

MỤC LỤC

CHƯƠNG 4 GIỚI HẠN		1
1.	GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ.....	1
A	TÓM TẮT LÝ THUYẾT.....	1
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	2
	Dạng 1. Khử vô định dạng $\frac{\infty}{\infty}$	2
	Dạng 2. Khử vô định dạng $\infty - \infty$	3
	Dạng 3. Một số quy tắc tính giới hạn vô cực.....	4
	Dạng 4. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn.....	4
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	5
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	7
2.	GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ.....	10
A	TÓM TẮT LÝ THUYẾT.....	10
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	12
	Dạng 1. Giới hạn của hàm số khi $x \rightarrow x_0$. Khử dạng vô định $\frac{0}{0}$	12
	Dạng 2. Giới hạn của hàm số khi $x \rightarrow \pm\infty$. Khử dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}; \infty - \infty; 0 \cdot \infty$	13
	Dạng 3. Giới hạn một bên. Sự tồn tại giới hạn.....	14
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	15
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	17
3.	HÀM SỐ LIÊN TỤC.....	21
A	TÓM TẮT LÝ THUYẾT.....	21
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	22
	Dạng 1. Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm.....	22
	Dạng 2. Xét tính liên tục của hàm số trên miền xác định.....	23
	Dạng 3. Tìm giá trị của tham số để hàm số liên tục - gián đoạn.....	23
	Dạng 4. Chứng minh phương trình có nghiệm.....	23
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	24
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	26
4.	ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM CÁC CHỦ ĐỀ.....	29

§ 1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Giới hạn hữu hạn của dãy số

✎ **Định nghĩa 1:** Dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi. Ta viết $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

✎ **Định nghĩa 2:** Dãy số (u_n) có giới hạn là a nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - a) = 0$. Ta viết $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$.

! Ta có thể viết $\lim u_n = a$ thay cho cách viết $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ (không cần viết chỉ số $n \rightarrow +\infty$)

✎ **Một vài giới hạn đặc biệt:** (có thể xem như công thức)

- $\lim \frac{1}{n} = 0$;
- $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$;
- $\lim \frac{1}{q^n} = 0$, với $|q| > 1$;
- $\lim \frac{1}{n^k} = 0$, với $k \in \mathbb{N}^*$;
- $\lim C = C, \forall C \in \mathbb{R}$;
- $\lim q^n = 0$, nếu $|q| < 1$.

2 Các định lý về giới hạn hữu hạn

✎ Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì ta có:

- $\lim (u_n \pm v_n) = a \pm b$;
- $\lim \left(\frac{u_n}{v_n} \right) = \frac{a}{b}$, với $b \neq 0$;
- $\lim |u_n| = |a|$;
- $\lim (u_n \cdot v_n) = a \cdot b$;
- $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$, với $a \geq 0$;
- $\lim (k \cdot u_n) = k \cdot a$ ($k \in \mathbb{R}$).

✎ Định lý "kẹp giữa":

- Nếu $0 \leq |u_n| \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.
- Nếu $w_n \leq u_n \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $\lim w_n = \lim v_n = a$ thì $\lim u_n = a$.

3 Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

✎ **Định nghĩa:** Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q thỏa mãn $|q| < 1$ được gọi là *cấp số nhân lùi vô hạn*.

✎ **Công thức tính:** Cho cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) , ta có tổng của cấp số nhân lùi vô hạn đó là

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \frac{u_1}{1 - q}, (|q| < 1)$$

4 Giới hạn vô cực

✍ Định nghĩa:

- ① Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi. Kí hiệu: $\lim u_n = +\infty$.
- ② Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $-\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu $\lim(-u_n) = +\infty$. Kí hiệu: $\lim u_n = -\infty$.

✍ Một số giới hạn đặc biệt:

- ① $\lim n^k = +\infty$, với $k \in \mathbb{N}^*$.
- ② $\lim q^n = +\infty$, với $q > 1$.

✍ Một số quy tắc tính giới hạn vô cực:

- ① Quy tắc tìm giới hạn của tích $u_n \cdot v_n$

$\lim u_n = L$	$\lim v_n = \infty$	$\lim [u_n \cdot v_n]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$L > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$-\infty$	$+\infty$

- ② Quy tắc tìm giới hạn của thương $\frac{u_n}{v_n}$

$\lim u_n = L$	$\lim v_n$	Dấu của v_n	$\lim \frac{u_n}{v_n}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	+	$+\infty$
$L > 0$	0	-	$-\infty$
$L < 0$	0	+	$-\infty$
$L < 0$	0	-	$+\infty$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

📁 DẠNG 1. Khử vô định dạng $\frac{\infty}{\infty}$

Phương pháp giải.

✍ Thường phát biểu dưới dạng $\lim \frac{u_n}{v_n}$.

✍ Phương pháp giải:

- Đặt nhân tử n^k có tính "quyết định ∞ " ở tử và mẫu.
- Khử bỏ n^k , đưa giới hạn về dạng xác định được.
- Áp dụng định lý về giới hạn hữu hạn để tính kết quả.

✍ Trong trường hợp hàm mũ, ta đặt đại lượng "quyết định ∞ " có dạng a^n .

 **Ví dụ 1.** Tính các giới hạn sau

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim \frac{2n^2 + 3n - 1}{2 - 3n^2} & \text{b) } \lim \frac{3n^3 + 2n^2 + n}{n^3 + 4} & \text{c) } \lim \frac{n^2 + 1}{2n^4 + n + 1} \\ \text{d) } \lim \left(\frac{n+1}{n^2 + 2n} - \frac{1}{n-1} \right) & \text{e) } \lim \left(\frac{2n^2 + 3n}{n+1} - \frac{2n^3 - 3}{n^2 - 1} \right) & \text{f) } \lim n \left(1 - \frac{n^2 + 3}{n^2 - 1} \right) \\ \text{g) } \lim \frac{(2n+3)(1-3n)}{2n^2 - n + 5} & \text{h) } \lim \frac{n^4 - 2n^2}{(n+1)(2+n)(n^2+1)} & \text{i) } \lim \frac{(2n^4+1)(n+2)^2}{(2n+1)^2(2-n)^4} \end{array}$$

 **Ví dụ 2.** Tính các giới hạn sau

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim \frac{1+3^n}{4+3^n} & \text{b) } \lim \frac{4 \cdot 3^n + 7^{n+1}}{2 \cdot 5^n + 7^n} & \text{c) } \lim \frac{4^{n+1} + 6^{n+2}}{5^n + 8^n} \end{array}$$

 **Ví dụ 3.** Tính các giới hạn sau

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim \frac{2n-1}{\sqrt{4n^2+1}+3n} & \text{b) } \lim \frac{\sqrt{4n^2+3n-1}}{\sqrt{3n^2+1}-\sqrt{2n+1}} & \text{c) } \lim \frac{\sqrt{4n^4+1}}{\sqrt{n^4+4n+1}+n^2} \\ \text{d) } \lim \frac{\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{3n^2+1}+n} & \text{e) } \lim \frac{\sqrt[3]{8n^3+n^2-1}+n-4}{2n-3} & \text{f) } \lim \frac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}+n^2} \end{array}$$

 **Ví dụ 4.** Tìm các giới hạn sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim \frac{1+2+\dots+n}{n^2} & \text{b) } \lim \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \right] \\ \text{c) } \lim \left(\frac{2+4+8+\dots+2^n}{3 \cdot 2^n - 1} \right) & \text{d) } \lim \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} \dots \frac{1}{n(n+1)} \right) \end{array}$$

 **Ví dụ 5.** Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 10$ và $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3$, với mọi $n \geq 1$.

