

Câu 1 (2,0 điểm). Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ (1).

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1).
b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x_0 , biết $f''(x_0) = 12$.

Câu 2 (1,0 điểm).

- a) Giải phương trình $2\sin x \cos x + \sqrt{3} \cos 2x = 2$
b) Tìm mô đun của số phức z , biết z thỏa mãn đẳng thức: $z + (1 - i)\bar{z} = 10 - 3i$.

Câu 3 (1,0 điểm). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{1}{x}$ và $y = -2x + 3$.

Câu 4 (0,5 điểm). Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}} x + 2\log_{\frac{1}{9}}(x+2) \leq -1$

Câu 5 (0,5 điểm) Có 15 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 15. Chọn ngẫu nhiên ra 7 tấm thẻ. Tính xác suất để trong 7 tấm thẻ được chọn có 3 tấm thẻ mang số lẻ, 4 tấm thẻ mang số chẵn, trong đó chỉ có đúng 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 4.

Câu 6 (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm $A(1;4;2)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $2x + 2y + z - 3 = 0$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên (P). Viết phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với (P).

Câu 7 (1,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy là trung điểm H của AD, góc giữa SB và mặt phẳng đáy (ABCD) bằng 45° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và BH theo a.

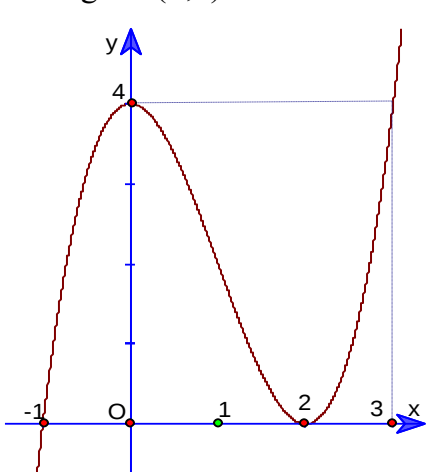
Câu 8 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có trực tâm $H(5;5)$, phương trình đường thẳng chứa cạnh BC là $x + y - 8 = 0$. Biết đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đi qua hai điểm $M(7;3)$, $N(4;2)$. Tính diện tích tam giác ABC.

Câu 9 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \left((x + \sqrt{1+x^2}) \cdot (y + \sqrt{1+y^2}) \right) = 1 \\ x\sqrt{6x-2xy+1} = 4xy + 6x + 1 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Câu 10 (1,0 điểm). Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z \leq \frac{3}{2}$. Tìm giá trị

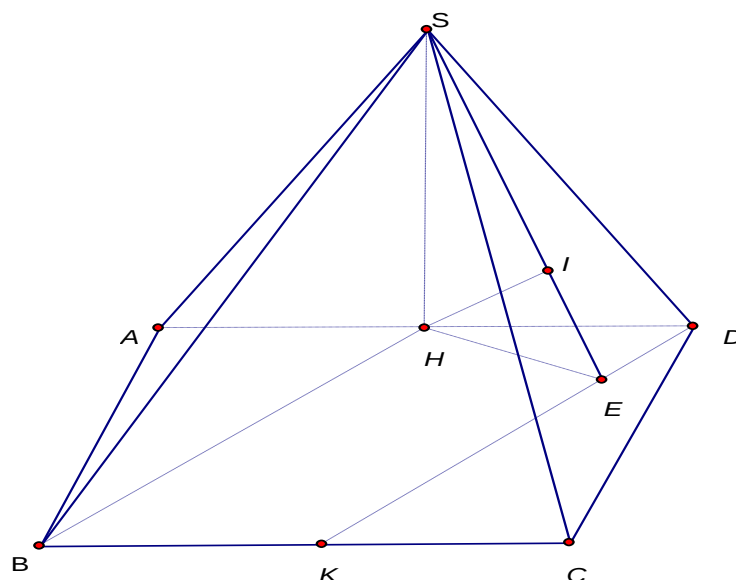
nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{y^2z} + \frac{y}{z^2x} + \frac{z}{x^2y} + \frac{x^5}{y} + \frac{y^5}{z} + \frac{z^5}{x}$.

