \right) dx = 3 \ln|x+1| - 2 \ln|x-1| + C = \ln \left| \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} \right| + C$ . **Chọn C.**

**Ví dụ 14:** Tính nguyên hàm:  $I = \int \frac{2x+1}{(3x+2)^2} dx$

A.  $I = \frac{2}{3} \ln|3x+2| - \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{3x+2} + C$ .

B.  $I = \frac{2}{3} \ln|3x+2| + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3x+2} + C$

C.  $I = \frac{2}{3} \ln|3x+2| + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3x+2} + C$

D.  $I = \frac{2}{9} \ln|3x+2| + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3x+2} + C$

**Lời giải**

Ta có:  $I = \int \frac{2x+1}{(3x+2)^2} dx = \int \frac{\frac{2}{3}(3x+2) - \frac{1}{3}}{(3x+2)^2} dx = \frac{2}{3} \int \frac{dx}{3x+2} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(3x+2)^2}$   
 $= \frac{2}{9} \ln|3x+2| + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3x+2} + C$ . **Chọn D.**

**Ví dụ 15:** Tính nguyên hàm:  $I = \int \frac{(2x+3)dx}{4x^2-4x+1}$ .

A.  $I = \frac{2}{1-2x} - \ln|2x-1| + C$ .

B.  $I = \frac{2}{2-4x} + 2 \ln|2x-1| + C$ .

C.  $I = \frac{2}{2x-1} + \frac{1}{2} \ln|2x-1| + C$ .

D.  $I = \frac{2}{1-2x} + \frac{1}{2} \ln|2x-1| + C$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\frac{(2x+3)dx}{4x^2-4x+1} = \frac{2x+3}{(2x-1)^2} = \frac{2x-1+4}{(2x-1)^2} = \frac{1}{2x-1} + \frac{4}{(2x-1)^2}$

Khi đó  $I = \int \frac{4dx}{(2x-1)^2} + \int \frac{dx}{2x-1} = \frac{-2}{2x-1} + \frac{1}{2} \ln|2x-1| + C$ . **Chọn D.**

**Ví dụ 16:** Tính nguyên hàm:  $I = \int \frac{4x+3}{x^2+2x+2} dx$ .

A.  $I = 2 \ln(x^2+2x+2) - \arctan(x+1) + C$

B.  $I = 2 \ln(x^2+2x+2) + \arctan(x+1) + C$

C.  $I = \ln(x^2+2x+2) - \arctan(x+1) + C$

D.  $I = \ln(x^2+2x+2) + \arctan(x+1) + C$

**Lời giải**

Ta có:  $I = \int \frac{4x+3}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{2(2x+2)-1}{(x+1)^2+1} dx$

$$= \int \frac{2d(x^2 + 2x + 2)}{x^2 + 2x + 2} - \int \frac{1}{(x+1)^2 + 1} = 2 \ln|x^2 + 2x + 2| - \arctan(x+1) + C.$$

$$= 2 \ln(x^2 + 2x + 2) - \arctan(x+1) + C. \text{ Chọn A.}$$

**Ví dụ 17:** Tính nguyên hàm:  $I = \int \frac{dx}{x^3 - x}$

**A.**  $I = \ln|x^2 - 1| - \frac{1}{2} \ln|x| + C$

**B.**  $I = \frac{1}{2} \ln|x^2 - 1| - 2 \ln|x| + C$

**C.**  $I = \ln|x^2 - 1| - \ln|x| + C$

**D.**  $I = \frac{1}{2} \ln|x^2 - 1| - \ln|x| + C$

*Lời giải*

Ta có:  $I = \int \frac{dx}{x^3 - x} = \int \frac{dx}{x(x+1)(x-1)} = \int \frac{x+1-x}{x(x+1)(x-1)} dx$

$$= \int \frac{dx}{(x-1)x} - \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)} = \int \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) dx - \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln|x^2 - 1| - \ln|x| + C. \text{ Chọn D.}$$

**Ví dụ 18:** Tính nguyên hàm:  $I = \int \frac{dx}{x^3 - 3x + 2}$

**A.**  $I = \frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{9} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C$

**B.**  $I = -\frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{9} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C$

