

Câu 1. (Đề khảo sát của Bộ dành cho 50 trường) Xét số phức z thỏa $|z+i|=\sqrt{13}$. Tìm giá trị nhỏ nhất T của $|z-9-5i|$.

A. $T=2\sqrt{13}$.

B. $T=3\sqrt{13}$.

C. $T=\sqrt{13}$.

D. $T=4\sqrt{13}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn A.

Đặt $z=x+yi$ (với $x,y\in\mathbb{R}$). Khi đó $|z+i|=\sqrt{13}\Leftrightarrow x^2+(y+1)^2=13$.

Cách 1. Đại số.

Chọn
$$\begin{cases} x=\sqrt{13}\sin t \\ y=\sqrt{13}\cos t-1 \end{cases}.$$

Ta có
$$P=|z-9-5i|^2=(x-9)^2+(y-5)^2=(\sqrt{13}\sin t-9)^2+(\sqrt{13}\cos t-6)^2$$
$$=13(\sin^2 t+\cos^2 t)-18\sqrt{13}\sin t-12\sqrt{13}\cos t+117=130-6\sqrt{13}(3\sin t+2\cos t)$$

$$\Leftrightarrow 130-78\sin(t+\alpha)\Leftrightarrow 52\leq P\leq 208, \text{ với } \begin{cases} \sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}} \\ \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}} \end{cases}.$$

Vậy $T=2\sqrt{13}$.

Cách 2. Hình học.

Đặt $w=z-9-5i\Rightarrow|w|=|z-9-5i|\Rightarrow|w|^2=(x-9)^2+(y-5)^2$ suy ra tập hợp các số phức w nằm trên đường tròn (C_1) có tâm là $A(9;5)$, bán kính R_1 .

Mà $|z+i|=\sqrt{13}\Leftrightarrow x^2+(y+1)^2=13$ suy ra tập hợp các số phức w nằm trên đường tròn (C_2) có tâm là $B(0;-1)$, bán kính $R_2=\sqrt{13}$.

Gọi C là điểm thuộc đường tròn (C_1) , suy $AC=|w|$, mà C thuộc (C_2) , suy ra $|AB-R_2|\leq AC\leq AB+R_2$, ta có $\overline{AB}=(-9;-6)\Rightarrow AB=\sqrt{117}=3\sqrt{13}$ suy ra $2\sqrt{13}\leq AC\leq 4\sqrt{13}$. Vậy $T=2\sqrt{13}$.

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị thực của m để phương trình $4z^2+4(m-1)z+m^2-3m=0$ có hai nghiệm phức thỏa $|z_1|+|z_2|=2$.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Cách 1:

$\Delta'=4m+4$.

Trường hợp 1: $\Delta'<0\Leftrightarrow m<-1$. Khi đó phương trình $4z^2+4(m-1)z+m^2-3m=0$ có hai nghiệm là $z_1=a+bi, z_2=a-bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$.

Ta có $|z_1|+|z_2|=2\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}=1$ (1).

Theo định lí Vi-ét ta có $z_1z_2=\frac{m^2-3m}{4}$ (2), từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} m=-1 \\ m=4 \end{cases}$.

Suy ra $m \in \emptyset \quad (3)$.

Trường hợp 2: $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = -1$ phương trình đã cho có hai nghiệm $z_1 = z_2 = 1$, suy ra $|z_1| + |z_2| = 2$.

Suy ra $m = -1$ thỏa (4).

Trường hợp 3: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > -1$. Khi đó phương trình có hai nghiệm thực z_1, z_2 thỏa hệ thức Vi-ét

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 1 - m \\ z_1 z_2 = \frac{m^2 - 3m}{4} \end{cases}$$

Theo đề ta có $|z_1| + |z_2| = 2 \Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 z_2| = 4 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2 + 2|z_1 z_2| = 4$

$$\Leftrightarrow (m-1)^2 - \frac{m^2 - 3m}{2} + \left| \frac{m^2 - 3m}{2} \right| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 = 4 & \text{khi } m^2 - 3m \geq 0 \\ m = 3 & \text{khi } m^2 - 3m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3 \quad (5).$$

Vậy từ (3), (4), (5) suy ra $m = 3, m = -1$ thỏa.

Cách 2:

Phương trình $4z^2 + 4(m-1)z + m^2 - 3m = 0$ luôn có hai nghiệm phức z_1, z_2 , theo định lý Vi-ét ta có

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 1 - m \\ z_1 z_2 = \frac{m^2 - 3m}{4} \end{cases} \text{ Theo yêu cầu bài toán ta có } |z_1| + |z_2| = 2 \Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 z_2| = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2}{2} + 2|z_1 z_2| = 4 \Leftrightarrow |z_1 + z_2|^2 + |(z_1 + z_2)^2 - 4z_1 z_2| + 4|z_1 z_2| = 8$$

$$\Leftrightarrow |(m-1)^2| + |(m-1)^2 - m^2 + 3m| + |m^2 - 3m| = 8 \Leftrightarrow (m-1)^2 + |m+1| + |m^2 - 3m| = 8$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 - (m+1) + (m^2 - 3m) = 8 & \text{khi } m < -1 \\ (m-1)^2 + (m+1) + (m^2 - 3m) = 8 & \text{khi } m \in [-1; 0] \cup [3; +\infty) \\ (m-1)^2 + (m+1) - (m^2 - 3m) = 8 & \text{khi } 0 < m < 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 - 6m - 8 = 0 & \text{khi } m < -1 \\ 2m^2 - 4m - 6 = 0 & \text{khi } m \in [-1; 0] \cup [3; +\infty) \\ 2m - 6 = 0 & \text{khi } 0 < m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1 \vee m = 3.$$

Vậy $m = 3, m = -1$ thỏa.

Câu 3. (THPT chuyên Quang Trung – Bình Phước) Cho $z \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $(2+i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} + 1 - 2i$. Biết

tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = (3-4i)z - 1 + 2i$ là đường tròn tâm I , bán kính R . Khi đó

A. $\begin{cases} I(-1; -2) \\ R = \sqrt{5} \end{cases}$ B. $\begin{cases} I(1; 2) \\ R = \sqrt{5} \end{cases}$ C. $\begin{cases} I(-1; 2) \\ R = \sqrt{5} \end{cases}$ D. $\begin{cases} I(1; -2) \\ R = \sqrt{5} \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Chọn

Nhận xét. Ở đây đề cho lỗi, vì chỉ có 1 số phức $z \in \mathbb{C}$ thỏa $(2+i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} + 1 - 2i$, nên tập hợp điểm biểu diễn số phức w cũng chỉ có 1 điểm chứ không phải là 1 đường tròn.

(*) Lời giải sai.

$$\text{Ta có } (2+i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} + 1 - 2i \Leftrightarrow 2|z| - 1 + (|z| + 2)i = \frac{\sqrt{10}}{|z|^2} \bar{z}.$$

$$\text{Lấy môđun hai vế ta được } (|z| + 2)^2 + (2|z| - 1)^2 = \frac{10}{|z|^2} \quad (\text{Do } |z| = |\bar{z}|).$$

$$(|z| + 2)^2 + (2|z| - 1)^2 = \frac{10}{|z|^2} \Leftrightarrow 5|z|^2 + 5 = \frac{10}{|z|^2} \Leftrightarrow |z| = 1 \Rightarrow |w + 1 - 2i| = |(3 - 4i)| \cdot |z| = 5.$$

$$\text{Do đó tập hợp điểm biểu diễn } w \text{ là đường tròn } \begin{cases} I(-1; 2) \\ R = 5 \end{cases}.$$

(**) Lời giải đúng.

$$\text{Ta có } (2+i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} + 1 - 2i \Leftrightarrow 2|z| - 1 + (|z| + 2)i = \frac{\sqrt{10}}{|z|^2} \bar{z}.$$

$$\text{Lấy môđun hai vế ta được } (|z| + 2)^2 + (2|z| - 1)^2 = \frac{10}{|z|^2} \quad (\text{Do } |z| = |\bar{z}|).$$

$$(|z| + 2)^2 + (2|z| - 1)^2 = \frac{10}{|z|^2} \Leftrightarrow 5|z|^2 + 5 = \frac{10}{|z|^2} \Leftrightarrow |z| = 1. \text{ Thay } |z| = 1 \text{ vào } (2+i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} + 1 - 2i \text{ ta được}$$

$$(2+i) = \frac{\sqrt{10}}{z} + 1 - 2i \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{10}}{1+3i} = \frac{\sqrt{10}}{10} - \frac{3\sqrt{10}}{10}i \text{ suy ra } w = \frac{-10-9\sqrt{10}}{10} + \frac{20-13\sqrt{10}}{10}i, \text{ suy ra điểm}$$

biểu diễn của số phức w là 1 điểm.

Câu 4. (THPT chuyên Lương Thế Vinh – Đồng Nai – L1) Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 - 2z + 5| = |(z - 1 + 2i)(z - 1 + 3i)|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|w|$, biết rằng $w = z - 2 + 2i$.

