

59

BÀI TẬP TÍCH PHÂN HÀM ẨN GIẢI CHI TIẾT

HOCHAMVN

LUYENTHITRACNGHIEMVN

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{2}{9}$; $f'(x) = 2x[f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ là

- Ⓐ. $-\frac{35}{36}$.
 Ⓑ. $-\frac{2}{3}$.
 Ⓒ. $-\frac{19}{36}$.
 Ⓓ. $-\frac{2}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Ta có: $f'(x) = 2x[f(x)]^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = 2x \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} dx = \int 2x dx \Leftrightarrow \frac{-1}{f(x)} = x^2 + C$
 $\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2 + C} \xrightarrow{f(2) = -\frac{2}{9}} C = \frac{1}{2}$. Vậy $f(x) = -\frac{1}{x^2 + \frac{1}{2}} \Rightarrow f(1) = -\frac{2}{3}$.

Cách 2:

$f'(x) = 2x[f(x)]^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = 2x \Rightarrow \int_1^2 \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} dx = \int_1^2 2x dx = 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} \Big|_1^2 = 3$
 $\Leftrightarrow f(1) = -\frac{2}{3}$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{3}$; $f'(x) = x[f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ là

- Ⓐ. $-\frac{11}{6}$.
 Ⓑ. $-\frac{2}{3}$.
 Ⓒ. $-\frac{2}{9}$.
 Ⓓ. $-\frac{7}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1 Ta có: $f'(x) = x[f(x)]^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = x \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} dx = \int x dx \Leftrightarrow \frac{-1}{f(x)} = \frac{x^2}{2} + C$
 $\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{\frac{x^2}{2} + C} \xrightarrow{f(2) = -\frac{1}{3}} C = 1$. Vậy $f(x) = -\frac{1}{x^2 + 1} \Rightarrow f(1) = -\frac{2}{3}$.

Cách 2:

$f'(x) = x[f(x)]^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = x \Rightarrow \int_1^2 \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} dx = \int_1^2 x dx = \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} \Big|_1^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow f(1) = -\frac{2}{3}$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{25}$; $f'(x) = 4x^3[f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ là

- Ⓐ. $-\frac{41}{400}$.

Lời giải

Chọn B

Ⓐ. $\frac{-1}{10}$.

Ⓑ. $\frac{-391}{400}$.

Ⓒ. $\frac{-1}{40}$.

Cách 1 Ta có: $f'(x) = 4x^3 [f(x)]^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = 4x^3 \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} dx = \int 4x^3 dx \Leftrightarrow \frac{-1}{f(x)} = x^4 + C$

$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x^4 + C} \xrightarrow{f(2) = -\frac{1}{25}} C = 9$. Vậy $f(x) = -\frac{1}{x^2 + 9} \Rightarrow f(1) = -\frac{1}{10}$.

Cách 2:

$f'(x) = 4x^3 [f(x)]^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = 4x^3 \Rightarrow \int_1^2 \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} dx = \int_1^2 4x^3 dx = 15 \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} \Big|_1^2 = 3 \Leftrightarrow f(1) = -\frac{1}{10}$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{5}$ và $f'(x) = x^3 [f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$

bằng :

Ⓐ. $-\frac{4}{35}$.

Ⓑ. $-\frac{71}{20}$.

Ⓒ. $-\frac{79}{20}$.

Ⓓ. $-\frac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x) = x^3 [f(x)]^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = x^3$ (*).

Cách 1: Từ (*) suy ra $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} dx = \int x^3 dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = \frac{x^4}{4} + C$.

$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{\frac{x^4}{4} + C} \xrightarrow{f(2) = -\frac{1}{5}} -\frac{1}{5} = -\frac{1}{4 + C} \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{\frac{x^4}{4} + 1} \Rightarrow f(1) = -\frac{4}{5}$.

Cách 2: (*) suy ra $\int_1^2 \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} dx = \int_1^2 x^3 dx \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{f(x)} \right) \Big|_1^2 = \frac{15}{4} \Rightarrow f(1) = -\frac{4}{5}$.

Chọn đáp án.

Ⓓ.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = -e^x \cdot f^2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = \frac{1}{2}$. Tính giá trị của $f(\ln 2)$.

Ⓐ.

$f(\ln 2) = \frac{2}{9}$.

Ⓑ.

$f(\ln 2) = -\frac{2}{9}$.

Ⓒ.

$f(\ln 2) = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Biến đổi

$f'(x) = -e^x \cdot f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -e^x \Rightarrow \int_0^{\ln 2} \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int_0^{\ln 2} -e^x dx \Rightarrow -\frac{1}{f(x)} \Big|_0^{\ln 2} = -1 \Rightarrow f(\ln 2) = \frac{1}{3}$

Chọn đáp án.

Ⓓ.

D.

$$f(\ln 2) = \frac{1}{3}.$$

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C), xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện

$f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = (x \cdot f(x))^2, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = 1$ của đồ thị (C) là

A.

$$y = 6x + 30.$$

B.

$$y = -6x + 30.$$

C.

$$y = 36x - 30.$$

D.

$$y = -36x + 42$$

.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Biến đổi } \frac{f'(x)}{f^2(x)} = x^2 \Rightarrow \int_0^1 \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int_0^1 x^2 dx \Rightarrow -\frac{1}{f(x)} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \Rightarrow f(1) = 6.$$

$$\text{Từ } f'(x) = (x \cdot f(x))^2 \Rightarrow f'(1) = (1 \cdot f(1))^2 = 36.$$

$$\text{Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là: } y = 36(x - 1) + 6 \Leftrightarrow y = 36x - 30.$$

Chọn đáp án.

C.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[-1; 1]$, thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và

$$f'(x) + 2f(x) = 0. \text{ Biết } f(1) = 1 \text{ tính } f(-1).$$

A.

$$f(-1) = e^{-2}.$$

B.

$$f(-1) = e^3.$$

C.

$$f(-1) = e^4.$$

D.

$$f(-1) = 3.$$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f'(x) + 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -2.$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int_{-1}^1 -2 dx \Leftrightarrow \ln f(x) \Big|_{-1}^1 = -2x \Big|_{-1}^1 \Leftrightarrow \ln f(1) - \ln f(-1) = -4$$

$$\Leftrightarrow \ln f(-1) = 4 \Leftrightarrow f(-1) = e^4$$

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) \cdot f(x) = x^4 + x^2$. Biết $f(0) = 2$. Tính $f^2(2)$.

A.

$$f^2(2) = \frac{313}{15}.$$

B.

$$f^2(2) = \frac{332}{15}.$$

C.

$$f^2(2) = \frac{324}{15}.$$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } f'(x) \cdot f(x) = x^4 + x^2 \Rightarrow \int_0^2 f'(x) \cdot f(x) dx = \int_0^2 (x^4 + x^2) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} f^2(x) \Big|_0^2 = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{f^2(2)}{2} - \frac{f^2(0)}{2} = \frac{136}{15} \Leftrightarrow f^2(2) = \frac{332}{15}$$

D.

$$f^2(2) = \frac{323}{15}.$$

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $(0; +\infty)$, biết

$$f'(x) + (2x+4)f^2(x) = 0, f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}, f(2) = \frac{1}{15}. \text{ Tính } f(1) + f(2) + f(3).$$

A. $\frac{7}{15}.$

B. $\frac{11}{15}.$

C. $\frac{11}{30}.$

D. $\frac{7}{30}.$

Lời giải

Chọn D

$$f'(x) + (2x+4)f^2(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -2x-4.$$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int_{-1}^1 (-2x-4) dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = -x^2 - 4x + C \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x - C}.$$

$$\text{Với } f(2) = \frac{1}{15} \Rightarrow \frac{1}{15} = \frac{1}{12-C} \Rightarrow C = -3 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}.$$

$$\text{Khi đó } f(1) + f(2) + f(3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} = \frac{7}{30}$$

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f^6(x) \cdot f'(x) = 12x + 13$ và $f(0) = 2$. Khi đó phương trình $f(x) = 3$ có bao nhiêu nghiệm

A. 2.

B. 3.

C. 7.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Từ } f^6(x) \cdot f'(x) = 12x + 13 \Rightarrow \int f^6(x) \cdot f'(x) dx = \int (12x + 13) dx$$

$$\Leftrightarrow \int f^6(x) df(x) = 6x^2 + 13x + C \Leftrightarrow \frac{f^7(x)}{7} = 6x^2 + 13x + C \xrightarrow{f(0)=2} C = \frac{2^7}{7}.$$

$$\text{Suy ra } f^7(x) = 42x^2 + 91x + 2^7.$$

$$\text{Do đó phương trình } f(x) = 3 \Leftrightarrow f^7(x) = 2187 \Rightarrow 42x^2 + 91x - 2059 = 0 (*).$$