- a) Chứng minh dãy (v_n) xác định bởi $v_n = u_n - \frac{15}{4}$ là một cấp số nhân.
b) Tính $\lim u_n$.

 **Ví dụ 6.** Cho dãy số u_n thỏa $\begin{cases} u_1 = 3, u_2 = 6 \\ 2u_n = u_{n-1} + u_{n+1} - 2; \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$. Biết rằng u_n có duy nhất một công thức, hãy tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2-\sqrt{u_n}}{n+1-\sqrt{u_n+3n-2}}$.

DẠNG 2. Khử vô định dạng $\infty - \infty$

Phương pháp giải.

 Thường phát biểu dưới dạng: $\lim (\sqrt{u_n} - v_n)$ hoặc $\lim (\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})$.

 Phương pháp giải:

- Nhân thêm lượng liên hợp bậc hai cho cả tử và mẫu:

$$\triangleright \lim (\sqrt{u_n} - v_n) = \lim \frac{(\sqrt{u_n} - v_n)(\sqrt{u_n} + v_n)}{\sqrt{u_n} + v_n} = \lim \frac{u_n - v_n^2}{\sqrt{u_n} + v_n}$$

$$\triangleright \lim (\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}) = \lim \frac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n})}{\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n}} = \lim \frac{u_n - v_n}{\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n}}$$

- Biến đổi biểu thức cần tính giới hạn về Dạng 1 (phân thức, đặt n^k)

✍ Đôi khi, ta còn sử dụng liên hợp bậc ba để giải các bài toán chứa ẩn trong dấu căn bậc ba:
 $A^3 \pm B^3 = (A \pm B)(A^2 \mp AB + B^2)$.

 **Ví dụ 7.** Tính các giới hạn sau

a) $\lim (\sqrt{n^2 + 2n} - n)$ b) $\lim (2n - \sqrt{4n^2 + n})$ c) $\lim (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 2})$
d) $\lim n (\sqrt{n^2 + 2} - n)$ e) $\lim (\sqrt{n^2 + 2n} - n - 1)$ f) $\lim \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 + 4}}$.

 **Ví dụ 8.** Tính các giới hạn sau

a) $\lim (\sqrt[3]{n^3 + 2} - n)$ b) $\lim (\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt{n^2 + 1})$ c) $\lim (\sqrt[3]{n^3 + 2} - \sqrt{n^2 + n})$

DẠNG 3. Một số quy tắc tính giới hạn vô cực

Phương pháp giải.

 **Ví dụ 9.** Tính các giới hạn sau:

a) $\lim (2n^3 + 2n - 1)$ b) $\lim (n - 2n^3)$ c) $\lim \sqrt{n^2 + 2n + 7}$
d) $\lim (\sqrt{n^2 - 3n} - \sqrt{n + 2})$ e) $\lim (1 - \sqrt{1 + 3n^2})$ f) $\lim (3^n - 2.5^n)$

 **Ví dụ 10.** Tính các giới hạn sau

a) $\lim \frac{2^n + 5^{n+1}}{1 + 5^n}$ b) $\lim \frac{1 + 2.3^n - 7^n}{5^n - 2.6^n}$ c) $\lim \frac{1 - 2.3^n + 7^n}{2^n(3^{n+1} - 5)}$

 **Ví dụ 11.** Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{2n^4 + n^2 - 3}{3n^3 - 2n^2 + 1}$ b) $\lim \frac{2n^3 + n + 4}{5n - n^2}$ c) $\lim \frac{(3n - 1)(n - 2)}{2n - 1}$
d) $\lim \frac{2n + 5}{\sqrt{n^2 + 1} - n}$ e) $\lim \frac{2n + 5}{\sqrt{n + 1} - \sqrt{n}}$ f) $\lim \frac{(3n - 1)^4(n - 2)}{(1 - 2n)^2}$

DẠNG 4. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Phương pháp giải.

 **Ví dụ 12.** Tính các tổng sau:

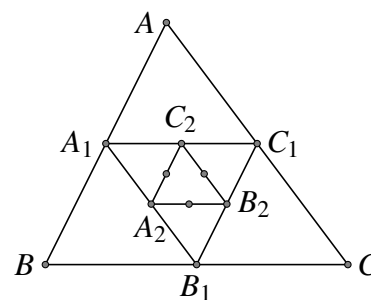
a) $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$ b) $S = 16 - 8 + 4 - 2 + \dots$

Ví dụ 13. Hãy biểu diễn các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số.

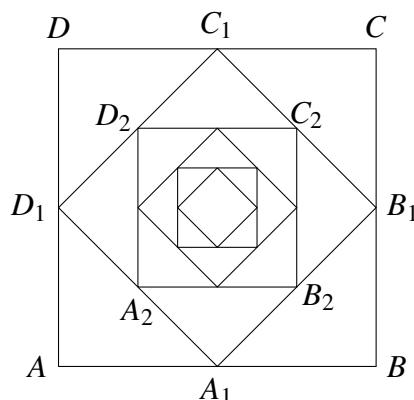
a) $A = 0,353535\dots$

b) $B = 5,231231\dots$

Ví dụ 14. Tam giác mà ba đỉnh của nó là ba trung điểm ba cạnh của tam giác ABC được gọi là *tam giác trung bình* của tam giác ABC . Ta xây dựng dãy các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \dots$ sao cho $A_1B_1C_1$ là một tam giác giác đều cạnh bằng 3 và với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$, tam giác $A_nB_nC_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Với mỗi số nguyên dương n , kí hiệu S_n tương ứng là diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$. Tính tổng $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$.



Ví dụ 15. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2. Hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có các đỉnh là trung điểm của các cạnh của hình vuông $ABCD$, hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ có các đỉnh là trung điểm của các cạnh của hình vuông $A_1B_1C_1D_1$, hình vuông $A_3B_3C_3D_3$ có các đỉnh là trung điểm của các cạnh của hình vuông $A_2B_2C_2D_2$,..., hình vuông $A_nB_nC_nD_n$ có các đỉnh là trung điểm của các cạnh của hình vuông $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}$,... (quá trình chia nhỏ này được lặp lại vô hạn)



Gọi $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ lần lượt là diện tích hình vuông $A_1B_1C_1D_1, A_2B_2C_2D_2, A_3B_3C_3D_3, \dots, A_nB_nC_nD_n, \dots$. Tính tổng $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n + \dots$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{2n+3}$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2-1}{2n^2+n}$.

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+2n}-3}{n+2}$.

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+2n}-n-1}{\sqrt{n^2+n}+n}$.

Bài 2. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 \cdot 5^n - 2 \cdot 7^n}{5^n - 5 \cdot 7^n}$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} + 6^{n+2}}{5^n + 8^n}$.

Bài 3. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+2n}-n)$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^3+2n}-n^2)$.

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+3n+2}-n+1)$.

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+2n+3}-1+n)$.