A. $|w|_{\min} = \frac{3}{2}.$

B. $|w|_{\min} = 2.$

C. $|w|_{\min} = 1.$

D. $|w|_{\min} = \frac{1}{2}.$

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Cách 1: Đại số.

$$|z^2 - 2z + 5| = |(z - 1 + 2i)(z - 1 + 3i)| \Leftrightarrow |(z - 1)^2 - 4i^2| = |(z - 1 + 2i)(z - 1 + 3i)|$$

$$\Leftrightarrow |(z - 1 + 2i)(z - 1 - 2i)| = |(z - 1 + 2i)(z - 1 + 3i)| \Leftrightarrow \begin{cases} z - 1 + 2i = 0 & (1) \\ |z - 1 - 2i| = |z - 1 + 3i| & (2) \end{cases}$$

$$+) (1) \Leftrightarrow z = 1 - 2i \Rightarrow w = -1 \Rightarrow |w| = 1 \quad (3).$$

$$+) \text{ Đặt } z = a + bi, \text{ với } a, b \in \mathbb{R}. \text{ Khi đó ta có } (2) \Leftrightarrow |(a - 1) + (b - 2)i| = |(a - 1) + (b + 3)i|$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 2)^2 = (a - 1)^2 + (b + 3)^2 \Leftrightarrow -4b + 4 = 6b + 9 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}, \text{ suy ra } w = a - 2 + \frac{3}{2}i$$

$$\Rightarrow |w| = \sqrt{(a - 2)^2 + \frac{9}{4}} \geq \frac{3}{2} \quad (4). \text{ Từ } (3), (4) \text{ ta suy ra } |w|_{\min} = 1.$$

Cách 2: Hình học.

$$\begin{aligned} |z^2 - 2z + 5| &= |(z-1+2i)(z-1+3i)| \Leftrightarrow |(z-1)^2 - 4i^2| = |(z-1+2i)(z-1+3i)| \\ &\Leftrightarrow |(z-1+2i)(z-1-2i)| = |(z-1+2i)(z-1+3i)| \Leftrightarrow \begin{cases} z-1+2i=0 & (1) \\ |z-1-2i|=|z-1+3i| & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$+) (1) \Leftrightarrow z=1-2i \Rightarrow w=-1 \Rightarrow |w|=1 \quad (3).$$

$$\begin{aligned} &+) \text{ Đặt } z=a+bi, \text{ với } a, b \in \mathbb{R}. \text{ Khi đó ta có } (2) \Leftrightarrow |(a-1)+(b-2)i| = |(a-1)+(b+3)i| \\ &\Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-2)^2 = (a-1)^2 + (b+3)^2 \Leftrightarrow -4b+4 = 6b+9 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}, \text{ suy ra } w = a-2+\frac{3}{2}i, \text{ suy ra tập} \\ &\text{hợp các số phức } w \text{ nằm trên đường thẳng } y = \frac{3}{2} \quad (\Delta), \text{ suy ra } |w| \geq d_{(O;(\Delta))} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Câu 5. (Chuyên ĐH Vinh – L3) Cho hai số phức z, w khác 0 và thỏa $|z-w|=2|z|=|w|$. Phần thực $u = \frac{z}{w}$ là

A. $-\frac{1}{8}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. 1.

D. $\frac{1}{8}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn D.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } |z-w|=2|z|=|w| &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|z|}{|w|} = \frac{1}{2} \\ \frac{|z-w|}{|w|} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|z|}{|w|} = \frac{1}{2} \\ \left| \frac{z-w}{w} \right| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |u| = \frac{1}{2} \\ |u-1| = 1 \end{cases}, \text{ đặt } u = a+bi, \text{ với } a, b \in \mathbb{R}, \text{ khi đó} \\ \text{ta được hệ phương trình } &\begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{1}{4} \\ (a-1)^2 + b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow -2a+1 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow a = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Câu 6. Biết rằng khi $m \neq a$, với a và m là các số thực, thì phương trình $(1+i)x^2 + (m+i)x + 1 = 0$ không có nghiệm thực. Chọn mệnh đề đúng.

A. $a \in (-1; 1)$.

B. $a \in (1; 5)$.

C. $a \in (3; 6)$.

D. $a \in (-3; 1)$.

Hướng dẫn giải.

Chọn D.

Giả sử phương trình có nghiệm thực là $x=b$, khi đó ta có $(1+i)b^2 + (m+i)b + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow b^2 + mb + 1 + (b^2 + b)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + mb + 1 = 0 \\ b^2 + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ m = -2 \end{cases}, \text{ suy ra } m \neq -2 \text{ thì phương trình}$$

$(1+i)x^2 + (m+i)x + 1 = 0$ không có nghiệm thực.

Câu 7. (THPT chuyên Quang Trung – Bình Phước) Cho hai số phức z_1, z_2 khác 0, $z_1 + z_2 \neq 0$ và

$$\frac{1}{z_1 + z_2} = \frac{1}{z_1} + \frac{2}{z_2}. \text{ Tính giá trị biểu thức } \left| \frac{z_1}{z_2} \right|.$$

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $2\sqrt{3}$.

D. $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn A.

Theo đề, ta có $\frac{1}{z_1 + z_2} = \frac{1}{z_1} + \frac{2}{z_2} \Leftrightarrow z_1 z_2 = (z_1 + z_2)(2z_1 + z_2) \Leftrightarrow 2z_1^2 + 2z_1 z_2 + z_2^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$

$$\Rightarrow \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 8. (THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu – Đồng Tháp – L2) Gọi M là điểm biểu diễn số phức $w = \frac{z - \bar{z} + 1}{z^2}$, trong đó z là số phức thỏa mãn $(1-i)(z+2i) = 2-i+3z$. Gọi N là điểm trong mặt phẳng sao cho $(\overline{Ox}, \overline{ON}) = 2\varphi$, trong đó $\varphi = (\overline{Ox}, \overline{OM})$ là góc tạo thành khi quay tia Ox tới vị trí của tia OM . Điểm N nằm ở góc phần tư nào?

A. Góc phần tư thứ nhất.

B. Góc phần tư thứ tư.

C. góc phần tư thứ ba.

D. Góc phần tư thứ hai.

Hướng dẫn giải.

Chọn B.

Theo đề, ta có $(1-i)(z+2i) = 2-i+3z \Leftrightarrow z = \frac{3}{5} + \frac{6}{5}i \Rightarrow w = \frac{11}{15} - \frac{56}{45}i$, suy ra $\tan \varphi = -\frac{56}{33}$, ta có

$$\begin{cases} \sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi = 2 \tan \varphi \cdot \cos^2 \varphi = -2 \cdot \frac{56}{33} \cdot \frac{1089}{4225} = -\frac{3696}{4225} \\ \cos 2\varphi = 2 \cos^2 \varphi - 1 = \frac{2}{\tan^2 \varphi + 1} \cdot 2 \cdot \frac{1089}{4225} - 1 = -\frac{2047}{4225} \end{cases}$$

Câu 9. (THPT Thanh Chương 1 – Nghệ An – L2) Cho số phức z_1 thỏa $|z-2|^2 - |z+i|^2 = 1$ và số phức z_2 thỏa $|z-4-i| = \sqrt{5}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$?

A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

B. $\sqrt{5}$.

C. $2\sqrt{5}$.

D. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn D.

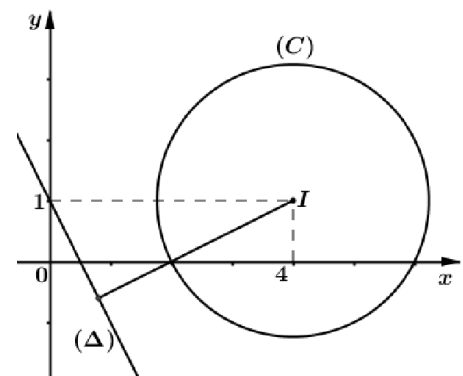
Đặt $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$).

Ta có số phức z_1 thỏa $|z-2|^2 - |z+i|^2 = 1$ suy ra $(a-2)^2 + b^2 - [a^2 + (b+1)^2] = 1 \Leftrightarrow 2a + b = 1$, suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức z_1 nằm trên đường thẳng $2x + y = 1$ (Δ).

Lại có số phức z_2 thỏa $|z-4-i| = \sqrt{5}$ suy ra

$(c-4)^2 + (d-1)^2 = 5$, suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức z_2 nằm trên đường tròn (C) có tâm $I(4;1)$, bán kính $r = \sqrt{5}$.

Biểu diễn (C) và (Δ) lên mặt phẳng tọa độ, ta suy ra $|z_1 - z_2|_{\min} = d_{(I;(\Delta))} - r = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.



Câu 10. (THPT chuyên Biên Hòa – Hà Nam) Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn điều kiện $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ và $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Tính $A = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$.

A. 1.

B. 0.

C. -1.

D. $1+i$.

Hướng dẫn giải.

Chọn B.

$$\begin{aligned} A &= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = (z_1 + z_2 + z_3)^2 - 2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1) = -2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1) \\ &= -2z_1z_2z_3 \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right) = -2z_1z_2z_3 \left(\frac{|z_1|^2}{z_1} + \frac{|z_2|^2}{z_2} + \frac{|z_3|^2}{z_3} \right) = -2z_1z_2z_3(\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3) \end{aligned}$$

Mà $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Rightarrow \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 = 0$. Vậy $A = 0$.