**C.**  $I = -\frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C$

**D.**  $I = \frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C$

*Lời giải*

Ta có:  $I = \int \frac{dx}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{1}{3} \int \frac{(x+2) - (x-1)}{(x-1)^2(x+2)} dx$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = \frac{-1}{3(x-1)} - \frac{1}{9} \int \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{9} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C. \text{ Chọn B.}$$

**Ví dụ 19:** Tính nguyên hàm:  $I = \int \frac{3x^2 + 2}{x^4 - 4} dx$

**A.**  $I = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}} \right| + \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$

**B.**  $I = \ln \left| \frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}} \right| + \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$

$$\text{C. } I = \ln \left| \frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}} \right| + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

$$\text{D. } I = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}} \right| + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \frac{3x^2 + 2}{x^4 - 4} = \frac{A(x^2 + 2) + B(x^2 - 2)}{(x^2 - 2)(x^2 + 2)} = \frac{(A + B)x^2 + 2A - 2B}{(x^2 - x)(x^2 + 2)}$$

$$\text{Đồng nhất 2 vế ta có: } \begin{cases} A + B = 3 \\ 2A - 2B = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \int \frac{2dx}{x^2 - 2} + \int \frac{dx}{x^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}} \right| + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C. \text{ Chọn D.}$$

## BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Câu 1:** Tìm nguyên hàm  $I = \int \frac{2x^2 + 3x + 4}{x + 1} dx$ .

A.  $I = x^2 - 3\ln|x + 1| + C$ .

B.  $I = x^2 + 3\ln|x + 1| + C$ .

C.  $I = x^2 + x - 3\ln|x + 1| + C$ .

D.  $I = x^2 + x + 3\ln|x + 1| + C$ .

**Câu 2:** Tìm nguyên hàm  $I = \int \frac{x^3}{x + 1} dx$

A.  $I = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x - \ln|x + 1| + C$

B.  $I = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln|x + 1| + C$

C.  $I = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln|x + 1| + C$

D.  $I = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \ln|x + 1| + C$

**Câu 3:** Tìm nguyên hàm  $I = \int \frac{x^3 + 2x^2 - x}{x + 1} dx$ .

A.  $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 2\ln|x + 1| + C$

B.  $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 2\ln|x + 1| + C$

C.  $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x + 2\ln|x + 1| + C$

D.  $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x - 2\ln|x + 1| + C$

**Câu 4:** Tìm một nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 3x + 2}$  thỏa  $F(1) = \ln 2$ .

A.  $F(x) = x + \ln|x + 1| - 4\ln|x + 2| + 4\ln 3 - 1$

B.  $F(x) = x + \ln|x + 1| - 4\ln|x + 2| + 4\ln 3 + 1$

C.  $F(x) = x + \ln|x + 1| + 4\ln|x + 2| + 4\ln 3 + 1$

D.  $F(x) = x + \ln|x + 1| + 4\ln|x + 2| + 4\ln 3 - 1$

**Câu 5:** Tìm một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 5x + 6}$  thỏa  $F(4) = 6\ln 2$ .

A.  $F(x) = x - 6\ln\left|\frac{x - 3}{x - 2}\right| - 4$

B.  $F(x) = x - 6\ln\left|\frac{x - 3}{x - 2}\right| + 4$

C.  $F(x) = x - 6\ln\left|\frac{x - 2}{x - 3}\right| + 4$

D.  $F(x) = x - 6\ln\left|\frac{x - 2}{x - 3}\right| - 4$

**Câu 6:** Hàm số  $f(x) = \frac{5x + 11}{x^2 + 3x - 10}$  có một nguyên hàm  $F(x)$  thỏa  $F(3) = 3\ln 8$ . Tìm  $e^{F(-6)}$ .

A.  $e^{F(-6)} = 64$

B.  $e^{F(-6)} = 512$

C.  $e^{F(-6)} = 4096$

D.  $e^{F(-6)} = 32768$



**Câu 7:** Hàm số  $f(x) = \frac{9x-10}{6x^2-11x+3}$  có một nguyên hàm là  $F(x)$  thỏa mãn  $F(1) = \ln 2$ . Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình  $F(x) = \ln|3x-1| + \frac{1}{2}\ln 3$ . Tính  $3^{x_1} + 3^{x_2}$ .

