SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
LÂM ĐỒNG

KỲ THI CHỌN HỌC SINH VÀO ĐỘI TUYỂN
BỒI DƯỠNG THI HSG QG NĂM 2021

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi có 01 trang)

Môn thi: **TOÁN**
Thời gian làm bài: 180 phút
Ngày thi: 11/9/2020

Câu 1. ***(4,0 điểm)*** Chứng minh rằng $\left(x^2+2\right)\left(y^2+2\right)\left(z^2+2\right)\geq 9\left(xy+yz+zx\right), \forall x,y,z>0.$

Câu 2. ***(4,0 điểm)*** Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{e^x}{\left(x+1\right)^2}.$

a) Chứng minh rằng phương trình $f\left(x\right)=x$ có duy nhất một nghiệm trong $\left[\dfrac{1}{2},1\right].$

b) Chứng minh dãy số $\left(u_n\right)$ xác định bởi $u_1=1, u_{n+1}=f\left(u_n\right), \forall n\in\mathbb{N}^*$ có giới hạn.

Câu 3. ***(4,0 điểm)*** Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi H là hình chiếu của A lên BC và D,E,M lần lượt là trung điểm HB,HC,BC. Đường tròn (ABE) tâm I cắt AC tại S và đường tròn (ACD) tâm J cắt AB tại R.

a) Chứng minh rằng $BC=4IJ$.

b) Trung tuyến đỉnh H của tam giác AHM cắt RS tại T, chứng minh rằng các đường thẳng AT,BS,CR đồng quy.

Câu 4. ***(4,0 điểm)*** Cho số $a=2019\cdot 2020\cdot 2021$ và số nguyên dương $n\geq 3$. Người ta xếp n số nguyên dương nào đó lên một đường tròn thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

(i) Hai số nằm cạnh nhau có tích không chia hết cho a.

(ii) Hai số không nằm cạnh nhau có tích chia hết cho a.

a) Tìm một bộ các số nguyên dương thỏa mãn cách xếp trên.

b) Tìm giá trị lớn nhất của n.

Câu 5. ***(4,0 điểm)*** Cho tập $S=\{1,2,\ldots,n\}$ với n là số nguyên dương. Gọi A_n là tập hợp các hoán vị $\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right)$ của tập S thỏa mãn điều kiện $2\left(a_1+a_2+\cdots+a_k\right)$ chia hết cho k với mọi $k=1,2,\ldots,n$.

a) Chứng minh rằng a_n-1 chia hết cho $n-1$ khi n chẵn và $n>3$.

b) Tìm số phần tử của A_{2020}.

------- Hết -------