

PHẦN 1. NGUYÊN HÀM

- Câu 1.** (Chuyên Lam Sơn - 2020) Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục và có một nguyên hàm lần lượt là $F(x) = x + 2019$, $G(x) = x^2 + 2020$. Tìm một nguyên hàm $H(x)$ của hàm số $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, biết $H(1) = 3$.
- A. $H(x) = x^3 + 3$. B. $H(x) = x^2 + 5$. C. $H(x) = x^3 + 1$. D. $H(x) = x^2 + 2$.
- Câu 2.** (Chuyên Thái Bình - 2020) Giả sử $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 e^x$. Tính tích $P = abc$.
- A. $P = -4$. B. $P = 1$. C. $P = 5$. D. $P = -3$.
- Câu 3.** (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(f'(x))^2 = f(x) \cdot e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Khi đó $f(2)$ thuộc khoảng nào sau đây?
- A. $(12; 13)$. B. $(9; 10)$. C. $(11; 12)$. D. $(13; 14)$.
- Câu 4.** (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{4}{19}$ và $f'(x) = x^3 f^2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng
- A. $-\frac{2}{3}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. -1 . D. $-\frac{3}{4}$.
- Câu 5.** (Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020) Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$ trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $x \cdot f'(x)$ thỏa mãn $F(0) = 0$. Biết $a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn $\tan a = 3$. Tính giá trị biểu thức $T = F(a) - 10a^2 + 3a$.
- A. $-\frac{1}{2} \ln 10$. B. $\frac{1}{2} \ln 10$. C. $-\frac{1}{4} \ln 10$. D. $\ln 10$.
- Câu 6.** (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ thỏa mãn điều kiện: $f(1) = -2 \ln 2$ và $x \cdot (x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + x$. Biết $f(2) = a + b \ln 3$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Giá trị $2(a^2 + b^2)$ là
- A. $\frac{27}{4}$. B. 9 . C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{9}{2}$.
- Câu 7.** (Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, thỏa mãn $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị biểu thức $T = F(0) + F(1) + F(2) + \dots + F(2019)$.
- A. $T = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}$. B. $T = 1009 \cdot \frac{2^{2019} - 1}{2}$. C. $T = 2^{2019 \cdot 2020}$. D. $T = \frac{2^{2019} - 1}{\ln 2}$.

Câu 8. (Hải Hậu - Nam Định - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) < 0, \forall x > 0$ và có đạo hàm $f''(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f''(x) = (2x+1)f^2(x), \forall x > 0$ và $f(1) = -\frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $f(1) + f(2) + \dots + f(2020)$ bằng

A. $-\frac{2020}{2021}$. B. $-\frac{2015}{2019}$. C. $-\frac{2019}{2020}$. D. $-\frac{2016}{2021}$.

Câu 9. (Trường VINSCHOOL - 2020) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$. Biết $f(3) + f(-3) = 4$ và $f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(-\frac{1}{3}\right) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(-5) + f(0) + f(2)$ bằng

A. $5 - \frac{1}{2} \ln 2$. B. $6 - \frac{1}{2} \ln 2$. C. $5 + \frac{1}{2} \ln 2$. D. $6 + \frac{1}{2} \ln 2$.

PHẦN 2. TÍCH PHÂN

Câu 10. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1; 2]$ và thỏa mãn điều kiện $f(x) = \sqrt{x+2} + xf(3-x^2)$. Tích phân $I = \int_{-1}^2 f(x) dx$ bằng

A. $I = \frac{14}{3}$. B. $I = \frac{28}{3}$. C. $I = \frac{4}{3}$. D. $I = 2$.

Câu 11. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_{-5}^1 f(x) dx = 9$. Tích phân $\int_0^2 [f(1-3x) + 9] dx$ bằng

A. 15. B. 27. C. 75. D. 21.

Câu 12. (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An - 2020) Cho $f(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$ và $f(1) = -\frac{1}{18}, \int_0^1 x.f'(x) dx = \frac{1}{36}$. Giá trị của $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $-\frac{1}{12}$. B. $\frac{1}{36}$. C. $\frac{1}{12}$. D. $-\frac{1}{36}$.

Câu 13. (Chuyên Hưng Yên - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $4x.f(x^2) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$. Tính $I = \int_0^1 f(x) dx$.

A. $\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{\pi}{16}$. C. $\frac{\pi}{20}$. D. $\frac{\pi}{6}$.

Câu 14. (Chuyên KHTN - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ biết $f(0) = \frac{1}{2}$ và $f'(x) = xe^{x^2}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^1 xf(x) dx$ bằng

A. $\frac{e+1}{4}$. B. $\frac{e-1}{4}$. C. $\frac{e-1}{2}$. D. $\frac{e+1}{2}$.

- Câu 15. (Chuyên Lam Sơn - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ thỏa mãn $\int_0^{10} f(x)dx = 7, \int_2^{10} f(x)dx = 1$. Tính $P = \int_0^1 f(2x)dx$.
- A. $P = 6$. B. $P = -6$. C. $P = 3$. D. $P = 12$.
- Câu 16. (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2\cos^2 x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ bằng.
- A. $\frac{\pi^2 + 16\pi + 16}{16}$. B. $\frac{\pi^2 + 4}{16}$. C. $\frac{\pi^2 + 14\pi}{16}$. D. $\frac{\pi^2 + 16\pi + 4}{16}$.
- Câu 17. (Chuyên Lương Văn Tỵ - Ninh Bình - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = -1$ và $f'(x) = x(6 + 12x + e^{-x}), \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^1 f(x)dx$ bằng
- A. $3e$. B. $3e^{-1}$. C. $4 - 3e^{-1}$. D. $-3e^{-1}$.
- Câu 18. (Chuyên Nguyễn Bình Khiêm - Quảng Nam - 2020)** Biết rằng $\int_1^e \frac{2\ln x + 1}{x(\ln x + 1)^2} dx = a \ln 2 - \frac{b}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $S = a + b + c$.
- A. $S = 3$. B. $S = 7$. C. $S = 10$. D. $S = 5$.
- Câu 19. (Chuyên Nguyễn Bình Khiêm - Quảng Nam - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$. Biết $f(3) = 3$ và $xf'(2x+1) - f(2x+1) = x^3, \forall x \in (0; +\infty)$. Giá trị của $\int_3^5 f(x)dx$ bằng
- A. $\frac{914}{3}$. B. $\frac{59}{3}$. C. $\frac{45}{4}$. D. 88 .
- Câu 20. (Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và đồng biến trên $[1;4]$, thỏa mãn $x + 2xf(x) = [f'(x)]^2$ với mọi $x \in [1;4]$. Biết $f(1) = \frac{3}{2}$, tính $I = \int_1^4 f(x)dx$
- A. $\frac{1188}{45}$. B. $\frac{1187}{45}$. C. $\frac{1186}{45}$. D. $\frac{9}{2}$.
- Câu 21. (Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Cho $I = \int_1^5 f(x)dx = 26$. Khi đó $J = \int_0^2 x[f(x^2+1)+1]dx$ bằng
- A. 15 . B. 13 . C. 54 . D. 52 .
- Câu 22. (Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Biết $I = \int_0^4 x \ln(x^2+9)dx = a \ln 5 + b \ln 3 + c$ trong đó a, b, c là các số thực. Tính giá trị của biểu thức $T = a + b + c$.
- A. $T = 9$. B. $T = 11$. C. $T = 8$. D. $T = 10$.
- Câu 23. (Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = 10, f(1) = \cot 1$. Tính tích phân $I = \int_0^1 [f(x)\tan^2 x + f'(x)\tan x]dx$.
- A. $1 - \ln(\cos 1)$. B. -1 . C. -9 . D. $1 - \cot 1$.

Câu 24. (Chuyên Bến Tre - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn

$$[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = x^3 - 2x, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(0) = f'(0) = 2. \text{ Tính giá trị của } T = f^2(2)$$

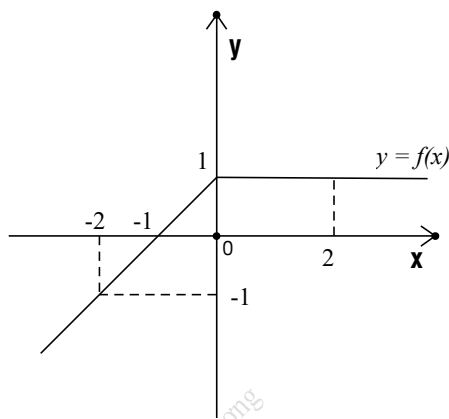
- A. $\frac{160}{15}$ B. $\frac{268}{15}$ C. $\frac{4}{15}$ D. $\frac{268}{30}$

Câu 25. (Chuyên Chu Văn An - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều

$$\text{kiện } f(x) + x(f'(x) - 2 \sin x) = x^2 \cos x, x \in \mathbb{R} \text{ và } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}. \text{ Tính } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f''(x) dx$$

- A. 0. B. $\frac{\pi}{2}$. C. 1. D. π .

Câu 26. (Chuyên Chu Văn An - 2020) Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Giá trị của $\int_{-2}^2 f(x) dx$ bằng

- A. 3. B. 1. C. 0. D. 2.

Câu 27. (Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục và là hàm số lẻ trên

đoạn $[-2; 2]$. Biết rằng $\int_{-1}^0 f(x) dx = -1, \int_{\frac{1}{2}}^1 f(-2x) dx = 2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\int_{-2}^2 f(x) dx = 2 \int_0^2 f(x) dx$. B. $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = -4$.
C. $\int_0^1 f(x) dx = -1$. D. $\int_0^2 f(x) dx = -3$.

Câu 28. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020) Xét hàm số $f(x) = e^x + \int_0^1 x f(x) dx$. Giá trị của $f(\ln(5620))$ bằng

- A. 5622. B. 5620. C. 5618. D. 5621.

Câu 29. (Chuyên Lào Cai - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_1^2 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 4$ và

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 2. \text{ Tích phân } I = \int_0^3 f(x) dx \text{ bằng}$$

- A. $I = 8$. B. $I = 6$. C. $I = 4$. D. $I = 10$.

- Câu 30. (Chuyên Lào Cai - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;3]$ thỏa mãn $f(3)=0$, $\int_0^3 [f'(x)]^2 dx = \frac{7}{6}$ và $\int_0^3 \frac{f(x)}{\sqrt{x+1}} dx = -\frac{7}{3}$. Tích phân $\int_0^3 f(x) dx$ bằng:
- A. $-\frac{7}{3}$. B. $-\frac{97}{30}$. C. $\frac{7}{6}$. D. $-\frac{7}{6}$.
- Câu 31. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0)=\frac{2}{3}$ và $(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})f'(x)=1, \forall x \geq -1$. Biết rằng $\int_0^1 f(x) dx = \frac{a\sqrt{2}+b}{15}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $T = a + b$.
- A. -8. B. -24. C. 24. D. 8.
- Câu 32. (Chuyên Sơn La - 2020)** Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(1)=1$ và $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{3}$. Tính
- $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f'(\sin x) dx$$
- A. $I = \frac{4}{3}$. B. $I = \frac{2}{3}$. C. $I = -\frac{2}{3}$. D. $I = \frac{1}{3}$.
- Câu 33. (Chuyên Sơn La - 2020)** Tích phân $\int_{-2}^2 \frac{x^{2020}}{e^x + 1} dx = \frac{2^a}{b}$. Tính tổng $S = a + b$.
- A. $S = 0$. B. $S = 2021$. C. $S = 2020$. D. $S = 4042$.
- Câu 34. (Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên tập xác định $\mathbb{R}^+$ và thỏa mãn $f(x^2 + 3x + 1) = x + 2$. Tính $I = \int_1^5 f(x) dx$
- A. $\frac{37}{6}$. B. $\frac{527}{3}$. C. $\frac{61}{6}$. D. $\frac{464}{3}$.
- Câu 35. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và
- $$\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 4, \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 2.$$
- Tính tích phân $I = \int_0^3 f(x) dx$.
- A. $I = 6$. B. $I = 4$. C. $I = 10$. D. $I = 2$.
- Câu 36. (Đại Học Hà Tĩnh - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-\ln 2; \ln 2]$ và thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \frac{1}{e^x + 1}$. Biết $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx = a \ln 2 + b \ln 3$, $(a, b \in \mathbb{Q})$. Tính $P = a + b$.
- A. $P = -2$. B. $P = \frac{1}{2}$. C. $P = -1$. D. $P = 2$.
- Câu 37. (ĐHQG Hà Nội - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_0^1 xf(x) dx = \frac{3}{2}$. Hỏi giá trị nhỏ nhất của $\int_0^1 f^2(x) dx$ bằng bao nhiêu?
- A. $\frac{27}{4}$. B. $\frac{34}{5}$. C. 7. D. 8.

Câu 38. (Sở Hưng Yên - 2020) Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) = f(2020 - x)$ và

$$\int_3^{2017} f(x) dx = 4. \text{ Khi đó } \int_3^{2017} xf(x) dx \text{ bằng}$$

- A. 16160. B. 4040. C. 2020. D. 8080.

Câu 39. (Sở Phú Thọ - 2020) Cho hàm số $f(x) > 0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn

$$(x+1)f'(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{x+2} \text{ và } f(0) = \left(\frac{\ln 2}{2}\right)^2. \text{ Giá trị } f(3) \text{ bằng}$$

- A. $\frac{1}{2}(4\ln 2 - \ln 5)^2$. B. $4(4\ln 2 - \ln 5)^2$. C. $\frac{1}{4}(4\ln 2 - \ln 5)^2$. D. $2(4\ln 2 - \ln 5)^2$.

Câu 40. (Sở Phú Thọ - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có $f(1) = e^2$ và $f'(x) = \frac{2x-1}{x^2}e^{2x}$ với mọi x khác 0.

$$\text{Khi đó } \int_1^{\ln 3} xf'(x) dx \text{ bằng}$$

- A. $6 - e^2$. B. $\frac{6 - e^2}{2}$. C. $9 - e^2$. D. $\frac{9 - e^2}{2}$.

Câu 41. (Sở Phú Thọ - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ và thỏa mãn

$$f(x^2 + 1) + \frac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}} = \frac{2x+1}{2x} \ln(x+1). \text{ Biết } \int_1^{17} f(x) dx = a \ln 5 - 2 \ln b + c \text{ với } a, b, c \in \mathbb{R}. \text{ Giá trị của } a + b + 2c \text{ bằng}$$

- A. $\frac{29}{2}$. B. 5. C. 7. D. 37.