Phương trình (*) có $ac < 0$ nên có hai nghiệm trái dấu

Câu 11: Cho hàm số $f(x) \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x) = (2x+3)f^2(x)$ và $f(0) = -\frac{1}{2}$. Biết rằng tổng

$$f(1) + f(2) + \dots + f(2017) + f(2018) = \frac{a}{b} \text{ với } a \in \mathbb{Z} \text{ và } b \in \mathbb{N}^* \text{ và } \frac{a}{b} \text{ là phân số tối giản. Mệnh đề}$$

nào sau đây đúng

A. $\frac{a}{b} < -1.$

B. $\frac{a}{b} > 1.$

C. $a+b=1010.$

D. $b-a=3029.$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Biến đổi: } f'(x) = (2x+3)f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x+3 \Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int (2x+3) dx$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2 + 3x + C \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2 + 3x + C} \xrightarrow{f(0)=-\frac{1}{2}} C = 2$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2 + 3x + 2} = -\frac{1}{(x+1)(x+2)}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{a}{b} &= f(1) + f(2) + \dots + f(2017) + f(2018) = -\left(\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2018 \cdot 2019} + \frac{1}{2019 \cdot 2020}\right) \\ &= -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2018} - \frac{1}{2019} + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}\right) = -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2020}\right) = -\frac{1009}{2020}. \end{aligned}$$

Với điều kiện a, b thỏa mãn bài toán, suy ra $a = -1009, b = 2020 \Rightarrow b - a = 3029$

Câu 12: (Chuyên Vinh – Lần 4 – 2017) Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1, f(x) = f'(x)\sqrt{3x+1}$ với mọi $x > 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Lời giải

B. $4 < f(5) < 5.$

Chọn C

C. $2 < f(3) < 3.$

Ta có $f(x) = f'(x)\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}.$

D. $3 < f(5) < 4.$

$$\Leftrightarrow \int \frac{d(f(x))}{3f(x)} = \frac{1}{3} \int (3x+1)^{-\frac{1}{2}} d(3x+1) \Leftrightarrow \ln f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{3x+1} + C \Leftrightarrow f(x) = e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1} + C}.$$

A. $1 < f(5) < 2.$

Khi đó $f(1) = 1 \Leftrightarrow e^{\frac{4}{3} + C} = 1 \Leftrightarrow C = -\frac{4}{3} \Rightarrow f(x) = e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1} - \frac{4}{3}} \Rightarrow f(5) = e^{\frac{4}{3}} \approx 3,79 \in (3; 4).$

Cách 2: Với điều kiện bài toán, ta có

$$f(x) = f'(x)\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{3x+1}}$$

$$\Rightarrow \int_1^5 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int_1^5 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx \Leftrightarrow \int_1^5 \frac{df(x)}{f(x)} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \ln f(x) \Big|_1^5 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \ln \frac{f(5)}{f(1)} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow f(5) = f(1) \cdot e^{\frac{4}{3}} \approx 3,79 \in (3; 4)$$

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ xác định, có đạo hàm, liên tục và đồng biến trên $[1; 4]$ thỏa mãn

$$x + 2xf(x) = [f'(x)]^2, \forall x \in [1; 4], f(1) = \frac{3}{2}. \text{ Giá trị } f(4) \text{ bằng}$$

A. $\frac{391}{18}.$

Lời giải

B. $\frac{361}{18}.$

Chọn A

Ta có

C. $\frac{381}{18}.$

D. $\frac{371}{18}.$

$$x + 2xf(x) = [f'(x)]^2 \Leftrightarrow x(1 + 2f(x)) = [f'(x)]^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{[f'(x)]^2}{1 + 2f(x)} = x$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + 2f(x)}} = \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \int_1^4 \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + 2f(x)}} dx = \int_1^4 \sqrt{x} dx$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 + 2f(x)} \Big|_1^4 = \frac{14}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 + 2f(4)} - 2 = \frac{14}{3} \Leftrightarrow f(4) = \frac{391}{18}$$

Chú ý:

Nếu không nhìn được ra luôn $\int_1^4 \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + 2f(x)}} dx = \sqrt{1 + 2f(x)} \Big|_1^4 = \sqrt{1 + 2f(4)} - 2$ thì ta có thể

sử dụng kĩ thuật vi phân hoặc đổi biến (bản chất là một).

+ Vi phân

$$\int_1^4 \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + 2f(x)}} dx = \int_1^4 \frac{df(x)}{\sqrt{1 + 2f(x)}} dx = \frac{1}{2} \int_1^4 (1 + 2f(x))^{-\frac{1}{2}} d(1 + 2f(x)) = \sqrt{1 + 2f(x)} \Big|_1^4 = \sqrt{1 + 2f(4)} - 2$$

+ Đổi biến

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1 + 2f(x)} \Rightarrow t^2 = 1 + 2f(x) \Leftrightarrow t dt = f'(x) dx$$

Với

$$x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{1 + 2f(1)} = 2;$$

$$x = 4 \Rightarrow t = \sqrt{1 + 2f(4)}$$

$$\text{Khi đó } I = \int_2^{\sqrt{1 + 2f(4)}} \frac{t dt}{t} = t \Big|_2^{\sqrt{1 + 2f(4)}} = \sqrt{1 + 2f(4)} - 2$$

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ không âm thỏa mãn điều kiện $f(x) \cdot f'(x) = 2x\sqrt{f^2(x) + 1}$, $f(0) = 0$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[1; 3]$ bằng

Ⓐ. 22.

Ⓑ.

$$4\sqrt{11} + \sqrt{3}.$$

Ⓒ. $20 + \sqrt{2}.$

Ⓓ.

$$3\sqrt{11} + \sqrt{3}.$$

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$f(x) \cdot f'(x) = 2x\sqrt{f^2(x) + 1} \Leftrightarrow \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{f^2(x) + 1}} = 2x$$

$$\Rightarrow \int \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{f^2(x) + 1}} dx = \int 2x dx$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{f^2(x) + 1} = x^2 + C$$

$$\text{Với } f(0) = 0 \Rightarrow 1 = C \Rightarrow \sqrt{f^2(x) + 1} = x^2 + 1 \Leftrightarrow f^2(x) = x^4 + 2x^2 = g(x)$$

$$\text{Ta có } g'(x) = 4x^3 + 4x > 0, \forall x \in [1; 3]$$

Suy ra $g(x)$ đồng biến trên $[1; 3]$

Suy ra

$$g(1) \leq g(x) = f^2(x) \leq g(3) \Leftrightarrow 3 \leq f^2(x) \leq 99 \stackrel{f(x) \geq 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{3} \leq f(x) \leq 3\sqrt{11}$$

$$\Rightarrow \min_{[1;3]} f(x) = \sqrt{3}; \max_{[1;3]} f(x) = 3\sqrt{11}$$

Vậy tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[1;3]$ bằng

$$3\sqrt{11} + \sqrt{3}$$

Chú ý:

Nếu không nhìn được ra luôn $\int \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}} dx = \sqrt{f^2(x)+1} + C$ thì ta có thể sử dụng kĩ

thuật vi phân hoặc đổi biến (bản chất là một).

$$+ \text{Vi phân } \int \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}} dx = \int \frac{f(x) \cdot df(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}} = \frac{1}{2} \int (f^2(x)+1)^{-\frac{1}{2}} d(f^2(x)+1) = \sqrt{f^2(x)+1} + C$$

+ Đổi biến

$$\text{Đặt } t = \sqrt{f^2(x)+1} \Rightarrow t^2 = f^2(x)+1 \Leftrightarrow t dt = f(x) \cdot f'(x) dx$$

$$\text{Suy ra } \int \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}} dx = \int \frac{t dt}{t} = t + C = \sqrt{f^2(x)+1} + C$$

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và đồng biến trên R thỏa mãn $f(0) = 1; (f'(x))^2 = e^x \cdot f(x), \forall x \in R$.

Tính tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

- Ⓐ. $e - 2$.
 Ⓑ. $e - 1$.
 Ⓒ. $e^2 - 2$.
 Ⓓ. $e^2 - 1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$(f'(x))^2 = e^x \cdot f(x) \Leftrightarrow \frac{(f'(x))^2}{f(x)} = e^x \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \sqrt{e^x} \Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = \int \sqrt{e^x} dx$$

$$\Leftrightarrow \int (f(x))^{-\frac{1}{2}} df(x) = \int e^{\frac{x}{2}} dx \Leftrightarrow 2\sqrt{f(x)} = 2e^{\frac{x}{2}} + C \stackrel{f(0)=1}{\rightarrow} C = 0 \Rightarrow \sqrt{f(x)} = e^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow f(x) = e^x$$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e - 1$$

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(x) = 6x^2 \cdot f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}}$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$

- Ⓐ. 2..
 Ⓑ. 4..
 Ⓒ. -1..
 Ⓓ. 6.

Lời giải

Chọn B

$$f(x) = 6x^2 \cdot f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}} \Rightarrow I = \int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 \left(3x^2 \cdot f(x^3) - \frac{3}{\sqrt{3x+1}} \right) dx = A - B$$

$$\text{Gọi } A = 2 \int_0^1 3x^2 \cdot f(x^3) dx.$$

$$\text{Đặt } t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2 dx$$

$$\text{Đổi cận } x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = 1$$

$$A = 2 \int_0^1 f(t) dt = 2 \int_0^1 f(x) dx = 2I$$

$$I = 2I - B$$

$$\Rightarrow I = B = 6 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx = 6 \int_0^1 (3x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3} \cdot d(3x+1) = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3x+1} \Big|_0^1 = 4.$$

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $4x.f(x^2) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$.

Tính $\int_0^1 f(x) dx$

Ⓐ. $\frac{\pi}{4}$..

Ⓑ. $\frac{\pi}{6}$..

Ⓒ. $\frac{\pi}{20}$..