❖ **Bài 4.** Tính các giới hạn sau

a) $\lim \frac{\sin 10n + \cos 10n}{n^2 + 1}.$

b) $\lim \frac{1 - \sin n\pi}{n + 1}.$

❖ **Bài 5.** Tính giới hạn $\lim(\sqrt[3]{n^3 - 3} - \sqrt{n^2 + n - 2}).$

❖ **Bài 6.** Tính giới hạn của $B = \lim \frac{\sqrt{1 + 2 + \dots + n} - n}{\sqrt[3]{1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + 2n}}.$

❖ **Bài 7.** Tính các giới hạn sau

a) $A = \lim \left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right].$

b) $B = \lim \left[\frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} \right].$

❖ **Bài 8.** Tính $\lim \frac{1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 + \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{5}\right)^n}.$

❖ **Bài 9.** Tính $\lim \frac{1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n}{2 \cdot 3^{n+1} + 2^n}.$

❖ **Bài 10.** Tìm $\lim u_n$ biết $u_n = \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}.$

❖ **Bài 11.** Tính giới hạn $\lim \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n + 1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n}} \right).$

❖ **Bài 12.** Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = \frac{2}{3} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2(2n+1)u_n + 1}, \forall n \geq 1 \end{cases}$ Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy. Tính $\lim u_n$.

❖ **Bài 13.** Cho dãy số (u_n) xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2} - 1, \forall n \geq 1 \end{cases}$. Tìm $\lim u_n$.

❖ **Bài 14.** Cho dãy số (u_n) xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n, \forall n \geq 1 \end{cases}$. Tìm $\lim \frac{u_n}{u_{n+1}}.$

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Giá trị của giới hạn $\lim \left(4 + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)$ bằng

- A. 1. B. 3. C. 4. D. 2.

Câu 2. Giá trị của giới hạn $\lim \frac{-3}{4n^2 - 2n + 1}$ là

- A. $-\frac{3}{4}$. B. $-\infty$. C. 0. D. -1 .

Câu 3. Giá trị của giới hạn $\lim \frac{n+2n^2}{n^3+3n-1}$ bằng

- A. 2. B. 1. C. $\frac{2}{3}$. D. 0.

Câu 4. Giá trị của giới hạn $\lim \frac{3n^3 - 2n + 1}{4n^4 + 2n + 1}$ là

- A. $+\infty$. B. 0. C. $\frac{2}{7}$. D. $\frac{3}{4}$.

Câu 5. Tính giới hạn $L = \lim \frac{n^2 + n + 5}{2n^2 + 1}$.

- A. $L = \frac{3}{2}$. B. $L = \frac{1}{2}$. C. $L = 2$. D. $L = 1$.

Câu 6. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{4n^2 + n + 2}{an^2 + 5}$. Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 2, giá trị của a là

- A. $a = -4$. B. $a = 4$. C. $a = 3$. D. $a = 2$.

Câu 7. Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

- A. $\lim \frac{3+2n^3}{2n^2-1}$. B. $\lim \frac{2n^2-3}{-2n^3-4}$. C. $\lim \frac{2n-3n^3}{-2n^2-1}$. D. $\lim \frac{2n^2-3n^4}{-2n^4+n^2}$.

Câu 8. Dãy số nào sau đây có giới hạn là $+\infty$?

- A. $u_n = \frac{1+n^2}{5n+5}$. B. $u_n = \frac{n^2-2}{5n+5n^3}$. C. $u_n = \frac{n^2-2n}{5n+5n^2}$. D. $\frac{1+2n}{5n+5n^2}$.

Câu 9. Dãy số nào sau đây có giới hạn là $-\infty$?

- A. $\frac{1+2n}{5n+5n^2}$. B. $u_n = \frac{n^3+2n-1}{-n+2n^3}$. C. $u_n = \frac{2n^2-3n^4}{n^2+2n^3}$. D. $u_n = \frac{n^2-2n}{5n+1}$.

Câu 10. Giá trị của giới hạn $\lim \frac{\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + \dots + \frac{n}{2}}{n^2 + 1}$ bằng

- A. $\frac{1}{8}$. B. 1. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 11. Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn bằng 2, tổng của ba số hạng đầu tiên của cấp số nhân bằng $\frac{9}{4}$. Số hạng đầu u_1 của cấp số nhân đó là

- A. $u_1 = 3$. B. $u_1 = 4$. C. $u_1 = \frac{9}{2}$. D. $u_1 = 5$.

Câu 12. Tính tổng $S = 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^{n-3}} + \dots$.

- A. $S = \frac{27}{2}$. B. $S = 14$. C. $S = 16$. D. $S = 15$.

Câu 13. Giá trị của giới hạn $\lim (\sqrt{n+5} - \sqrt{n+1})$ bằng

- A. 0. B. 1. C. 3. D. 5.

- Câu 14.** Giá trị của giới hạn $\lim \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$ bằng
- A. 0. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. 1.
- Câu 15.** Giá trị của giới hạn $\lim \left(\frac{1+3+5+\dots+(2n+1)}{3n^2+4} \right)$ bằng
- A. 0. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. 1.
- Câu 16.** Giá trị của giới hạn $\lim \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$ là
- A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. 0. D. $-\infty$.
- Câu 17.** Tính tổng $S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots + \frac{2^n}{3^n} + \dots$.
- A. $S = 3$. B. $S = 4$. C. $S = 5$. D. $S = 6$.
- Câu 18.** Giá trị của giới hạn $\lim (\sqrt{n^2 - n + 1} - n)$ là
- A. $-\frac{1}{2}$. B. 0. C. 1. D. $-\infty$.
- Câu 19.** Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,5111\dots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính tổng $T = a + b$.
- A. 17. B. 68. C. 133. D. 137.
- Câu 20.** Số thập phân vô hạn tuần hoàn $A = 0,353535\dots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính $T = ab$.
- A. 3456. B. 3465. C. 3645. D. 3546.
- Câu 21.** Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $u_n = \frac{1}{n+1}$ và $v_n = \frac{2}{n+2}$. Khi đó $\lim \frac{v_n}{u_n}$ có giá trị bằng
- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.
- Câu 22.** Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{an+4}{5n+3}$ trong đó a là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn bằng 2, giá trị của a là
- A. $a = 10$. B. $a = 8$. C. $a = 6$. D. $a = 4$.
- Câu 23.** Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n+b}{5n+3}$ trong đó b là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn, giá trị của b là
- A. b là một số thực tùy ý. B. $b = 2$.
C. không tồn tại b . D. $b = 5$.
- Câu 24.** Tìm tất cả các giá trị của tham số a để $L = \lim \frac{5n^2 - 3an^4}{(1-a)n^4 + 2n + 1} > 0$.
- A. $a \leq 0; a \geq 1$. B. $0 < a < 1$. C. $a < 0; a > 1$. D. $0 \leq a < 1$.
- Câu 25.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(-10; 10)$ để $L = \lim (5n - 3(a^2 - 2)n^3) = -\infty$?
- A. 19. B. 3. C. 5. D. 10.
- Câu 26.** Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 + \dots + (\sqrt{2})^n$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. $\lim u_n = -\infty$. B. $\lim u_n = \frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$.
C. $\lim u_n = +\infty$. D. Không tồn tại $\lim u_n$.

Câu 27. Cho dãy số có giới hạn (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_n = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}, n \geq 1 \end{cases}$. Tính $\lim u_n$.

A. $\lim u_n = -1$. B. $\lim u_n = 0$. C. $\lim u_n = \frac{1}{2}$. D. $\lim u_n = 1$.

Câu 28. Cho dãy số có giới hạn (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}, n \geq 1 \end{cases}$. Tính $\lim u_n$.