Câu 42. (Sở Phú Thọ - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và xác định trên $\mathbb{R}$. Biết $f(1) = 2$ và

$$\int_0^1 x^2 f'(x) dx = \int_1^4 \frac{1+3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} f(2-\sqrt{x}) dx = 4. \text{ Giá trị của } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

- A. 1. B. $\frac{5}{7}$. C. $\frac{3}{7}$. D. $\frac{1}{7}$.

Câu 43. (Sở Hà Tĩnh - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 0$ và $f'(x) = \sin^4 x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tích phân

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \text{ bằng}$$

- A. $\frac{\pi^2 - 6}{18}$. B. $\frac{\pi^2 - 3}{32}$. C. $\frac{3\pi^2 - 16}{64}$. D. $\frac{3\pi^2 - 6}{112}$.

Câu 44. (Sở Bình Phước - 2020) Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5 \sin x + 6} dx = a \ln \frac{4}{b}$. Giá trị của $a + b$ bằng

- A. 0. B. 1. C. 4. D. 3.

Câu 45. (Sở Yên Bái - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$4xf(x^2) + 6f(2x) = \frac{3}{5}x^3 + 4. \text{ Giá trị } \int_0^4 f(x) dx \text{ bằng}$$

- A. $\frac{52}{25}$. B. 52. C. $\frac{48}{25}$. D. 48.

Câu 46. (Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020) Xét tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos x}} dx$. Nếu đặt $t = \sqrt{1+\cos x}$, ta được

A. $I = -4 \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1) dt$. **B.** $I = 4 \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1) dt$. **C.** $I = \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{4t^3 - 4t}{t} dt$. **D.** $I = \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{-4t^3 + 4t}{t} dx$.

Câu 47. (Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(1) = \frac{1}{2}$ và $f'(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$ với

$x > -1$. Biết $\int_1^2 f(x) dx = a \ln \frac{b}{c} - d$ với a, b, c, d là các số nguyên dương, $b \leq 3$ và $\frac{b}{c}$ tối giản.

Khi đó $a + b + c + d$ bằng

A. 8. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 10.

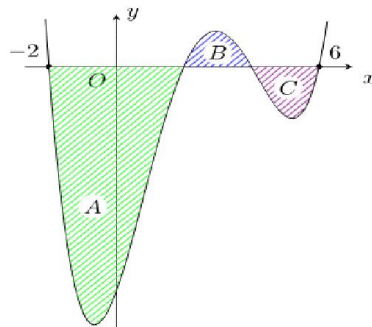
Câu 48. (Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020) Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$f(2) = 16, \int_0^1 f(2x) dx = 2$. Tích phân $\int_0^2 xf'(x) dx$ bằng

A. 30. **B.** 28. **C.** 36. **D.** 16.

Câu 49. (Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-2; 6]$ như hình vẽ bên dưới. Biết các miền A, B, C có diện tích lần lượt là 32, 2 và 3. Tích

phân $I = \int_{-2}^2 (3x - 4) \left(1 + f\left(-\frac{3}{4}x^2 + 2x + 5\right) \right) dx$ bằng



A. $I = \frac{1}{2}$ **B.** $I = -82$. **C.** $I = 66$. **D.** $I = 50$.

Câu 50. (Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên đoạn $[0; 1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(0) = -1, f'(x) < 0, [f'(x)]^2 = f''(x), \forall x \in [0; 1]$. Giá trị $f(0) - f(1)$ thuộc khoảng

A. $(1; 2)$. **B.** $(-1; 0)$. **C.** $(0; 1)$. **D.** $(-2; -1)$.

Câu 51. (Kim Liên - Hà Nội - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = 5$.

Tính $I = \int_0^{\pi} xf'(\sin x) dx$

A. $I = \frac{5}{2}\pi$. **B.** $I = 10\pi$. **C.** $I = 5$. **D.** $I = 5\pi$.

Câu 52. (Lê Lai - Thanh Hóa - 2020) Cho hàm số $f(x)$ biết $f(\pi) = 0$ và $f'(x) = 2 \sin x - 3 \sin^3 x, \forall x \in \mathbb{R}$,

biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{\sin^2 x + 1} dx = a - \frac{b\pi}{c}$. Tổng $S = a + b + c$ bằng

- A. 6. B. 5. C. 8. D. 7.

Câu 53. (Liên trường Nghệ An - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có $f(2) = 0$ và

$f'(x) = \frac{x+7}{\sqrt{2x-3}}, \forall x \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. Biết rằng $\int_4^7 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}, b > 0, \frac{a}{b}$ là phân số tối giản).

Khi đó $a + b$ bằng

- A. 250. B. 251. C. 133. D. 221.

Câu 54. (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$f(x) + f(-x) = \sqrt{2 + 2 \cos 2x}, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx$.

- A. $I = -6$. B. $I = 0$. C. $I = -2$. D. $I = 6$.

Câu 55. (Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có $f(1) = 0$ và

$f'(x) = 2019.2020.x(x-1)^{2018}, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

- A. $\frac{2}{2021}$. B. $\frac{1}{1011}$. C. $-\frac{2}{2021}$. D. $-\frac{1}{1011}$.

Câu 56. (Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020) Cho a là số thực dương. Tính $I = \int_0^a \sin^{2016} x \cdot \cos(2018x) dx$ bằng:

- A. $I = \frac{\cos^{2017} a \cdot \sin 2017a}{2016}$. B. $I = \frac{\sin^{2017} a \cdot \cos 2017a}{2017}$.
C. $I = \frac{\sin^{2017} a \cdot \cos 2017a}{2016}$. D. $I = \frac{\cos^{2017} a \cdot \cos 2017a}{2017}$.

Câu 57. (Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020) Giả sử tích phân $I = \int_1^5 \frac{1}{1 + \sqrt{3x+1}} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5$. Lúc đó

- A. $a + b + c = \frac{5}{3}$. B. $a + b + c = \frac{4}{3}$. C. $a + b + c = \frac{7}{3}$. D. $a + b + c = \frac{8}{3}$.

Câu 58. (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020) Biết $\int_0^1 x \ln(x^2 + 1) dx = a \ln 2 - \frac{b}{c}$ (với $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản). Tính $P = 13a + 10b + 84c$.

- A. 193. B. 191. C. 190. D. 189.

Câu 59. (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn

$6x^2 f(x^3) + 4f(1-x) = 3\sqrt{1-x^2}$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

- A. $\frac{\pi}{8}$. B. $\frac{\pi}{20}$. C. $\frac{\pi}{16}$. D. $\frac{\pi}{4}$.

Câu 60. (Tiên Du - Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có $f(\sqrt{2}) = -2$ và

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{6-x^2}}, \forall x \in (-\sqrt{6}; \sqrt{6}). \text{ Khi đó } \int_0^{\sqrt{3}} f(x).dx \text{ bằng}$$

- A. $-\frac{3\pi}{4}$. B. $\frac{3\pi+6}{4}$. C. $\frac{\pi+2}{4}$. D. $-\frac{3\pi+6}{4}$.

Câu 61. (Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết

$$f(4x) = f(x) + 4x^3 + 2x \text{ và } f(0) = 2. \text{ Tính } I = \int_0^2 f(x) dx.$$

- A. $\frac{147}{63}$. B. $\frac{149}{63}$. C. $\frac{148}{63}$. D. $\frac{352}{63}$.

Câu 62. (Kim Thành - Hải Dương - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1; 2]$ thỏa mãn

$$\int_1^2 (x-1)^2 f(x) dx = -\frac{1}{3}, f(2) = 0 \text{ và } \int_1^2 [f'(x)]^2 dx = 7. \text{ Tính tích phân } I = \int_1^2 f(x) dx.$$

- A. $I = \frac{7}{5}$. B. $I = -\frac{7}{5}$. C. $I = -\frac{7}{20}$. D. $I = \frac{7}{20}$.

Câu 63. (Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$\sin x f(\cos x) + \cos x f(\sin x) = \sin 2x - \frac{1}{3} \sin^3 2x \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

- A. $\frac{1}{6}$. B. 1. C. $\frac{7}{18}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 64. (Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(0) = 1$ và

$$f'(x) = \tan^3 x + \tan x, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Biết } \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \frac{a+\pi}{b}; a, b \in \mathbb{Q}, \text{ khi đó } b-a \text{ bằng}$$

- A. 4. B. 12. C. 0. D. -4.

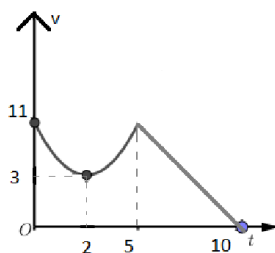
Câu 65. (Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(0) = 0$ và

$$f'(x) = \sin^8 x - \cos^8 x - 4\sin^6 x, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tính } I = \int_0^{\pi} 16f(x) dx.$$

- A. $I = 10\pi^2$. B. $I = 160\pi$. C. $I = 16\pi^2$. D. $I = -10\pi^2$.

PHẦN 3. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN, NGUYÊN HÀM GIẢI TOÁN

Câu 66. (ĐHQG Hà Nội - 2020) Chất điểm chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t) (m/s)$ có dạng đường Parabol khi $0 \leq t \leq 5(s)$ và $v(t)$ có dạng đường thẳng khi $5 \leq t \leq 10(s)$. Cho đỉnh Parabol là $I(2, 3)$. Hỏi quãng đường đi được chất điểm trong thời gian $0 \leq t \leq 10(s)$ là bao nhiêu mét?



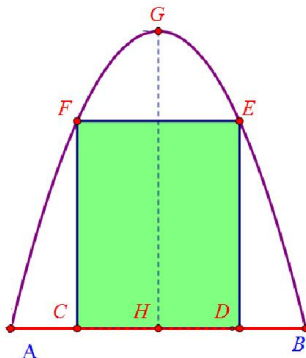
A. $\frac{181}{2}$.

B. 90.

C. 92.

D. $\frac{545}{6}$.

Câu 67. (Trần Phú - Quảng Ninh - 2020) Một cái cổng hình Parabol như hình vẽ sau. Chiều cao $GH = 4m$, chiều rộng $AB = 4m$, $AC = BD = 0,9m$. Chủ nhà làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là $1200000 \text{ đồng}/m^2$, còn các phần để trồng làm xiên hoa có giá là $900000 \text{ đồng}/m^2$. Hỏi tổng số tiền để làm hai phần nói trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?



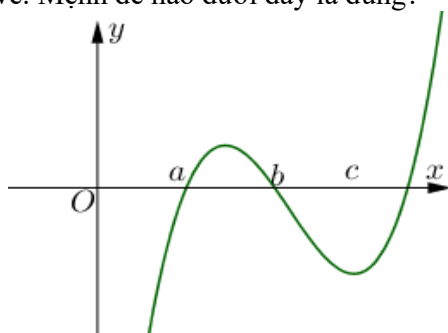
A. 11445000 đồng.

B. 4077000 đồng.

C. 7368000 đồng.

D. 11370000 đồng.

Câu 68. (Sở Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a < b < c$ như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



A. $f(b) > f(a) > f(c)$.

B. $f(a) > f(b) > f(c)$.

C. $f(c) > f(a) > f(b)$.

D. $f(c) > f(b) > f(a)$.

----- HẾT -----

PHẦN 1. NGUYÊN HÀM

Câu 1. (Chuyên Lam Sơn - 2020) Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục và có một nguyên hàm lần lượt là $F(x) = x + 2019$, $G(x) = x^2 + 2020$. Tìm một nguyên hàm $H(x)$ của hàm số $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, biết $H(1) = 3$.

- A. $H(x) = x^3 + 3$. B. $H(x) = x^2 + 5$. C. $H(x) = x^3 + 1$. **D. $H(x) = x^2 + 2$.**

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f(x) = F'(x) = 1$ và $g(x) = G'(x) = 2x$

$$\Rightarrow h(x) = f(x) \cdot g(x) = 2x \Rightarrow H(x) = \int h(x) dx = \int 2x dx = x^2 + C.$$

$$\text{Mà } H(1) = 3 \Rightarrow 1^2 + C = 3 \Leftrightarrow C = 2 \Rightarrow H(x) = x^2 + 2.$$

Câu 2. (Chuyên Thái Bình - 2020) Giả sử $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 e^x$. Tính tích $P = abc$.

- A. $P = -4$.** B. $P = 1$. C. $P = 5$. D. $P = -3$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } F'(x) = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x = [ax^2 + (2a + b)x + b + c]e^x.$$

$$\text{Do } F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \text{ nên ta có hệ: } \begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } P = abc = -4.$$

Câu 3. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(f'(x))^2 = f(x) \cdot e^x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Khi đó $f(2)$ thuộc khoảng nào sau đây?

- A. (12;13).** B. (9;10). C. (11;12). D. (13;14).

Lời giải

Chọn B

Vì hàm số $y = f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời $f(0) = 2$ nên $f'(x) \geq 0$ và $f(x) > 0$ với mọi $x \in [0; +\infty)$.

$$\text{Từ giả thiết } (f'(x))^2 = f(x) \cdot e^x, \forall x \in \mathbb{R} \text{ suy ra } f'(x) = \sqrt{f(x)} \cdot e^{\frac{x}{2}}, \forall x \in [0; +\infty).$$

$$\text{Do đó, } \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}, \forall x \in [0; +\infty).$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được $\sqrt{f(x)} = e^{\frac{x}{2}} + C, \forall x \in [0; +\infty)$ với C là hằng số nào đó.

Kết hợp với $f(0) = 2$, ta được $C = \sqrt{2} - 1$.

Từ đó, tính được $f(2) = (e + \sqrt{2} - 1)^2 \approx 9,81$.

Câu 4. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{4}{19}$ và

$f'(x) = x^3 f^2(x) \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{2}{3}$.

B. $-\frac{1}{2}$.

C. -1 .

D. $-\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f'(x) = x^3 f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = x^3 \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int x^3 dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = \frac{x^4}{4} + C.$$

$$\text{Mà } f(2) = -\frac{4}{19} \Rightarrow \frac{19}{4} = \frac{16}{4} + C \Rightarrow C = \frac{3}{4}. \text{ Suy ra } f(x) = -\frac{4}{x^4 + 3}.$$

$$\text{Vậy } f(1) = -1.$$

Câu 5. (Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020) Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$ trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ và $F(x)$ là một

nguyên hàm của $x.f'(x)$ thỏa mãn $F(0) = 0$. Biết $a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn $\tan a = 3$. Tính giá

trị biểu thức $T = F(a) - 10a^2 + 3a$.