Câu 11. (THPT chuyên Lê Hồng Phong – TP.HCM) Cho z_1, z_2 là hai số phức khác 0 thỏa $z_1^2 - 2z_1z_2 + 2z_2^2 = 0$. Biết z_1, z_2 có điểm biểu diễn lần lượt là M, N . Tính góc $\widehat{OMN}$

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Hướng dẫn giải.

Chọn B.

$$z_1^2 - 2z_1z_2 + 2z_2^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = (1+i)z_2 \\ z_1 = (1-i)z_2 \end{cases}. \text{ Vì hai trường hợp này là như nhau nên tối chỉ trình bày một}$$

trường hợp như sau.

Với $z_1 = (1+i)z_2$, đặt $z_1 = a+bi$, $z_2 = c+di$ (với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) và z_1, z_2 lần lượt có điểm biểu diễn là

$$M(a; b), \quad N(c; d). \quad \text{Khi đó} \quad z_1 = (1+i)z_2 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = 1+i \Leftrightarrow \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i = 1+i$$

$$\Rightarrow \frac{ac+bd}{c^2+d^2} = 1 \Leftrightarrow ac+bd = |z_2|^2, \text{ mà } \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = |1+i| \Rightarrow |z_1| = \sqrt{2}|z_2|. \text{ Ta có } \overrightarrow{OM} = (a; b), \overrightarrow{NM} = (a-c; b-d).$$

$$\cos \widehat{OMN} = \cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{NM}) = \frac{a^2 + b^2 - (ac + bd)}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2(ac + bd)}} = \frac{|z_1|^2 - |z_2|^2}{|z_1| \sqrt{|z_1|^2 - |z_2|^2}} = \frac{|z_2|^2}{\sqrt{2}|z_2||z_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

, suy ra $\widehat{OMN} = 45^\circ$.

Câu 12. (Đề minh họa – L3) Xét các số phức z thỏa mãn $|z+2-i| + |z-4-7i| = 6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $|z-1+i|$. Tính $P = m + M$.

A. $P = \sqrt{13} + \sqrt{73}$.

B. $P = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$.

C. $P = 5\sqrt{2} + \sqrt{73}$.

D. $P = \frac{5\sqrt{2} + \sqrt{73}}{2}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn B.

Cách 1. Đại số.

Đặt $z = a+bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó ta có $|z+2-i| + |z-4-7i| = 6\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a+2)^2 + (b-1)^2} + \sqrt{(a-4)^2 + (b-7)^2} = 6\sqrt{2}, \text{ xét các điểm } N(a; b), A(-2; 1), B(4; 7), \text{ khi đó ta}$$

được $NA + NB = 6\sqrt{2} = AB$, suy ra N, A, B thẳng hàng (N nằm giữa A và B). Phương trình đường thẳng $AB: x - y + 3 = 0$, suy ra $N(a; a+3)$ ($-2 \leq a \leq 4$).

Theo đề $|z-1+i| = \sqrt{(a-1)^2 + (b+1)^2} = \sqrt{(a-1)^2 + (a+4)^2} = \sqrt{2a^2 + 6a + 17} = f(a)$.

$f'(a) = \frac{2a+3}{\sqrt{a^2+6a+17}}$; $f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{2}$. Ta có bảng biến

thiên như hình bên.

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $m = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, $M = \sqrt{73}$.

Vậy $P = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$.

Cách 2. Bất đẳng thức.

Đặt $z = a + bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó ta có $|z+2-i| + |z-4-7i| = 6\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a+2)^2 + (b-1)^2} + \sqrt{(a-4)^2 + (b-7)^2} = 6\sqrt{2}$ (1), áp dụng bất đẳng thức Mincopxki ta có

$VT(1) \geq \sqrt{(a+2+4-a)^2 + (b-1+7-b)^2} = 6\sqrt{2}$, dấu "=" xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+2)(7-b) = (4-a)(b-1) \\ a \in [-2; 4], b \in [1; 7] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a+3 \\ a \in [-2; 4], b \in [1; 7] \end{cases}.$$

Theo đề $|z-1+i| = \sqrt{(a-1)^2 + (b+1)^2} = \sqrt{(a-1)^2 + (a+4)^2} = \sqrt{2a^2 + 6a + 17} = f(a)$.

$f'(a) = \frac{2a+3}{\sqrt{a^2+6a+17}}$; $f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{2}$. Ta có bảng biến

thiên như hình bên.

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $m = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, $M = \sqrt{73}$. Vậy

$P = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$.

Cách 3. Hình học.

Đặt $z = a + bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó ta có $|z+2-i| + |z-4-7i| = 6\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a+2)^2 + (b-1)^2} + \sqrt{(a-4)^2 + (b-7)^2} = 6\sqrt{2}$, xét các điểm $N(a; b)$, $A(-2; 1)$, $B(4; 7)$, khi đó ta

được $NA + NB = 6\sqrt{2} = AB$, suy ra N , A , B thẳng hàng (N nằm giữa A và B). Phương trình đường thẳng $AB: x - y + 3 = 0$.

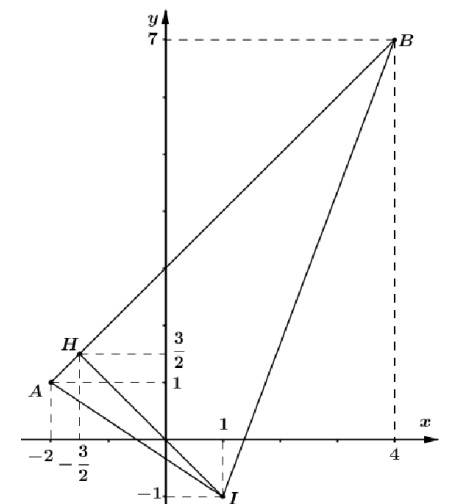
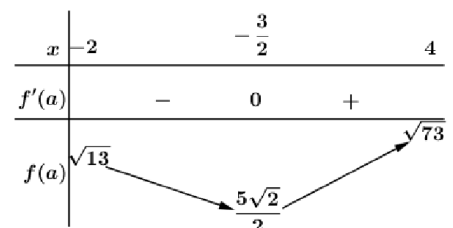
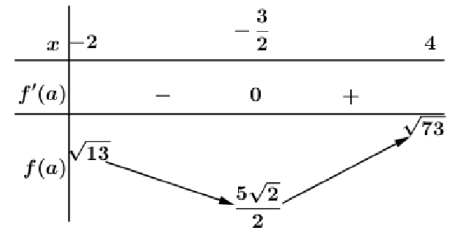
Theo đề $|z-1+i| = \sqrt{(a-1)^2 + (b+1)^2}$, xét điểm $I(1; -1)$ suy ra

$IN = \sqrt{(a-1)^2 + (b+1)^2}$, khi đó

$$\min\{IA; IB; d_{(I; AB)}\} \leq IN \leq \max\{IA; IB; d_{(I; AB)}\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = IN_{\min} = d_{(I; AB)} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ M = IN_{\max} = IB = \sqrt{73} \end{cases}.$$

Vậy $P = m + M = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$.



Câu 13. (THPT Thị xã Quảng Trị) Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn z không là số thực và

$\frac{z^2 + z + 1}{z^2 - z + 1}$ là số thực. Tính $M = \frac{1 - a^4 - b^4}{1 - a^6 - b^6}$.

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn B.

$z = a + bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Vì z không là số thực nên $b \neq 0$.

Ta có $w = \frac{z^2 + z + 1}{z^2 - z + 1} = \frac{(a^2 - b^2 + a + 1) + (2ab + b)i}{(a^2 - b^2 - a + 1) + (2ab - b)i}$, suy ra phần ảo của số phức w là

$\frac{2b - 2a^2b - 2b^3}{(a^2 - b^2 - a + 1)^2 + (2ab - b)^2}$, mà $\frac{z^2 + z + 1}{z^2 - z + 1}$ là số thực suy ra $a^2 + b^2 = 1 \Leftrightarrow a^2b^2 = \frac{1 - a^4 - b^4}{2}$, ta có

$M = \frac{1 - a^4 - b^4}{1 - a^6 - b^6} = \frac{1 - a^4 - b^4}{1 - (a^2 + b^2)(a^4 + b^4 - a^2b^2)} = \frac{1 - a^4 - b^4}{\frac{3}{2}(1 - a^4 - b^4)} = \frac{2}{3}$.

Câu 14. (Thầy Trần Trọng Trị - THPT Gia Định - TP.HCM) Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn điều kiện $2|\bar{z}_1 + i| = |\bar{z}_1 - z_1 - 2i|$ và $|z_2 - 10 - i| = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$?

- A. $3\sqrt{5} - 1$. B. $\sqrt{\sqrt{101} - 1}$. C. $\sqrt{\sqrt{101} + 1}$. D. $\sqrt{10} + 1$.

Hướng dẫn giải.

Chọn A.

Cách 1.

Ta có $2|\bar{z}_1 + i| = |\bar{z}_1 - z_1 - 2i|$ suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức z_1 nằm trên parabol $(P): y = \frac{x^2}{4}$.