A. $\lim u_n = 1$. B. $\lim u_n = 0$. C. $\lim u_n = 2$. D. $\lim u_n = +\infty$.

Câu 29. Biết rằng $\lim \frac{\sqrt[3]{an^3 + 5n^2 - 7}}{\sqrt{3n^2 - n + 2}} = b\sqrt{3} + c$ với a, b, c là các tham số. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{a+c}{b^3}$.

A. $P = 3$. B. $P = \frac{1}{3}$. C. $P = 2$. D. $P = \frac{1}{2}$.

Câu 30. Có bao nhiêu giá trị của a để $\lim (\sqrt{n^2 + a^2n} - \sqrt{n^2 + (a+2)n + 1}) = 0$?

A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 31. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n^2 + an + 5} - \sqrt{n^2 + 1}$, trong đó a là tham số thực. Tìm a để $\lim u_n = -1$.

A. 3. B. 2. C. -2. D. -3.

Câu 32. Biết rằng $\lim \left(\frac{(\sqrt{5})^n - 2^{n+1} + 1}{5 \cdot 2^n + (\sqrt{5})^{n+1} - 3} + \frac{2n^2 + 3}{n^2 - 1} \right) = \frac{a\sqrt{5}}{b} + c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $S = a^2 + b^2 + c^2$.

A. $S = 26$. B. $S = 30$. C. $S = 21$. D. $S = 31$.

Câu 33. Tìm tất cả giá trị nguyên của a thuộc $(0; 2018)$ để $\lim \sqrt[4]{\frac{4^n + 2^{n+1}}{3^n + 4^{n+a}}} \leq \frac{1}{1024}$.

A. 2007. B. 2008. C. 2017. D. 2016.

Câu 34. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thuộc $(0; 20)$ sao cho $\lim \sqrt{3 + \frac{an^2 - 1}{3 + n^2} - \frac{1}{2^n}}$ là một số nguyên?

A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 35. Giá trị của giới hạn $\lim \frac{1 + a + a^2 + \dots + a^n}{1 + b + b^2 + \dots + b^n} (|a| < 1, |b| < 1)$ bằng

A. 0. B. $\frac{1-b}{1-a}$. C. $\frac{1-a}{1-b}$. D. Không tồn tại.

—HẾT—

§ 2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm

Định nghĩa: Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$. Kí hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ hay } f(x) \rightarrow L \text{ khi } x \rightarrow x_0$$

Nhận xét: $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ với c là hằng số.

Định lí về giới hạn hữu hạn:

(a) Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$. Khi đó:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M;$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M;$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M;$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \text{ (nếu } M \neq 0 \text{)}.$$

(b) Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, thì $L \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

Giới hạn một bên:

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(x_0; b)$. Số L được gọi là giới hạn bên phải của hàm số $y = f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$. Kí hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L.$$

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; x_0)$. Số L được gọi là giới hạn bên trái của hàm số $y = f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$. Kí hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L.$$

Điều kiện để tồn tại giới hạn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

2 Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực

Định nghĩa:

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; +\infty)$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$. Kí hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L.$$

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(-\infty; a)$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \rightarrow -\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \rightarrow -\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$. Kí hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L.$$

 Chú ý:

- Với c, k là hằng số và k nguyên dương, ta luôn có:

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} c = c$	② $\lim_{x \rightarrow -\infty} c = c$
③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{x^k} = 0$	④ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{c}{x^k} = 0.$

- Định lí về giới hạn hữu hạn của hàm số khi $x \rightarrow x_0$ vẫn còn đúng khi $x \rightarrow +\infty$ hoặc $x \rightarrow -\infty$.

3 Giới hạn vô cực của hàm số

 Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; +\infty)$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là $-\infty$ khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow -\infty$. Kí hiệu:
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$

 Nhận xét $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (-f(x)) = -\infty.$

 Một vài giới hạn đặc biệt

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } k \text{ chẵn} \\ -\infty & \text{nếu } k \text{ lẻ} \end{cases}.$

 Một vài quy tắc về giới hạn vô cực

- Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x) \cdot g(x)$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$L > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$-\infty$	$+\infty$

- Quy tắc tìm giới hạn của thương $\frac{f(x)}{g(x)}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	+	$+\infty$
$L > 0$	0	-	$-\infty$
$L < 0$	0	+	$-\infty$
$L < 0$	0	-	$+\infty$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DẠNG 1. Giới hạn của hàm số khi $x \rightarrow x_0$. Khử dạng vô định $\frac{0}{0}$

Phương pháp giải.

 Thường gặp dạng $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

 Phương pháp giải: Thay x_0 vào $\frac{f(x)}{g(x)}$ để kiểm tra, sẽ có một trong các trường hợp:

① Tử số $f(x_0) = a$ và mẫu số $g(x_0) = b \neq 0$, ta suy ra luôn kết quả

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{a}{b}.$$

② Cả tử số và mẫu số đều bằng 0 hay $f(x_0) = g(x_0) = 0$, ta xem đây là dạng vô định $\frac{0}{0}$.

Khử dạng vô định này bằng cách phân tích nhân tử $(x - x_0)$.

Giả sử $f(x) = (x - x_0) \cdot f_1(x)$ và $g(x) = (x - x_0) \cdot g_1(x)$. Khi đó:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)f_1(x)}{(x - x_0)g_1(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \quad (1)$$

Ta tiếp tục tính giới hạn (1).

③ Tử số $f(x_0) \neq 0$ và mẫu số $g(x_0) = 0$. Ta áp dụng các định lý liên quan đến giới hạn vô cực để tìm kết quả.

 Một số cách phân tích nhân tử thường dùng:

- Nếu $f(x) = ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Nếu $f(x)$ là một đa thức bậc ba, bậc bốn,...ta có thể dùng phương pháp chia đa thức.
- Nếu $f(x)$ là biểu thức chứa căn, ta dùng cách nhân lượng liên hợp.

 Ví dụ 1. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x}{4}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} + 1}{x^2 + 2}.$

 Ví dụ 2. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 4x}.$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{1 - 2x}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 + x - 6}.$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{(x - 1)^3}.$

 Ví dụ 3. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \frac{x^3 + 3\sqrt{3}}{3 - x^2}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 + 5x^2 - 7x + 2}{x^2 - 3x + 2}.$

 **Ví dụ 4.** Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{3x^2 - 5x + 2}.$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + 3x + 5}{x^3 + 3x^2 + x - 1}.$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x^3 - x + 1}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x^3 - x - 6}.$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 - 3x - 7}{x^3 + 1}.$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^5 - 5x^4 + 1}{(x-1)(x^3 + x - 2)}.$

 **Ví dụ 5.** Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{2x - 2}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 3x - 1} - 3}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{4x+1}}{x^2 + 3x}.$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{\sqrt{x+5} - 2}.$

 **Ví dụ 6.** Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{2x + \sqrt{3x^2 + 1}}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{12x+1}}{4x}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x - 5\sqrt{x-1}}{3 - \sqrt{x+4}}.$

d) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{2x+9} - x - 5}{\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+3}}.$

 **Ví dụ 7.** Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2} - 2x}{x-2}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt[3]{x+8}}{x}.$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} \cdot \sqrt[3]{1+2x} - 1}{x}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{x+8} + x^2 - 4x + 4}{x-1}.$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x^3} - \sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}.$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{6+2x} - \sqrt{1+3x}}.$

 **DẠNG 2. Giới hạn của hàm số khi $x \rightarrow \pm\infty$. Khử dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}; \infty - \infty; 0 \cdot \infty$**

Phương pháp giải.