A. $-\frac{1}{2} \ln 10$.

B. $\frac{1}{2} \ln 10$.

C. $-\frac{1}{4} \ln 10$.

D. $\ln 10$.

Lời giải

Chọn B

$$\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } F(x) = x.f(x) - \int f(x) dx = \frac{x^2}{\cos^2 x} - \int \frac{x}{\cos^2 x} dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u_1 = x \\ dv_1 = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_1 = dx \\ v_1 = \tan x \end{cases}$$

$$F(x) = \frac{x^2}{\cos^2 x} - \left(x \cdot \tan x - \int \tan x dx\right) = x^2(1 + \tan^2 x) - x \cdot \tan x - \ln |\cos x| + C.$$

$$\text{Vì } F(0) = 0 \Rightarrow C = 0.$$

$$F(x) = x^2(1 + \tan^2 x) - x \tan x - \ln|\cos x|.$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{\cos^2 a} = 1 + \tan^2 a = 10 \Rightarrow \cos a = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

$$\text{Khi đó } T = a^2(1+9) - 3a - \ln|\cos a| - 10a^2 + 3a = -\ln \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{2} \ln 10.$$

Câu 6. (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ thỏa mãn điều kiện: $f(1) = -2 \ln 2$ và $x(x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + x$. Biết $f(2) = a + b \ln 3$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Giá trị $2(a^2 + b^2)$ là

A. $\frac{27}{4}$.

B. 9.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Chia cả hai vế của biểu thức $x(x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + x$ cho $(x+1)^2$ ta có

$$\frac{x}{x+1} \cdot f'(x) + \frac{1}{(x+1)^2} f(x) = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow \left[\frac{x}{x+1} \cdot f(x) \right]' = \frac{x}{x+1}.$$

$$\text{Vậy } \frac{x}{x+1} \cdot f(x) = \int \left[\frac{x}{x+1} \cdot f(x) \right]' dx = \int \frac{x}{x+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = x - \ln|x+1| + C.$$

$$\text{Do } f(1) = -2 \ln 2 \text{ nên ta có } \frac{1}{2} \cdot f(1) = 1 - \ln 2 + C \Leftrightarrow -\ln 2 = 1 - \ln 2 + C \Leftrightarrow C = -1.$$

$$\text{Khi đó } f(x) = \frac{x+1}{x} (x - \ln|x+1| - 1).$$

$$\text{Vậy ta có } f(2) = \frac{3}{2} (2 - \ln 3 - 1) = \frac{3}{2} (1 - \ln 3) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \ln 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}, b = -\frac{3}{2}.$$

$$\text{Suy ra } 2(a^2 + b^2) = 2 \left[\left(\frac{3}{2} \right)^2 + \left(-\frac{3}{2} \right)^2 \right] = 9.$$

Câu 7. (Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, thỏa mãn $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị biểu thức $T = F(0) + F(1) + F(2) + \dots + F(2019)$.

A. $T = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}$.

B. $T = 1009 \cdot \frac{2^{2019} - 1}{2}$.

C. $T = 2^{2019 \cdot 2020}$.

D. $T = \frac{2^{2019} - 1}{\ln 2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } F(x) = \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$$

$$\text{Theo giả thiết } F(0) = \frac{1}{\ln 2} \Leftrightarrow \frac{2^0}{\ln 2} + C = \frac{1}{\ln 2} \Leftrightarrow C = 0. \text{ Suy ra: } F(x) = \frac{2^x}{\ln 2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } T &= F(0) + F(1) + F(2) + \dots + F(2019) = \frac{2^0}{\ln 2} + \frac{2^1}{\ln 2} + \frac{2^2}{\ln 2} + \dots + \frac{2^{2019}}{\ln 2} \\ &= \frac{1}{\ln 2} (2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2019}) = \frac{1}{\ln 2} \cdot 1 \cdot \frac{1 - 2^{2020}}{1 - 2} = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}. \end{aligned}$$

Câu 8. (Hải Hậu - Nam Định - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x) < 0, \forall x > 0$ và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f'(x) = (2x+1)f^2(x), \forall x > 0$ và $f(1) = -\frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $f(1) + f(2) + \dots + f(2020)$ bằng

- A.** $-\frac{2020}{2021}$. **B.** $-\frac{2015}{2019}$. **C.** $-\frac{2019}{2020}$. **D.** $-\frac{2016}{2021}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$f'(x) = (2x+1)f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x+1 \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int (2x+1) dx \Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2 + x + C.$$

$$\text{Mà } f(1) = -\frac{1}{2} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{x^2 + x} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}.$$

$$\begin{cases} f(1) = \frac{1}{2} - 1 \\ f(2) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\ f(3) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \\ \vdots \\ f(2020) = \frac{1}{2021} - \frac{1}{2020} \end{cases} \Rightarrow f(1) + f(2) + \dots + f(2020) = -1 + \frac{1}{2021} = -\frac{2020}{2021}.$$

Câu 9. (Trường VINSCHOOL - 2020) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $R \setminus \{-1; 1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$. Biết $f(3) + f(-3) = 4$ và $f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(-\frac{1}{3}\right) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(-5) + f(0) + f(2)$ bằng

- A.** $5 - \frac{1}{2} \ln 2$. **B.** $6 - \frac{1}{2} \ln 2$. **C.** $5 + \frac{1}{2} \ln 2$. **D.** $6 + \frac{1}{2} \ln 2$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \Rightarrow f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C \text{ với } x \in R \setminus \{-1; 1\}.$$

Khi đó:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_1 & \text{khi } x > 1 \\ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_2 & \text{khi } -1 < x < 1 \\ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_3 & \text{khi } x < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(3) + f(-3) = C_1 + C_3 = 4 \\ f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(-\frac{1}{3}\right) = 2C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_3 = 4 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } f(-5) + f(0) + f(2) = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} + C_3 + C_2 + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} + C_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + 5 = 5 - \frac{1}{2} \ln 2.$$

PHẦN 2. TÍCH PHÂN

Câu 10. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1; 2]$ và thỏa mãn điều kiện $f(x) = \sqrt{x+2} + xf(3-x^2)$.

Tích phân $I = \int_{-1}^2 f(x) dx$ bằng

A. $I = \frac{14}{3}$.

B. $I = \frac{28}{3}$.

C. $I = \frac{4}{3}$.

D. $I = 2$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } I = \int_{-1}^2 [\sqrt{x+2} + xf(3-x^2)] dx = \int_{-1}^2 \sqrt{x+2} dx + \int_{-1}^2 xf(3-x^2) dx = \frac{14}{3} + \int_{-1}^2 xf(3-x^2) dx.$$

$$\text{Xét } \int_{-1}^2 xf(3-x^2) dx \text{ đặt } t = 3-x^2 \Rightarrow dt = -2x dx \Rightarrow x dx = -\frac{dt}{2}.$$

$$\text{Đổi cận khi } x = -1 \Rightarrow t = 2; x = 2 \Rightarrow t = -1. \text{ Suy ra } \int_{-1}^2 xf(3-x^2) dx = -\frac{1}{2} \int_2^{-1} f(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 f(t) dt.$$

$$\text{Khi đó } I = \frac{14}{3} + \int_{-1}^2 xf(3-x^2) dx = \frac{14}{3} + \frac{1}{2} \int_{-1}^2 f(t) dt = \frac{14}{3} + \frac{1}{2} \int_{-1}^2 f(x) dx \Leftrightarrow I = \frac{14}{3} + \frac{I}{2} \Rightarrow I = \frac{28}{3}.$$

Câu 11. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$\int_{-5}^1 f(x) dx = 9. \text{ Tích phân } \int_0^2 [f(1-3x) + 9] dx \text{ bằng}$$

A. 15.

B. 27.

C. 75.

D. 21.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \int_0^2 [f(1-3x) + 9] dx = \int_0^2 f(1-3x) dx + \int_0^2 9 dx = \int_0^2 f(1-3x) dx + 18.$$

$$\text{Xét } \int_0^2 f(1-3x) dx, \text{ đặt } t = 1-3x \Rightarrow dt = -3 dx \Rightarrow dx = -\frac{dt}{3}.$$

$$\text{Đổi cận khi } x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 2 \Rightarrow t = -5. \text{ Suy ra } \int_0^2 f(1-3x) dx = -\frac{1}{3} \int_1^{-5} f(t) dt = \frac{1}{3} \int_{-5}^1 f(t) dt.$$

$$\text{Khi đó } \int_0^2 [f(1-3x)+9]dx = \frac{1}{3} \int_{-5}^1 f(t)dt + 18 = \frac{1}{3} \int_{-5}^1 f(x)dx + 18 = 21.$$

Câu 12. (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020) Cho $f(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ và

$$f(1) = -\frac{1}{18}, \int_0^1 x.f'(x)dx = \frac{1}{36}. \text{ Giá trị của } \int_0^1 f(x)dx \text{ bằng}$$

A. $-\frac{1}{12}.$

B. $\frac{1}{36}.$

C. $\frac{1}{12}.$

D. $-\frac{1}{36}.$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}, \text{ khi đó ta có}$$

$$\int_0^1 x.f'(x)dx = x.f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = f(1) - \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{36} \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = f(1) - \frac{1}{36} = -\frac{1}{12}.$$

Câu 13. (Chuyên Hưng Yên - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn

$$4x.f(x^2) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}. \text{ Tính } I = \int_0^1 f(x)dx.$$

A. $\frac{\pi}{4}.$

B. $\frac{\pi}{16}.$

C. $\frac{\pi}{20}.$

D. $\frac{\pi}{6}.$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Lấy tích phân hai vế, ta có } \int_0^1 [4x.f(x^2) + 3f(1-x)]dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \quad (*).$$

$$\text{Xét tích phân } J = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx. \text{ Đặt } x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt. \text{ Khi đó, ta có}$$

$$J = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Xét tích phân } K = \int_0^1 4x.f(x^2)dx. \text{ Đặt } t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx. \text{ Khi đó, ta có}$$

$$K = \int_0^1 4x.f(x^2)dx = 2 \int_0^1 f(t)dt = 2 \int_0^1 f(x)dx.$$

$$\text{Xét tích phân } L = \int_0^1 3f(1-x)dx. \text{ Đặt } t = 1-x \Rightarrow dt = -dx. \text{ Khi đó, ta có}$$

$$L = \int_0^1 3f(1-x)dx = 3 \int_1^0 f(t)(-dt) = 3 \int_0^1 f(t)dt = 3 \int_0^1 f(x)dx.$$

$$\text{Vậy } (*) \Leftrightarrow 5 \int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{20}.$$

Câu 14. (Chuyên KHTN - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ biết $f(0) = \frac{1}{2}$ và $f'(x) = xe^{x^2}$ với mọi

$x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^1 xf(x) dx$ bằng

A. $\frac{e+1}{4}$.

B. $\frac{e-1}{4}$.

C. $\frac{e-1}{2}$.

D. $\frac{e+1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } f(x) = \int f'(x) dx = \int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

$$\text{Mà } f(0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} + C = \frac{1}{2} \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} e^{x^2}.$$

$$\Rightarrow \int_0^1 xf(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{4} \int_0^1 e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{4} e^{x^2} \Big|_0^1 = \frac{e-1}{4}.$$

Câu 15. (Chuyên Lam Sơn - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ thỏa mãn

$$\int_0^{10} f(x) dx = 7, \int_2^{10} f(x) dx = 1. \text{ Tính } P = \int_0^1 f(2x) dx.$$

A. $P = 6$.

B. $P = -6$.

C. $P = 3$.

D. $P = 12$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \int_0^2 f(x) dx = \int_0^{10} f(x) dx - \int_2^{10} f(x) dx = 6.$$

$$\text{Xét } P = \int_0^1 f(2x) dx. \text{ Đặt } t = 2x \Rightarrow dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt.$$

Đổi cận:

x	0	1
t	0	2

$$\text{Lúc đó: } P = \int_0^1 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx = 3.$$

Câu 16. (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 4$

$$\text{và } f'(x) = 2 \cos^2 x + 1, \forall x \in \mathbb{R} \text{ Khi đó } \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx \text{ bằng.}$$

A. $\frac{\pi^2 + 16\pi + 16}{16}$.

B. $\frac{\pi^2 + 4}{16}$.

C. $\frac{\pi^2 + 14\pi}{16}$.

D. $\frac{\pi^2 + 16\pi + 4}{16}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$f(x) = \int (2 \cos^2 x + 1) dx = \int \left(2 \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) + 1 \right) dx = \int (\cos 2x + 2) dx$$

$$= \int \cos 2x dx + \int 2 dx = \frac{\sin 2x}{2} + 2x + C.$$

$$\text{Lại có } f(0) = 4 \Leftrightarrow C = 4 \Rightarrow f(x) = \frac{\sin 2x}{2} + 2x + 4.$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin 2x}{2} + 2x + 4 \right) dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x d(2x) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4 dx$$

$$= \frac{-\cos 2x}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + (x^2 + 4x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2 + 16\pi + 4}{16}.$$

Câu 17. (Chuyên Lương Văn Tỵ - Ninh Bình - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = -1$ và

$$f'(x) = x(6 + 12x + e^{-x}), \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Khi đó } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $3e$.