Và $|z_2 - 10 - i| = 1$ suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức z_2 nằm trên đường tròn $(C): (x - 10)^2 + (y - 1)^2 = 1$. Xét đường tròn $(\delta): (x - 10)^2 + (y - 1)^2 = k$ với $k \in (0; +\infty)$ tiếp xúc với (P) . Giải điều kiện tiếp xúc (δ) và (P)

Ta có $(x - 10)^2 + (y - 1)^2 = k \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + \sqrt{k - (x - 10)^2} \\ y = 1 - \sqrt{k - (x - 10)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y' = -\frac{(x - 10)}{\sqrt{k - (x - 10)^2}} \\ y' = \frac{(x - 10)}{\sqrt{k - (x - 10)^2}} \end{cases}$.

(δ) và (P) tiếp xúc nhau khi hệ phương trình sau có nghiệm

TH1: $\begin{cases} 1 + \sqrt{k - (x - 10)^2} = \frac{x^2}{4} \\ -\frac{(x - 10)}{\sqrt{k - (x - 10)^2}} = \frac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{(x - 10)}{\frac{x^2}{4} - 1} = 0 \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow k = 45$.

$$\text{TH2: } \begin{cases} 1 - \sqrt{k - (x-10)^2} = \frac{x^2}{4} \\ \frac{(x-10)}{\sqrt{k - (x-10)^2}} = \frac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{(x-10)}{1 - \frac{x^2}{4}} = 0 \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow k = 45.$$

Ta suy ra $k = 45$. Vậy $\text{Min}_{|z_1 - z_2|} = 3\sqrt{5} - 1$.

Cách 2.

Ta có $2|\bar{z}_1 + i| = |\bar{z}_1 - z_1 - 2i|$ suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức z_1 nằm trên parabol $(P): y = \frac{x^2}{4}$.

Và $|z_2 - 10 - i| = 1$ suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức z_2 nằm trên đường tròn $(C): (x-10)^2 + (y-1)^2 = 1$. Đường tròn (C) có tâm là $I(10; 1)$ bán kính $R = 1$.

Xét điểm $A\left(a; \frac{a^2}{4}\right) \in (P)$, khi đó $IA^2 = f(a) = \frac{a^4}{16} + \frac{a^2}{2} - 20a + 101$; $f'(a) = \frac{a^3}{4} + a - 20$;

$f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 4$, lập BBT suy ra $\text{Min} f(a) = 45$ suy ra $\text{Min} IA = 3\sqrt{5}$.

Vậy $\text{Min}_{|z_1 - z_2|} = 3\sqrt{5} - 1$.

Câu 15. Cho số phức z thỏa $|z+2| + |z-2| = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z+3|^3 - |z|$

A. -3.

B. 2.

C. -1.

D. -4.

Hướng dẫn giải.

Chọn A.

Đặt $z = x + yi$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó ta có $|z+2| + |z-2| = 6 \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = 6$. Xét

điểm $F_1(-2; 0)$, $F_2(2; 0)$ và $M(x; y)$, suy ra ta có biểu thức

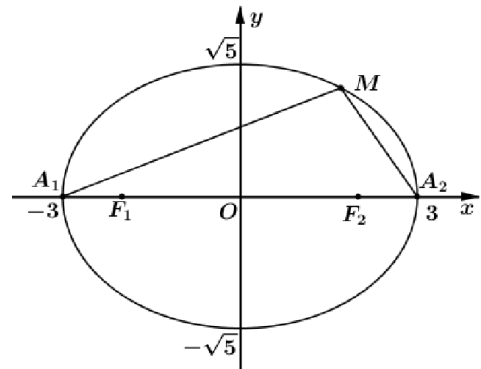
$MF_1 + MF_2 = 6 = 2.3$, suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức

z nằm trên đường elip có phương trình $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ (với

$a=3, b=\sqrt{5}, c=2$). Tọa độ các đỉnh trên trục lớn là

$A_1(-3; 0)$, $A_2(3; 0)$, các đỉnh nằm trên trục bé là

$B_1(0; -\sqrt{5})$, $B_2(0; \sqrt{5})$.



Ta có $|z+3| = \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = MA_1$, $|z| = MO$ (O là gốc tọa độ). Suy ra $P = MA_1^3 - MO$.

Lại có $\begin{cases} \text{Min} MA_1 \Leftrightarrow M \equiv A_1 \\ \text{Max} MO \Leftrightarrow M \equiv A_1 \text{ hay } M \equiv A_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Min} MA_1 = 0 \\ \text{Max} MO = OA_1 = OA_2 = 3 \end{cases}$. Vậy $P_{\min} = -3$.

Câu 16. (THPT chuyên Hưng Yên -L3) Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i| = \sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là

giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z+2|^2 - |z-i|^2$. Tính modun của số phức $w = M + mi$

A. $|w| = 2\sqrt{314}$.

B. $|w| = 2\sqrt{309}$.

C. $|w| = \sqrt{1258}$.

D. $|w| = 3\sqrt{137}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $z = x + yi$. Ta có $P = (x+2)^2 + y^2 - [x^2 + (y-1)^2] = 4x + 2y + 3$

Mặt khác $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5$, đặt $x = 3 + \sqrt{5} \sin t$; $y = 4 + \sqrt{5} \cos t$.

Suy ra $P = 4\sqrt{5} \sin t + 2\sqrt{5} \cos t + 23$, ta có $-10 \leq 4\sqrt{5} \sin t + 2\sqrt{5} \cos t \leq 10$.

Do đó $13 \leq P \leq 33 \Rightarrow |w| = \sqrt{1258}$.

Câu 17. (THPT chuyên Hưng Yên – L3) Cho số phức w , biết rằng $z_1 = w - 2i$ và $z_2 = 2w - 4$ là hai nghiệm của phương trình $z^2 + az + b = 0$ với a, b là các số thực. Tính $T = |z_1| + |z_2|$.

A. $T = \frac{8\sqrt{10}}{3}$.

B. $T = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

C. $T = 5$.

D. $T = \frac{2\sqrt{37}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $w = x + yi$. Theo Viet ta có: $z_1 + z_2 = -a = 3w - 2i - 4 = (3x - 4) + (3y - 2)i$ là số thực nên $y = \frac{2}{3}$. Lại

có $z_1 z_2 = b = \left(x + \frac{2}{3}i - 2i\right) \left(2x + \frac{4}{3}i - 4\right)$ là số thực.

Suy ra $\left(x - \frac{4}{3}i\right) \left(2x - 4 + \frac{4}{3}i\right) = x(2x - 4) - \frac{4}{3}i(x - 4) + \frac{16}{9}$ là số thực suy ra $x = 4$

Do đó $z_1 = 4 + \frac{2}{3}i - 2i = 4 - \frac{4}{3}i$, $z_2 = 4 + \frac{4}{3}i \Rightarrow T = \frac{8\sqrt{10}}{3}$.

Câu 18. (THPT Thái Nguyên – L2) Tập hợp các số phức $w = (1 + i)z + 1$ với z là số phức thỏa mãn $|z - 1| \leq 1$ là hình tròn. Tính diện tích hình tròn đó.

A. 4π .

B. 2π .

C. 3π .

D. π .

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $w = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$ thì

$$w = (1 + i)z + 1 \Leftrightarrow w = (1 + i)(z - 1) + i + 2 \Leftrightarrow w - i - 2 = (z - 1) + i(z - 1)$$

$\Leftrightarrow |w - i - 2| = |(z - 1) + i(z - 1)| \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2(z - 1)^2 \leq 2$, suy ra tập hợp số phức cần tìm nằm trên hình tròn bán kính $R = \sqrt{2}$ có tính biên.

$$\Rightarrow S = \pi R^2 = 2\pi.$$

Câu 19. (THPT Thái Nguyên – L2) Cho số phức z có môđun là 3, biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = 3 - 2i + (2 - i)z$ là một đường tròn thì có bán kính là?

A. $3\sqrt{2}$.

B. $3\sqrt{5}$.

C. $3\sqrt{3}$.

D. $3\sqrt{7}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Đặt } w = x + yi, \text{ với } x, y \in \mathbb{R} \text{ thì } x + yi = 3 - 2i + (2 - i)z \Leftrightarrow z = \frac{x + yi - 3 + 2i}{2 - i}$$

$$\Rightarrow z = \frac{2x + 2yi - 6 + 4i + xi - y - 3i - 2}{5} = z = \frac{i(x + 2y + 1) + 2x - y - 8}{5}$$

$$|z| = 3 \Rightarrow (x + 2y + 1)^2 + (2x - y - 8)^2 = 25 \cdot 9 \Leftrightarrow 5x^2 + 5y^2 - 30x + 20y + 65 = 29.5$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 45 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 45 \Rightarrow R = 3\sqrt{5}.$$

Câu 20. (THPT Thái Nguyên – L2) Cho số phức $z = a + bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\frac{(|z|-1)(1+iz)}{z - \frac{1}{\bar{z}}} = i$. Tính

$a^2 + b^2$?

A. $3 + 2\sqrt{2}$.

B. $2 + 2\sqrt{2}$.

C. $3 - 2\sqrt{2}$.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Điều kiện $\begin{cases} |z| \neq 0 \\ |z| \neq \pm 1 \end{cases}$.