 **Ví dụ 8.** Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x - 2}{3x + 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 + 5x^2 + 7}{x^3 - 15x}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x^3 + 3}{2x^6 - 7}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x + 10}{x^3 + 3x - 3}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 5x^2 + 1}{7x^2 - x + 4}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^2(2x+1)^2}{(2x^3+1)(x-2)^3}$

 **Ví dụ 9.** Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x} + 2x}{2x + 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 7x + 1}}{3|x| - 7}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2 + 2x}{8x^2 - x + 5}}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 2}}{\sqrt[3]{8x^3 + x^2 + 1}}$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 - x}}{1 - 3x}$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^6 - 8x}}{x^4 + 2x^2 + 2}$

 **Ví dụ 10.** Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 2x})$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} + x).$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}).$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x + 1)$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 1})}.$

 **Ví dụ 11.** Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x} - x)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x} - \sqrt{x^2 + x})$

 **Ví dụ 12.** Tính giới hạn của các hàm số sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^5 - x^4 + 4x^3 - 3);$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^5 - x^4 + 4x^3 - 3);$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 - x^2 + 4x + 2);$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 - x^2 + 4x + 2);$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x)$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - \sqrt{x^2 + x})$

 **Ví dụ 13.** Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\frac{1}{x^2 - 4} - \frac{1}{x + 2} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2) \sqrt{\frac{x - 1}{x^3 + x}}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{1 - x^2} - \frac{1}{1 - x} \right)$

DẠNG 3. Giới hạn một bên. Sự tồn tại giới hạn

Phương pháp giải.

- Phương pháp tính $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ hoàn toàn tương tự như bài toán tính $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$.

 **Ví dụ 14.** Tính giới hạn của các hàm số sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2 - 2x + 6};$

b) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-x^2 + 5}{x - 3};$

c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x^2 + \sqrt{3-x}}{x-3};$

d) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{|x^2 - 4|}{x + 2}.$

 **Ví dụ 15.**

1. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, biết $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & \text{khi } x < 1 \\ x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}.$

2. Tính $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, biết $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x - 2} & \text{khi } x > 2 \\ \frac{x - 1}{6} & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}.$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

 **Bài 1.** Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 - x - 5}{7x^2 + 5x - 2}.$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4 - x^2}{x + 2}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3}.$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 4}.$

 **Bài 2.** Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 3x + 2}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 2x^2 + 1}.$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 1}{x^3 + 1}.$

d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^4 - 8x^2 - 9}.$

 **Bài 3.** Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1}{2x}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{x^2 - 4}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{2x^3 - 3x^2}.$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7} - x - 2}{x^3 - 4x + 3}.$

e) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 8x - 9}{\sqrt{4-3x^2} - 2x - 3}.$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x^2+8} - 5}{x^2 - 3x + 2}.$

g) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x - \sqrt{x+2} - \sqrt{5x+26}}{x-2}.$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} \cdot \sqrt{1+6x} - 1}{x}.$

 **Bài 4.** Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{x+1}}{3x}.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{1-x+x^2}}{x^2-1}.$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2} + x - 4}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x^3} - \sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}.$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{8x+11} - \sqrt{x+7}}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} \cdot \sqrt[3]{1+4x} - 1}{x}.$$

❖ **Bài 5.** Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - x + 7}{2x^3 - 1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + 7x^2 - 15}{x^4 + 1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^6+2}}{3x^3-1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^6+2}}{3x^3-1}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2+2x}{8x^2-x+3}}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x^2-x+2}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-5}{x^2+1}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{2x^5+x^3-1}{(2x^2-1)(x^3+x)}}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2|x|+3}{\sqrt{x^2+x+5}}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+2x}}{2x+3}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \sqrt{\frac{x}{2x^4+x^2+1}}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4+4}}{x+4}$$

❖ **Bài 6.** Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 4x + 1}{x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2+2}}{\sqrt[3]{8x^3+x^2+1}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+3x}}{\sqrt{4x^2+1}-x+2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2+2} - \sqrt[3]{6x^2+5}}{\sqrt[4]{16x^4+3} - \sqrt[5]{8x^4+7}}$$

❖ **Bài 7.** Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-1+\sqrt{5-2x}}{x^2+x-2};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{2-x} - \sqrt[3]{9-x}}{1-x};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{7+6x} - \sqrt{5+4x}}{(x+1)^2};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2017x} \cdot \sqrt[3]{1+2018x} - 1}{x}.$$

❖ **Bài 8.** Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^3 - \sqrt{x^2+2});$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt[3]{2x^6+x^4-1}}{x^2 + \sqrt{x}};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{2x^6+x^4-1}}{1-x^2};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{16x^8+3}-x^2}{x(x+2)(x+4)(x+6)}.$$

❖ **Bài 9.** Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+2x-1} - x - 1);$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-2x-1} + x - 1);$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2-x} - \sqrt[3]{8x^3+3x^2});$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2017}{1-x^{2017}} - \frac{2018}{1-x^{2018}} \right).$$

❖ **Bài 10.** Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-6x^4 + 2x^3 - x + 5);$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 3} + 2x);$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - 3} - 2x);$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt[3]{x^3 - 1}).$

❖ **Bài 11.** Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt{-4 - 4x} + 3x^2}{x + 1};$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x + 1}{2 - x};$

c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - 5x + 2}{(x - 2)^2};$

d) $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{\sqrt{x + 7} - 2}{|x^2 - 9|}.$

❖ **Bài 12.** Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x - 3)^{20}(3x + 2)^{30}}{(2x + 1)^{50}};$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}}.$

❖ **Bài 13.** Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^5 + x^4 - 4x^2 + 1}{x^3 - 1};$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^4 + 9x^3 + 11x^2 - 4}{(x + 2)^2};$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{11} + 1}{x^7 + 1};$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^{2018} - 2018}{x^2 - 1}.$

❖ **Bài 14.** Tìm các giá trị của a, b sao cho $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - ax - b) = 0.$

❖ **Bài 15.** Tính giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^n - 1}{x}$ với n là số nguyên dương.

❖ **Bài 16.** Tính $L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{C_{2018}^0 + C_{2018}^2 x^2 + C_{2018}^4 x^4 + \dots + C_{2018}^{2018} x^{2018} - 2^{2017}}{x - 1}$

❖ **Bài 17.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 + 3ax - 4a}{x - 1} & \text{khi } x < 1 \\ 2bx + 1 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Biết rằng a, b là các số thực thỏa mãn hàm số $f(x)$ có giới hạn tại $x = 1$.

a) Tìm mối quan hệ giữa a và b .

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2$.

D **BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

Câu 1. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + 7x + 11)$ là

- A. 37. B. 38. C. 39. D. 40.

Câu 2. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3}{x^3 + 2}$ là

- A. 1. B. -2. C. 2. D. $-\frac{3}{2}$.

Câu 3. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3x^2 + 1} - x}{x - 1}$ là

- A. $-\frac{3}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $-\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 4. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-15}{x-2}$ là

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. $-\frac{15}{2}$. D. 1.

Câu 5. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$ là

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. $-\frac{15}{2}$. D. Không xác định.

