SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TỈNH NINH BÌNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THPT CẤP TỈNH

NĂM HỌC 2021 - 2022

MÔN: TOÁN

Ngày thi: 17/9/2021

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

Đề thi gồm 03 bài, trong 01 trang

Bài 1 (5,0 điểm).

Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = a, -1 < a \neq 3 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + 15}{2(x_n + 1)}, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*. \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 2 (5,0 điểm).

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ thoả mãn

$$f(2x + f(y) + xf(y)) = x + y + xy, \quad \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

Bài 3 (5,0 điểm).

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và đường trung tuyến AM của tam giác ABC cắt (O) tại D (D khác A). Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BD, DC, CA. Gọi S, T lần lượt là chân đường phân giác trong góc M của các tam giác EMG và FMH. Các đường thẳng AB và DC cắt nhau tại X, AC và BD cắt nhau tại Y.

a) Chứng minh rằng $MS \perp MT$.

b) Các đường thẳng MS và FH cắt nhau tại U, MT và EG cắt nhau tại V. Chứng minh rằng $UV \parallel XY$.

Bài 4 (5,0 điểm).

a) Cho số nguyên dương d, tìm số cặp (x, y) nguyên dương sao cho $\dfrac{xy}{x-y} = d$.

b) Với mỗi số nguyên dương $n > 1$, gọi $f(n)$ là số cặp (x, y) nguyên dương sao cho $\dfrac{xy}{x-y}$ là ước nguyên dương của n. Tìm tất cả các giá trị của n để $f(n) = 231$.

——HẾT——

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TỈNH NINH BÌNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THPT CẤP TỈNH

NĂM HỌC 2021 - 2022

MÔN: TOÁN

Ngày thi: 17/9/2021

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

Đề thi gồm 03 bài, trong 01 trang

Bài 5 (6,0 điểm).

Cho dãy các đa thức $(P_n(x))$ xác định bởi $P_1(x) = 3x$, $P_2(x) = 5x^2 + 2x + 2$ và

$$P_{n+2}(x) = 3xP_{n+1}(x) - \left(2x^2 - x - 1\right)P_n(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Tìm tất cả các giá trị n sao cho đa thức $P_n(x)$ chia hết cho đa thức $Q(x) = x^3 + x^2 + x$.

Bài 6 (7,0 điểm).

Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ có trực tâm H và đường cao AD. Gọi K là giao điểm của đoạn thẳng AD và đường tròn đường kính BC. Trên các đoạn CH, BH lần lượt lấy các các điểm R, S sao cho $BK = BR$ và $CK = CS$. Gọi X là giao điểm của BR và CS.

a) Chứng minh rằng $AX \perp RS$ và đường thẳng SR đi qua tâm vị tự ngoài của hai đường tròn tâm B, bán kính BK và tâm C, bán kính CK.

b) Gọi T là giao điểm của HX và BC. Chứng minh rằng bốn điểm S, D, T, R cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 7 (7,0 điểm).

Cho số nguyên dương $n \geq 3$. Gọi $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ và A_i với $1 \leq i \leq m$ là các tập con khác nhau và gồm ít nhất hai phần tử của S sao cho nếu

$$A_i \cap A_j \neq \varnothing, \quad A_j \cap A_k \neq \varnothing, \quad A_k \cap A_i \neq \varnothing$$

với i, j, k đôi một phân biệt, $1 \leq i, j, k \leq m$ thì $A_i \cap A_j \cap A_k \neq \varnothing$.

a) Khi $n = 5$, hãy chỉ ra có thể xây dựng $m = 15$ tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_{15}$ thoả mãn yêu cầu.

b) Tìm giá trị lớn nhất của m.

——HẾT——