Ⓓ. $\frac{\pi}{16}$..

Lời giải

Chọn C

$$4x.f(x^2) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \int_0^1 2x.f(x^2) dx + 3 \int_0^1 f(1-x) dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \Leftrightarrow 2A + 3B = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx (*)$$

$$A = \int_0^1 2x.f(x^2) dx \text{ Đặt } t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx; x=0 \Rightarrow t=0; x=1 \Rightarrow t=1$$

$$A = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx$$

$$B = \int_0^1 f(1-x) dx \text{ Đặt } t = 1-x \Rightarrow dt = -dx; x=0 \Rightarrow t=1, x=1 \Rightarrow t=0$$

$$B = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx$$

$$(*) \Leftrightarrow 2 \int_0^1 f(x) dx + 3 \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \Leftrightarrow 5 \cdot \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$\text{Đặt: } x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right); x=0 \Rightarrow t=0, x=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \cdot \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{20}.$$

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa mãn $f(x) + f(2-x) = 2x$.

Tính $\int_0^2 f(x) dx$

Ⓐ. -4 ..

Ⓑ. $\frac{1}{2}$..

Ⓒ. $\frac{4}{3}$..

Lời giải

Chọn D

$$f(x) + f(2-x) = 2x \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx + \int_0^2 f(2-x) dx = \int_0^2 2x dx \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = -\int_0^2 f(2-x) dx + \int_0^2 2x dx$$

$$\text{Đặt: } t = 2-x \Rightarrow dt = -dx$$

D. 2. $x=0 \Rightarrow t=2, x=2 \Rightarrow t=0$

$$\int_0^2 f(2-x)dx = \int_0^2 f(t)dt = \int_0^2 f(x)dx$$

 Do đó: $2 \int_0^2 f(x)dx = x^2 \Big|_0^2 = 4$
 Vậy: $\int_0^2 f(x)dx = 2$

Câu 19: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1, 2]$ và thỏa mãn $f(x) + 2xf(x^2 - 2) + 3f(1-x) = 4x^3$. Tính giá trị tích phân $I = \int_{-1}^2 f(x)dx$.

- A.** $I = 5$.
B. $I = \frac{5}{2}$.
C. $I = 3$.
D. $I = 15$.

Lời giải

Chọn C

$$f(x) + 2xf(x^2 - 2) + 3f(1-x) = 4x^3$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^2 f(x)dx + \int_{-1}^2 2x.f(x^2 - 2)dx + 3 \int_{-1}^2 f(1-x) = \int_{-1}^2 4x^3 ds = 15(*)$$

Đặt $u = x^2 - 2 \Rightarrow du = 2xdx$; với $x = -1 \Rightarrow u = -1; x = 2 \Rightarrow u = 2$.

Khi đó $\int_{-1}^2 2x.f(x^2 - 2)dx = \int_{-1}^2 f(u)du = \int_{-1}^2 f(x)dx(1)$.

Đặt $t = 1 - x \Rightarrow dt = -dx$; với $x = -1 \Rightarrow t = 2; x = 2 \Rightarrow t = -1$.

Khi đó $\int_{-1}^2 f(1-x)dx = \int_{-1}^2 f(t)dt = \int_{-1}^2 f(x)dx(2)$

Thay (1), (2) vào (*) ta được $5 \int_{-1}^2 f(x)dx = 15 \Rightarrow \int_{-1}^2 f(x)dx = 3$

Câu 20: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1, 2]$ và thỏa mãn $f(x) = \sqrt{x+2} + xf(3-x^2)$. Tính giá trị tích phân $I = \int_{-1}^2 f(x)dx$.

- A.** $I = \frac{14}{3}$.
B. $I = \frac{28}{3}$.
C. $I = \frac{4}{3}$.
D. $I = 2$.

Lời giải

Chọn B

$$f(x) - xf(3-x^2) = \sqrt{x+2} \Rightarrow \int_{-1}^2 f(x)dx - \int_{-1}^2 xf(3-x^2)dx = \int_{-1}^2 \sqrt{x+2}dx = \frac{14}{3}(*).$$

Đặt $u = 3 - x^2 \Rightarrow du = -2xdx$; với $x = -1 \Rightarrow u = 2; x = 2 \Rightarrow u = -1$.

Khi đó $\int_{-1}^2 xf(3-x^2)dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 f(u)du = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 f(x)dx(2)$

Thay vào (*) ta được $\int_{-1}^2 f(x)dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^2 f(x)dx = \frac{14}{3} \Leftrightarrow \int_{-1}^2 f(x)dx = \frac{28}{3}$

Câu 21: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0,1]$ và thỏa mãn $f(x) + xf(1-x^2) + 3f(1-x) = \frac{1}{x+1}$. Tính giá trị tích phân $I = \int_0^1 f(x)dx$.

Ⓐ. $I = \frac{9}{2} \ln 2$

Ⓑ. $I = \frac{2}{9} \ln 2$

Ⓒ. $I = \frac{4}{3}$

Ⓓ. $I = \frac{3}{2}$

Lời giải

Chọn B

$$f(x) + xf(1-x^2) + 3f(1-x) = \frac{1}{x+1}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 xf(1-x^2)dx + 3 \int_0^1 f(1-x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| \Big|_0^1 = \ln 2 (*)$$

Đặt $u = 1-x^2 \Rightarrow du = -2xdx$; với $x=0 \Rightarrow u=1$; $x=1 \Rightarrow u=0$.

$$\text{Khi đó } \int_0^1 2xf(1-x^2)dx = \frac{1}{2} \int_1^0 f(u)du = -\frac{1}{2} \int_0^1 f(x)dx$$

Đặt $t = 1-x \Rightarrow dt = -dx$; với $x=0 \Rightarrow t=1$; $x=1 \Rightarrow t=0$.

$$\text{Khi đó } \int_0^1 f(1-x)dx = \int_1^0 f(t)dt = -\int_0^1 f(x)dx$$

Thay (1), (2) vào (*) ta được

$$\int_0^1 f(x)dx + \frac{1}{2} \int_0^1 f(x)dx + 3 \int_0^1 f(x)dx = \ln 2 \Rightarrow \frac{9}{2} \int_0^1 f(x)dx = \ln 2 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{2}{9} \ln 2.$$

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ và thỏa mãn $f(x) - 8x^3 f(x^4) + \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} = 0$. Tích phân

$$I = \int_0^1 f(x)dx = \frac{a-b\sqrt{2}}{c} \text{ với } a, b, c \in \mathbb{Z} \text{ và } \frac{a}{c}; \frac{b}{c} \text{ tối giản. Tính } a+b+c$$

Ⓐ. 6.

Ⓑ. -4.

Ⓒ. 4.

Ⓓ. -10.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: (Dùng công thức - Dạng 2).

$$\text{Biến đổi: } f(x) - 8x^3 f(x^4) + \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \Leftrightarrow f(x) - 2(4x^3) f(x^4) = -\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} \text{ với}$$

$$A = 1; B = -2; C = 0.$$

$$\text{Áp dụng công thức ta có: } \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{1+(-2)} \int_0^1 -\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow tdt = xdx; \text{ với } \begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=\sqrt{2} \end{cases}$$

Khi đó

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} xdx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2-1}{t} \cdot tdt = \int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1)dt = \frac{t^3}{3} - t \Big|_1^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2-\sqrt{2}}{3} = \frac{a-b\sqrt{2}}{c}.$$

Suy ra $a=2; b=1; c=3 \Rightarrow a+b+c=6$.

Cách 2: Đổi biến số.

Từ $f(x) - 8x^3 f(x^4) + \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx - 2 \int_0^1 4x^3 f(x^4)dx + \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx = 0 (*)$. Đặt

$$u = x^4 \Rightarrow du = 4x^3 dx; \text{ với } x=0 \Rightarrow u=0; x=1 \Rightarrow u=1.$$

Khi đó $\int_0^1 4x^3 f(x^4)dx = \int_0^1 f(u)du = \int_0^1 f(x)dx$ thay vào (*), ta được:

$$\int_0^1 f(x)dx - 2 \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx.$$

Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow tdt = xdx$; với $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=\sqrt{2} \end{cases}$.

Khi đó

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} xdx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2-1}{t} \cdot tdt = \int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1)dt = \frac{t^3}{3} - t \Big|_1^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2-\sqrt{2}}{3} = \frac{a-b\sqrt{2}}{c}.$$

Câu 23: Cho hàm số liên tục trên đoạn $[-\ln 2; \ln 2]$ và thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \frac{1}{e^x + 1}$. Biết

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)dx = a \ln 2 + b \ln 3 \text{ với } a, b \in \mathbb{Q}. \text{ Tính giá trị của } P = a + b$$

A. $P = \frac{1}{2}$.

B. $P = -2$.

C. $P = -1$.

D. $P = 2$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Dùng công thức – Dạng 2

Từ $f(x) + f(-x) = \frac{1}{e^x + 1}$. Ta có $A=1; B=1; C=0$.

Suy ra $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)dx = \frac{1}{1+1} \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{dx}{e^x + 1} = \frac{1}{2} \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{dx}{e^x + 1}$

Cách 2: Dùng công thức đổi biến số.

Từ $f(x) + f(-x) = \frac{1}{e^x + 1} \Rightarrow \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)dx + \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x)dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1}dx (*)$.