Câu 6. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$ là

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. $-\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{1-x}} & \text{với } x < 1 \\ \sqrt{3x^2+1} & \text{với } x \geq 1 \end{cases}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ là

- A. $+\infty$. B. 2. C. 4. D. $-\infty$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{1-x} & \text{với } x < 1 \\ \sqrt{2x-2} & \text{với } x \geq 1 \end{cases}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ là

- A. $+\infty$. B. -1. C. 0. D. 1.

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2-2x+3 & \text{với } x > 3 \\ 1 & \text{với } x = 3 \\ 3-2x^2 & \text{với } x < 3 \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

- A. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 6$. B. Không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.
C. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 6$. D. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -15$.

Câu 10. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-x^3+1)$ là

- A. 1. B. $-\infty$. C. 0. D. $+\infty$.

Câu 11. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (|x|^3+2x^2+3|x|)$ là

- A. 0. B. $+\infty$. C. 1. D. $-\infty$.

Câu 12. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x^2-4}$ là

- A. 0. B. $+\infty$. C. 3. D. Không xác định.

Câu 13. Biết rằng $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \frac{2x^3+6\sqrt{3}}{3-x^2} = a\sqrt{3}+b$. Tính a^2+b^2 .

- A. 10. B. 25. C. 5. D. 13.

Câu 14. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}}{x^2}$ là

- A. 0. B. $-\infty$. C. 1. D. $+\infty$.

Câu 15. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+5x-3}{x^2+6x+3}$ là

- A. -2. B. $+\infty$. C. 3. D. 2.

Câu 16. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3-7x^2+11}{3x^6+2x^5-5}$ là

- A. -2. B. $+\infty$. C. 0. D. $-\infty$.

Câu 17. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3-x^2)$ là

- A. 1. B. $+\infty$. C. -1. D. $-\infty$.

Câu 18. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+2x^2} - x)$ là

- A. 0. B. $+\infty$. C. $\sqrt{2} - 1$. D. $-\infty$.

Câu 19. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right)$ là

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 0. D. 1.

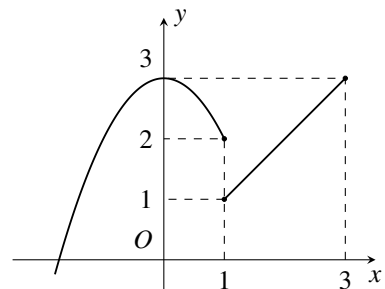
Câu 20. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right]$ là

- A. $+\infty$. B. -1 . C. 0. D. $+\infty$.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Tính $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$.

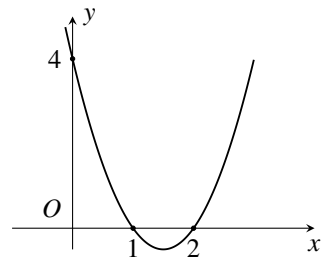
- A. 5. B. 4.
C. 2. D. 0.



Câu 22. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên.

Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{3x^2 + 1}$.

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{2}{3}$.
C. 2. D. 1.



Câu 23. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1}$. Biết rằng $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0$. Tính $m + n$.

- A. $m + n = 0$. B. $m + n = 1$. C. $m + n = -1$. D. $m + n = 3$.

Câu 24. Biết rằng $b > 0$, $a + b = 5$ và $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{ax+1} - \sqrt{1-bx}}{x} = 2$. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

- A. $1 < a < 3$. B. $b > 1$. C. $a^2 + b^2 > 10$. D. $a - b < 0$.

Câu 25. Biết rằng $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 1} + 2 - x}{\sqrt{ax^2 - 3x + bx}} > 0$ là hữu hạn (với a, b là tham số). Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $a \geq 0$. B. $L = -\frac{3}{a+b}$. C. $L = \frac{3}{b-\sqrt{a}}$. D. $b > 0$.

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị của a để $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 + 1} + ax)$ là $+\infty$.

- A. $a > \sqrt{2}$. B. $a < \sqrt{2}$. C. $a > 2$. D. $a < 2$.

Câu 27. Biết rằng $a + b = 4$ và $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{a}{1-x} - \frac{b}{1-x^3} \right)$ hữu hạn. Tính giới hạn

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{b}{1-x^3} - \frac{a}{1-x} \right).$$

- A. 1. B. 2. C. 1. D. -2 .

Câu 28. Biết rằng $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{5x^2 + 2x} + x\sqrt{5}) = a\sqrt{5} + b$. Tính $S = 5a + b$.

- A. $S = 1$. B. $S = -1$. C. $S = 5$. D. $S = -5$.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là các tam thức bậc hai thỏa mãn

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{[f(x)]^2 - 2f(x) - 3}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{[g(x)]^2 - 2g(x) - 3}{(x-2)^2} = -4.$$

Tính $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) \cdot g(x)]$

A. 16.

B. -3.

C. -16.

D. 3.

Câu 30. Biết rằng $\frac{(2-a)x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$ có giới hạn là $+\infty$ khi $x \rightarrow +\infty$ (với a là tham số). Tính giá trị nhỏ nhất của $P = a^2 - 2a + 4$.

A. $P_{\min} = 1$.

B. $P_{\min} = 3$.

C. $P_{\min} = 4$.

D. $P_{\min} = 5$.

—HẾT—

§ 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

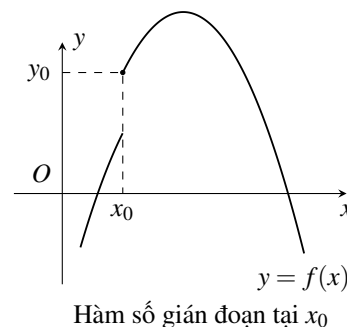
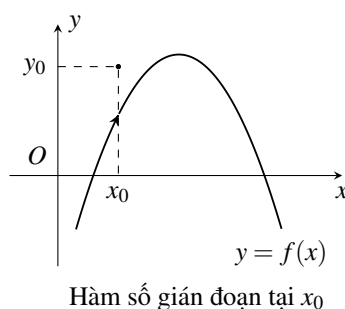
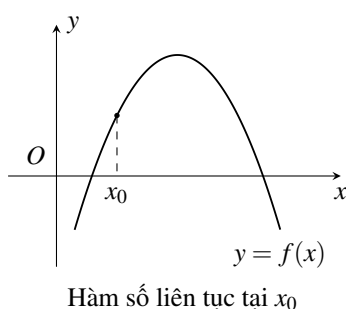
1 Hàm số liên tục tại một điểm

✎ **Định nghĩa:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục** tại x_0 nếu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

⚠ **Nếu** hàm số không liên tục tại x_0 thì ta nói hàm số đó **gián đoạn** tại x_0 .

✎ **Minh họa đồ thị:**



2 Hàm số liên tục trên một khoảng

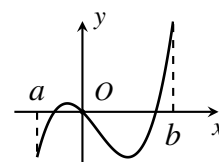
✎ **Định nghĩa:** Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục trên một khoảng** nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

✎ **Chú ý:**

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục trên đoạn** $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.
- Khái niệm hàm số **liên tục trên nửa khoảng** như $[a; b)$, $[a; +\infty)$, ... được định nghĩa một cách tương tự như liên tục trên đoạn.



Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một “đường liền” trên khoảng đó. Hình bên là đồ thị của một hàm số liên tục trên $(a; b)$.



3 Một số định lý cơ bản

Định lý 1.

- Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.
- Hàm số phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) và các hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng của tập xác định của chúng.

Định lí 2. Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0 . Khi đó

1. Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x) \cdot g(x)$ liên tục tại x_0 .
2. Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

Định lí 3. Sự tồn tại nghiệm của phương trình trên một khoảng

1. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$, thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.
2. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(a; b)$.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DẠNG 1. Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm

Phương pháp giải. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D . Để xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0 \in D$, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Tính $f(x_0)$.

Bước 2. Tìm $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Bước 3. So sánh và rút ra kết luận.

- Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ thì hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm x_0 .
- Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ thì hàm số $f(x)$ không liên tục (gián đoạn) tại điểm x_0 .

 **Ví dụ 1.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ -2 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$.

 **Ví dụ 2.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{2x - 3}}{2 - x} & \text{nếu } x \neq 2 \\ 1 & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$.

 **Ví dụ 3.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x + 5} - 3} & \text{nếu } x \neq 4 \\ -\frac{3}{2} & \text{nếu } x = 4 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 4$.

 **Ví dụ 4.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{nếu } x > 0 \\ x & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 0$.

 **Ví dụ 5.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x - 5}{\sqrt{2x - 1} - 3} & \text{nếu } x > 5 \\ (x - 5)^2 + 3 & \text{nếu } x \leq 5 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 5$.

DẠNG 2. Xét tính liên tục của hàm số trên miền xác định

Phương pháp giải.

1. Hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$.
2. Hàm phân thức hữu tỉ, hàm lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

 **Ví dụ 6.** Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ -3 & \text{khi } x = -1 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{2x + 1}{(x - 1)^2} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

 **Ví dụ 7.** Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & \text{khi } x \geq 2 \\ 6x + 1 & \text{khi } x < 2. \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 5 & \text{khi } x > 1 \\ 3 & \text{khi } x = 1 \\ 2x + 1 & \text{khi } x < 1. \end{cases}$$

DẠNG 3. Tìm giá trị của tham số để hàm số liên tục - gián đoạn

Phương pháp giải.

 **Ví dụ 8.** Tìm tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - m & \text{khi } x \neq 2 \\ x + m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 2$.

 **Ví dụ 9.** Tìm tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ m^2 + 5m & \text{khi } x = -1 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = -1$.

 **Ví dụ 10.** Tìm tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x + 5} - 3}{x^2 - 1} & \text{khi } x > 1 \\ 2m + 3 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ gián đoạn tại $x_0 = 1$.

 **Ví dụ 11.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax + \frac{1}{4} & \text{nếu } x \leq 2 \\ \frac{\sqrt[3]{3x + 2} - 2}{x - 2} & \text{nếu } x > 2 \end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x_0 = 2$.

DẠNG 4. Chứng minh phương trình có nghiệm

Phương pháp giải.

- Để chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên D , ta chứng minh hàm số $y = f(x)$ liên tục trên D và có hai số $a, b \in D$ sao cho $f(a) \cdot f(b) < 0$.
- Để chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có k nghiệm trên D , ta chứng minh hàm số $y = f(x)$ liên tục trên D và tồn tại k khoảng rời nhau $(a_i; a_{i+1})$ ($i = 1, 2, \dots, k$) nằm trong D sao cho $f(a_i) \cdot f(a_{i+1}) < 0$.

Ví dụ 12. Chứng minh rằng phương trình $2x^4 - 2x^3 - 3 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$.

Ví dụ 13. Chứng minh rằng phương trình $6x^3 + 3x^2 - 31x + 10 = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

Ví dụ 14. Chứng minh rằng phương trình $(m^2 + m + 4)x^{2017} - 2x + 1 = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm âm với mọi giá trị của tham số m .

Ví dụ 15. Chứng minh rằng phương trình $a \cos 2x + b \sin x + \cos x = 0$ luôn có nghiệm với mọi tham số a, b .

Ví dụ 16. Chứng minh phương trình $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$ có ít nhất một nghiệm với mọi số thực a, b, c .

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}{x^2 - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 2m + 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

 $m = -\frac{1}{2}$

Bài 2. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x - 1} & \text{khi } x < 1 \\ 2x + 2 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$.

 liên tục

Bài 3. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 - 3} - 1}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 2x - 2 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$.

 liên tục

Bài 4. Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 2} & \text{khi } x > 1 \\ \frac{\sqrt{x + 1} + 7}{3} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$.

 không liên tục

Bài 5. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2 - 7x + 5x^2 - x^3}{x^2 - 3x + 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$.

 liên tục

Bài 6. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 2}{-x - 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ x^2 + 2x & \text{khi } x = -1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = -1$.

 liên tục

Bài 7. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x + 5} - 3} & \text{khi } x > 4 \\ -4x + 46 & \text{khi } x \leq 4 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 4$.

 liên tục

❖ **Bài 8.** Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{2x^2 - x - 6} & \text{khi } x > 2 \\ mx + 10 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

Ⓐ $m = -\frac{29}{7}$

❖ **Bài 9.** Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ -5m + \frac{4-x}{x+2} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 0$.

Ⓐ $m = \frac{1}{5}$

❖ **Bài 10.** Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x-1} - 1}{x^2 + 2x - 3} & \text{khi } x > 1 \\ x + m & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Ⓐ $m = \frac{1}{5}$

❖ **Bài 11.** Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{6+x} - 2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 2x - m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

Ⓐ $m = \frac{47}{12}$

❖ **Bài 12.** Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{12x-4} - 2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ \sqrt{m^2x^2 + 8} + 2mx & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Ⓐ $m = -1$

❖ **Bài 13.** Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{3x-3+|x-1|\sqrt{5x^2+4}}{x^2-2x+1} & \text{khi } x < 1 \\ m^2 + \frac{1}{3}x - 3m & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Ⓐ $m = 1$ hoặc $m = 2$

❖ **Bài 14.** Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{7-3x}-4}{2-\sqrt{1-x}} & \text{khi } x > -3 \\ m^2 - 2mx - \frac{3}{2} & \text{khi } x \leq -3 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = -3$.

Ⓐ $m = -6$ hoặc $m = 0$

❖ **Bài 15.** Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x}{5-\sqrt{x^2+16}} & \text{khi } x > 3 \\ \frac{m}{3}(x+m+1) & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 3$.

Ⓐ $m = -5$ hoặc $m = 1$

❖ **Bài 16.** Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{3(x^2-4)}{\sqrt{x+2}-x} & \text{khi } x > 2 \\ \sqrt{m+2} + m - 10x & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

Ⓐ $m = 2$

❖ **Bài 17.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3 + 6x^2 + x + 3}{x+3} & \text{khi } x \neq -3 \\ 19 & \text{khi } x = -3 \end{cases}$ trên $\mathbb{R}$.

Ⓐ liên tục trên $\mathbb{R}$

⇨ **Bài 18.** Tìm a để $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - x - 3}{x^3 + x^2 + x + 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ a^3 & \text{khi } x = -1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

⇨ **Bài 19.** Chứng minh rằng phương trình $x^4 - x^3 - 2x^2 - 15x - 25 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm và ít nhất một nghiệm dương.

⇨ **Bài 20.** Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 4x^2 - 2 = 0$ có ba nghiệm trong khoảng $(-4; 1)$.

⇨ **Bài 21.** Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 5x^3 + 4x - 1 = 0$ có đúng năm nghiệm.