B. $3e^{-1}$.

C. $4 - 3e^{-1}$.

D. $-3e^{-1}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x) = x(6 + 12x + e^{-x}), \forall x \in \mathbb{R}$ nên $f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$.

$$\int f'(x) dx = \int x(6 + 12x + e^{-x}) dx = \int (6x + 12x^2) dx + \int xe^{-x} dx$$

$$\text{Mà } \int (6x + 12x^2) dx = 3x^2 + 4x^3 + C$$

$$\text{Xét } \int xe^{-x} dx: \text{ Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\int xe^{-x} dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C = -(x+1)e^{-x} + C$$

$$\text{Suy ra } f(x) = 3x^2 + 4x^3 - (x+1)e^{-x} + C, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Mà } f(0) = -1 \Rightarrow C = 0 \text{ nên } f(x) = 3x^2 + 4x^3 - (x+1)e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ta có

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (3x^2 + 4x^3 - (x+1)e^{-x}) dx = (x^3 + x^4) \Big|_0^1 - \int_0^1 (x+1)e^{-x} dx = 2 - \int_0^1 (x+1)e^{-x} dx$$

$$\text{Xét } \int_0^1 (x+1)e^{-x} dx: \text{ Đặt } \begin{cases} u = x+1 \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\int_0^1 (x+1)e^{-x} dx = -(x+1)e^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -2e^{-1} + 1 - e^{-x} \Big|_0^1 = -2e^{-1} + 1 - e^{-1} + 1 = 2 - 3e^{-1}$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = 3e^{-1}.$$

Câu 18. (Chuyên Nguyễn Bình Khiêm - Quảng Nam - 2020) Biết rằng $\int_1^e \frac{2 \ln x + 1}{x(\ln x + 1)^2} dx = a \ln 2 - \frac{b}{c}$

với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $S = a + b + c$.

A. $S = 3$.

B. $S = 7$.

C. $S = 10$.

D. $S = 5$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\ln x + 1 = t$. Ta có: $\frac{1}{x} dx = dt$.

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 1$; $x = e \Rightarrow t = 2$.

$$\text{Ta có: } \int_1^e \frac{2 \ln x + 1}{x(\ln x + 1)^2} dx = \int_1^2 \frac{2(t-1)+1}{t^2} dt = \int_1^2 \left(\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} \right) dt = \left(2 \ln |t| + \frac{1}{t} \right) \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

Suy ra: $a = 2$; $b = 1$; $c = 2$. Khi đó: $S = a + b + c = 5$.

Câu 19. (Chuyên Nguyễn Bình Khiêm - Quảng Nam - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng

$(0; +\infty)$. Biết $f(3) = 3$ và $xf'(2x+1) - f(2x+1) = x^3, \forall x \in (0; +\infty)$. Giá trị của $\int_3^5 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{914}{3}$.

B. $\frac{59}{3}$.

C. $\frac{45}{4}$.

D. 88.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$xf'(2x+1) - f(2x+1) = x^3 \Leftrightarrow \frac{2x^2 f'(2x+1) - 2xf(2x+1)}{x^4} = 2, \forall x \in (0; +\infty).$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f(2x+1)}{x^2} \right)' = 2 \Leftrightarrow \frac{f(2x+1)}{x^2} = 2x + C. \quad (1)$$

$$\text{Cho } x = 1 \text{ từ (1)} \Rightarrow \frac{f(3)}{1^2} = 2.1 + C \Leftrightarrow \frac{3}{1^2} = 2.1 + C \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(2x+1) = x^2(2x+1) = 2x^3 + x^2.$$

$$\Rightarrow \int_1^2 f(2x+1) dx = \int_1^2 (2x^3 + x^2) dx = \left(2 \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \frac{59}{6}.$$

$$\Rightarrow \int_3^5 f(x) dx = 2 \int_1^2 f(2x+1) dx = \frac{59}{3}.$$

Câu 20. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và đồng biến trên $[1; 4]$, thỏa mãn

$$x + 2xf(x) = [f'(x)]^2 \text{ với mọi } x \in [1; 4]. \text{ Biết } f(1) = \frac{3}{2}, \text{ tính } I = \int_1^4 f(x) dx$$

A. $\frac{1188}{45}$.

B. $\frac{1187}{45}$.

C. $\frac{1186}{45}$.

D. $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Do $f(x)$ đồng biến trên $[1; 4]$ nên $f(x) \geq f(1) = \frac{3}{2} > -\frac{1}{2}$, ngoài ra $f'(x) \geq 0, \forall x \in [1; 4]$. Khi đó ta có biến đổi sau:

$$x + 2xf(x) = [f'(x)]^2 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{2f(x)+1}} = \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2f(x)+1})' = \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C\right)' \Leftrightarrow \sqrt{2f(x)+1} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$$

$$\text{Mà } f(1) = \frac{3}{2} \Rightarrow C = \frac{4}{3} \Rightarrow f(x) = \frac{\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{4}{3}\right)^2 - 1}{2} = \frac{2}{9}x^3 + \frac{8}{9}\sqrt{x^3} + \frac{7}{18}.$$

$$\text{Vậy } I = \int_1^4 f(x) dx = \left(\frac{1}{18}x^4 + \frac{16}{45}x^2\sqrt{x} + \frac{7}{18}x\right)\Big|_1^4 = \frac{1186}{45}.$$

Câu 21. (Chuyên Bắc Ninh - 2020) Cho $I = \int_1^5 f(x) dx = 26$. Khi đó $J = \int_0^2 x[f(x^2+1)+1] dx$ bằng

A. 15.

B. 13.

C. 54.

D. 52.

Lời giải

Chọn A

$$+ \text{Ta có: } J = \int_0^2 x[f(x^2+1)+1] dx = \int_0^2 x dx + \int_0^2 xf(x^2+1) dx.$$

$$+ \text{Xét } A = \int_0^2 x dx.$$

$$A = \int_0^2 x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 2.$$

$$+ \text{Xét } B = \int_0^2 xf(x^2+1) dx.$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2x dx.$$

Đổi cận:

Ta có:

x	0	2
t	1	5

$$B = \int_0^2 xf(x^2+1) dx = \frac{1}{2} \int_1^5 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_1^5 f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 26 = 13.$$

$$\text{Vậy } J = A + B = 15.$$

- Câu 22. (Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Biết $I = \int_0^4 x \ln(x^2 + 9) dx = a \ln 5 + b \ln 3 + c$ trong đó a, b, c là các số thực. Tính giá trị của biểu thức $T = a + b + c$.
- A. $T = 9$. B. $T = 11$. **C. $T = 8$.** D. $T = 10$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x^2 + 9) \\ dv = x dx \end{cases}, \text{ ta có } \begin{cases} du = \frac{2x}{x^2 + 9} dx \\ v = \frac{x^2 + 9}{2} \end{cases}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^2 + 9}{2} \ln(x^2 + 9) \Big|_0^4 - \int_0^4 \frac{x^2 + 9}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + 9} dx = \frac{x^2 + 9}{2} \ln(x^2 + 9) \Big|_0^4 - \int_0^4 x dx \\ &= \frac{x^2 + 9}{2} \ln(x^2 + 9) \Big|_0^4 - \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^4 = \frac{25}{2} \ln 25 - \frac{9}{2} \ln 9 - 8 = 25 \ln 5 - 9 \ln 3 - 8 = a \ln 5 + b \ln 3 + c. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a = 25 \\ b = -9 \Rightarrow a + b + c = 8. \\ c = -8 \end{cases}$$

Cách 2

$$\text{Ta có } I = \int_0^4 x \ln(x^2 + 9) dx$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + 9 \Rightarrow dt = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{1}{2} dt$$

$$\text{Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 9, \quad x = 4 \Rightarrow t = 25$$

$$\text{Suy ra } I = \int_0^4 x \ln(x^2 + 9) dx = \frac{1}{2} \int_9^{25} \ln t dt$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln t \\ dv = dt \end{cases}, \text{ ta có } \begin{cases} du = \frac{1}{t} dt \\ v = t \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \frac{1}{2} \int_9^{25} t \ln t dt = \frac{1}{2} \left(t \cdot \ln t \Big|_9^{25} - \int_9^{25} t \cdot \frac{1}{t} dt \right) = \frac{1}{2} \left(t \cdot \ln t \Big|_9^{25} - \int_9^{25} dt \right) = \frac{1}{2} \left(t \cdot \ln t \Big|_9^{25} - t \Big|_9^{25} \right) \\ &= \frac{25}{2} \ln 25 - \frac{9}{2} \ln 9 - 8 = 25 \ln 5 - 9 \ln 3 - 8 = a \ln 5 + b \ln 3 + c. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a = 25 \\ b = -9 \Rightarrow a + b + c = 8. \\ c = -8 \end{cases}$$

- Câu 23. (Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$\int_0^1 f(x) dx = 10, \quad f(1) = \cot 1. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^1 [f(x) \tan^2 x + f'(x) \tan x] dx.$$

A. $1 - \ln(\cos 1)$.

B. -1 .

C. -9 .

D. $1 - \cot 1$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

$$+ I = \int_0^1 [f(x) \tan^2 x + f'(x) \tan x] dx = \int_0^1 f(x) \tan^2 x dx + \int_0^1 f'(x) \tan x dx \quad (1).$$

$$+ \text{Tính } J = \int_0^1 f'(x) \tan x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \tan x \\ dv = f'(x) dx \end{cases}, \text{ ta có } \begin{cases} du = (1 + \tan^2 x) dx \\ v = f(x) \end{cases}.$$

$$\Rightarrow J = f(x) \tan x \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) \cdot (1 + \tan^2 x) dx$$

$$= f(1) \tan 1 - f(0) \tan 0 - \int_0^1 f(x) \tan^2 x dx - \int_0^1 f(x) dx$$

$$= \cot 1 \tan 1 - \int_0^1 f(x) \tan^2 x dx - 10$$

$$= 1 - \int_0^1 f(x) \tan^2 x dx - 10 = -9 - \int_0^1 f(x) \tan^2 x dx.$$

Thay J vào (1) ta được:

$$I = \int_0^1 f(x) \tan^2 x dx + \left(-9 - \int_0^1 f(x) \tan^2 x dx \right) = -9.$$

Cách 2:

$$\text{Ta có: } (f(x) \tan x)' = f'(x) \tan x + f(x) (\tan^2 x + 1) = f'(x) \tan x + f(x) \tan^2 x + f(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) \tan x + f(x) \tan^2 x = [f(x) \tan x]' - f(x).$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 [f(x) \tan^2 x + f'(x) \tan x] dx = \int_0^1 \left([f(x) \tan x]' - f(x) \right) dx$$

$$= f(x) \tan x \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = f(1) \tan 1 - 10 = \cot 1 \tan 1 - 10 = -9.$$

Câu 24. (Chuyên Bến Tre - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn

$$[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = x^3 - 2x, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(0) = f'(0) = 2. \text{ Tính giá trị của } T = f^2(2)$$

A. $\frac{160}{15}$

B. $\frac{268}{15}$

C. $\frac{4}{15}$

D. $\frac{268}{30}$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } [f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = x^3 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (f'(x) \cdot f(x))' = x^3 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$$

Lấy nguyên hàm hai vế ta có:

$$\begin{aligned} \int (f'(x) \cdot f(x))' dx &= \int (x^3 - 2x) dx \\ \Leftrightarrow f'(x) \cdot f(x) &= \frac{x^4}{4} - x^2 + C \end{aligned}$$

Theo đề ra ta có: $f'(0) \cdot f(0) = C = 4$

Suy ra:

$$\begin{aligned} \int_0^2 f'(x) \cdot f(x) dx &= \int_0^2 \left(\frac{x^4}{4} - x^2 + 4 \right) dx \\ \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} \Big|_0^2 &= \frac{104}{15} \Leftrightarrow f^2(2) = \frac{268}{15}. \end{aligned}$$

Câu 25. (Chuyên Chu Văn An - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

điều kiện $f(x) + x(f'(x) - 2 \sin x) = x^2 \cos x, x \in \mathbb{R}$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf''(x) dx$

A. 0.

B. $\frac{\pi}{2}$.

C. 1.

D. π .

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết $f(x) + x(f'(x) - 2 \sin x) = x^2 \cos x$

$$\Leftrightarrow f(x) + xf'(x) = x^2 \cos x + 2x \sin x$$

$$\Leftrightarrow (xf(x))' = (x^2 \sin x)'$$

$$\Leftrightarrow xf(x) = x^2 \sin x + C$$

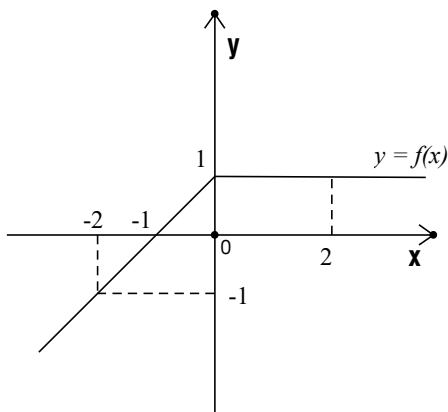
$$\text{Mặt khác: } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = x \sin x.$$

$$\text{Ta có: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf''(x) dx = xf'(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) dx = x^2 \cos x + 2x \sin x - 2f(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= x^2 \cos x + 2x \sin x - 2x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= x^2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

Câu 26. (Chuyên Chu Văn An - 2020) Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Giá trị của $\int_{-2}^2 f(x)dx$ bằng

A. 3.

B. 1.

C. 0.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị của hàm số suy ra $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{khi } x \leq 0 \\ 1 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Ta thấy hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } \int_{-2}^2 f(x)dx = \int_{-2}^0 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx = \int_{-2}^0 (x+1)dx + \int_0^2 1dx = 2.$$

Câu 27. (Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục và là hàm số lẻ trên đoạn $[-2; 2]$. Biết rằng $\int_{-1}^0 f(x)dx = -1$, $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(-2x)dx = 2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int_{-2}^2 f(x)dx = 2 \int_0^2 f(x)dx$.