Đặt $u = -x \Rightarrow du = -dx$; Với $x = -\ln 2 \Rightarrow u = \ln 2$; $x = \ln 2 \Rightarrow u = -\ln 2$.

Suy ra $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x)dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(u)du = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)dx$ thay vào (*), ta được:

$$2 \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} dx \Rightarrow \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} dx.$$

Đặt $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$; Với $x = -\ln 2 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$; $x = \ln 2 \Rightarrow t = 2$.

Suy ra $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{e^x}{e^x(e^x + 1)} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{dt}{t(t+1)} = \ln \left| \frac{t}{t+1} \right| \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = \ln 2.$

Khi đó

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx = \frac{1}{2} \ln 2 = a \ln 2 + b \ln 3 \xrightarrow{a, b \in \mathbb{Q}} a = \frac{1}{2}; b = 0 \Rightarrow P = \frac{1}{2}$$

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0) = 0$ và $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cos x$ với

$\forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f'(x) dx$ bằng

- A. $-\frac{\pi}{4}$.
- B. $\frac{1}{4}$.
- C. $\frac{\pi}{4}$.
- D. $-\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Với $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cos x$ ta có $A = 1; B = 0; C = 1$.

Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = -\frac{1}{1+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx = -\frac{1}{4}.$

Cách 2:

Từ

$$f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cos x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} (*)$$

Đặt $u = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow du = -dx; x = 0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0.$

Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(u) du = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u) du$ thay vào (*), ta được:

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{4} (1)$$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f'(x) dx = x f(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{\pi}{2} f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx. (*)$$

Từ điều kiện $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cos x \Rightarrow \begin{cases} f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = 0 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (2)$

Thay (1), (2) vào (*), ta được $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f'(x) dx = \frac{-1}{4}$

Câu 25: (Diễn Châu – Nghệ An – Lần 3 – 2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(1+2x) + f(1-2x) = \frac{x^2}{x^2+1}, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tính tích phân } I = \int_{-1}^3 f(x) dx.$$

A.

$$I = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

B. $I = 1 - \frac{\pi}{4}.$

C.

$$I = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}.$$

D. $I = \frac{\pi}{4}.$

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 1+2x \Rightarrow 1-2x = 2-t$ và $x = \frac{t-1}{2}$, khi đó điều kiện trở thành:

$$f(t) + f(2-t) = \frac{\left(\frac{t-1}{2}\right)^2}{\left(\frac{t-1}{2}\right)^2 + 1} \Rightarrow f(t) + f(2-t) = \frac{t^2 - 2t + 1}{t^2 - 2t + 5} \Rightarrow f(x) + f(2-x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 5} (*).$$

Cách 1: (Dùng công thức - theo góc nhìn dạng 2)

Với $f(x) + f(2-x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 5}$, ta có $A=1; B=1$.

Suy ra: $\int_{-1}^3 f(x) dx = \frac{1}{x+1} \int_{-1}^3 \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 5} dx \approx 0,429 = 2 - \frac{\pi}{2}$. Chọn đáp án **A**.

Cách 2: (Dùng phương pháp biến đổi – nếu không nhớ công thức)

$$\text{Từ } (*), \text{ ta có: } f(x) + f(2-x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 5} \Rightarrow \int_{-1}^3 f(x) dx + \int_{-1}^3 f(2-x) dx = \int_{-1}^3 \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 5} dx \quad (2*).$$

Đặt $u = 2-x \Rightarrow du = -dx$, Với $x = -1 \Rightarrow u = 3$ và $x = 3 \Rightarrow u = -1$.

Suy ra $\int_{-1}^3 f(2-x) dx = \int_{-1}^3 f(u) du = \int_{-1}^3 f(x) dx$ thay vào (*), ta được:

$$2 \int_{-1}^3 f(x) dx = \int_{-1}^3 \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 5} dx \Rightarrow \int_{-1}^3 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^3 \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 5} dx \approx 0,429 = 2 - \frac{\pi}{2}. \text{ Chọn đáp án } \mathbf{A}$$

Câu 26: (Chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa – Lần 3 – 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và thỏa mãn $x^2 f^2(x) + (2x-1)f(x) = xf'(x) - 1$ với $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ và $f(1) = -2$. Tính

$$\int_1^2 f(x) dx.$$

A. $-\frac{1}{2} - \ln 2$

Lời giải

Chọn A

Biến đổi $x^2 f^2(x) + 2xf(x) + 1 = f(x) + xf'(x) \Leftrightarrow (xf(x) + 1)^2 = f(x) + xf'(x) (*)$.

Ⓐ. $-\frac{3}{2} - \ln 2$

Ⓑ. $-1 - \frac{\ln 2}{2}$

Ⓒ. $-\frac{3}{2} - \frac{\ln 2}{2}$

Đặt $h(x) = xf(x) + 1 \Rightarrow h'(x) = f(x) + x.f'(x)$, Khi đó (*) có dạng:

$$h^2(x) = h'(x) \Rightarrow \frac{h'(x)}{h^2(x)} = 1 \Rightarrow \int \frac{h'(x)}{h^2(x)} dx = \int dx \Leftrightarrow \int \frac{dh(x)}{h^2(x)} = x + C \Leftrightarrow -\frac{1}{h(x)} = x + C.$$

$$\Rightarrow h(x) = -\frac{1}{x+C} \Rightarrow xf(x) + 1 = -\frac{1}{x+C} \xrightarrow{f(1)=-2} -2+1 = -\frac{1}{1+C} \Rightarrow C=0.$$

Khi đó $xf(x) + 1 = -\frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$.

Suy ra: $\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{2} - \ln 2$. Chọn đáp án. **A**

Câu 27: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[4; 8]$ và $f(0) \neq 0$ với $\forall x \in [4; 8]$. Biết rằng

$$\int_4^8 \frac{[f'(x)]^2}{[f(x)]^4} dx = 1 \text{ và } f(4) = \frac{1}{4}, f(8) = \frac{1}{2}. \text{ Tính } f(6).$$

Ⓐ. $\frac{5}{8}$

Ⓑ. $\frac{2}{3}$

Ⓒ. $\frac{3}{8}$

Ⓓ. $\frac{1}{3}$

Lời giải

Chọn D

Xét $\int_4^8 \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int_4^8 \frac{df(x)}{f^2(x)} = -\frac{1}{f(8)} - \frac{1}{f(4)} = -(2-4) = 2$.

Gọi k là một hằng số thực, ta sẽ tìm k để $\int_4^8 \left(\frac{f'(x)}{f^2(x)} + k \right)^2 dx = 0$

Ta có: $\int_4^8 \left(\frac{f'(x)}{f^2(x)} + k \right)^2 dx = \int_4^8 \frac{[f'(x)]^2}{[f(x)]^4} dx + 2k \int_4^8 \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx + k^2 \int_4^8 dx = 1 + 4k + 4k^2 = (2k+1)^2$.

Suy ra $k = -\frac{1}{2}$ thì $\int_4^8 \left(\frac{f'(x)}{f^2(x)} - \frac{1}{2} \right)^2 dx = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_4^6 \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \frac{1}{2} \int_4^6 dx$
 $\Leftrightarrow \int_4^6 \frac{df(x)}{f^2(x)} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(4)} - \frac{1}{f(6)} = 1 \Leftrightarrow 4 - \frac{1}{f(6)} = 1 \Leftrightarrow f(6) = \frac{1}{3}$. Chọn đáp án.

Ⓓ.

Chú ý: $\int_a^b f(x) dx = 0$ không được phép suy ra $f(x) = 0$, nhưng $\int_a^b f^{2k}(x) dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$.

Câu 28: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x^3 + x) = x^2 - 1$. Tính $I = \int_0^2 f(x) dx$?

Ⓐ. $I = -\frac{6}{5}$

Ⓑ. $I = \frac{15}{16}$

Ⓒ. $I = -\frac{6}{5}$

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = x^3 + x \Rightarrow \begin{cases} dt = (3x^2 + 1)dx \\ f(t) = x^2 - 1 \end{cases}$.

Đổi cận: $t = 0 \Rightarrow x^3 + x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ và $t = 2 \Rightarrow x^3 + x = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Ⓓ. $I = -\frac{15}{16}$. Khi đó $I = \int_0^2 f(t)dt = \int_0^1 (x^2 - 1)(3x^2 + 1)dx \stackrel{\text{Casio}}{=} -\frac{16}{15}$

Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x^3 + 2x - 2) = 3x - 1$. Tính $I = \int_1^{10} f(x)dx$?

Ⓐ. $I = \frac{45}{4}$.

Ⓑ. $I = \frac{9}{4}$.

Ⓒ. $I = \frac{135}{4}$.

Ⓓ. $I = \frac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = x^3 + 2x - 2 \Rightarrow \begin{cases} dt = (3x^2 + 2)dx \\ f(t) = 3x - 1 \end{cases}$.

Đổi cận: $t = 1 \Rightarrow x^3 + 2x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ và $t = 10 \Rightarrow x^3 + 2x - 2 = 10 \Leftrightarrow x = 2$.

Khi đó $I = \int_1^{10} f(t)dt = \int_1^2 (3x - 1)(3x^2 + 2)dx \stackrel{\text{Casio}}{=} \frac{135}{4}$

Câu 30: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x^3 + 1) = 2x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_0^2 f(x)dx$?