- A.  $3^{x_1} + 3^{x_2} = 28$       B.  $3^{x_1} + 3^{x_2} = 4$       C.  $3^{x_1} + 3^{x_2} = \frac{730}{27}$       D.  $3^{x_1} + 3^{x_2} = \frac{82}{27}$

**Câu 8:** Tìm một nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = \frac{x^2}{x^2-7x+12}$  thỏa  $F(5) = 5$ .

- A.  $F(x) = x + 16\ln|x-4| - 9\ln|x-3| - 9\ln 2$   
 B.  $F(x) = x - 16\ln|x-4| + 9\ln|x-3| + 9\ln 2$   
 C.  $F(x) = x + 16\ln|x-4| - 9\ln|x-3| + 9\ln 2$   
 D.  $F(x) = x - 16\ln|x-4| + 9\ln|x-3| - 9\ln 2$

**Câu 9:** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{x^2 + (a+b)x + ab}$ ; giả sử hàm số xác định.

- A.  $\int f(x)dx = \ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right| + C$       B.  $\int f(x)dx = \frac{1}{b-a} \ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right| + C$   
 C.  $\int f(x)dx = \ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right| + C$       D.  $\int f(x)dx = \frac{1}{b-a} \ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right| + C$

**Câu 10:** Hàm số  $f(x) = \frac{x^4}{x^2-1}$  có một nguyên hàm là  $F(x)$  thỏa  $F(0) = -\frac{14}{3}$ . Tính  $e^{F(2)}$ .

- A.  $e^{F(2)} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$       B.  $e^{F(2)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$       C.  $e^{F(2)} = \sqrt{3}$       D.  $e^{F(2)} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

**Câu 11:** Hàm số  $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+x-2}$  có một nguyên hàm là  $F(x)$  thỏa  $F(2) = \frac{10\ln 2}{3}$ . Tính  $e^{F(-1)}$ .

- A.  $e^{F(-1)} = \sqrt[3]{2^5}$       B.  $e^{F(-1)} = \ln \sqrt[3]{2}$       C.  $e^{F(-1)} = \sqrt[3]{2}$       D.  $e^{F(-1)} = \sqrt[3]{4^5}$

**Câu 12:** Hàm số  $y = \frac{5x+3}{x^2+7x+12}$  có một nguyên hàm  $F(x)$  thỏa  $F(-2) = 18\ln 2$ . Tìm  $F(-5)$ .

- A.  $F(-5) = -33\ln 2$       B.  $F(-5) = -21\ln 2$       C.  $F(-5) = -17\ln 2$       D.  $F(-5) = -11\ln 2$

**Câu 13:** Tìm một nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = \frac{-x^3+5x+2}{4-x^2}$  thỏa mãn  $F(1) = \frac{3}{2}$ .

- A.  $F(x) = \frac{x^3}{3} + \ln|x-2| - 1$       B.  $F(x) = \frac{x^3}{3} - \ln|x-2| - 1$   
 C.  $F(x) = \frac{x^2+2}{2} - \ln|2-x|$       D.  $F(x) = \frac{x^2}{2} - \ln|2-x| + 1$

**Câu 14:** Hàm số  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$  có một nguyên hàm là  $F(x)$  thỏa mãn  $F(4) = 1 - \ln 2$ . Phương trình

$F(x) = 1$  có nghiệm  $x = \frac{a}{b}$ ; với  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Tìm  $a + b$ .

A.  $a + b = -2$

B.  $a + b = 5$

C.  $a + b = 7$

D.  $a + b = 9$

**Câu 15:** Tìm một nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = -\frac{x}{(x+1)^2}$ ; biết rằng đồ thị của hàm số  $y = F(x)$  đi qua gốc tọa độ  $O$ .

A.  $F(x) = \frac{x}{x+1} - \ln|x+1|$

B.  $F(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{x+1} - \ln|x+1|$

C.  $F(x) = -\frac{1}{x+1} + \ln|x+1| + 1$

D.  $F(x) = \frac{x}{x+1} + \ln|x+1|$

**Câu 16:** Hàm số  $f(x) = \frac{1}{x^2(x+1)}$  có một nguyên hàm là  $F(x)$  thỏa  $F(1) = \ln 2$ . Tính  $F(-2)$ .

A.  $F(-2) = \frac{5}{2} - \ln \frac{1}{2}$

B.  $F(-2) = \frac{5}{2} - \ln 2$

C.  $F(-2) = \frac{3}{2} - \ln \frac{1}{2}$

D.  $F(-2) = \frac{3}{2} - \ln 2$

**Câu 17:** Tìm một nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$ , biết đồ thị hàm số  $y = F(x)$  đi qua điểm  $M\left(e; 2 + \frac{1}{e}\right)$ .