B. $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx = -4$.

C. $\int_0^1 f(x)dx = -1$.

D. $\int_0^2 f(x)dx = -3$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } t = -x \Rightarrow \int_{-1}^0 f(x)dx = -\int_1^0 f(-t)dt = \int_0^1 -f(t)dt \quad (\text{vì } f(x) \text{ là hàm lẻ})$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(t)dt = 1.$$

$$\text{Đặt } t = 2x \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 f(-2x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 -f(2x)dx = \frac{-1}{2} \int_1^2 f(t)dt$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{2} \int_1^2 f(t)dt = 2 \Rightarrow \int_1^2 f(t)dt = -4.$$

$$\text{Vậy } \int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = 1 - 4 = -3.$$

- Câu 28. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020)** Xét hàm số $f(x) = e^x + \int_0^1 xf(x)dx$. Giá trị của $f(\ln(5620))$ bằng
- A.** 5622. **B.** 5620. **C.** 5618. **D.** 5621.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Từ } f(x) = e^x + \int_0^1 xf(x)dx. \quad (1)$$

Lấy đạo hàm hai vế, suy ra $f'(x) = e^x$.

$$\text{Khi đó, } f(x) = \int f'(x)dx = \int e^x dx = e^x + C. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } C = \int_0^1 xf(x)dx \Leftrightarrow C = \int_0^1 x(e^x + C)dx \Leftrightarrow C = \int_0^1 xe^x dx + \int_0^1 Cx dx$$

$$\Leftrightarrow C = 1 + \frac{Cx^2}{2} \Big|_0^1 \Leftrightarrow C = 1 + \frac{C}{2} \Leftrightarrow C = 2.$$

$$\text{Vậy } f(x) = e^x + 2 \Rightarrow f(\ln(5620)) = e^{\ln(5620)} + 2 = 5620 + 2 = 5622.$$

- Câu 29. (Chuyên Lào Cai - 2020)** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 4$

$$\text{và } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 2. \text{ Tích phân } I = \int_0^3 f(x) dx \text{ bằng}$$

- A.** $I = 8$. **B.** $I = 6$. **C.** $I = 4$. **D.** $I = 10$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx. \text{ Khi đó } x=1 \Rightarrow t=1; x=9 \Rightarrow t=3$$

$$\text{Suy ra } \int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^3 f(t) dt = 4 \Rightarrow \int_1^3 f(t) dt = 2.$$

$$\text{Đặt } t = \sin x; x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dt = \cos x dx. \text{ Khi đó. } x=0 \Rightarrow t=0; x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=1$$

$$\text{Suy ra } \int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = 2 + 2 = 4.$$

- Câu 30. (Chuyên Lào Cai - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;3]$ thỏa mãn

$$f(3) = 0, \int_0^3 [f'(x)]^2 dx = \frac{7}{6} \text{ và } \int_0^3 \frac{f(x)}{\sqrt{x+1}} dx = -\frac{7}{3}. \text{ Tích phân } \int_0^3 f(x) dx \text{ bằng:}$$

A. $-\frac{7}{3}$.

B. $-\frac{97}{30}$.

C. $\frac{7}{6}$.

D. $-\frac{7}{6}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Xét: } \int_0^3 \frac{f(x)}{\sqrt{x+1}} dx = -\frac{7}{3}$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = 2(\sqrt{x+1} - 1) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } \int_0^3 \frac{f(x)}{\sqrt{x+1}} dx = \left[2(\sqrt{x+1} - 1) f(x) \right]_0^3 - 2 \int_0^3 (\sqrt{x+1} - 1) f'(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_0^3 (\sqrt{x+1} - 1) \cdot f'(x) dx = \frac{7}{6} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } \int_0^3 (\sqrt{x+1} - 1)^2 dx = \int_0^3 (x+2 - 2\sqrt{x+1}) dx = \frac{7}{6} \quad (2)$$

$$\int_0^3 [f'(x)]^2 dx = \frac{7}{6} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(x) = \sqrt{x+1} - 1 \end{cases}$$

$$+) f'(x) = 0 \Rightarrow (3) \text{ vô lý}$$

$$+) f'(x) = \sqrt{x+1} - 1 \Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} - x + C, \text{ mà } f(3) = 0 \Rightarrow C = -\frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} - x - \frac{7}{3}$$

$$\text{Vậy: } \int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 \left[\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} - x - \frac{7}{3} \right] dx = -\frac{97}{30}.$$

Câu 31. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0) = \frac{2}{3}$ và

$$(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) f'(x) = 1, \forall x \geq -1. \text{ Biết rằng } \int_0^1 f(x) dx = \frac{a\sqrt{2} + b}{15} \text{ với } a, b \in \mathbb{Z}. \text{ Tính } T = a + b.$$

A. -8.

B. -24.

C. 24.

D. 8.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } (\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) f'(x) = 1, \forall x \geq -1.$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \int f'(x) dx = \int \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} dx$$

$$\Rightarrow \int f'(x) dx = \int (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) dx$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} - \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C.$$

$$\text{Mặt khác: } f(0) = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + C \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} - \frac{2}{3} \sqrt{x^3}.$$

$$\text{Do đó: } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} - \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \right) dx = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \sqrt{(x+1)^5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \sqrt{x^5} \right) \Big|_0^1 = \frac{16\sqrt{2}-8}{15}.$$

$$\Rightarrow a = 16; b = -8 \Rightarrow T = a + b = 8.$$

Câu 32. (Chuyên Sơn La - 2020) Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(1) = 1$ và $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{3}$.

Tính

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f'(\sin x) dx$$

A. $I = \frac{4}{3}$.

B. $I = \frac{2}{3}$.

C. $I = -\frac{2}{3}$.

D. $I = \frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$.

Đổi cận

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	0	1

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f'(\sin x) dx = \int_0^1 2t \cdot f'(t) dt.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2t \\ dv = f'(t) dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dt \\ v = f(t) \end{cases}$$

$$I = (2t \cdot f(t)) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 f(t) dt = 2 \cdot f(1) - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Câu 33. (Chuyên Sơn La - 2020) Tích phân $\int_{-2}^2 \frac{x^{2020}}{e^x + 1} dx = \frac{2^a}{b}$. Tính tổng $S = a + b$.

A. $S = 0$.

B. $S = 2021$.

C. $S = 2020$.

D. $S = 4042$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xét } I = \int_{-2}^2 \frac{x^{2020}}{e^x + 1} dx.$$

Đặt $x = -t \Rightarrow dx = -dt$. Đổi cận $x = -2 \Rightarrow t = 2; x = 2 \Rightarrow t = -2$.

$$\text{Ta được } I = \int_2^{-2} \frac{(-t)^{2020}}{e^{-t} + 1} \cdot (-dt) = \int_{-2}^2 \frac{t^{2020}}{\frac{1}{e^t} + 1} \cdot dt = \int_{-2}^2 \frac{t^{2020} \cdot e^t}{e^t + 1} \cdot dt = \int_{-2}^2 \frac{x^{2020} \cdot e^x}{e^x + 1} \cdot dx.$$

$$\text{Suy ra } 2I = I + I = \int_{-2}^2 \frac{x^{2020}}{e^x + 1} \cdot dx + \int_{-2}^2 \frac{x^{2020} \cdot e^x}{e^x + 1} \cdot dx = \int_{-2}^2 x^{2020} \cdot dx = \frac{x^{2021}}{2021} \Big|_{-2}^2 = \frac{2^{2021} - (-2)^{2021}}{2021} = \frac{2^{2022}}{2021}.$$

$$\text{Do đó } I = \frac{2^{2021}}{2021}. \text{ Suy ra } a = b = 2021. \text{ Vậy } S = a + b = 4042.$$

Câu 34. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên tập xác định $\mathbb{R}^+$ và thỏa mãn

$$f(x^2 + 3x + 1) = x + 2. \text{ Tính } I = \int_1^5 f(x) dx$$

A. $\frac{37}{6}.$

B. $\frac{527}{3}.$

C. $\frac{61}{6}.$

D. $\frac{464}{3}.$

Lời giải

Chọn C

$$f(x^2 + 3x + 1) = x + 2$$

$$\Leftrightarrow (2x + 3)f(x^2 + 3x + 1) = (2x + 3)(x + 2)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (2x + 3)f(x^2 + 3x + 1) dx = \int_0^1 (2x + 3)(x + 2) dx = \frac{61}{6}$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + 3x + 1 \Rightarrow dt = (2x + 3) dx$$

x	0	1
t	1	5

$$\text{Suy ra } \int_1^5 f(t) dt = \frac{61}{6}.$$

Câu 35. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 4, \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 2. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^3 f(x) dx.$$

A. $I = 6.$

B. $I = 4.$

C. $I = 10.$

D. $I = 2.$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^9 f(\sqrt{x}) d(\sqrt{x}) = 2 \int_1^3 f(t) dt.$$

$$\text{Mà } \int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 4 \text{ nên } 2 \int_1^3 f(t) dt = 4 \Leftrightarrow \int_1^3 f(t) dt = 2$$

Vì tích phân không phụ thuộc vào biến số nên $\int_1^3 f(t) dt = 2 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x) dx = 2$.

$$\text{Ta có: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) d(\sin x) = \int_0^1 f(t) dt.$$

$$\text{Mà } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 2 \text{ nên } \int_0^1 f(t) dt = 2.$$

Vì tích phân không phụ thuộc vào biến số nên $\int_0^1 f(t) dt = 2 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = 2$.

$$\text{Khi đó } I = \int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = 2 + 2 = 4.$$

Câu 36. (Đại Học Hà Tĩnh - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-\ln 2; \ln 2]$ và thỏa mãn

$$f(x) + f(-x) = \frac{1}{e^x + 1}. \text{ Biết } \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx = a \ln 2 + b \ln 3, (a, b \in \mathbb{Q}). \text{ Tính } P = a + b.$$

A. $P = -2$.

B. $P = \frac{1}{2}$.

C. $P = -1$.

D. $P = 2$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Từ giả thiết suy ra } \int_{-\ln 2}^{\ln 2} [f(x) + f(-x)] dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} dx.$$

$$\text{Ta có } \int_{-\ln 2}^{\ln 2} [f(x) + f(-x)] dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx - \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x) d(-x) = 2 \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác } \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} dx &= \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{(e^x + 1)e^x} d(e^x) = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \left[\frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^x + 1} \right] d(e^x) \\ &= \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x} d(e^x) - \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} d(e^x + 1) = x \Big|_{-\ln 2}^{\ln 2} - \ln(e^x + 1) \Big|_{-\ln 2}^{\ln 2} = \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \ln \frac{3}{2} = \ln 2. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx = \frac{1}{2} \ln 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = 0 \Rightarrow a + b = \frac{1}{2}.$$

Câu 37. (ĐHQG Hà Nội - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn điều kiện

$$\int_0^1 f(x) dx = 2 \text{ và } \int_0^1 xf(x) dx = \frac{3}{2}. \text{ Hỏi giá trị nhỏ nhất của } \int_0^1 f^2(x) dx \text{ bằng bao nhiêu?}$$

A. $\frac{27}{4}$.

B. $\frac{34}{5}$.

C. 7.

D. 8.

Lời giải

Chọn C

Ta tìm hàm $ax+b$ thỏa mãn $\int_0^1 [f(x) - (ax+b)] dx = 0 \Rightarrow f(x) = ax+b$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_0^1 f(x) dx = 2 \\ \int_0^1 xf(x) dx = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{a}{2}x^2 + bx \right) \Big|_0^1 = 2 \\ \left(\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} + b = 2 \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow a=6; b=-1.$$

$$+ \int_0^1 [f(x) - (6x-1)] dx \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x) dx \geq 2 \int_0^1 f(x)(6x-1) dx - \int_0^1 (6x-1)^2 dx = 12 \int_0^1 xf(x) dx - 2 \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 (6x-1)^2 dx = 7$$

Câu 38. (Sở Hưng Yên - 2020) Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) = f(2020-x)$ và

$$\int_3^{2017} f(x) dx = 4. \text{ Khi đó } \int_3^{2017} xf(x) dx \text{ bằng}$$

A. 16160.

B. 4040.

C. 2020.

D. 8080.

Lời giải

Chọn B

Đặt $u = 2020 - x \Rightarrow x = 2020 - u$. Ta có $dx = -du$.

Với $x=3$ thì $u=2017$.

Với $x=2017$ thì $u=3$.

$$\text{Khi đó } \int_3^{2017} xf(x) dx = \int_3^{2017} (2020-u)f(2020-u) du = \int_3^{2017} (2020-x)f(x) dx$$

$$\text{Suy ra } 2 \int_3^{2017} xf(x) dx = \int_3^{2017} 2020f(x) dx = 8080. \text{ Do đó } \int_3^{2017} xf(x) dx = 4040.$$

Câu 39. (Sở Phú Thọ - 2020) Cho hàm số $f(x) > 0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn

$$(x+1)f'(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{x+2} \text{ và } f(0) = \left(\frac{\ln 2}{2}\right)^2. \text{ Giá trị } f(3) \text{ bằng}$$

$$\text{A. } \frac{1}{2}(4\ln 2 - \ln 5)^2. \quad \text{B. } 4(4\ln 2 - \ln 5)^2. \quad \text{C. } \frac{1}{4}(4\ln 2 - \ln 5)^2. \quad \text{D. } 2(4\ln 2 - \ln 5)^2.$$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } (x+1)f'(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{x+2} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}.$$

Khi đó

$$\int_0^3 \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = \int_0^3 \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx \Leftrightarrow \int_0^3 \frac{d(f(x))}{\sqrt{f(x)}} = \int_0^3 \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{f(x)}\Big|_0^3 = \ln \frac{x+1}{x+2}\Big|_0^3 \Leftrightarrow 2\sqrt{f(3)} - 2\sqrt{f(0)} = \ln \frac{4}{5} - \ln \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{f(3)} = \ln \frac{8}{5} + 2\sqrt{f(0)} \Leftrightarrow \sqrt{f(3)} = \frac{1}{2}(\ln 8 - \ln 5) + \sqrt{f(0)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{f(3)} = \frac{1}{2}(3\ln 2 - \ln 5) + \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow \sqrt{f(3)} = \frac{1}{2}(4\ln 2 - \ln 5).$$

$$\text{Vậy } f(3) = \frac{1}{4}(4\ln 2 - \ln 5)^2.$$

Câu 40. (Sở Phú Thọ - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có $f(1) = e^2$ và $f'(x) = \frac{2x-1}{x^2}e^{2x}$ với mọi x khác

0. Khi đó $\int_1^{\ln 3} xf(x)dx$ bằng

- A. $6 - e^2$. B. $\frac{6 - e^2}{2}$. C. $9 - e^2$. D. $\frac{9 - e^2}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xét tích phân } \int f'(x)dx = \int \frac{2x-1}{x^2}e^{2x}dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = (2x-1)e^{2x} \\ dv = \frac{1}{x^2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 4xe^{2x}dx \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}, \text{ khi đó}$$

$$\int f'(x)dx = \int \frac{2x-1}{x^2}e^{2x}dx = -\frac{1}{x}(2x-1)e^{2x} + 4\int e^{2x}dx = -\frac{1}{x}(2x-1)e^{2x} + 2e^{2x} + C.$$

$$\text{Do } f(1) = e^2 \Rightarrow C = 0. \text{ Vậy } f(x) = -\frac{1}{x}(2x-1)e^{2x} + 2e^{2x}.$$

$$\text{Khi đó, ta có } \int_1^{\ln 3} xf(x)dx = \int_1^{\ln 3} \left[(1-2x)e^{2x} + 2xe^{2x} \right]dx = \int_1^{\ln 3} e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{2}\Big|_1^{\ln 3} = \frac{1}{2}(9 - e^2).$$