Khi đó $\frac{(|z|-1)(1+iz)}{z - \frac{1}{\bar{z}}} = i \Leftrightarrow \bar{z}(1+iz) = (|z|+1)i \Leftrightarrow (\bar{z} + i|z|^2) = (|z|+1)i \Leftrightarrow \bar{z} = (|z|+1-|z|^2)i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|+1-|z|^2 = |z| \\ |z|+1-|z|^2 = -|z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-|z|^2 = 0 \\ |z|^2 - 2|z| - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow |z| = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow |z|^2 = 3 + 2\sqrt{2}.$

Câu 21. (THPT chuyên KHTN – Hà Nội – L5) Cho z_1, z_2 là 2 số phức bất kỳ, giá trị biểu thức:

$a = \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2}$ bằng?

A. $a = 2$.

B. $a = \frac{1}{2}$.

C. $a = 1$.

D. $a = \frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Cách 1.

Đặt $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Khi đó

$a = \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2} = \frac{(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2)}{(a+c)^2 + (b+d)^2 + (a-c)^2 + (b-d)^2} = \frac{1}{2}$

Cách 2.

Ngoài ra ta có thể chọn $z_1 = z_2 = 1 \rightarrow \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2} = \frac{1+1}{(\sqrt{2})^2 + 0^2} = \frac{1}{2}.$

Câu 22. Cho số phức z thỏa $|z - 2 - 2i| = \sqrt{17}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = 1999|z + 2 - i| + 2017|\bar{z} - 6 + 3i|$. Tính $M + m$.

A. $M + m = 8302\sqrt{17}$.

B. $M + m = 4034\sqrt{17}$.

C. $M + m = \sqrt{17}(\sqrt{1999^2 + 2017^2} + 1999)$.

D. $M + m = 2\sqrt{17}(\sqrt{1999^2 + 2017^2} + 1999)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Cách 1.

$|z - 2 - 2i| = \sqrt{17}$ suy ra tập hợp số phức z nằm trên đường tròn tâm $I(2; 2)$ bán kính $\sqrt{17}$.

Xét các điểm $A(-2;1)$, $B(6;3)$, $C(x;y)$. Khi đó $P = 1999CA + 2017CB$. Ta có AB là đường kính của đường tròn tâm I nên $P = 1999\sqrt{68 - CB^2} + 2017CB$.

Xét hàm số $f(x) = 1999\sqrt{68 - x^2} + 2017x$ với $x \in [0; 2\sqrt{17}]$ suy ra $P_{\min} = 1999.2\sqrt{17}$,

$$P_{\max} = 2\sqrt{17}\sqrt{1999^2 + 2017^2}. \text{ Vậy } M + m = 2\sqrt{17}\left(\sqrt{1999^2 + 2017^2} + 1999\right).$$

Cách 2.

$$|z - 2 - 2i| = \sqrt{17} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 4a + 4b + 9$$

$$P = 1999|z + 2 - i| + 2017|\bar{z} - 6 + 3i| = 1999\sqrt{a^2 + b^2 + 4a - 2b + 5} + 2017\sqrt{a^2 + b^2 - 12a - 6b + 45}$$

$$\Leftrightarrow P = 1999\sqrt{8a + 2b + 14} + 2017\sqrt{-8a - 2b + 54} \leq 2\sqrt{17}\sqrt{1999^2 + 2017^2}$$

$$\text{Suy ra } P_{\max} = 2\sqrt{17}\sqrt{1999^2 + 2017^2}. P_{\min} = 1999.2\sqrt{17} \text{ (sử dụng xét hàm)}$$

$$\text{Vậy } M + m = 2\sqrt{17}\left(\sqrt{1999^2 + 2017^2} + 1999\right).$$

Chú ý: ở cách hai ta có thể xét hàm số $f(t) = 1999\sqrt{14 + t} + 2017\sqrt{-t + 54}$ (với $t = 8a + 2b$ và $-14 \leq t \leq 54$).

Câu 23. (THPT Chu Văn An – Hà Nội – L2) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1| = \sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $T = |z + i| + |z - 2 - i|$

A. $\max T = 8\sqrt{2}$.

B. $\max T = 4$.

C. $\max T = 4\sqrt{2}$.

D. $\max T = 8$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Đặt } z = x + yi. \text{ Ta có: } |z - 1| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |x + yi - 1| = \sqrt{2} \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 2$$

$$\text{Khi đó: } T = |z + i| + |z - 2 - i| = |x + yi + i| + |x + yi - 2 - i| = \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} + \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2}$$

$$\leq \sqrt{(1^2 + 1^2) \cdot [x^2 + (y + 1)^2 + (x - 2)^2 + (y - 1)^2]}$$

$$= \sqrt{2(2x^2 - 4x + 4 + 2y^2 + 2)} = \sqrt{2(2((x - 1)^2 + y^2) + 4)} = \sqrt{2(4 + 4)} = 4$$

$$\text{Vậy } \max T = 4.$$

Câu 24. (THPT Quốc Học – Huế - L2) Cho số phức $z \neq 0$ sao cho z không phải là số thực và $w = \frac{z}{1 + z^2}$

là số thực. Tính $\frac{|z|}{1 + |z|^2}$.

A. $\frac{1}{5}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 2.

D. $\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Cách 1.

Theo giả thiết ta có $w = \frac{z}{1 + z^2}$ là số thực nên ta có thể chọn w là số thực bất kỳ sao cho z không phải là số thực.

$$\text{Chọn } w = \frac{z}{1+z^2} = 1 \Rightarrow z^2 + 1 = z \Rightarrow z = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |z| = 1 \Rightarrow \frac{|z|}{1+|z|^2} = \frac{1}{2}.$$

Cách 2.

Ta có $w = \frac{z}{1+z^2}$ là số thực suy ra $\frac{1}{w} = \frac{z^2+1}{z} = z + \frac{1}{z}$ là số thực suy ra $\frac{1}{z}$ là số phức liên hợp của z
 suy ra $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = z \cdot \frac{1}{z} = 1 \Rightarrow |z| = 1 \Rightarrow \frac{|z|}{1+|z|^2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$

Câu 25. (Chuyên ĐH Vinh – Nghệ An – L3) Cho số phức z thay đổi, luôn có $|z| = 2$. Khi đó tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = (1-2i)\bar{z} + 3i$ là:

A. Đường tròn $x^2 + (y-3)^2 = 2\sqrt{5}$.

B. Đường tròn $x^2 + (y+3)^2 = 20$.

C. Đường tròn $x^2 + (y-3)^2 = 20$.

D. Đường tròn $(x-3)^2 + y^2 = 2\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Giả sử $w = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow a + bi = (1-2i)\bar{z} + 3i$

$$\Rightarrow \bar{z} = \frac{a + (b-3)i}{1-2i} = \frac{[a + (b-3)i](1+2i)}{5} = \frac{a-2(b-3) + (2a+b-3)i}{5}$$

$$\Rightarrow |\bar{z}| = |z| = \frac{1}{5} \sqrt{[a-2(b-3)]^2 + (2a+b-3)^2} = 2 \Leftrightarrow (a-2b+6)^2 + (2a+b-3)^2 = 100$$

$$\Leftrightarrow (a-2b)^2 + (2a+b)^2 + 12(a-2b) - 6(2a+b) = 55$$

$$\Leftrightarrow 5a^2 + 5b^2 - 30b = 55 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 6b = 11 \Leftrightarrow a^2 + (b-3)^2 = 20.$$

Câu 26. (THPT chuyên Vị Thanh – Hậu Giang) Biết số phức z thỏa mãn phương trình $z + \frac{1}{z} = 1$. Tính

$$P = z^{2016} + \frac{1}{z^{2016}}.$$

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $z + \frac{1}{z} = 1 \Rightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^3 = 1 \Leftrightarrow z^3 + \frac{1}{z^3} + 3\left(z + \frac{1}{z}\right) = 1 \Leftrightarrow z^3 + \frac{1}{z^3} + 2 = 0 \Leftrightarrow (z^3 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow z^3 = 1$

$$\Rightarrow P = (z^3)^{672} + \frac{1}{(z^3)^{672}} = 1 + 1 = 2.$$

Câu 27. (THPT Kim Liên – Hà Nội) Cho hai số thực b và c ($c > 0$). Ký hiệu A, B là hai điểm của mặt phẳng phức biểu diễn hai nghiệm của phương trình $z^2 + 2bz + c = 0$. Tìm điều kiện của b và c sao cho OAB là tam giác vuông (O là gốc tọa độ).

A. $b^2 = 2c$.

B. $c = 2b^2$.

C. $b = c$.

D. $b^2 = c$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Theo yêu cầu bài toán suy ra phương trình không có nghiệm thực.

Ta có: $z^2 + 2bz + c = 0 \Leftrightarrow (z+b)^2 = b^2 - c \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -b + i\sqrt{c-b^2} \\ z_2 = -b - i\sqrt{c-b^2} \end{cases} (c > b^2)$. Khi đó $A(-b; \sqrt{c-b^2})$,

$B(-b; -\sqrt{c-b^2})$, suy ra $\overline{OA} = (-b; \sqrt{c-b^2})$, $\overline{OB} = (-b; -\sqrt{c-b^2})$. Ta có A, B là hai điểm đối xứng nhau qua trục Oy . Suy ra tam giác OAB vuông tại O .

Theo giả thiết ta có: $b^2 + b^2 - c = 0 \Leftrightarrow c = 2b^2$.

Câu 28. (Chuyên Ngữ – Hà Nội) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện số phức $w = z(2+3i) + 5 - i$ là số thuần ảo.