HẾT

Câu	Nội dung	Điểm																				
1	a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ (1).																					
	1/ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ 2/ Sự biến thiên. * Chiều biến thiên. Ta có: $y' = 3x^2 - 6x; \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$	0,25																				
	Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$. * Cực trị. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0 \Rightarrow y_{CD} = 4$ Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 2 \Rightarrow y_{CT} = 0$. * Giới hạn tại vô cực: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty;$ Đồ thị hàm số không có tiệm cận.	0,25																				
	* Bảng biến thiên: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td></td><td>2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr><tr><td>y</td><td>$-\infty$</td><td>$\nearrow$ 4</td><td>$\searrow$</td><td>0</td><td>$\nearrow$</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	0		2		$+\infty$	y'	+	0	-	0	+		y	$-\infty$	$\nearrow$ 4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
x	$-\infty$	0		2		$+\infty$																
y'	+	0	-	0	+																	
y	$-\infty$	$\nearrow$ 4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$																
	3/.Đồ thị: Đồ thị cắt Oy tại điểm $(0;4)$, cắt Ox tại điểm $(2;0)$, $(1;0)$; đi qua điểm $(3;4)$. Tâm đối xứng là $I(1;2)$. 	0,25																				
	b. Viết PTTT của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x_0, biết $f''(x_0) = 12$																					
	Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ của tiếp điểm Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x \quad ; \quad f''(x) = 6x - 6$	0,25																				
	Theo gt : $f''(x_0) = 12 \Leftrightarrow 6x_0 - 6 = 12 \Leftrightarrow x_0 = 3 \Rightarrow f(x_0) = 4 \quad ; \quad f'(3) = 9$	0,5																				

	Vậy: PTĐT của đồ thị (C) tại điểm (3;4) là $y - 4 = 9(x - 3) \Leftrightarrow y = 9x - 23$.	0,25
2	a) Giải phương trình	
	Ta có: phương trình (1) $\Leftrightarrow \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 2$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x = 1$	0,25
	$\Leftrightarrow \cos(2x - \frac{\pi}{6}) = 1 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = k2\pi \ (k \in \mathbf{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi \ (k \in \mathbf{Z})$	0,25
	b)* Đặt $z = a + bi \ (a, b \in \mathbf{R})$	
	* Từ (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b = 10 \\ a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \end{cases}$. Suy ra số phức $z = 3 - 4i$	0,25
	* Khi đó: $ z = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$	0,25
3	* Ta có PT hoành độ giao điểm của đường cong $y = \frac{1}{x}$ và đường thẳng $y = -2x + 3$:	
	$\frac{1}{x} = -2x + 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0, x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$	0,5
	* Gọi S là diện tích của hình phẳng cần tính. Ta có: $S = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left \frac{1}{x} - (-2x + 3) \right dx$	
	$S = \left \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{x} + 2x - 3 \right) dx \right = \frac{3}{4} - \ln 2 \text{ (đvdt)}$	0,5
4	ĐK: $x > 0 \ (*)$	
	Với đk (*), ta có: bất phương trình (1) $\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}^{x(x+2)} \leq -1 \Leftrightarrow x(x+2) \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$	0,25
	$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -3 \end{cases}$. Kết hợp đk (*), ta được tập nghiệm của bpt (1) là $S = [1; +\infty)$.	0,25
5	* Gọi Ω là không gian mẫu $\Rightarrow$ số phần tử của KGM là $n(\Omega) = C_{15}^7$	
	* Có 8 tấm thẻ mang số lẻ, 3 tấm thẻ mang số chia hết cho 4, 4 tấm thẻ mang số chẵn và không chia hết cho 4.	0,25

	* Gọi A là biến cố đã cho, suy ra $n(A) = C_8^3 \cdot C_4^3 \cdot C_3^1$ Vậy xác suất của biến cố A là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_8^3 \cdot C_4^3 \cdot C_3^1}{C_{15}^7} = \frac{672}{6435} = \frac{224}{2145}$	0,25
6	*) Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên (P) Ta có đường thẳng AH đi qua A và vuông góc với (P) có PTTS là: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$ Do $H \in AH \Rightarrow H(1+2t; 4+2t; 2+t)$. Mặt khác $H \in (P) \Rightarrow 2(1+2t) + 2(4+2t) + (2+t) - 3 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow \mathbf{H(-1;2;1)}$	0,5
	*) Tính được bk $R = AH$ (hoặc $R = d(A, (P))$) Suy ra PT mặt cầu là: $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 + (z - 2)^2 = 9$	0,5
7	*) Ta có SH là chiều cao của hình chóp, góc giữa SB và mp(ABCD) là $\widehat{SBH} = 45^\circ$ Dễ thấy $\triangle BAH$ vuông cân tại A cạnh a $\Rightarrow BH = a\sqrt{2}$ $\triangle SHB$ vuông cân tại H $\Rightarrow SH = BH = a\sqrt{2}$; $dt(ABCD) = 2a^2$ Thể tích khối chóp S.ABCD là: $V = \frac{1}{3} SH \cdot dt(ABCD) = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$ (đvtt)	0,5
	*) Gọi K là trung điểm của BC, ta có $BH \parallel KD \Rightarrow BH \parallel (SDK)$ Suy ra $d(BH, SD) = d(BH, (SDK)) = d(H, (SDK))$ Gọi E là trung điểm của DK $\Rightarrow HE \perp DK \Rightarrow HE = \frac{1}{2} DK = \frac{1}{2} a\sqrt{2}$ Ta có $(SHE) \perp (SDK)$ (vì $KD \perp (SHE)$), trong (SHE), kẻ $HI \perp SE$ ($I \in SE$) $\Rightarrow HI \perp (SDK)$, suy ra $HI = d(H, (SDK))$. Xét tam giác vuông SHE, ta có: $\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HE^2} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{10}}{5}$ Vậy: $d(BH, SD) = \frac{a\sqrt{10}}{5}$ (đvdd).	0,5