Câu 41. (Sở Phú Thọ - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ và thỏa mãn

$$f(x^2+1) + \frac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}} = \frac{2x+1}{2x} \ln(x+1). \text{ Biết } \int_1^{17} f(x)dx = a \ln 5 - 2 \ln b + c \text{ với } a, b, c \in \mathbb{R}. \text{ Giá trị của } a+b+2c \text{ bằng}$$

- A. $\frac{29}{2}$. B. 5. C. 7. D. 37.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f(x^2+1) + \frac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}} = \frac{2x+1}{2x} \ln(x+1) \Leftrightarrow xf(x^2+1) + \frac{f(\sqrt{x})}{4\sqrt{x}} = \frac{2x+1}{2} \ln(x+1).$$

$$\text{Suy ra } \int_1^4 \left[xf(x^2+1) + \frac{f(\sqrt{x})}{4\sqrt{x}} \right] dx = \int_1^4 \frac{2x+1}{2} \ln(x+1) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_1^4 \left[xf(x^2+1) + \frac{f(\sqrt{x})}{4\sqrt{x}} \right] dx &= \int_1^4 f(x^2+1) \frac{d(x^2+1)}{2} + \int_1^4 f(\sqrt{x}) \frac{d(\sqrt{x})}{2} \\ &= \int_2^{17} \frac{1}{2} f(x) dx + \int_1^2 \frac{1}{2} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^{17} f(x) dx. \\ \int_1^4 \frac{2x+1}{2} \ln(x+1) dx &= \frac{1}{2} \int_1^4 \ln(x+1) d(x^2+x) = \frac{1}{2} \left[(x^2+x) \ln(x+1) \Big|_1^4 - \int_1^4 (x^2+x) \frac{1}{x+1} dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[20 \ln 5 - 2 \ln 2 - \frac{x^2}{2} \Big|_1^4 \right] = \frac{1}{2} \left[20 \ln 5 - 2 \ln 2 - \frac{15}{2} \right]. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \int_1^{17} f(x) dx = 20 \ln 5 - 2 \ln 2 - \frac{15}{2} \Rightarrow a = 20, b = 2, c = -\frac{15}{2}.$$

$$\text{Vậy } a+b+2c = 7.$$

Câu 42. (Sở Phú Thọ - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và xác định trên $\mathbb{R}$. Biết $f(1) = 2$ và

$$\int_0^1 x^2 f'(x) dx = \int_1^4 \frac{1+3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} f(2-\sqrt{x}) dx = 4. \text{ Giá trị của } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. 1. B. $\frac{5}{7}$. C. $\frac{3}{7}$. D. $\frac{1}{7}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$4 = \int_0^1 x^2 f'(x) dx = (x^2 f(x)) \Big|_0^1 - \int_0^1 2xf(x) dx = 2 - 2 \int_0^1 xf(x) dx \Rightarrow \int_0^1 xf(x) dx = -1$$

$$\text{Đặt } t = 2 - \sqrt{x} \Rightarrow dt = -\frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

Khi đó

$$\int_1^4 \frac{1+3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} f(2-\sqrt{x}) dx = 4 \Leftrightarrow -\int_1^0 (1+3(2-t)) f(t) dt = 4 \Leftrightarrow \int_0^1 7f(t) dt - 3 \int_0^1 tf(t) dt = 4$$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 f(t) dt = \frac{4+3 \int_0^1 tf(t) dt}{7} = \frac{4+3 \cdot (-1)}{7} = \frac{1}{7}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{7}.$$

Câu 43. (Sở Hà Tĩnh - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 0$ và $f'(x) = \sin^4 x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tích phân

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{\pi^2 - 6}{18}$.

B. $\frac{\pi^2 - 3}{32}$.

C. $\frac{3\pi^2 - 16}{64}$.

D. $\frac{3\pi^2 - 6}{112}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$\begin{aligned}\sin^4 x &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) = \frac{1}{4} \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) \\ &= \frac{1}{8} (\cos 4x - 4\cos 2x + 3).\end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } f(x) = \int f'(x) dx = \frac{1}{8} \int (\cos 4x - 4\cos 2x + 3) dx = \frac{1}{32} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{8} x + C.$$

$$\text{Vì } f(0) = 0 \text{ nên } C = 0 \text{ hay } f(x) = \frac{1}{32} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{8} x.$$

$$\begin{aligned}\text{Do đó } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{32} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{8} x \right) dx = \left(-\frac{1}{128} \cos 4x + \frac{1}{8} \cos 2x + \frac{3}{16} x^2 \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(-\frac{1}{128} - \frac{1}{8} + \frac{3\pi^2}{64} \right) - \left(-\frac{1}{128} + \frac{1}{8} \right) = \frac{3\pi^2 - 16}{64}.\end{aligned}$$

Câu 44. (Sở Bình Phước - 2020) Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5\sin x + 6} dx = a \ln \frac{4}{b}$. Giá trị của $a + b$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5\sin x + 6} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x - 5\sin x + 6} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin x)}{(\sin x - 2)(\sin x - 3)}.$$

$$\text{Đặt } t = \sin x \Rightarrow dt = d(\sin x).$$

$$\text{Đổi cận: Khi } x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1.$$

Khi đó

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{(t-2)(t-3)} = \int_0^1 \left(\frac{-1}{t-2} + \frac{1}{t-3} \right) dt = \left[\ln|t-3| - \ln|t-2| \right]_0^1 = \ln \left| \frac{t-3}{t-2} \right| \Big|_0^1 = \ln 2 - \ln \frac{3}{2} = \ln \frac{4}{3}.$$

$$\text{Ta có } a = 1, b = 3.$$

$$\text{Vậy giá trị của } a + b = 1 + 3 = 4.$$

Câu 45. (Sở Yên Bái - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$4xf'(x^2) + 6f(2x) = \frac{3}{5}x^3 + 4. \text{ Giá trị } \int_0^4 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{52}{25}$.

B. 52.

C. $\frac{48}{25}$.

D. 48.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned}
 4xf(x^2) + 6f(2x) &= \frac{3}{5}x^3 + 4 \Rightarrow \int_0^2 [4xf(x^2) + 6f(2x)] dx = \int_0^2 \left[\frac{3}{5}x^3 + 4 \right] dx \\
 &\Rightarrow 2 \int_0^2 f(x^2) d(x^2) + 3 \int_0^2 f(2x) d(2x) = \frac{52}{5} \Rightarrow 2 \int_0^4 f(t) dt + 3 \int_0^4 f(u) du = \frac{52}{5} \\
 &\Rightarrow 2 \int_0^4 f(x) dx + 3 \int_0^4 f(x) dx = \frac{52}{5} \Rightarrow 5 \int_0^4 f(x) dx = \frac{52}{5} \Rightarrow \int_0^4 f(x) dx = \frac{52}{25}
 \end{aligned}$$

Câu 46. (Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020) Xét tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos x}} dx$. Nếu đặt $t = \sqrt{1+\cos x}$, ta

được

A. $I = -4 \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1) dt$. **B.** $I = 4 \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1) dt$. **C.** $I = \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{4t^3 - 4t}{t} dt$. **D.** $I = \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{-4t^3 + 4t}{t} dx$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \sqrt{1+\cos x} \Rightarrow \cos x = t^2 - 1 \Rightarrow \sin x dx = -2t dt$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = \sqrt{2}$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$. Khi đó ta có

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x \cos x}{\sqrt{1+\cos x}} dx = \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{2(t^2 - 1)(-2t dt)}{t} = -4 \int_{\sqrt{2}}^1 (t^2 - 1) dt = 4 \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1) dt.$$

Câu 47. (Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(1) = \frac{1}{2}$ và $f'(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$

với $x > -1$. Biết $\int_1^2 f(x) dx = a \ln \frac{b}{c} - d$ với a, b, c, d là các số nguyên dương, $b \leq 3$ và $\frac{b}{c}$ tối giản. Khi đó $a + b + c + d$ bằng

A. 8.

B. 5.

C. 6.

D. 10.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int \frac{x}{(x+1)^2} dx = \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx = \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} + C$, với C là hằng số tùy ý.

Do $f(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \ln 2 + \frac{1}{2} + C = \frac{1}{2} \Leftrightarrow C = -\ln 2$.

Khi đó, ta có

$$\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left[\ln(x+1) + \frac{1}{x+1} - \ln 2 \right] dx = \int_1^2 \ln(x+1) dx + \int_1^2 \frac{dx}{x+1} - \ln 2 \int_1^2 dx.$$

Xét $I = \int_1^2 \ln(x+1) dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x+1} \\ v = x \end{cases}$, khi đó ta có

$$I = x \cdot \ln(x+1) \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x dx}{x+1} = 2 \ln 3 - \ln 2 - \int_1^2 \frac{x dx}{x+1} = 2 \ln 3 - \ln 2 - \int_1^2 dx + \int_1^2 \frac{dx}{x+1} = 2 \ln 3 - \ln 2 - 1 + \int_1^2 \frac{dx}{x+1}$$

Khi đó,

$$\int_1^2 f(x) dx = 2 \ln 3 - \ln 2 - 1 + 2 \int_0^1 \frac{dx}{x+1} - \ln 2 \int_1^2 dx = 2 \ln 3 - \ln 2 - 1 + 2 \ln 3 - 2 \ln 2 - \ln 2 = 4 \ln \frac{3}{2} - 1.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a=4 \\ b=3 \\ c=2 \\ d=1 \end{cases} \Rightarrow a+b+c+d=10.$$

Câu 48. (Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020) Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(2) = 16, \int_0^1 f(2x) dx = 2. \text{ Tích phân } \int_0^2 x f'(x) dx \text{ bằng}$$

A. 30.

B. 28.

C. 36.

D. 16.

Lời giải

Chọn B

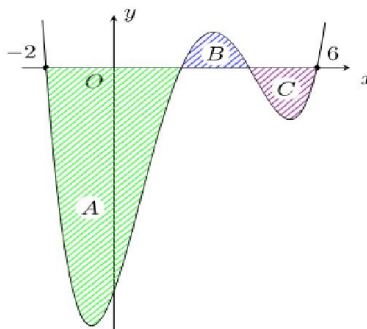
$$\text{Ta có: } \int_0^1 f(2x) dx = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x) d(2x) = 2 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = 4.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^2 x f'(x) dx = x f(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 f(x) dx = 2 f(2) - 4 = 32 - 4 = 28.$$

Câu 49. (Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-2; 6]$ như hình vẽ bên dưới. Biết các miền A, B, C có diện tích lần lượt là 32, 2 và 3. Tích

$$\text{phân } I = \int_{-2}^2 (3x-4) \left(1 + f \left(-\frac{3}{4}x^2 + 2x + 5 \right) \right) dx \text{ bằng}$$



A. $I = \frac{1}{2}$

B. $I = -82.$

C. $I = 66.$

D. $I = 50.$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } t = -\frac{3}{4}x^2 + 2x + 5 \Rightarrow dt = \left(-\frac{3}{2}x + 2\right)dx \Rightarrow (3x - 4)dx = -2dt$$

$$\text{Đổi cận: - Với } x = -2 \Rightarrow t = -2$$

$$\text{- Với } x = 2 \Rightarrow t = 6$$

$$\text{Ta được: } I = -2 \int_{-2}^6 [1 + f(t)] dt = -2 \int_{-2}^6 dt - 2 \int_{-2}^6 f(t) dt = -16 - 2M.$$

$$\text{Với } M = \int_{-2}^6 f(t) dt = \int_{-2}^2 f(t) dt + \int_2^4 f(t) dt + \int_4^6 f(t) dt = -32 + 2 - 3 = -33.$$

$$\text{Vậy: } I = -16 - 2 \cdot (-33) = 50.$$

Câu 50. (Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(0) = -1, f'(x) < 0, [f'(x)]^2 = f''(x), \forall x \in [0;1]$. Giá trị $f(0) - f(1)$ thuộc khoảng

A. $(1;2)$.

B. $(-1;0)$.

C. $(0;1)$.

D. $(-2;-1)$.

Lời giải**Chọn C**

$$[f'(x)]^2 = f''(x) \Leftrightarrow \frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} = 1 \Leftrightarrow \int \frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} dx = \int dx \Leftrightarrow \frac{-1}{f'(x)} = x + C$$

$$f'(0) = -1 \Rightarrow \frac{-1}{-1} = 0 + C \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow \frac{-1}{f'(x)} = x + 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{-1}{x+1}$$

$$f(0) - f(1) = \int_1^0 f'(x) dx = \int_1^0 \frac{-1}{x+1} dx = -\ln|x+1| \Big|_1^0 = \ln 2 \in (0;1)$$

Câu 51. (Kim Liên - Hà Nội - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = 5$.

$$\text{Tính } I = \int_0^{\pi} xf(\sin x) dx$$

A. $I = \frac{5}{2}\pi$.

B. $I = 10\pi$.

C. $I = 5$.

D. $I = 5\pi$.

Lời giải**Chọn D**

$$\text{Ta có } I = \int_0^{\pi} xf(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(\sin x) dx,$$

$$\text{Tính } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(\sin x) dx$$

$$\text{Đặt } x = \pi - t$$

$$dx = -dt$$

$$xf(\sin x)dx = (\pi - t)f[\sin(\pi - t)](-dt) = (t - \pi)f(\sin t)dt$$

$$\text{Đổi cận } x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

$$x = \pi \Rightarrow t = 0$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(\sin x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (t - \pi)f(\sin t)dt = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} tf(\sin t)dt = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)dx$$

$$\text{Do đó } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = 5\pi$$

Vậy chọn **D**.