A. Đường tròn $x^2 + y^2 = 5$.

B. Đường thẳng $2x - 3y + 5 = 0$.

C. Đường tròn $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$.

D. Đường thẳng $3x + 2y - 1 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow w = (x + yi)(2 + 3i) + 5 - i = (2x - 3y + 5) + (3x + 2y - 1)i$.

w là số thuần ảo khi và chỉ khi $\begin{cases} 2x - 3y + 5 = 0 \\ 3x + 2y - 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow 2x - 3y + 5 = 0 \Rightarrow$ Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $2x - 3y + 5 = 0$.

Câu 29. (Chuyên Ngữ – Hà Nội) Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |z+1| + 2|z-1|$.

A. $\max T = 2\sqrt{5}$.

B. $\max T = 2\sqrt{10}$.

C. $\max T = 3\sqrt{5}$.

D. $\max T = 3\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Cách 1.

$$T = |z+1| + 2|z-1| \leq \sqrt{(1+2^2)(|z+1|^2 + |z-1|^2)} = \sqrt{5 \cdot 2(|z|^2 + 1)} = 2\sqrt{5} \text{ (BĐT Bunhiacopxki)}$$

Chú ý: $|z+1|^2 + |z-1|^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2 = 2(|z|^2 + 1)$ với $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Cách 2.

Đặt $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$ ta có:

$$T = |x + yi + 1| + 2|x - yi - 1| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

$$\text{Lại có } x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow T = \sqrt{2x+2} + 2\sqrt{-2x+2} = f(x)$$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+2}} - \frac{2}{\sqrt{-2x+2}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-6}{10} \Rightarrow T_{\max} = 2\sqrt{5}.$$

Câu 30. (Sở GD – Đồng Tháp) Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-1+2i| = |z-i|$, tìm số phức có mô-đun nhỏ nhất.

A. $z = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$.

B. $z = -\frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$.

C. $z = \frac{2}{5} + \frac{16}{5}i$.

D. $z = \frac{16}{5} + \frac{2}{5}i$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$). Ta có $|z-1+2i| = |z-i| \Leftrightarrow |(a-1) + (b+2)i| = |a(b-i)i|$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a-1)^2 + (b+2)^2} = \sqrt{a^2 + (b-1)^2} \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 + b^2 + 4b + 4 = a^2 + b^2 - 2b + 1$$

$$\Leftrightarrow 2a - 6b = 4 \Leftrightarrow a = 3b + 2$$

$$\text{Do đó } |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(3b+2)^2 + b^2} = \sqrt{10b^2 + 12b + 4} = \sqrt{10\left(b + \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{2}{5}} \geq \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } b = -\frac{3}{5} \Rightarrow a = \frac{1}{5}. \text{ Vậy } z = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i.$$

Câu 31. (THPT Nguyễn Bình Khiêm) Cho số phức z thỏa mãn $w = (z+1)(\bar{z}-2i)$ là một số thuần ảo. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có diện tích bằng bao nhiêu?

A. 5π .

B. $\frac{5\pi}{4}$.

C. $\frac{5\pi}{2}$.

D. 25π .

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Đặt } z = a + bi, \text{ với } a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow w = (a+1+bi)(a-bi-2i) = a^2 + b^2 + a + 2b - (2a+b+2)i.$$

$$w \text{ là số thuần ảo suy ra } \begin{cases} a^2 + b^2 + a + 2b = 0 \\ 2a + b + 2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + a + 2b = 0 \Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + (b+1)^2 = \frac{5}{4}.$$

$$\text{Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức } z \text{ là một đường tròn có diện tích bằng } \frac{5\pi}{4}.$$

Câu 32. (THPT Nguyễn Bình Khiêm) Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Khi đó phần thực a và phần ảo b của số phức $\omega = \frac{\bar{z} + i}{iz - 2}$ là:

$$\text{A. } a = \frac{x(2y+1)}{(y+2)^2 + x^2}, b = \frac{y^2 + y - x^2 - 2}{(y+2)^2 + x^2}.$$

$$\text{B. } a = \frac{-x(2y+1)}{(y+2)^2 + x^2}, b = \frac{y^2 + y - x^2 - 2}{(y+2)^2 + x^2}.$$

$$\text{C. } a = \frac{x(2y+1)}{(y+2)^2 + x^2}, b = \frac{y^2 + y - x^2 + 2}{(y+2)^2 + x^2}.$$

$$\text{D. } a = \frac{-x(2y+1)}{(y+2)^2 + x^2}, b = \frac{y^2 + y + x^2 - 2}{(y+2)^2 + x^2}.$$

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \omega = \frac{x - yi + i}{i(x + yi) - 2} = \frac{x - yi + i}{xi - y - 2} = \frac{(x - yi + i)(-xi - y - 2)}{(xi - y - 2)(-xi - y - 2)} = \frac{-x - 2xy + i(y^2 + y - x^2 - 2)}{x^2 + (y+2)^2}$$

$$\Leftrightarrow \omega = \frac{-x(2y+1)}{(y+2)^2 + x^2} + \frac{y^2 + y - x^2 - 2}{x^2 + (y+2)^2}i \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-x(2y+1)}{(y+2)^2 + x^2} \\ b = \frac{y^2 + y - x^2 - 2}{x^2 + (y+2)^2} \end{cases}.$$

Câu 31. (THPT Lam Sơn – Thanh Hóa) Cho số phức z , tìm giá trị lớn nhất của $|z|$ biết z thỏa mãn điều kiện $\left| \frac{-2-3i}{3-2i}z + 1 \right| = 1$.

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. $\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Tổng quát: Cho số phức z thỏa mãn $|z - a - bi| = R$ tìm modun lớn nhất và nhỏ nhất của số phức $|z|$.

Điểm biểu diễn số phức z là đường tròn $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

Khi đó: $|z|_{\max} = OI + R = \sqrt{a^2 + b^2} + R$, $|z|_{\min} = OI - R = \sqrt{a^2 + b^2} - R$.

Áp dụng: Ta có: $\left| \frac{-2-3i}{3-2i}z + 1 \right| = 1 \Leftrightarrow |-iz + 1| = 1 \xrightarrow{z=x+yi} (y+1)^2 + x^2 = 1$.

Khi đó: $z_{\max} = OI + R = 1 + 1 = 2$.

Câu 32. (THPT Thanh Chương -Nghệ An - L1) Cho z_1, z_2 là hai số phức thỏa mãn phương trình $|2z - i| = |2 + iz|$, biết $|z_1 - z_2| = 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = |z_1 + z_2|$.

A. $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $P = \sqrt{2}$.

C. $P = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $P = \sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Cách 1.

Ta có $|2z - i| = |2 + iz| \Leftrightarrow |2z - i|^2 = |2 + iz|^2 \Leftrightarrow (2z - i)(2\bar{z} + i) = (2 + iz)(2 - i\bar{z})$

$\Leftrightarrow 4z\bar{z} + 2iz - 2i\bar{z} - i^2 = 4 - 2i\bar{z} + 2iz - i^2z\bar{z} \Leftrightarrow 5z\bar{z} = 5 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1$

$\Rightarrow |z_1| = 1$ và $|z_2| = 1$.

Chú ý: $a\bar{a} = a^2 \Rightarrow |2z - i|^2 = (2z - i)(\overline{2z - i}) = (2z - i)(2\bar{z} + i)$.

Tập hợp điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 là đường tròn tâm O , $R = 1$.

Gọi $M_1(z_1), M_2(z_2) \Rightarrow OM_1 = OM_2 = 1$.

Ta có $|z_1 - z_2| = |\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}| = |\overrightarrow{M_2M_1}| = 1 \Rightarrow \Delta OM_1M_2$ đều.

Mà $|z_1 + z_2| = |\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}| = |\overrightarrow{OM}| = OM$ với M là điểm thỏa mãn OM_1MM_2 là hình thoi cạnh 1
 $\Rightarrow OM = \sqrt{3} \Rightarrow P = \sqrt{3}$.

Cách 2.

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có $2z - i = 2x + 2(y - 1)i$ và $2 + iz = 2 - y + xi$.

Khi đó $|2z - i| = |2 + iz| \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + (2y - 1)^2} = \sqrt{(y - 2)^2 + x^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1 \Rightarrow \begin{cases} |z_1| = 1 \\ |z_2| = 1 \end{cases}$.

Sử dụng công thức $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \Rightarrow |z_1 + z_2|^2 = 3 \Rightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{3}$.

Câu 33. (Sở GD Phú Thọ) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $|z_1| = 3$, $|z_2| = 4$, $|z_1 - z_2| = \sqrt{37}$. Xét số phức $z = \frac{z_1}{z_2} = a + bi$. Tìm $|b|$.