A.  $F(x) = \ln x - \frac{1}{x} + 2$

B.  $F(x) = \ln x + \frac{1}{x} + 1$

C.  $F(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 2$

D.  $F(x) = \ln x - \ln x^2 + 1$

**Câu 18:** Tìm một nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x + 1}$ , biết rằng đồ thị hàm số  $y = F(x)$  cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1.

A.  $F(x) = x + \frac{2}{x+1} - 2$

B.  $F(x) = x + \frac{2}{x+1} + 2$

C.  $F(x) = x - 2 \ln(x+1)^2$

D.  $F(x) = x - \frac{2}{x+1} + 2$

**Câu 19:** Gọi  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}{x^2 + 2x + 1}$  và thỏa  $F(1) = \frac{1}{3}$ . Xác định hàm số  $F(x)$ .

**A.**  $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1} + \frac{13}{6}$

**C.**  $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1} - \frac{13}{6}$

**B.**  $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{x+1} + \frac{11}{6}$

**D.**  $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1} - \frac{11}{6}$

## LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Câu 1:**  $\frac{2x^2+3x+4}{x+1} = \frac{2x(x+1)+(x+1)+3}{x+1} = 2x+1+\frac{3}{x+1} \Rightarrow I = x^2+x+3\ln|x+1|+C.$  **Chọn D.**

**Câu 2:**  $\frac{x^3}{x+1} = \frac{x^3+1-1}{x+1} = x^2-x+1-\frac{1}{x+1} \Rightarrow I = \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln|x+1|+C.$  **Chọn C.**

**Câu 3:**  $\frac{x^3+2x^2-x}{x+1} = \frac{(x^3+x^2)+(x^2+x)-2(x+1)+2}{x+1} = x^2+x-2+\frac{2}{x+1}$

$\Rightarrow I = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 2\ln|x+1| + C.$  **Chọn B.**

**Câu 4:**  $f(x) = 1 - \frac{3x+2}{(x+1)(x+2)} = 1 - \frac{4(x+1)-(x+2)}{(x+1)(x+2)} = 1 - \left( \frac{4}{x+2} - \frac{1}{x+1} \right)$

$\Rightarrow F(x) = \int f(x)dx = x - 4\ln|x+2| + \ln|x+1| + C$

$\Rightarrow F(1) = 1 - 4\ln 3 + \ln 2 + C = \ln 2 \Rightarrow C = -1 + 4\ln 3.$  **Chọn A.**

**Câu 5:**  $f(x) = 1 - \frac{6}{(x-2)(x-3)} = 1 - 6\left( \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} \right)$

$\Rightarrow F(x) = \int f(x)dx = x - 6\ln|x-3| + 6\ln|x-2| + C$

$\Rightarrow F(4) = 4 + 6\ln 2 + C = 6\ln 2 \Rightarrow C = -4.$  **Chọn A.**

**Câu 6:**  $f(x) = \frac{5x+11}{(x-2)(x+5)} = \frac{2(x-2)+3(x+5)}{(x-2)(x+5)} = \frac{2}{x+5} + \frac{3}{x-2}$

$\Rightarrow F(x) = 2\ln|x+5| + 3\ln|x-2| + C \Rightarrow F(3) = 2\ln 8 + C = 3\ln 8 \Rightarrow C = \ln 8$

$\Rightarrow F(-6) = 3\ln 8 + \ln 8 = 4\ln 8 \Rightarrow e^{F(-6)} = 4096.$  **Chọn C.**

**Câu 7:**  $f(x) = \frac{9x-10}{(2x-3)(3x-1)} = \frac{3(2x-3)+(3x-1)}{(2x-3)(3x-1)} = \frac{3}{3x-1} + \frac{1}{2x-3}$

$\Rightarrow F(x) = \ln|3x-1| + \frac{1}{2}\ln|2x-3| + C \Rightarrow F(1) = \ln 2 + C = \ln 2 \Rightarrow C = 0.$

$\Rightarrow F(x) = \ln|3x-1| + \frac{1}{2}\ln|2x-3| = \ln|3x-1| + \frac{1}{2}\ln 3 \Rightarrow |2x-3| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow$  **Chọn A.**