Ⓐ. $I = -2$.

Ⓑ. $I = \frac{5}{2}$.

Ⓒ. $I = -4$.

Ⓓ. $I = 6$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = x^3 + 1 \Rightarrow \begin{cases} dt = 3x^2 dx \\ f(t) = 2x - 1 \end{cases}$.

Đổi cận: $t = 0 \Rightarrow x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ và $t = 2 \Rightarrow x^3 + 1 = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Khi đó $I = \int_0^2 f(t)dt = \int_{-1}^1 (2x - 1)3x^2 dx \stackrel{\text{Casio}}{=} -2$

Câu 31: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x^3 + 3x + 1) = 3x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_1^5 xf'(x)dx$.

Ⓐ. $I = \frac{5}{4}$.

Ⓑ. $I = \frac{17}{4}$.

Ⓒ. $I = \frac{33}{4}$.

Ⓓ. $I = -1761$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow I = xf(x) \Big|_1^5 - \int_1^5 f(x)dx = 5f(5) - f(1) - \int_1^5 f(t)dt$.

Đặt $t = x^3 + 3x + 1 \Rightarrow \begin{cases} dt = (3x^2 + 3)dx \\ f(t) = 3x + 2 \end{cases}$.

Đổi cận: $t = 1 \Rightarrow x^3 + 3x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0; t = 5 \Rightarrow x^3 + 3x + 1 = 5 \Leftrightarrow x = 1$.

Suy ra: $f(5) = 3.1 + 2$ ($x = 1$) và $f(1) = 3.0 + 2$ ($x = 0$).

Khi đó $I = 5.5 - 2 - \int_0^1 (3x + 2)(3x^2 + 3)dx \stackrel{\text{Casio}}{=} \frac{33}{4}$. **Chọn**

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f(x^4 + x^2 + x - 1) = \frac{1}{x+1}$. Biết

$I = \int_2^{21} f(x)dx = \frac{a}{b} - \ln \frac{c}{d}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính

$$T = a + b + c + d.$$

- (A). $T = 243$.
 (B). $T = 306$.
 (C). $T = 312$.
 (D). $T = 275$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } t = x^4 + x^2 + x - 1 \Rightarrow \begin{cases} dt = (4x^3 + 2x + 1)dx \\ f(t) = \frac{1}{x+1} \end{cases}.$$

$$\text{Đổi cận: } t = 2 \Rightarrow x^4 + x^2 + x - 1 = 2 \Rightarrow x = 1; t = 21 \Rightarrow x^4 + x^2 + x - 1 = 21 \Rightarrow x = 2 \ (x > 0).$$

$$\text{Ta có: } I = \int_2^{21} f(x) dx = \int_2^{21} f(t) dt = \int_1^2 \frac{1}{x+1} (4x^3 + 2x + 1) dx = \int_1^2 \left(4x^2 - 4x + 6 - \frac{5}{x+1} \right) dx.$$

$$= \left(\frac{4x^3}{3} - 2x^2 + 6x - 5 \ln|x+1| \right) \Big|_1^2 = \frac{28}{3} - 5 \ln \frac{3}{2} = \frac{28}{3} - \ln \frac{243}{32}.$$

$$\text{Suy ra } a = 28; b = 3; c = 243; d = 32 \Rightarrow T = 306. \text{ Chọn}$$

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f\left(x - \frac{1}{x} + 1\right) = \frac{1}{x}$. Biết

$$I = \int_1^{\frac{5}{2}} f(x) dx = \frac{a}{b} + \ln c \text{ với } a, b, c \in \mathbb{N}^* \text{ và } \frac{a}{b} \text{ là các phân số tối giản. Tính } T = a + b + c.$$

- (A). $T = 13$.
 (B). $T = 69$.
 (C). $T = 96$.
 (D). $T = 88$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } t = x - \frac{1}{x} + 1 \Rightarrow \begin{cases} dt = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx \\ f(t) = \frac{1}{x} \end{cases}.$$

$$\text{Đổi cận: } t = 1 \Rightarrow x - \frac{1}{x} + 1 = 1 \Rightarrow x = 1; t = \frac{5}{2} \Rightarrow x - \frac{1}{x} + 1 = \frac{5}{2} \Rightarrow x = 2 \ (x > 0).$$

$$\text{Ta có: } I = \int_1^{\frac{5}{2}} f(x) dx = \int_1^{\frac{5}{2}} f(t) dt = \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = \int_1^2 \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} dx$$

$$= \left(\ln|x| - \frac{1}{2x^2} \right) \Big|_1^2 = \frac{3}{8} + \ln 2.$$

$$\text{Suy ra } a = 3; b = 8; c = 2 \Rightarrow T = 13. \text{ Chọn}$$

Câu 34: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f^3(x) + f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_0^2 f(x) dx$.

- (A). $I = 2$.
 (B). $I = \frac{3}{2}$.
 (C). $I = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } y = f(x) \Rightarrow x = y^3 + y \Rightarrow dx = (3y^2 + 1) dy.$$

Đổi cận:

$$x = 0 \Rightarrow y^3 + y = 0 \Rightarrow y = 0;$$

Ⓓ. $I = \frac{5}{4}$.

$$x = 2 \Rightarrow y^3 + y = 2 \Rightarrow y = 1.$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 y(3y^2 + 1) dy = \int_0^1 (3y^3 + y) dy \stackrel{\text{casio}}{=} \frac{5}{4}$$

Câu 35: Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2f^3(x) - 3f^2(x) + 6f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân

$$I = \int_0^5 f(x) dx.$$

Ⓐ. $I = \frac{5}{4}$.

Ⓑ. $I = \frac{5}{2}$.

Ⓒ. $I = \frac{5}{12}$.

Ⓓ. $I = \frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } y = f(x) \Rightarrow x = 2y^3 - 3y^2 + 6y \Rightarrow dx = (6y^2 - 6y + 6) dy.$$

Đổi cận:

$$x = 0 \Rightarrow 2y^3 - 3y^2 + 6y = 0 \Rightarrow y = 0;$$

$$x = 5 \Rightarrow 2y^3 - 3y^2 + 6y = 5 \Rightarrow y = 1.$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^5 f(x) dx = \int_0^1 y \cdot 6(y^2 - y + 1) dy = 6 \int_0^1 (y^3 - y^2 + y) dy \stackrel{\text{casio}}{=} \frac{5}{2}$$

Câu 36: Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x + f^3(x) + 2f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $I = \int_{-2}^1 f(x) dx$.

Ⓐ. $I = \frac{7}{4}$.

Ⓑ. $I = \frac{7}{2}$.

Ⓒ. $I = \frac{7}{3}$.

Ⓓ. $I = \frac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } y = f(x) \Rightarrow x = -y^3 - 2y + 1 \Rightarrow dx = (-3y^2 - 2) dy.$$

Đổi cận:

$$x = -2 \Rightarrow -y^3 - 2y + 1 = -2 \Rightarrow y = 1;$$

$$x = 1 \Rightarrow -y^3 - 2y + 1 = 1 \Rightarrow y = 0.$$

$$\text{Khi đó } I = \int_{-2}^1 f(x) dx = \int_1^0 y \cdot (-3y^2 - 2) dy = \int_0^1 (3y^3 + 2y) dy \stackrel{\text{casio}}{=} \frac{7}{4}$$

Câu 37: Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2x + f^5(x) + f(x) - 4 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $I = \int_1^2 f(x) dx$.

Ⓐ. $I = \frac{3}{4}$.

Ⓑ. $I = \frac{1}{2}$.

Ⓒ. $I = \frac{5}{3}$.

Ⓓ. $I = \frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } y = f(x) \Rightarrow 2x = -y^5 - y + 4 \Rightarrow 2dx = (-5y^4 - 1) dy.$$

Đổi cận:

$$x = 1 \Rightarrow -y^5 - y + 4 = 1 \Rightarrow y = 1;$$

$$x = 2 \Rightarrow -y^5 - y + 4 = 2 \Rightarrow y = 0.$$

$$\text{Khi đó } I = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^0 y \cdot (-5y^4 - 1) dy = \int_0^1 (5y^5 + y) dy \stackrel{\text{casio}}{=} \frac{4}{3}$$

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $x - f^3(x) - f(x) + 3 = 0$. Tính $I = \int_{-1}^7 xf'(x)dx$.

Ⓐ. $I = \frac{5}{4}$.

Ⓑ. $I = \frac{51}{4}$.

Ⓒ. $I = \frac{9}{4}$.

Ⓓ. $I = \frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow I = \int_{-1}^7 xf'(x)dx = xf(x) \Big|_{-1}^7 - \int_{-1}^7 f(x)dx = 7f(7) + f(-1) - \int_{-1}^7 f(x)dx$$

$$\text{Từ } x - f^3(x) - f(x) + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} f^3(7) + f(7) - 10 = 0 \\ f^3(-1) + f(-1) - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(7) = 2 \\ f(-1) = 1 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } t = f(x) \Rightarrow x - t^3 - t + 3 = 0 \Leftrightarrow x = t^3 + t - 3 \Rightarrow dx = (3t^2 + 1)dt$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = -1 \Rightarrow -1 = t^3 + t - 3 \Leftrightarrow t = 1 \\ x = 7 \Rightarrow 7 = t^3 + t - 3 \Leftrightarrow t = 2 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \int_{-1}^7 f(x)dx = \int_1^2 (3t^2 + 1)dt \stackrel{\text{Casio}}{=} \frac{51}{4}$$

$$\text{Suy ra } I = 15 - \int_{-1}^7 f(x)dx = 15 - \frac{51}{4} = \frac{9}{4}$$

Câu 39: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[0;1]$ biết $f(x) \cdot f(1-x) = 1$ với

$$\forall x \in [0;1]. \text{ Tính giá trị của } I = \int_0^1 \frac{dx}{1+f(x)}.$$

Ⓐ. $\frac{3}{2}$.