A. $|b| = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

B. $|b| = \frac{\sqrt{39}}{8}$.

C. $|b| = \frac{3}{8}$.

D. $|b| = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $z_1 = x + yi$, $z_2 = c + di$ ($x, y, c, d \in \mathbb{R}$). Ta có: $|z_1| = 3 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$; $|z_2| = 4 \Rightarrow c^2 + d^2 = 16$;

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{37} \Rightarrow (x - c)^2 + (y - d)^2 = 37 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + c^2 + d^2 - 2xc - 2yd = 37 \Leftrightarrow xc + yd = -6.$$

$$\text{Lại có: } \frac{z_1}{z_2} = \frac{x + yi}{c + di} = \frac{(x + yi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{xc + yd + (yc - xd)i}{c^2 + d^2} = \frac{xc + yd}{c^2 + d^2} + \frac{yc - xd}{c^2 + d^2}i = a + bi = -\frac{3}{8} + bi.$$

$$\text{Mà } \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{3}{4} = \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow b^2 = \frac{9}{16} - \left(-\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{27}{64} \Rightarrow b = \pm \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

$$\text{Vậy } |b| = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Câu 34. (Chuyên ĐH Vinh – Nghệ An – L4) Cho số phức z thỏa mãn z không phải số thực và $w = \frac{z}{2 + z^2}$ là số thực. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z + 1 - i|$ là

A. $2\sqrt{2}$.

B. $\sqrt{2}$.

C. 2.

D. 8.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Cách 1.

$$w = \frac{z}{2 + z^2} \text{ là số thực } w = \bar{w} \Leftrightarrow \frac{z}{2 + z^2} = \frac{\bar{z}}{2 + \bar{z}^2} \Leftrightarrow 2z + z \cdot \bar{z}^2 = 2\bar{z} + \bar{z}z^2$$

$$\Leftrightarrow 2(z - \bar{z}) = z \cdot \bar{z}(z - \bar{z}) \Leftrightarrow z = \bar{z} \text{ (loại do } z \text{ không là số thực) hoặc } 2 = z \cdot \bar{z} \Leftrightarrow |z| = \sqrt{2}.$$

Suy ra: $OM = \sqrt{2}$ với M là điểm biểu diễn của z , M thuộc đường tròn (C) tâm O , $R = \sqrt{2}$

Ta có:

$$P = |z + 1 - i| = MA, \text{ với } A(-1; 1). \text{ Ta có: } A \in (C) \text{ nên } MA \text{ lớn nhất bằng } 2R = 2\sqrt{2}.$$

Cách 2.

Vì z không là số thực nên $z \neq 0$. Suy ra $w \neq 0$.

$$\text{Ta có } w = \frac{z}{2 + z^2} \Leftrightarrow w(2 + z^2) = z \Leftrightarrow z^2 - \frac{1}{w}z + 2 = 0 \quad (*).$$

$(*)$ là phương trình bậc hai với hệ số thực $\left(\frac{1}{w} \in \mathbb{R}\right)$ nên có nghiệm 2 phức z_1, z_2 liên hợp của nhau.

Theo Viet ta có:

$$z_1 \cdot z_2 = 2 \Rightarrow |z_1 \cdot z_2| = 2 \Leftrightarrow |z_1| |z_2| = 2 \Leftrightarrow |z_1| |\bar{z}_1| = 2 \Rightarrow |z| = \sqrt{2}.$$

$$\text{Suy ra } P = |z + 1 - i| \leq |z| + |1 - i| = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

Cách 3.

$$\text{Ta có } w = \frac{z}{2 + z^2} \Leftrightarrow \frac{1}{w} = z + \frac{2}{z}, \text{ mà } w \in \mathbb{R} \text{ suy ra } \frac{1}{w} \in \mathbb{R}, \text{ suy ra } \frac{2}{z} \text{ là số phức liên hợp của } z.$$

$$\text{Suy ra } z \cdot \bar{z} = 2 \Rightarrow |z| = \sqrt{2}. \text{ Ta có } P = |z + 1 - i| \leq |z| + |1 - i| = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

Câu 35. (Chuyên ĐH Vinh – Nghệ An – L4) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2| = 1$.

Tính $|z_1 + z_2|$

A. $\sqrt{3}$.

B. 1.

C. $2\sqrt{3}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Cách 1.

Ta có $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$. Khi đó $|z_1 + z_2|^2 = 2(1+1) - 1 = 3 \Leftrightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{3}$.

Cách 2.

Chọn $z_1 = 1$ từ đó suy ra z_2 từ hệ $\begin{cases} |z_2| = 1 \\ |z_2 - 1| = 1 \end{cases}$. Thay vào $|z_1 + z_2|$ ta cũng được kết quả $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$.

Câu 36. (THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp – Quảng Bình) Gọi (H) là hình biểu diễn tập hợp các số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy để $|2z - \bar{z}| \leq 3$ số phức z có phần thực không âm. Tính diện tích hình (H) .

A. 3π .

B. $\frac{3}{2}\pi$.

C. $\frac{3}{4}\pi$.

D. 6π .

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $z = x + yi$ ($x \geq 0$), $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow |2z - \bar{z}| \leq 3 \Leftrightarrow |x + 3yi| \leq 3 \Leftrightarrow x^2 + 9y^2 \leq 9$.

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} \leq 1$. Do hình (H) là nửa hình Elip có $a=3, b=1$. Khi đó $S = \frac{1}{2}S_{\text{elip}} = \frac{1}{2}(\pi ab) = \frac{3}{2}\pi$.

Câu 37. (THPT Hoàng Hóa 4 – Thanh Hóa) Cho số phức z thỏa điều kiện $|z+1| = |z-i|$. Tìm số phức $w = z + 2i - 3$ có môđun nhỏ nhất.

A. $\omega = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$.

B. $\omega = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

C. $\omega = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

D. $\omega = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Cách 1. Đại số

Đặt $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

Ta có $|z+1| = |z-i| \Leftrightarrow |a+bi+1| = |a+bi-i| \Leftrightarrow |(a+1)+bi| = |a+(b-1)i|$

$\Leftrightarrow (a+1)^2 + b^2 = a^2 + (b-1)^2 \Leftrightarrow a+b=0$

Khi đó $w = a+bi+2i-3 = (a-3) + (b+2)i = (a-3) + (-a+2)i$

$\Rightarrow |w|^2 = (a-3)^2 + (-a+2)^2 = 2a^2 - 10a + 13 = 2\left(a^2 - 5a + \frac{25}{4}\right) + \frac{1}{2} = 2\left(a - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow |w|_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ khi $a = \frac{5}{2} \Rightarrow b = -\frac{5}{2} \Rightarrow z = \frac{5}{2} - \frac{5}{2}i \Rightarrow w = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

Cách 2. Hình học

Đặt $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

Ta có $|z+1| = |z-i| \Leftrightarrow |a+bi+1| = |a+bi-i| \Leftrightarrow |(a+1)+bi| = |a+(b-1)i|$

$\Leftrightarrow (a+1)^2 + b^2 = a^2 + (b-1)^2 \Leftrightarrow a+b=0$, suy ra tập hợp các số phức z nằm trên đường thẳng

$\Delta: y = -x$. Xét điểm $I(3; -2)$. Ta có $w = z + 2i - 3 \Rightarrow |w| = |z + 2i - 3| = IM$.

Ta có $IM_{\min}$ khi M là hình chiếu vuông góc của I trên Δ , $M(m; -m)$ suy ra $\overrightarrow{IM} = (m-2; 3-m)$,

$$\overrightarrow{IM} \cdot \vec{u}_{\Delta} = 0 \Leftrightarrow m-2+m-3=0 \Leftrightarrow m=\frac{5}{2}. \text{ Vậy } w = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \text{ là số phức có môđun nhỏ nhất.}$$

Câu 38. (THPT Đồng Đa – Hà Nội) Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 + 2z + 2| = |z + 1 - i|$. Biểu thức $|z|$ có giá trị lớn nhất là

A. $\sqrt{2} + 1$.

B. 2.

C. $\sqrt{2} + 2$.

D. $\sqrt{2} - 1$.

Hướng dẫn giải.

Chọn A.

Cách 1: Đại số.

$$|z^2 + 2z + 2| = |z + 1 - i| \Leftrightarrow |(z+1)^2 - i^2| = |z + 1 - i| \Leftrightarrow |z+1+i||z+1-i| = |z+1-i| \Leftrightarrow \begin{cases} |z+1-i| = 0 & (1) \\ |z+1+i| = 1 & (2) \end{cases}$$

+) (1) $\Leftrightarrow z = -1 + i \Rightarrow |z| = \sqrt{2}$ (3).

+) Đặt $z = a + bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó ta có (2) $\Leftrightarrow |a+1+(b+1)i| = 1 \Leftrightarrow (a+1)^2 + (b+1)^2 = 1$
 $\Leftrightarrow a^2 + b^2 = -2a - 2b - 1$, theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có: $-2a - 2b - 1 \leq \sqrt{8(a^2 + b^2)} - 1$
 $\Leftrightarrow |z|^2 - 2\sqrt{2}|z| + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} - 1 \leq |z| \leq \sqrt{2} + 1$ (4).

Từ (3), (4) suy ra $|z|_{\max} = \sqrt{2} + 1$.

Cách 2: Hình học.

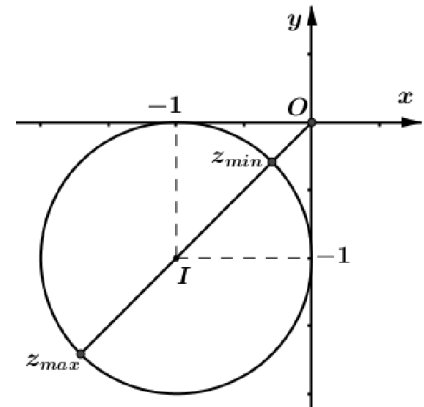
$$|z^2 + 2z + 2| = |z + 1 - i| \Leftrightarrow |(z+1)^2 - i^2| = |z + 1 - i|$$

$$\Leftrightarrow |z+1+i||z+1-i| = |z+1-i| \Leftrightarrow \begin{cases} |z+1-i| = 0 & (1) \\ |z+1+i| = 1 & (2) \end{cases}$$

+) (1) $\Leftrightarrow z = -1 + i \Rightarrow |z| = \sqrt{2}$ (3).