**Câu 8:**  $f(x) = 1 + \frac{7x-12}{(x-3)(x-4)} = 1 + \frac{116(x-3)-9(x-4)}{(x-3)(x-4)} = 1 + \frac{16}{x-4} - \frac{9}{x-3}$

$\Rightarrow F(x) = x + 16\ln|x-4| - 9\ln|x-3| + C \Rightarrow F(5) = 5 - 9\ln 2 + C = 5 \Rightarrow C = 9\ln 2.$  **Chọn C.**

**Câu 9:**  $f(x) = \frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{b-a} \left( \frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b} \right) \Rightarrow F(x) = \frac{1}{b-a} \ln \left| \frac{x+a}{x+b} \right| + C.$  **Chọn B.**

**Câu 10:**  $f(x) = \frac{x^4 - 1 + 1}{x^2 - 1} = x^2 + 1 + \frac{1}{(x-1)(x+1)} = x^2 + 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$

$\Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C \Rightarrow F(0) = C = -\frac{14}{3} \Rightarrow e^{F(2)} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . **Chọn D.**

**Câu 11:**  $f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)(x+2)} = \frac{\frac{5}{3}(x-1) + \frac{1}{3}(x+2)}{(x-1)(x+2)} \Rightarrow F(x) = \frac{5}{3} \ln|x+2| + \frac{1}{3} \ln|x-1| + C$

$\Rightarrow F(2) = \frac{5}{3} \ln 4 + C = \frac{10}{3} \ln 2 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow e^{F(-1)} = \sqrt[3]{2}$ . **Chọn C.**

**Câu 12:**  $y = \frac{5x+3}{(x+3)(x+4)} = \frac{17(x+3) - 12(x+4)}{(x+3)(x+4)} \Rightarrow F(x) = 17 \ln|x+4| - 12 \ln|x+3| + C$

$F(-2) = 17 \ln 2 + C = 18 \ln 2 \Rightarrow C = \ln 2 \Rightarrow F(-5) = -11 \ln 2$ . **Chọn D.**

**Câu 13:**  $f(x) = \frac{x^3 - 5x - 2}{x^2 - 4} = \frac{x(x^2 - 4) - x - 2}{x^2 - 4} = x - \frac{1}{x-2} \Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2} - \ln|x-2| + C$

$\Rightarrow F(1) = \frac{1}{2} + C = \frac{3}{2} \Rightarrow C = 1$ . **Chọn C.**

**Câu 14:**  $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x-3)} \Rightarrow F(x) = \ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right| + C \Rightarrow F(4) = \ln \frac{1}{2} + C = 1 - \ln 2 \Rightarrow C = 1$

$\Rightarrow F(x) = \ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right| + 1 = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{x-3}{x-2} \right| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-3}{x-2} = 1 \\ \frac{x-3}{x-2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$ . **Chọn C.**

**Câu 15:**  $f(x) = -\frac{x+1-1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow F(x) = -\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + C$

$\Rightarrow F(0) = -1 + C = 0 \Rightarrow C = 1$ . **Chọn A.**

**Câu 16:**  $f(x) = \frac{1+x-x}{x^2(x+1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x(x+1)} \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{x} - \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C$

$\Rightarrow F(1) = -1 - \ln \frac{1}{2} + C = \ln 2 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow F(-2) = \frac{3}{2} - \ln 2$ . **Chọn D.**

**Câu 17:**  $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \Rightarrow F(x) = \ln|x| + \frac{1}{x} + C \Rightarrow F(e) = 1 + \frac{1}{e} + C = 2 + \frac{1}{e} \Rightarrow C = 1$ . **Chọn B.**

**Câu 18:**  $f(x) = 1 - \frac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow F(x) = x + \frac{2}{x+1} + C \Rightarrow F(1) = 2 + C = 0 \Rightarrow C = -2$ . **Chọn A.**

**Câu 19:**  $f(x) = \frac{x(x^2 + 2x + 1) + x^2 + 2x + 1 - 2}{x^2 + 2x + 1} = x + 1 - \frac{2}{(x+1)^2}$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1} + C \Rightarrow F(1) = \frac{5}{2} + C = \frac{1}{3} \Rightarrow C = -\frac{13}{6}. \text{ Chọn C.}$$