Ⓑ. $\frac{1}{2}$.

Ⓒ. 1.

Ⓓ. 2.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: (Sử dụng công thức giải nhanh)

Theo Dạng 7: “Cho $f(x) \cdot f(a+b-x) = k^2$

$$\text{khi đó } I = \int_a^b \frac{dx}{k+f(x)} = \frac{b-a}{2k}$$

$$\text{Khi đó: } I = \int_0^1 \frac{dx}{1+f(x)} = \frac{1-0}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

Cách 2:

$$\text{Đặt: } t = 1-x \Rightarrow dt = -dx; f(x) = \frac{1}{f(t)} \text{ và } x=0 \Rightarrow t=1; x=1 \Rightarrow t=0$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^1 \frac{dx}{1+f(x)} = \int_1^0 \frac{dt}{1+\frac{1}{f(t)}} = \int_0^1 \frac{f(t)dt}{1+f(t)} = \int_0^1 \frac{f(x)dx}{1+f(x)}$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^1 \frac{dx}{1+f(x)} + \int_0^1 \frac{f(x)dx}{1+f(x)} = \int_0^1 dx = 1 \Rightarrow I = \frac{1}{2}$$

Câu 40: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, ta có $f(x) > 0$ và $f(x) \cdot f(2018 - x) = 1$. Giá trị của tích

phân $I = \int_0^{2018} \frac{dx}{1 + f(x)}$.

A. $I = 2018$.

B. $I = 0$.

C. $I = 1009$.

D. $I = 4016$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: (Sử dụng công thức giải nhanh)

Theo Dạng 7: "Cho $f(x) \cdot f(a + b - x) = k^2$

khi đó $I = \int_a^b \frac{dx}{k + f(x)} = \frac{b - a}{2k}$

Khi đó: $I = \int_0^{2018} \frac{dx}{1 + f(x)} = \frac{2018 - 0}{2 \cdot 1} = 1009$

Cách 2:

Đặt: $t = 1 - x \Rightarrow dt = -dx$; $f(x) = \frac{1}{f(t)}$ và $x = 0 \Rightarrow t = 2018$; $x = 2018 \Rightarrow t = 0$

Khi đó $I = \int_0^{2018} \frac{dx}{1 + f(x)} = \int_0^{2018} \frac{dt}{1 + \frac{1}{f(t)}} = \int_0^{2018} \frac{f(t)dt}{1 + f(t)} = \int_0^{2018} \frac{f(x)dx}{1 + f(x)}$

$\Rightarrow 2I = \int_0^{2018} \frac{dx}{1 + f(x)} + \int_0^{2018} \frac{f(x)dx}{1 + f(x)} = \int_0^{2018} dx = 2018 \Rightarrow I = 1009$

Câu 41: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên tập $\mathbb{R}$, ta có $f(x) > 0$ và $f(0) \cdot f(10 - x) = 9$. Giá trị của tích

phân $I = \int_{-2}^{12} \frac{1}{3 + f(x)} dx$.

A. $I = \frac{14}{3}$.

B. $I = \frac{2}{3}$.

C. $I = \frac{7}{6}$.

D. $I = \frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Sử dụng công thức giải nhanh:

Theo dạng 7: "Cho $f(x) \cdot f(a + b - x) = k^2$, khi đó: $I = \int_a^b \frac{dx}{k + f(x)} = \frac{b - a}{2k}$ ".

Do đó: $I = \int_{-2}^{12} \frac{1}{3 + f(x)} dx = \frac{12 - (-2)}{2 \cdot 3} = \frac{7}{3}$

Câu 42: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(4 - x) = f(x)$. Biết $\int_1^3 x \cdot f(x) dx = 5$.

Tính tích phân $\int_1^3 f(x) dx$.

A. $\frac{5}{2}$.

B. $\frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Sử dụng công thức giải nhanh:

Ⓒ. $\frac{9}{2}$. Ⓓ. $\frac{11}{2}$.	Theo dạng 8: "Cho $f(x) = f(a+b-x)$ và $I = \int_a^b x.f(x)dx$. Thì ta có: $\int_a^b f(x)dx = \frac{2I}{a+b}$". Do đó: $\int_1^3 f(x)dx = \frac{2.5}{1+3} = \frac{5}{2}$. Cách 2: Đặt $t = 4-x \Rightarrow dt = -dx$ và $x=1 \Rightarrow t=3$; $x=3 \Rightarrow t=1$. Khi đó: $5 = \int_1^3 x.f(x)dx = \int_1^3 (4-t).f(4-t)dt = \int_1^3 (4-x).f(4-x)dx = \int_1^3 (4-x).f(x)dx$. Suy ra: $10 = \int_1^3 x.f(x)dx + \int_1^3 (4-x).f(x)dx = 4 \int_1^3 f(x)dx \Rightarrow \int_1^3 f(x)dx = \frac{5}{2}$
--	--

Câu 43: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) - f(3-x) = 0$. Biết $\int_{-1}^4 x.f(x)dx = 2$. Tính tích phân $\int_{-1}^4 f(x)dx$.

Ⓐ. $\frac{3}{2}$. Ⓑ. $\frac{2}{3}$. Ⓒ. $\frac{4}{3}$. Ⓓ. $\frac{3}{4}$.	Lời giải Chọn C Sử dụng công thức giải nhanh: Theo dạng 8: "Cho $f(x) = f(a+b-x)$ và $I = \int_a^b x.f(x)dx$. Thì ta có: $\int_a^b f(x)dx = \frac{2I}{a+b}$". Do đó: $\int_{-1}^4 f(x)dx = \frac{2.2}{-1+4} = \frac{4}{3}$
---	--

Câu 44: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{khi } x \geq 4 \\ \sqrt{x} & \text{khi } x \leq 4 \end{cases}$. Tính tích phân $I = \int_1^9 f(x)dx$.

Ⓐ. $I = \frac{121}{6}$. Ⓑ. $I = \frac{163}{6}$. Ⓒ. $I = \frac{85}{6}$. Ⓓ. $I = \frac{223}{6}$.	Lời giải Chọn B Ta có; $I = \int_1^9 f(x)dx = \int_1^4 f(x)dx + \int_4^9 f(x)dx = \int_1^4 \sqrt{x}dx + \int_4^9 (x-2)dx = \frac{163}{6}$.
--	--

Câu 45: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{khi } x \geq \frac{\pi}{2} \\ \sin^2 x & \text{khi } x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$. Biết $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} f(x)dx = a + b\pi$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Tính $T = a + b$.

Ⓐ. $T = \frac{11}{8}$. Ⓑ. $T = \frac{3}{2}$.	Lời giải Chọn A Ta có: $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} f(x)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx$
--	--

Ⓒ. $T = \frac{15}{8}$.

Ⓓ. $T = \frac{7}{2}$.

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \cos x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{5}{4} + \frac{1}{8}\pi = a + b\pi.$$

Do $a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a = \frac{5}{4}; b = \frac{1}{8} \Rightarrow T = a + b = \frac{11}{8}$.

Câu 46: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{khi } x \geq 0 \\ e^{2x} & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Tính tích phân $I = \int_{-1}^2 f(x) dx$.

Ⓐ.

$I = \frac{3e^2 - 1}{2e^2}$.

Ⓑ.

$I = \frac{7e^2 + 1}{2e^2}$.

Ⓒ.

$I = \frac{9e^2 - 1}{2e^2}$.

Ⓓ.

$I = \frac{11e^2 - 11}{2e^2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $I = \int_{-1}^2 f(x) dx = I = \int_{-1}^0 f(x) dx + I = \int_0^2 f(x) dx = \int_{-1}^0 e^{2x} dx + I = \int_0^2 (x+1) dx = \frac{9e^2 - 1}{2e^2}$.

Câu 47: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4-x & \text{khi } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. Tính tích phân $I = \int_0^2 f(x) dx$.

Ⓐ. $\frac{7}{2}$.

Ⓑ. 1.

Ⓒ. $\frac{5}{2}$.

Ⓓ. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $I = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 3x^2 dx + \int_1^2 (4-x) dx = x^3 \Big|_0^1 + \left(4x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = 1 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$.

Câu 48: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 6x^2 & \text{khi } x \leq 0 \\ (a-a^2)x & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$ và $I = \int_{-1}^4 f(x) dx$. Hỏi có tất cả bao nhiêu số nguyên a để $I+46 \geq 0$?

Ⓐ. 7.

Ⓑ. 4.

Ⓒ. 6.