Câu 52. (Lê Lai - Thanh Hóa - 2020) Cho hàm số $f(x)$ biết $f(\pi) = 0$ và

$$f'(x) = 2\sin x - 3\sin^3 x, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ biết } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{\sin^2 x + 1} dx = a - \frac{b\pi}{c}. \text{ Tổng } S = a + b + c \text{ bằng}$$

A. 6.

B. 5.

C. 8.

D. 7.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } f(x) = \int (2\sin x - 3\sin^3 x)dx = \int \sin x(2 - 3\sin^2 x)dx = \int \sin x(3\cos^2 x - 1)dx$$

$$= -\int (3\cos^2 x - 1)d(\cos x) = -\cos^3 x + \cos x + C$$

$$\text{Vì } f(\pi) = 0 \text{ nên } -\cos^3 \pi + \cos \pi + C = 0 \Leftrightarrow C = 0. \text{ Vậy } f(x) = -\cos^3 x + \cos x$$

$$\text{Xét } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{\sin^2 x + 1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \cos^3 x}{\sin^2 x + 1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x(1 - \cos^2 x)}{\sin^2 x + 1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \sin^2 x}{\sin^2 x + 1} dx.$$

Cách 1: Đặt $\sin x = u$; $du = \cos x dx$;

$$\text{Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow u = 0; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1.$$

$$I = \int_0^1 \frac{u^2}{u^2 + 1} du = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{u^2 + 1}\right) du = u \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{u^2 + 1} du.$$

$$\text{Xét } J = \int_0^1 \frac{1}{u^2 + 1} du, \text{ đặt } u = \tan t, t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right); du = \frac{1}{\cos^2 t} dt = (\tan^2 t + 1)dt.$$

$$\text{Đổi cận: } u = 0 \Rightarrow t = 0; u = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}.$$

$$J = \int_0^1 \frac{1}{u^2 + 1} du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 t + 1}{\tan^2 t + 1} dt = t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Vậy } I = 1 - J = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Cách 2: Đặt $\sin x = \tan t, t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Lấy vi phân 2 vế, ta có $\cos x dx = (\tan^2 t + 1) dt$;

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \cdot \sin^2 x}{\sin^2 x + 1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 t}{\tan^2 t + 1} (\tan^2 t + 1) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1 \right) dt = (\tan t - t) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Vậy $S = a + b + c = 6$.

Câu 53. (Liên trường Nghệ An - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có $f(2) = 0$ và $f'(x) = \frac{x+7}{\sqrt{2x-3}}, \forall x \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. Biết rằng $\int_4^7 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}, b > 0, \frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Khi đó $a + b$ bằng

A. 250.

B. 251.

C. 133.

D. 221.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } f(x) = \int f'(x) \cdot dx = \int \frac{x+7}{\sqrt{2x-3}} \cdot dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-3) + \frac{17}{2}}{\sqrt{2x-3}} \cdot dx = \int \left(\frac{1}{2} \sqrt{2x-3} + \frac{17}{2\sqrt{2x-3}} \right) \cdot dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{\sqrt{(2x-3)^3}}{\frac{3}{2}} + \frac{17}{2} \cdot \sqrt{2x-3} + C = \frac{1}{6} \sqrt{(2x-3)^3} + \frac{17}{2} \cdot \sqrt{2x-3} + C.$$

$$\text{Mà } f(2) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{6} \sqrt{(2 \cdot 2 - 3)^3} + \frac{17}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot 2 - 3} + C = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{6} + \frac{17}{2} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{26}{3}.$$

$$\text{Suy ra } f(x) = \frac{1}{6} \sqrt{(2x-3)^3} + \frac{17}{2} \cdot \sqrt{2x-3} - \frac{26}{3}$$

$$\text{Do đó } \int_4^7 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int_4^7 \left[\frac{1}{6} \sqrt{(x-3)^3} + \frac{17}{2} \cdot \sqrt{x-3} - \frac{26}{3} \right] dx = \left[\frac{1}{6} \frac{\sqrt{(x-3)^5}}{\frac{5}{2}} + \frac{17}{2} \cdot \frac{\sqrt{(x-3)^3}}{\frac{3}{2}} - \frac{26}{3} x \right] \Big|_4^7$$

$$= \left[\frac{1}{15} \sqrt{(x-3)^5} + \frac{17}{3} \cdot \sqrt{(x-3)^3} - \frac{26}{3} x \right] \Big|_4^7$$

$$= \left[\frac{1}{15} \sqrt{(7-3)^5} + \frac{17}{3} \cdot \sqrt{(7-3)^3} - \frac{26}{3} \cdot 7 \right] - \left[\frac{1}{15} \sqrt{(4-3)^5} + \frac{17}{3} \cdot \sqrt{(4-3)^3} - \frac{26}{3} \cdot 4 \right]$$

$$= \left[\frac{1}{15} \sqrt{(7-3)^5} + \frac{17}{3} \cdot \sqrt{(7-3)^3} - \frac{26}{3} \cdot 7 \right] - \left[\frac{1}{15} \sqrt{(4-3)^5} + \frac{17}{3} \cdot \sqrt{(4-3)^3} - \frac{26}{3} \cdot 4 \right]$$

$$= \frac{236}{15}.$$

Suy ra $a = 236, b = 15$. Vậy $a + b = 251$.

Câu 54. (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(x) + f(-x) = \sqrt{2 + 2\cos 2x}, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tính } \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx.$$

A. $I = -6$.

B. $I = 0$.

C. $I = -2$.

D. $I = 6$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xét } I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx.$$

$$\text{Đặt } x = -t \Rightarrow dx = -dt.$$

$$\Rightarrow I = - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{3\pi}{2}} f(-t) dt = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x) dx.$$

$$\Rightarrow 2I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (f(x) + f(-x)) dx = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2 + 2\cos 2x} dx.$$

$$\Rightarrow 2I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 2|\cos x| dx.$$

$$\Rightarrow I = 2 \cdot \int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x| dx \text{ (Vì } |\cos x| \text{ là hàm số chẵn)}$$

$$= 2 \cdot \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x dx \right]$$

$$= 2 \cdot \left[\sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \right] = 2(1 + 2) = 6.$$

Câu 55. (Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có $f(1) = 0$ và

$$f'(x) = 2019 \cdot 2020 \cdot x(x-1)^{2018}, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Khi đó } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{2}{2021}$.

B. $\frac{1}{1011}$.

C. $-\frac{2}{2021}$.

D. $-\frac{1}{1011}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Cần nhớ: } \int f'(x) dx = f(x) + C \text{ và } \int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \text{ } (\alpha \neq -1).$$

$$\text{Ta có } f(x) = \int f'(x) dx = \int 2019.2020.x(x-1)^{2018} dx = 2019.2020 \int x(x-1)^{2018} dx.$$

$$\text{Đặt } t = x-1 \Rightarrow dt = dx \text{ và } x = t+1.$$

$$\text{Suy ra } f(x) = 2019.2020 \int (t+1)t^{2018} dt = 2019.2020 \int (t^{2019} + t^{2018}) dt$$

$$= 2019.2020 \left(\frac{t^{2020}}{2020} + \frac{t^{2019}}{2019} \right) + C = 2019t^{2020} + 2020t^{2019} + C.$$

$$\text{Từ đó } f(x) = 2019(x-1)^{2020} + 2020(x-1)^{2019} + C.$$

$$\text{Mà } f(1) = 0 \Leftrightarrow 2019(1-1)^{2020} + 2020(1-1)^{2019} + C = 0 \Leftrightarrow C = 0.$$

$$\text{Suy ra } f(x) = 2019(x-1)^{2020} + 2020(x-1)^{2019}.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 [2019(x-1)^{2020} + 2020(x-1)^{2019}] dx = \left[2019 \cdot \frac{(x-1)^{2021}}{2021} + 2020 \cdot \frac{(x-1)^{2020}}{2020} \right]_0^1 \\ &= -\left(-\frac{2019}{2021} + 1 \right) = -\frac{2}{2021}. \end{aligned}$$

Câu 56. (Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020) Cho a là số thực dương. Tính

$$I = \int_0^a \sin^{2016} x \cdot \cos(2018x) dx \text{ bằng:}$$

A. $I = \frac{\cos^{2017} a \cdot \sin 2017a}{2016}.$

B. $I = \frac{\sin^{2017} a \cdot \cos 2017a}{2017}.$

C. $I = \frac{\sin^{2017} a \cdot \cos 2017a}{2016}.$

D. $I = \frac{\cos^{2017} a \cdot \cos 2017a}{2017}.$

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có } I &= \int_0^a \sin^{2016} x \cdot \cos(2017x + x) dx = \int_0^a \sin^{2016} x [\cos(2017x) \cdot \cos x - \sin(2017x) \cdot \sin x] dx \\ &= \int_0^a \sin^{2016} x \cos(2017x) \cdot \cos x dx - \int_0^a \sin^{2017} x \sin(2017x) dx. \end{aligned}$$

$$\text{Xét } J = \int_0^a \sin^{2016} x \cos(2017x) \cdot \cos x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \cos(2017x) \\ du = \sin^{2016} x \cdot \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2017 \sin(2017x) dx \\ v = \frac{1}{2017} \sin^{2017} x \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } J = \cos(2017x) \cdot \frac{1}{2017} \sin^{2017} x \Big|_0^a + \int_0^a \sin^{2017} x \cdot \sin(2017x) dx.$$

$$\text{Suy ra } I = \cos(2017x) \cdot \frac{1}{2017} \sin^{2017} x \Big|_0^a + \int_0^a \sin^{2017} x \cdot \sin(2017x) dx - \int_0^a \sin^{2017} x \cdot \sin(2017x) dx.$$

$$= \cos(2017x) \cdot \frac{1}{2017} \sin^{2017} x \Big|_0^a = \frac{1}{2017} \sin^{2017} a \cdot \cos(2017a).$$

Câu 57. (Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020) Giả sử tích phân $I = \int_1^5 \frac{1}{1+\sqrt{3x+1}} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5$.

Lúc đó

A. $a+b+c = \frac{5}{3}$. **B.** $a+b+c = \frac{4}{3}$. **C.** $a+b+c = \frac{7}{3}$. **D.** $a+b+c = \frac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \sqrt{3x+1}$. Ta có $t^2 = 3x+1 \Rightarrow dx = \frac{2}{3}t dt$.

Đổi cận

x	1	5
t	2	4

$$\begin{aligned} \text{Ta có } I &= \int_1^5 \frac{1}{1+\sqrt{3x+1}} dx = \int_2^4 \frac{1}{1+t} \cdot \frac{2}{3} t dt \\ &= \frac{2}{3} \int_2^4 \frac{t}{t+1} dt \\ &= \frac{2}{3} \int_2^4 \left(1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = \frac{2}{3} (t - \ln|1+t|) \Big|_2^4 \\ &= \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \ln 3 - \frac{2}{3} \ln 5. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } a = \frac{4}{3}; b = \frac{2}{3}; c = -\frac{2}{3}.$$

$$\text{Vậy } a+b+c = \frac{4}{3}.$$

Câu 58. (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020) Biết $\int_0^1 x \ln(x^2+1) dx = a \ln 2 - \frac{b}{c}$ (với $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản). Tính $P = 13a + 10b + 84c$.

A. 193.

B. 191.

C. 190.

D. 189.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = \ln(x^2+1) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2x}{x^2+1} dx \\ v = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } \int_0^1 x \ln(x^2+1) dx = \left(\frac{x^2+1}{2} \right) \ln(x^2+1) \Big|_0^1 - \int_0^1 x dx = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a=1, b=1, c=2. \text{ Vậy } P = 13a + 10b + 84c = 191.$$

Câu 59. (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn

$$6x^2 f(x^3) + 4f(1-x) = 3\sqrt{1-x^2}. \text{ Tính } \int_0^1 f(x) dx.$$

A. $\frac{\pi}{8}$.

B. $\frac{\pi}{20}$.

C. $\frac{\pi}{16}$.

D. $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết $6x^2 f(x^3) + 4f(1-x) = 3\sqrt{1-x^2}$, lấy tích phân từ 0 đến 1 của 2 vế ta được

$$\int_0^1 6x^2 f(x^3) dx + \int_0^1 4f(1-x) dx = \int_0^1 3\sqrt{1-x^2} dx$$

Đặt $I_1 = \int_0^1 6x^2 f(x^3) dx$, $I_2 = \int_0^1 4f(1-x) dx$, $I = \int_0^1 3\sqrt{1-x^2} dx$.

+) Đặt $t = x^3$ ta được $I_1 = 2 \int_0^1 f(t) dt = 2 \int_0^1 f(x) dx$

+) Đặt $v = 1-x$ ta được $I_2 = 4 \int_0^1 f(v) dv = 4 \int_0^1 f(x) dx$.

Từ đó ta được $I = 6 \int_0^1 f(x) dx$

+) Đặt $u = \sin x$ ta được $I = \frac{3\pi}{4}$, suy ra $\int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{8}$.

Câu 60. (Tiên Du - Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có $f(\sqrt{2}) = -2$ và

$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{6-x^2}}, \forall x \in (-\sqrt{6}; \sqrt{6})$. Khi đó $\int_0^{\sqrt{3}} f(x) dx$ bằng

A. $-\frac{3\pi}{4}$.

B. $\frac{3\pi+6}{4}$.

C. $\frac{\pi+2}{4}$.

D. $-\frac{3\pi+6}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\forall x \in (-\sqrt{6}; \sqrt{6}) \Rightarrow f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{x}{\sqrt{6-x^2}} dx$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{6-x^2}} d(6-x^2) = -\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{6-x^2} + C.$$

Mà $f(\sqrt{2}) = -2 \Leftrightarrow -\sqrt{6-2} + C = -2 \Leftrightarrow C = 0$.

Suy ra $f(x) = -\sqrt{6-x^2}$.

Do đó $I = \int_0^{\sqrt{3}} f(x) dx = -\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{6-x^2} dx$.

Đặt $x = \sqrt{6} \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = \sqrt{6} \cos t dt$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \sqrt{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } I &= -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{6-6\sin^2 t} \cdot \sqrt{6} \cdot \cos t \cdot dt = -6 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t \cdot dt = -3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2t + 1) \cdot dt = -3 \left(\frac{1}{2} \sin 2t + t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= -3 \left(\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{3\pi+6}{4}. \end{aligned}$$

Câu 61. (Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết

$f(4x) = f(x) + 4x^3 + 2x$ và $f(0) = 2$. Tính $I = \int_0^2 f(x) dx$.

A. $\frac{147}{63}$.

B. $\frac{149}{63}$.

C. $\frac{148}{63}$.

D. $\frac{352}{63}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f(4x) = f(x) + 4x^3 + 2x \Rightarrow f(4x) - f(x) = 4x^3 + 2x \quad (1)$.

Suy ra: $f(x)$ và $f(4x)$ là hàm số bậc ba.