⇨ **Bài 22.** Chứng minh rằng phương trình $x + 1 + \cos x = 0$ có nghiệm.

⇨ **Bài 23.** Chứng minh rằng phương trình $(1 - m^2)x^5 - 3x - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm với mọi giá trị của m .

⇨ **Bài 24.** Chứng minh rằng phương trình $\frac{x^4 - x^2 + mx - 3m + 1}{x^2 - x - 2} = m$ có ít nhất 2 nghiệm với mọi $m > 1$.

⇨ **Bài 25.** Chứng minh rằng phương trình $\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} = m$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m .

⇨ **Bài 26.** Cho phương trình $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, biết $a \cdot f(c) < 0$. Chứng minh rằng phương trình $a(ax^2 + bx + c)^2 + b(ax^2 + bx + c) + c = x$ có nghiệm.

⇨ **Bài 27.** Chứng minh rằng phương trình $m(x - 2)^3(x - 3) + 2x - 5 = 0$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m .

⇨ **Bài 28.** Chứng minh phương trình $(1 - m)x^5 + 9mx^2 - 16x - m = 0$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt.

⇨ **Bài 29.** Cho ba số a, b, c thỏa mãn hệ thức $2a + 3b + 6c = 0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

⇨ **Bài 30.** Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$. Chứng minh phương trình có nghiệm $x_0 \in (3; 4)$. Không tính $f(\sqrt[5]{36})$ và $f(1 + \sqrt[5]{36})$, chứng minh rằng $x_0 > 1 + \sqrt[5]{36}$

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x^2}{x}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A. Hàm số $f(x)$ xác định với mọi $x \neq 0$.
- B. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- C. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.
- D. Vì $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ nên $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x + 4}$ với $x \neq -4$. Để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = -4$ thì ta cần bổ sung giá trị $f(-4)$ bằng bao nhiêu?

- A. 5.
- B. -5.
- C. 3.
- D. 0.

Câu 3. Hàm số nào dưới đây gián đoạn tại điểm $x = 1$?

- A. $y = \frac{x - 1}{x^2 + x + 1}$.
- B. $y = \frac{x^2 - x + 1}{x + 1}$.
- C. $y = (x - 1)(x^2 + x + 1)$.
- D. $y = \frac{x^2 + 2}{x - 1}$.

Câu 4. Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

- A. $a = -1$. B. $a = 2$. C. $a = 1$. D. $a = 0$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + 7 & \text{khi } x \neq -1 \\ 2x + m - 1 & \text{khi } x = -1 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại điểm $x_0 = -1$.

- A. $m = 10$. B. $m = 8$. C. $m = -10$. D. $m = 12$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ mx+1 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x = 2$.

- A. $m = \frac{15}{2}$. B. $m = \frac{11}{2}$. C. $m = \frac{17}{2}$. D. $m = \frac{13}{2}$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-x^2}{x-1} & \text{khi } x > 1 \\ n & \text{khi } x = 1 \\ mx+1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Biết hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$. Giá trị của m, n là

- A. $n = m = 1$. B. $n = 1, m = 0$. C. $n = -1, m = 0$. D. $n = 0, m = 1$.

Câu 8. Cho a, b là hai số thực sao cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+ax+b}{x-1} & , \text{ với } x \neq 1 \\ 2ax-1 & , \text{ với } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tính $a-b$.

- A. -5 . B. 7 . C. -1 . D. 0 .

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-16}{x-4} & \text{khi } x \neq 4 \\ ax-1 & \text{khi } x = 4 \end{cases}$. Tập hợp các giá trị của a để hàm số liên tục tại $x = 4$ là

- A. $\{8\}$. B. $\{0\}$. C. $\left\{-\frac{9}{4}\right\}$. D. $\left\{\frac{9}{4}\right\}$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x & \text{khi } |x| \leq 1 \\ x+1 & \text{khi } |x| > 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
B. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.
C. Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
D. Hàm số gián đoạn tại $x = \pm 1$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2+m & \text{khi } x \geq 2 \\ 3x-1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$ (m là tham số). Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho liên tục tại $x_0 = 2$.

- A. $m = 0$. B. $m = 1$. C. $m = 3$. D. $m = 2$.

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $m(x-1)^3(x-2) + 2x-3 = 0$ vô nghiệm.

- A. $m = 1$. B. $m = 0$.
C. $\forall m \in \mathbb{R}$. D. Không có giá trị m .

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x-2} & \text{với } x \neq 2 \\ 2m+1 & \text{với } x = 2 \end{cases}$. Với giá trị nào của m sau đây để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 2$.

- A. 2 . B. 0 . C. 1 . D. -1 .

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 - 5x + 3$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Hàm số đã cho gián đoạn tại $x_0 = \frac{1}{5}$.
- B. Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên khoảng $(0; +\infty)$.
- C. Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên khoảng $(-1; 1)$.
- D. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \\ 2x + 1 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng.

- A. Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 1$.
- B. Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x = 1$ vì không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.
- C. Hàm số $f(x)$ không xác định tại $x = 1$.
- D. Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x = 1$ vì $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 - (a-2)x - 2}{\sqrt{x+3} - 2} & \text{khi } x \neq 1 \\ 8 + a^2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Có bao nhiêu giá trị của tham số

a để hàm số liên tục tại $x = 1$.

- A. 2.
- B. 0.
- C. 1.
- D. 3.

Câu 17. Cho hàm số $f(x) = x^5 + x - 1$. Xét phương trình $f(x) = 0$ (1). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Phương trình (1) vô nghiệm.
- B. Phương trình (1) không có nghiệm trên khoảng $(-1; 1)$.
- C. Phương trình (1) có nghiệm trên khoảng $(0; 1)$.
- D. Phương trình (1) không có nghiệm trên khoảng $(0; 1)$.

Câu 18. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

- A. $m = -2$.
- B. $m = 2$.
- C. $m = -1$.
- D. $m = 1$.

Câu 19. Tìm P để hàm số $y = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \\ 6Px - 3 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

- A. $P = \frac{1}{3}$.
- B. $P = \frac{5}{6}$.
- C. $P = \frac{1}{6}$.
- D. $P = \frac{1}{2}$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 2a - \frac{5}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tìm giá trị thực của tham số a để hàm số

$f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

- A. $a = \frac{3}{4}$.
- B. $a = -\frac{3}{4}$.
- C. $a = \frac{4}{3}$.
- D. $a = -\frac{4}{3}$.

—HẾT—

§ 4. ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM CÁC CHỦ ĐỀ

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 1

1. C	2. C	3. D	4. B	5. B	6. D	7. B	8. A	9. C	10. D
11. A	12. A	13. A	14. C	15. B	16. B	17. A	18. A	19. B	20. B
21. A	22. A	23. A	24. C	25. B	26. C	27. D	28. A	29. B	30. B
31. C	32. B	33. A	34. B	35. B					

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 2

1. A	2. B	3. A	4. A	5. B	6. C	7. B	8. A	9. C	10. D
11. B	12. C	13. A	14. D	15. D	16. C	17. D	18. B	19. A	20. B
21. B	22. B	23. B	24. A	25. C	26. B	27. C	28. A	29. B	30. B

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 3

1. A	2. B	3. D	4. B	5. A	6. B	7. B	8. B	9. D	10. C
11. B	12. D	13. B	14. A	15. B	16. A	17. C	18. C	19. C	20. A