8	*) Gọi H' là điểm đối xứng của H qua $BC \Rightarrow H'(3;3) \in$ đường tròn ngoại tiếp ΔABC *) PT đường tròn ngoại tiếp ΔABC đi qua M, N, H' có dạng: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \text{ (với } a^2 + b^2 - c > 0)$ Ta có hệ pt: $\begin{cases} 14a + 6b - c = 58 \\ 8a + 4b - c = 20 \\ 6a + 6b - c = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 4 \\ c = 36 \end{cases} . \text{ Suy ra PT: } x^2 + y^2 - 10x - 8y + 36 = 0$	0,25
	*) Tọa độ điểm B, C là nghiệm của hệ PT: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x - 8y + 36 = 0 \\ x + y - 8 = 0 \end{cases}$ Suy ra $B(3;5), C(6;2) \Rightarrow BC = 3\sqrt{2}$	0,25
	*) Đường thẳng AH đi qua $H'(3;3)$ và nhận véc tơ $\vec{HH'}(2;2)$ làm VTCP có PTTS: $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 3 + 2t \end{cases} \Rightarrow A(3 + 2t; 3 + 2t)$ Do $A \in$ đường tròn $\Rightarrow (3 + 2t)^2 + (3 + 2t)^2 - 10(3 + 2t) - 8(3 + 2t) + 36 = 0$ $\Leftrightarrow 2t^2 - 3t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ (loại vì trùng } H') \text{ hoặc } t = \frac{3}{2} . \text{ Suy ra } A(6;6)$	0,25
	*) Ta có $d(A, BC) = 2\sqrt{2}$. Vậy: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} d(A, BC) \cdot BC = 6 \text{ (đvdt)}$	0,25

9		
	(1) $\Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 1} = -y + \sqrt{(-y)^2 + 1}$ (3) + Xét $f(t) = t + \sqrt{t^2 + 1}, t \in \mathbb{R}$ Khi đó: $f'(t) = \frac{\sqrt{t^2 + 1} + t}{\sqrt{t^2 + 1}} > \frac{ t + t}{\sqrt{t^2 + 1}} \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$	0,25
	Suy ra : (3) $\Leftrightarrow x = -y$ Thế $x = -y$ vào (2) ... $\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x^2 + 6x + 1} - \frac{x}{2} \right)^2 = \frac{25x^2}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2 + 6x + 1} = 3x \\ \sqrt{2x^2 + 6x + 1} = -2x \end{cases}$	0,25
	+ Với $\sqrt{2x^2 + 6x + 1} = 3x \dots \Leftrightarrow x = 1; y = -1$	0,25
	+ Với $\sqrt{2x^2 + 6x + 1} = -2x \dots \Leftrightarrow x = \frac{3 - \sqrt{11}}{2}; y = \frac{-3 + \sqrt{11}}{2}$ Kết luận hpt có 2 nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{3 - \sqrt{11}}{2} \\ y = \frac{-3 + \sqrt{11}}{2} \end{cases}$	0,25
10		
	Theo BĐT Cauchy ta có $P \geq 3 \left(\sqrt[3]{\frac{1}{(xyz)^2}} + \sqrt[3]{(xyz)^4} \right); \quad \sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x + y + z}{3} \leq \frac{1}{2}$ Đặt $t = \sqrt[3]{xyz} \quad (0 < t \leq \frac{1}{2})$ thì $P \geq 3 \left(t^4 + \frac{1}{t^2} \right)$	0,5
	Xét hàm số $f(t) = t^4 + \frac{1}{t^2}$ trên $\left(0; \frac{1}{2} \right]$, ta có $f'(t) = 4t^3 - \frac{2}{t^3} < 0, \quad \forall t \in \left(0; \frac{1}{2} \right]$ Suy ra hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{1}{2} \right]$. Do đó $f(t) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{65}{16}$ Vậy: $\min P = \frac{195}{16} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{2}$	0,5