+) Đặt $z = a + bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó ta có (2) $\Leftrightarrow |a+1+(b+1)i| = 1 \Leftrightarrow (a+1)^2 + (b+1)^2 = 1$, suy ra tập hợp các số phức cần tìm nằm trên đường tròn tâm $I(-1; -1)$, bán kính

$R = 1$. Suy ra $|OI - R| \leq |z| \leq OI + R \Leftrightarrow \sqrt{2} - 1 \leq |z| \leq \sqrt{2} + 1$. Vậy $|z|_{\max} = \sqrt{2} + 1$.



Câu 39. (Sở GD Bắc Giang – L1) Cho số phức z thay đổi và luôn thỏa mãn $|z - 3 + 4i| = 4$. Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P = |z|$

A. $P_{\max} = 12$.

B. $P_{\max} = 5$.

C. $P_{\max} = 9$.

D. $P_{\max} = 3$.

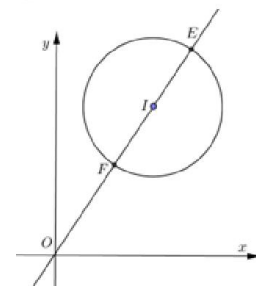
Hướng dẫn giải

Chọn C

Cho số phức z thỏa mãn $|z - a - bi| = R$ tìm modun lớn nhất và nhỏ nhất của số phức $|z|$. Điểm biểu diễn số phức z là đường tròn:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

Khi đó $|z|_{\max} = OI + R = \sqrt{a^2 + b^2} + R$, $|z|_{\min} = OI - R = \sqrt{a^2 + b^2} - R$.



Áp dụng: $P_{\max} = \sqrt{3^2 + 4^2} + 4 = 9$.

Câu 40 (Sở GD Quảng Ninh) Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2| = 1$. Tính giá trị của

biểu thức $P = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2$

A. $P = 1 - i$.

B. $P = -1 - i$.

C. $P = -1$.

D. $P = 1 + i$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Cách 1.

Ta có $GT \Rightarrow \frac{|z_1|}{|z_2|} = 1 = \frac{|z_1 - z_2|}{|z_2|} \Leftrightarrow \frac{|z_1|}{|z_2|} = 1 = \left| \frac{z_1}{z_2} - 1 \right|$.

Đặt $\frac{z_1}{z_2} = a + bi$ ta có: $\sqrt{a^2 + b^2} = 1 = \sqrt{(a-1)^2 + b^2} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow w = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow P = w^2 + \frac{1}{w^2} = -1$.

Cách 2.

Chọn $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}; z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow P = -1$.

Cách 3. Dùng dạng lượng giác của số phức (đọc thêm).

Gọi $A(z_1); B(z_2); \overline{AB}(z_1 - z_2) \Rightarrow \triangle OAB$ là tam giác đều cạnh 1

Khi đó $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1 \angle \varphi_1}{r_2 \angle \varphi_2}\right)^2 = \left[\frac{r_1}{r_2} \angle (\varphi_1 - \varphi_2)\right]^2 = 1 \angle (2\varphi_1 - 2\varphi_2) = 1 \angle 120^\circ = (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$

Tương tự $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 = \cos(-120^\circ) + i \sin(-120^\circ) \Rightarrow P = -1$.

Câu 41. (THPT chuyên Hà Giang – L1) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2 + 2i| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$

A. $\max|z| = 2\sqrt{2} + 1$.

B. $\max|z| = 2\sqrt{2}$.

C. $\max|z| = 2\sqrt{2} + 2$.

D. $\max|z| = 2\sqrt{2} - 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Cách 1. Đại số

Giả sử $z = a + bi$, với $(a, b \in \mathbb{R})$.

Ta có: $|z - 2 + 2i| = 1 \Leftrightarrow |a + bi - 2 + 2i| = 1 \Leftrightarrow |a - 2 + (b + 2)i| = 1 \Leftrightarrow (a - 2)^2 + (b + 2)^2 = 1$.

Đặt $\begin{cases} a = 2 + \sin t \\ b = -2 + \cos t \end{cases}$.

Khi đó: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(2 + \sin t)^2 + (-2 + \cos t)^2} = \sqrt{9 + 4(\sin t - \cos t)}$

$\leq \sqrt{9 + 4(\sin^2 t + \cos^2 t)} = \sqrt{9 + 4} = 2\sqrt{2} + 1 \Rightarrow |z|_{\max} = 2\sqrt{2} + 1$ khi $\sin t = -\cos t$.

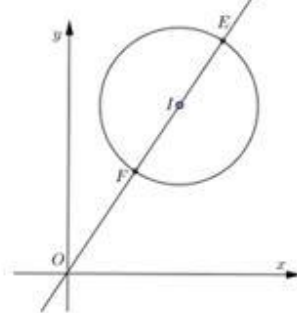
Cách 2. Hình học

Cho số phức z thỏa mãn $|z - a - bi| = R$ tìm mô đun lớn nhất và nhỏ nhất của số phức $|z|$. Điểm biểu diễn số phức z là đường tròn:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

$$\text{Khi đó } |z|_{\max} = OI + R = \sqrt{a^2 + b^2} + R, \quad |z|_{\min} = OI - R = \sqrt{a^2 + b^2} - R.$$

$$\text{Áp dụng: } P_{\max} = \sqrt{2^2 + 2^2} + 1 = 2\sqrt{2} + 1.$$



Câu 42. (Chuyên KHTN – Hà Nội – L4) Gọi z_1, z_2 là 2 nghiệm của phương trình $z^2 + z + 1 = 0$. Tính giá trị $P = z_1^{2017} + z_2^{2017}$.

A. $P = 1$.

B. $P = -1$.

C. $P = 0$.

D. $P = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Vì z_1 là nghiệm của phương trình $z^2 + z + 1 = 0$ nên ta có

$$z_1^2 + z_1 + 1 = 0 \Rightarrow z_1^3 - 1 = 0 \Rightarrow z_1^3 = 1 \Rightarrow z_1^{2016} = 1 \Rightarrow z_1^{2017} = z_1$$

Chứng minh tương tự: $z_2^{2017} = z_2$. Vậy $P = z_1 + z_2 = -1$.

Câu 43. (Chuyên KHTN – Hà Nội – L4) Với hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z_1| + |z_2|$.

A. $P = 5 + 3\sqrt{5}$.

B. $P = 2\sqrt{26}$.

C. $P = 4\sqrt{6}$.

D. $P = 34 + 3\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $OA = |z_1|, OB = |z_2|$ (với O là gốc tọa độ, A, B là điểm biểu diễn của z_1, z_2).

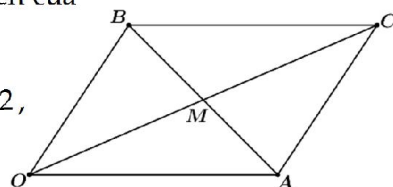
Dựng hình bình hành $OACB$, khi đó ta có $AB = |z_1 - z_2| = 2$,

$$OC = |z_2 + z_1| = 10, OM = 5.$$

Theo định lý đường trung tuyến ta có

$$OM^2 = \frac{2(OA^2 + OB^2) - AB^2}{4} \Rightarrow OA^2 + OB^2 = 52 \Rightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 = 52$$

Ta có $|z_1| + |z_2| \leq \sqrt{2(|z_1|^2 + |z_2|^2)} = 2\sqrt{26}$ (BĐT Bunhiacopxki). Vậy $P_{\max} = 2\sqrt{26}$.



Câu 44. (Sở GD Hải Dương) Cho số phức z thỏa mãn $z.\bar{z} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = |z^3 + 3z + \bar{z}| - |z + \bar{z}|$.

A. $\frac{15}{4}$.

B. $\frac{3}{4}$.

C. $\frac{13}{4}$.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Giả sử $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$, với $(a, b \in \mathbb{R})$.

$$z.\bar{z} = 1 \text{ suy ra } b^2 = 1 - a^2.$$

$$P = |z^3 + 3z + \bar{z}| - |z + \bar{z}| \quad \text{suy ra} \quad P = \sqrt{a^2(a^2 - 3b^2 + 4)^2 + b^2(3a^2 - b^2 + 2)^2} - \sqrt{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow P = f(x) = x^2 - x + 1 \text{ với } x \in [0; 4]. \text{ Lập bảng biến thiên ta suy ra } P_{\min} = \frac{3}{4}.$$

Trong quá trình biên soạn tôi cũng khó có thể tránh khỏi sai sót. Mong nhận được sự góp ý từ các bạn và quý thầy cô. Mọi góp ý xin inbox trực tiếp cho tôi theo địa chỉ <https://www.facebook.com/lehong.quoc.12>. Chân thành cảm ơn và chúc các bạn học tốt!