Khi đó: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) và $f(4x) = 64ax^3 + 16bx^2 + 4cx + d$.

Ta có: $f(4x) - f(x) = 63ax^3 + 15bx^2 + 3cx \quad (2)$.

Từ (1) và (2) ta suy ra:
$$\begin{cases} a = \frac{4}{63} \\ b = 0 \\ c = \frac{2}{3} \end{cases}$$
. Mặt khác: vì $f(0) = 2$ nên $d = 2$.

Do đó, $f(x) = \frac{4}{63}x^3 + \frac{2}{3}x + 2$.

Vậy $I = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \left(\frac{4}{63}x^3 + \frac{2}{3}x + 2 \right) dx = \frac{352}{63}$.

* Chứng minh $f(x)$ là duy nhất.

Ta có: $f(x) = \frac{4}{63}x^3 + \frac{2}{3}x + 2$ và $f(4x) = \frac{256}{63}x^3 + \frac{8}{3}x + 2$; $f(4x) - f(x) = 4x^3 + 2x$.

Suy ra: $f(4x) - \frac{4}{63}(4x)^3 - \frac{2}{3}(4x) = f(x) - \frac{4}{63}x^3 - \frac{2}{3}x$.

Đặt $g(4x) = f(4x) - \frac{4}{63}(4x)^3 - \frac{2}{3}(4x)$ và $g(x) = f(x) - \frac{4}{63}x^3 - \frac{2}{3}x$.

Ta có: $g(4x) = g(x)$; $g(0) = f(0) = 2$.

Suy ra: $g(x) = g\left(\frac{x}{4}\right) = g\left(\frac{x}{4^2}\right) = \dots = g\left(\frac{x}{4^n}\right), n \in \mathbb{N}^*$

Khi $n \rightarrow +\infty$ suy ra $g(x) = g(0) = 2$.

Vậy $f(x) = \frac{4}{63}x^3 - \frac{2}{3}x + 2, \forall x$.

Câu 62. (Kim Thành - Hải Dương - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1; 2]$ thỏa mãn

$\int_1^2 (x-1)^2 f(x) dx = -\frac{1}{3}$, $f(2) = 0$ và $\int_1^2 [f'(x)]^2 dx = 7$. Tính tích phân $I = \int_1^2 f(x) dx$.

A. $I = \frac{7}{5}$.

B. $I = -\frac{7}{5}$.

C. $I = -\frac{7}{20}$.

D. $I = \frac{7}{20}$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3} &= \int_1^2 (x-1)^2 f(x) dx = \frac{1}{3} \int_1^2 f(x) d(x-1)^3 = \frac{1}{3} \left[(x-1)^3 f(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 (x-1)^3 f'(x) dx \right] \\ &= -\frac{1}{3} \int_1^2 (x-1)^3 f'(x) dx \Rightarrow \int_1^2 (x-1)^3 f'(x) dx = 1 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } \int_1^2 [f'(x) - 7(x-1)^3]^2 dx = \int_1^2 [f'(x)]^2 dx - 14 \int_1^2 f'(x)(x-1)^3 dx + 49 \int_1^2 (x-1)^6 dx = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = 7(x-1)^3 \Rightarrow f(x) = 7 \int (x-1)^3 dx = \frac{7(x-1)^4}{4} + C.$$

$$\text{Mà } f(2) = 0 \text{ nên } C = -\frac{7}{4}. \text{ Suy ra } f(x) = \frac{7(x-1)^4}{4} - \frac{7}{4}.$$

$$\text{Vậy } I = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left[\frac{7(x-1)^4}{4} - \frac{7}{4} \right] dx = -\frac{7}{5}.$$

Câu 63. (Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$\sin x f(\cos x) + \cos x f(\sin x) = \sin 2x - \frac{1}{3} \sin^3 2x$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$

bằng

A. $\frac{1}{6}$.

B. 1.

C. $\frac{7}{18}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$\sin x f(\cos x) + \cos x f(\sin x) = \sin 2x - \frac{1}{3} \sin^3 2x$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f(\cos x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin 2x - \frac{1}{3} \sin^3 2x \right) dx$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) d(\cos x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) d(\sin x) = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1 - \cos^2 2x}{3}\right) d(\cos 2x). \\
&\Rightarrow -\int_1^0 f(t) dt + \int_0^1 f(u) du = -\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \cos 2x + \frac{\cos^3 2x}{9} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&\Rightarrow \int_0^1 f(t) dt + \int_0^1 f(u) du = -\frac{1}{2} \left[\left(-\frac{2}{3} + \frac{-1}{9} \right) - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{9} \right) \right] \\
&\Rightarrow 2 \int_0^1 f(x) dx = \frac{7}{9} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{7}{18}
\end{aligned}$$

Câu 64. (Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(0) = 1$ và

$$f'(x) = \tan^3 x + \tan x, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Biết } \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \frac{a + \pi}{b}; a, b \in \mathbb{Q}, \text{ khi đó } b - a \text{ bằng}$$

A. 4.

B. 12.

C. 0.

D. -4.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết $f'(x) = \tan^3 x + \tan x, \forall x \in \mathbb{R}$ ta có

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (\tan^3 x + \tan x) dx = \int \tan x (1 + \tan^2 x) dx = \int \tan x d(\tan x) = \frac{1}{2} \tan^2 x + C,$$

Ta có $f(0) = 1$ suy ra $C = 1$ vậy $f(x) = \frac{1}{2} \tan^2 x + 1$.

$$\text{Tích phân } \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2 x + 2) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2 x + 1 + 1) dx = \frac{1}{2} (\tan x + x) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{4 + \pi}{8}.$$

$$\text{Từ đây ta được } \begin{cases} a = 4 \\ b = 8 \end{cases} \Rightarrow b - a = 4.$$

Vậy $b - a = 4$.

Câu 65. (Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(0) = 0$ và

$$f'(x) = \sin^8 x - \cos^8 x - 4 \sin^6 x, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tính } I = \int_0^{\pi} 16 f(x) dx.$$

A. $I = 10\pi^2$.

B. $I = 160\pi$.

C. $I = 16\pi^2$.

D. $I = -10\pi^2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$\begin{aligned}\sin^8 x - \cos^8 x - 4\sin^6 x &= (\sin^4 x - \cos^4 x)(\sin^4 x + \cos^4 x) - 4\sin^6 x \\&= (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^4 x + \cos^4 x) - 4\sin^6 x = \cos^4 x \sin^2 x - \sin^4 x \cos^2 x - \cos^6 x - 3\sin^6 x \\&= \cos^4 x \sin^2 x - \sin^4 x \cos^2 x - 2\sin^6 x - (\cos^6 x + \sin^6 x) \\&= \sin^2 x (\cos^4 x - \sin^4 x) - \sin^4 x (\cos^2 x + \sin^2 x) - (1 - 3\cos^2 x \cdot \sin^2 x) \\&= 4\cos^2 x \cdot \sin^2 x - 2\sin^4 x - 1 = -\frac{3}{4}\cos 4x + \cos 2x - \frac{5}{4}.\end{aligned}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned}f(x) &= \int f'(x) dx = \int (\sin^8 x - \cos^8 x - 4\sin^6 x) dx = \int \left(-\frac{3}{4}\cos 4x + \cos 2x - \frac{5}{4}\right) dx \\&= -\frac{3}{16}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{5}{4}x + C.\end{aligned}$$

$$\text{Vì } f(0) = 0 \Rightarrow C = 0.$$

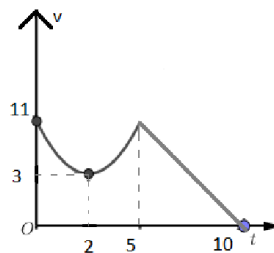
$$\text{Vậy } f(x) = -\frac{3}{16}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{5}{4}x.$$

Suy ra:

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{\pi} 16f(x) dx = \int_0^{\pi} 16\left(-\frac{3}{16}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{5}{4}x\right) dx = \int_0^{\pi} (-3\sin 4x + 8\sin 2x - 20x) dx \\&= \left(\frac{3}{4}\cos 4x - 4\cos 2x - 10x^2\right) \Big|_0^{\pi} = -10\pi^2.\end{aligned}$$

PHẦN 3. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN, NGUYÊN HÀM GIẢI TOÁN

Câu 66. (ĐHQG Hà Nội - 2020) Chất điểm chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)(m/s)$ có dạng đường Parapol khi $0 \leq t \leq 5(s)$ và $v(t)$ có dạng đường thẳng khi $5 \leq t \leq 10(s)$. Cho đỉnh Parapol là $I(2,3)$. Hỏi quãng đường đi được chất điểm trong thời gian $0 \leq t \leq 10(s)$ là bao nhiêu mét?



A. $\frac{181}{2}$.

B. 90.

C. 92.

D. $\frac{545}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi Parapol $(P): y = ax^2 + bx + c$ khi $0 \leq t \leq 5(s)$

Do $(P): y = ax^2 + bx + c$ đi qua $I(2,3); A(0,11)$ nên

$$\begin{cases} 4a+2b+c=3 \\ c=11 \\ 4a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-8 \\ c=11 \end{cases}$$

Khi đó quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ $0 \leq t \leq 5(s)$ là

$$S = \int_0^5 (2x^2 - 8x + 11) dx = \frac{115}{3} (m)$$

Ta có $f'(5) = 21$

Gọi $d: y = ax + b$ khi $5 \leq t \leq 10(s)$ do d đi qua điểm $B(5; 21)$ và $C(10; 0)$ nên:

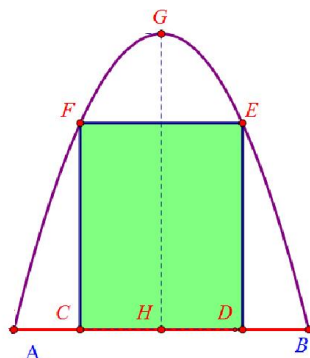
$$\begin{cases} 5a+b=11 \\ 10a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{21}{5} \\ b=42 \end{cases}$$

Khi đó quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ $5 \leq t \leq 10(s)$ là

$$S = \int_5^{10} \left(-\frac{21}{5}x + 52 \right) dx = \frac{105}{2} (m)$$

Quãng đường đi được chất điểm trong thời gian $0 \leq t \leq 10(s)$ là $S = \frac{115}{3} + \frac{105}{2} = \frac{545}{6}$.

- Câu 67. (Trần Phú - Quảng Ninh - 2020)** Một cái cổng hình Parabol như hình vẽ sau. Chiều cao $GH = 4m$, chiều rộng $AB = 4m$, $AC = BD = 0,9m$. Chủ nhà làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là 1200000 đồng/ m^2 , còn các phần để trống làm xiên hoa có giá là 900000 đồng/ m^2 . Hỏi tổng số tiền để làm hai phần nói trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?

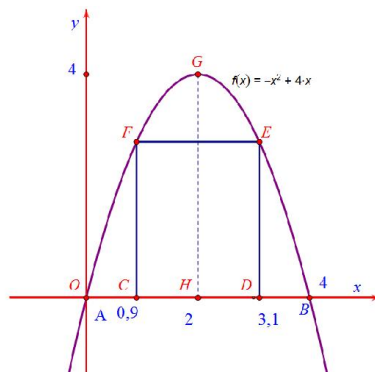


- A.** 11445000 đồng. **B.** 4077000 đồng. **C.** 7368000 đồng. **D.** 11370000 đồng.

Lời giải

Chọn A

Gắn hệ trục tọa độ Oxy sao cho AB trùng Ox , A trùng O khi đó parabol có đỉnh $G(2; 4)$ và đi qua gốc tọa độ.



Giả sử phương trình của parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Vì parabol có đỉnh là $G(2; 4)$ và đi qua điểm $O(0; 0)$ nên ta có
$$\begin{cases} c = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Suy ra phương trình parabol là $y = f(x) = -x^2 + 4x$.

Diện tích của cả công là $S = \int_0^4 (-x^2 + 4x) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right) \Big|_0^4 = \frac{32}{3} \text{ (m}^2\text{)}.$

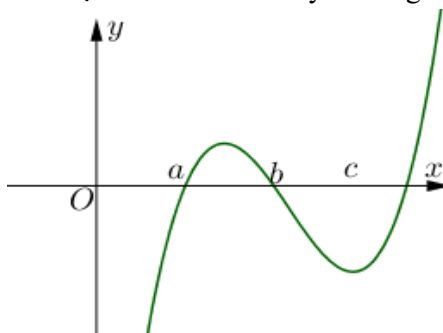
Mặt khác chiều cao $CF = DE = f(0,9) = 2,79 \text{ (m)}$; $CD = 4 - 2 \cdot 0,9 = 2,2 \text{ (m)}$.

Diện tích hai cánh công là $S_{CDEF} = CD \cdot CF = 6,138 \text{ (m}^2\text{)}.$

Diện tích phần xiên hoa là $S_{xh} = S - S_{CDEF} = \frac{32}{3} - 6,14 = \frac{6793}{1500} \text{ (m}^2\text{)}.$

Vậy tổng số tiền để làm công là $6,138 \cdot 1200000 + \frac{6793}{1500} \cdot 900000 = 11441400$ đồng.

Câu 68. (Sở Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a < b < c$ như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



A. $f(b) > f(a) > f(c).$

B. $f(a) > f(b) > f(c).$

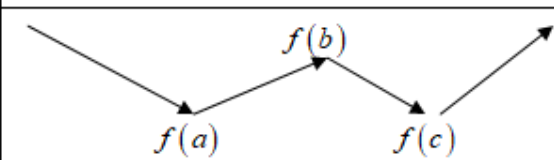
C. $f(c) > f(a) > f(b).$

D. $f(c) > f(b) > f(a).$

Lời giải

Chọn A

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$	a	b	c	$+\infty$			
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$								

Ta có $S_1 = \int_a^b |f'(x)| dx = \int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$, $S_2 = \int_b^c |f'(x)| dx = -\int_b^c f'(x) dx = f(b) - f(c)$.

$$\text{Vì } \begin{cases} S_1 < S_2 \Leftrightarrow f(b) - f(a) < f(b) - f(c) \Leftrightarrow f(c) < f(a) \\ \int_a^b f'(x) dx > 0 \Leftrightarrow f(b) > f(a) \end{cases} \Rightarrow f(c) < f(a) < f(b)$$

----- HẾT -----

Nguyễn Bảo Vương