Ⓓ. 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có $I = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^4 f(x) dx = \int_{-1}^0 6x^2 dx + \int_0^4 (a-a^2)x dx = 2x^3 \Big|_{-1}^0 + (a-a^2) \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = 2+8a-8a^2$

Khi đó $I+46 \geq 0 \Leftrightarrow 2+8a-8a^2+46 \geq 0 \Leftrightarrow a^2-a-6 \leq 0$

$\Leftrightarrow -2 \leq a \leq 3, a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$

Vậy có 6 giá trị nguyên của a thỏa mãn.

Câu 49: Tính tích phân $I = \int_0^3 \max\{x^3; 4x^2 - 3x\} dx$.

- Ⓐ. $\frac{117}{2}$.
 Ⓑ. $\frac{707}{2}$.
 Ⓒ. $\frac{275}{12}$.
 Ⓓ. $\frac{119}{6}$.

Lời giải

Chọn C

Trên đoạn $[0; 3]$:Xét $x^3 \geq 4x^2 - 3x \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 3x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x-3) \geq 0 \Rightarrow x \in [0; 1]$ do $x \in [0; 3]$

Vậy $\begin{cases} x \in [0; 1] \Rightarrow x^3 \geq 4x^2 - 3x \\ x \in [1; 3] \Rightarrow x^3 \leq 4x^2 - 3x \end{cases} \Rightarrow \max_{x \in [0; 3]} \{x^3; 4x^2 - 3x\} = \begin{cases} x^3 & \text{khi } x \in [0; 1] \\ 4x^2 - 3x & \text{khi } x \in [1; 3] \end{cases}$.

Khi đó $I = \int_0^3 \max\{x^3; 4x^2 - 3x\} dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^3 (4x^2 - 3x) dx = \frac{275}{12}$.

Câu 50: Tính $I = \int_0^2 \min\{x; \sqrt[3]{2-x}\} dx$.

- Ⓐ. $I = 2$.
 Ⓑ. $I = \frac{3}{4}$.
 Ⓒ. $I = 1$.
 Ⓓ. $I = \frac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Trên đoạn $[0; 2]$:Xét $x \geq \sqrt[3]{2-x} \Leftrightarrow x^3 \geq 2-x \Leftrightarrow x^3 + x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 2) \geq 0 \xrightarrow{x \in [0; 2]} x \in [1; 2]$

Vậy $\begin{cases} x \in [0; 1] \Rightarrow x \leq \sqrt[3]{2-x} \\ x \in [1; 2] \Rightarrow x \geq \sqrt[3]{2-x} \end{cases} \Rightarrow \min_{x \in [0; 2]} \{x; \sqrt[3]{2-x}\} = \begin{cases} x & \text{khi } x \in [0; 1] \\ \sqrt[3]{2-x} & \text{khi } x \in [1; 2] \end{cases}$.

Khi đó $I = \int_0^2 \min\{x; \sqrt[3]{2-x}\} \cdot dx = \int_0^1 x dx + \int_1^2 \sqrt[3]{2-x} dx \stackrel{\text{Castio}}{=} \frac{5}{4}$.

Câu 51: (Đề tham khảo – 2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $R \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{2x-1}; f(0) = 1$ và $f(1) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng

- Ⓐ. $4 + \ln 15$.
 Ⓑ. $2 + \ln 15$.
 Ⓒ. $3 + \ln 15$.
 Ⓓ. $\ln 15$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Từ $f'(x) = \frac{2}{2x-1} \Rightarrow f(x) = \int \frac{2dx}{2x-1} = \begin{cases} \ln|2x-1| + C_1 & \text{khi } x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \\ \ln|2x-1| + C_2 & \text{khi } x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \end{cases}$.

Ta có: $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 + C_1 = 1 \\ 0 + C_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \ln|2x-1| + 1 & \text{khi } x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \\ \ln|2x-1| + 2 & \text{khi } x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \end{cases}$.

Khi đó: $f(-1) + f(3) = \ln 3 + 1 + \ln 5 + 2 = 3 + \ln 15$.

Cách 2: Ta có: $\begin{cases} f(0) - f(-1) = f(x) \Big|_{-1}^0 = \int_{-1}^0 f'(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{2}{2x-1} dx = \ln|2x-1| \Big|_{-1}^0 = \ln \frac{1}{3} \quad (1) \\ f(3) - f(1) = f(x) \Big|_1^3 = \int_1^3 f'(x) dx = \int_1^3 \frac{2}{2x-1} dx = \ln|2x-1| \Big|_1^3 = \ln 5 \quad (2) \end{cases}$

Lấy (2) - (1), ta được: $f(3) + f(-1) - f(0) - f(1) = \ln 15 \Rightarrow f(3) + f(-1) = 3 + \ln 15$

Câu 52: (Toán học và tuổi trẻ - Số 6 – 2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ thỏa mãn

$$f'(x) = \frac{1}{x-1}; f(0) = 2017 \text{ và } f(2) = 2018. \text{ Tính } S = f(3) - f(-1)$$

- A.** $S = 1.$
B. $S = \ln 2.$
C.
 $S = \ln 4035.$
D. $S = 4.$

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Từ $f'(x) = \frac{1}{x-1} \Rightarrow f(x) = \int \frac{dx}{x-1} = \begin{cases} \ln|x-1| + C_1 & \text{khi } x \in (-\infty; 1) \\ \ln|x-1| + C_2 & \text{khi } x \in (1; +\infty) \end{cases}$

Ta có:

$$\begin{cases} f(0) = 2017 \\ f(2) = 2018 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 + C_1 = 2017 \\ 0 + C_2 = 2018 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 2017 \\ C_2 = 2018 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \ln|x-1| + 2017 & \text{khi } x \in (-\infty; 1) \\ \ln|x-1| + 2018 & \text{khi } x \in (1; +\infty) \end{cases}$$

Khi đó: $f(3) - f(-1) = \ln 2 + 2018 - (\ln 2 + 2017) = 1.$

Cách 2: Ta có:
$$\begin{cases} f(0) - f(-1) = f(x)|_{-1}^0 = \int_{-1}^0 f'(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1| \Big|_{-1}^0 = \ln \frac{1}{2} & (1) \\ f(3) - f(2) = f(x)|_2^3 = \int_2^3 f'(x) dx = \int_2^3 \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1| \Big|_2^3 = \ln 2 & (2) \end{cases}$$

Lấy (2) + (1), ta được: $f(3) + f(-1) + f(0) - f(2) = 0 \Rightarrow S = f(3) + f(-1) = f(2) - f(0) = 1$

Câu 53: (Lục Ngạn – Bắc Giang – 2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ thỏa mãn

$$f'(x) = \frac{3}{3x-1}; f(0) = 1 \text{ và } f\left(\frac{2}{3}\right) = 2. \text{ Giá trị của biểu thức } f(-1) + f(3) \text{ bằng}$$

- A.** $3 + 5\ln 2$
B.
 $-2 + 5\ln 2.$
C. $4 + 5\ln 2$
D. $2 + 5\ln 2$

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Từ $f'(x) = \frac{3}{3x-1} \Rightarrow f(x) = \int \frac{3dx}{3x-1} = \begin{cases} \ln|3x-1| + C_1 & \text{khi } x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \\ \ln|3x-1| + C_2 & \text{khi } x \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right) \end{cases}$

Ta có:
$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f\left(\frac{2}{3}\right) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 + C_1 = 1 \\ 0 + C_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \ln|3x-1| + 1 & \text{khi } x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \\ \ln|3x-1| + 2 & \text{khi } x \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right) \end{cases}$$

Khi đó: $f(-1) + f(3) = \ln 4 + 1 + \ln 8 + 2 = 3 + \ln 32 = 3 + 5\ln 2.$

Cách 2: Ta có:
$$\begin{cases} f(0) - f(-1) = f(x)|_{-1}^0 = \int_{-1}^0 f'(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{3}{3x-1} dx = \ln|3x-1| \Big|_{-1}^0 = \ln \frac{1}{4} & (1) \\ f(3) - f\left(\frac{2}{3}\right) = f(x)|_{\frac{2}{3}}^3 = \int_{\frac{2}{3}}^3 f'(x) dx = \int_{\frac{2}{3}}^3 \frac{2}{2x-1} dx = \ln|3x-1| \Big|_{\frac{2}{3}}^3 = \ln 8 & (2) \end{cases}$$

Lấy (2)–(1), ta được: $f(3)+f(-1)-f(0)-f\left(\frac{2}{3}\right)=\ln 32 \Rightarrow f(-1)+f(3)=3+5\ln 2$

Câu 54: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(0;+\infty)\setminus\{e\}$, thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x(\ln x-1)}$, $f(e^2)=3$, $f\left(\frac{1}{e^2}\right)=\ln 6$.

Tính giá trị biểu thức $f\left(\frac{1}{e}\right)+f(e^3)$.

A. **Lời giải**

B. $3(\ln 2+1)$.

Chọn A

C. $2\ln 2$.

Ta có $f(x)=\int f'(x)dx=\int \frac{1}{x(\ln x-1)}dx=\int \frac{d(\ln x-1)}{\ln x-1}=\ln|\ln x-1|+C$

D. $3\ln 2+1$.

$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} \ln(\ln x-1)+C_1 & \text{khi } x\in(e;+\infty) \\ \ln(1-\ln x)+C_2 & \text{khi } x\in(0;e) \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} f(e^2)=3 \\ f\left(\frac{1}{e^2}\right)=\ln 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(\ln e^2-1)+C_1=3 \\ \ln\left(1-\ln\frac{1}{e^2}\right)+C_2=\ln 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=3 \\ C_2=\ln 2 \end{cases}$

Do đó $f(x)=\begin{cases} \ln(\ln x-1)+3 & \text{khi } x\in(e;+\infty) \\ \ln(1-\ln x)+\ln 2 & \text{khi } x\in(0;e) \end{cases} \Rightarrow f\left(\frac{1}{e}\right)+f(e^3)=3(\ln 2+1)$

Câu 55: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$, thỏa mãn $f'(x)=\frac{4}{x^2-4}$, $f(-3)=0$, $f(0)=1$ và

$f(3)=2$. Tính giá trị biểu thức $P=f(-4)+f(-1)+f(4)$.

A. **Lời giải**

B. $P=3+\ln\frac{3}{25}$.

Chọn B

C.

$P=3+\ln 3$.

D.

$P=2+\ln\frac{5}{3}$.

E.

$P=2-\ln\frac{5}{3}$.

Ta có $f(x)=\int f'(x)dx=\int \frac{4}{x^2-4}dx=\int \frac{4dx}{(x-2)(x+2)}=\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$

$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)+C_1 & \text{khi } x\in(2;+\infty) \\ \ln\left(\frac{2-x}{x+2}\right)+C_2 & \text{khi } x\in(-2;2) \\ \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)+C_3 & \text{khi } x\in(-\infty;-2) \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} f(3)=2 \\ f(0)=1 \\ f(-3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln\left(\frac{1}{5}\right)+C_1=2 \\ C_2=1 \\ \ln 5+C_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=2+\ln 5 \\ C_2=1 \\ C_3=-\ln 5 \end{cases}$

$$\text{Do đó } f(x) = \begin{cases} \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) + 2 + \ln 5 & \text{khi } x \in (2; +\infty) \\ \ln\left(\frac{2-x}{x+2}\right) + 1 & \text{khi } x \in (-2; 2) \\ \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) - \ln 5 & \text{khi } x \in (-\infty; -2) \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } P = f(-4) + f(-1) + f(4) = 3 + \ln 3$$

Câu 56: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$, thỏa mãn $f'(x) = \frac{4}{x^2 + x - 2}$, $f(-3) - f(3) = 0$, $f(0) = \frac{1}{3}$.

Giá trị của biểu thức $f(-4) + f(-1) - f(4)$.

A. $1 + \ln 80$.

B.

$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ln 2$.

C.

$1 + \ln 2 + \frac{1}{3} \ln \frac{4}{5}$

D.

$1 + \frac{1}{3} \ln \frac{8}{5}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{dx}{x^2 + x - 2} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} \ln \left(\frac{x-1}{x+2} \right) + C_1 & \text{khi } x \in (1; +\infty) \\ \frac{1}{3} \ln \left(\frac{1-x}{x+2} \right) + C_2 & \text{khi } x \in (-2; 1) \\ \frac{1}{3} \ln \left(\frac{x-1}{x+2} \right) + C_3 & \text{khi } x \in (-\infty; -2) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } f(-3) - f(3) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} \ln 4 + C_3 - \left(\frac{1}{3} \ln \frac{2}{5} + C_1 \right) = 0 \Leftrightarrow C_1 = C_3 + \frac{1}{3} \ln 10$$

$$f(0) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} \ln \frac{1}{2} + C_2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow C_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ln 2$$

$$\text{Do đó } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} \ln \left(\frac{x-1}{x+2} \right) + C_3 + \frac{1}{3} \ln 10 & \text{khi } x \in (1; +\infty) \\ \frac{1}{3} \ln \left(\frac{1-x}{x+2} \right) + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ln 2 & \text{khi } x \in (-2; 1) \\ \frac{1}{3} \ln \left(\frac{x-1}{x+2} \right) + C_3 & \text{khi } x \in (-\infty; -2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } f(-4) + f(-1) - f(4) &= \left(\frac{1}{3} \ln \frac{5}{2} + C_3 \right) + \left(\frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ln 2 \right) - \left(\frac{1}{3} \ln \frac{1}{2} + C_1 + \frac{1}{3} \ln 10 \right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ln 2 \end{aligned}$$

Câu 57: (SỞ BẮC GIANG -2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ và thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$,

$$f(-3) + f(3) = 0 \text{ và } f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2. \text{ Tính giá trị của biểu thức } P = f(0) + f(4).$$

A. Lời giải

$$P = \ln \frac{3}{5} + 2.$$

Chọn C

B.

$$P = 1 + \ln \frac{3}{5}.$$

C.

$$P = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{5}$$

D.

$$P = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{5}.$$

Ta có $\int f'(x) dx = \int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \int \frac{1}{(x-1)(x+1)} dx$

$$= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2} (\ln|x-1| - \ln|x+1|) + C = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} + C_1, & |x| > 1 \\ \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{x+1} + C_2, & |x| < 1 \end{cases}.$$

$$f(-3) = \frac{1}{2} \ln 2 + C_1; f(3) = -\frac{1}{2} \ln 2 + C_1, \text{ do đó } f(-3) + f(3) = 0 \Rightarrow C_1 = 0.$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln 3 + C_2; f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \ln 3 + C_2, \text{ do đó } f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \Rightarrow C_2 = 1.$$

$$f(0) = C_2 = 1; f(4) = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{5}, \text{ do đó } f(0) + f(4) = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{5}$$

Câu 58: (SỞ PHÚ THỌ -2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$,

$$f(-2) + f(2) = 0 \text{ và } f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2. \text{ Tính } f(-3) + f(0) + f(4) \text{ được kết quả}$$

A. $-1 + \ln \frac{4}{5}$

B. $-1 + \ln \frac{6}{5}$

C. $1 + \ln \frac{4}{5}$

D. $1 + \ln \frac{6}{5}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int f'(x) dx = \int \frac{2}{x^2 - 1} dx = \int \frac{2}{(x-1)(x+1)} dx$

$$= \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \ln|x-1| - \ln|x+1| + C = \begin{cases} \ln \frac{x-1}{x+1} + C_1, & |x| > 1 \\ \ln \frac{1-x}{x+1} + C_2, & |x| < 1 \end{cases}.$$

$$f(-2) = \ln 3 + C_1; f(2) = \ln \frac{1}{3} + C_1, \text{ do đó } f(-2) + f(2) = 0 \Rightarrow C_1 = 0.$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln 3 + C_2; f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln \frac{1}{3} + C_2, \text{ do đó } f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \Rightarrow C_2 = 1.$$

$$\text{Vậy } f(-3) + f(0) + f(4) = \ln 2 + 1 + \ln \frac{3}{5} = \ln \frac{6}{5} + 1$$

Câu 59: (CHUYÊN THÁI BÌNH LẦN 4-2018) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{1 + \sin 2x}$

$$\text{với } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, \text{ biết } F(0) = 1; F(\pi) = 0. \text{ Tính } P = F\left(-\frac{\pi}{12}\right) - F\left(\frac{11\pi}{12}\right).$$

A. Lời giải

$$P = 2 - \sqrt{3}.$$

Chọn D

B. $P = 0.$

Cách 1:

C. Không

tồn tại $P.$

D. $P = 1$.

$$\text{Ta có } \int f'(x) dx = \int \frac{1}{1 + \sin 2x} dx = \int \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} dx$$

$$= \int \frac{1}{2 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right)} dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + C_1, x \in \left(-\frac{5\pi}{4}; -\frac{\pi}{4} \right) + k2\pi \\ \frac{1}{2} \tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + C_1, x \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right) + k2\pi \end{cases}.$$

$$\begin{cases} F(0) = 1 \\ F(\pi) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} + C_2 = 1 \\ \frac{1}{2} + C_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = \frac{1}{2} \\ C_1 = -\frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} \tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{2}, x \in \left(-\frac{5\pi}{4}; -\frac{\pi}{4} \right) + k2\pi \\ \frac{1}{2} \tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2}, x \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right) + k2\pi \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } P = F\left(-\frac{\pi}{12}\right) - F\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \left(\frac{1}{2} \tan \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} \tan \frac{7\pi}{6} - \frac{1}{2}\right) = 1$$

Cách 2:

$$\begin{cases} F(0) - F\left(-\frac{\pi}{12}\right) = F(x) \Big|_{-\frac{\pi}{12}}^0 = \int_{-\frac{\pi}{12}}^0 \frac{dx}{1 + \sin 2x} \quad (1) \\ F(\pi) - F\left(\frac{11\pi}{12}\right) = F(x) \Big|_{\frac{11\pi}{12}}^{\pi} = \int_{\frac{11\pi}{12}}^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin 2x} \quad (2) \end{cases}$$

$$\text{Lấy (2) - (1) ta được } F\left(-\frac{\pi}{12}\right) - F\left(\frac{11\pi}{12}\right) + F(\pi) - F(0) = \int_{\frac{11\pi}{12}}^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin 2x} - \int_{-\frac{\pi}{12}}^0 \frac{dx}{1 + \sin 2x}$$

$$\xleftrightarrow{\text{casio}} F\left(-\frac{\pi}{12}\right) - F\left(\frac{11\pi}{12}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow F\left(-\frac{\pi}{12}\right) - F\left(\frac{11\pi}{12}\right) = 1$$