ĐỀ VÀ HDG HỌC SINH GIỎI 12 ĐIỆN BIÊN 2018-2019

Câu 1: **(6,0 điểm)**

1. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-1}(C)$ và đường thẳng $d: x-y-1=0$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến đó song song với d.

2. Tìm m để hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x+m+2$ đồng biến trên khoảng $\left(2;+\infty\right)$.

Câu 2: **(4,0 điểm)**

1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{2\sin^2 x}{\sin^4\dfrac{x}{2}+\cos^4\dfrac{x}{2}}$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-y^3-3\left(2x^2-y^2+2y\right)+15x-10=0 \\ \sqrt{2-y}+\sqrt{3-x}=2x-2 \end{cases}\left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.

Câu 3: **(4,0 điểm)**

1. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau được chọn từ các số $0;1;2;3;4;5;6;7;8;9$. Xác định số phần tử của S. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để số được chọn là số chẵn.

2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A\left(0;9\right), B\left(3;6\right)$. Gọi D là miền nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x-y+a\le 0 \\ 6x+3y+5a\ge 0 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của a để $AB\subset D$.

Câu 4: **(4,0 điểm)**

1. Cho hình chóp $SABC$. Trên các đoạn thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A', B', C' khác với điểm S. Chứng minh rằng: $\dfrac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}}=\dfrac{SA}{SA'}.\dfrac{SB}{SB'}.\dfrac{SC}{SC'}$

2. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, có $AB=a, SA=a\sqrt{3}$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, G là trọng tâm tam giác SCD.

a) Tính thể tích khối chóp $S.OGC$.

b) Tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng $\left(SBC\right)$.

c) Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SA và BG.

Câu 5: **(2,0 điểm)**

1. Cho phương trình $\left(m+2\right)\sqrt{x\left(x^2+1\right)}-x^2+\left(m-6\right)x-1=0$ $\left(1\right)$. Tìm các giá trị của m để phương trình $\left(1\right)$ có nghiệm thực.

2. Cho đa thức $f\left(x\right)=x^4+ax^3+bx^2+ax+1$ có nghiệm thực. Chứng minh rằng $a^2+b^2-4b+1>0$.

HDG

Câu 1: **(6,0 điểm)**

1. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-1}(C)$ và đường thẳng $d:x-y-1=0$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến đó song song với d.

2. Tìm m để hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x+m+2$ đồng biến trên khoảng $\left(2;+\infty\right)$.

Tập xác định: $\mathbb{R}$.

Lời giải

1. $d:x-y-1=0\Rightarrow d:y=x-1\Rightarrow$ d có hệ số góc $k_d=1$.

Xét hàm số $y=f(x)=\dfrac{2x-3}{x-1}$:

+ Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$.

+ $f'(x)=\dfrac{1}{\left(x-1\right)^2}$, $\forall x\neq 1$.

Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) tại $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-3}{x_0-1}\right)$ thì $\Delta: y=f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{2x_0-3}{x_0-1}$

+ Giả sử $\Delta//d$ ta được $f'(x_0)=k_d\Leftrightarrow\dfrac{1}{\left(x_0-1\right)^2}=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=2\end{array}\right.$.

+ Thử lại:

• $x_0=0\Rightarrow\Delta: y=x+3$ thỏa mãn $\Delta//d$.

• $x_0=2\Rightarrow\Delta: y=x-1\Rightarrow\ \Delta\equiv d$. Trường hợp này không thỏa mãn.

Vậy có đúng một tiếp tuyến của (C) thỏa đề, đó là $\Delta: y=x+3$.

2. $y'=3x^2-6mx+3(m^2-1)$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m-1\\x=m-1\end{array}\right.$: Hai nghiệm phân biệt với mọi m.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		m-1		m+1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	y_1	↘	y_2	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên $(2;+\infty) \Leftrightarrow (2;+\infty) \subset (m+1;+\infty) \Leftrightarrow m+1 \le 2 \Leftrightarrow m \le 1$.

Vậy m cần tìm là $m \le 1$.

Câu 2: **(4,0 điểm)**

1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{2\sin^2 x}{\sin^4 \dfrac{x}{2} + \cos^4 \dfrac{x}{2}}$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 - 3(2x^2 - y^2 + 2y) + 15x - 10 = 0 \\ \sqrt{2-y} + \sqrt{3-x} = 2x - 2 \end{cases} (x; y \in \mathbb{R})$.

Lời giải

1. Ta có $\sin^4 \dfrac{x}{2} + \cos^4 \dfrac{x}{2} = 1 - 2\sin^2 \dfrac{x}{2}\cos^2 \dfrac{x}{2} = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 x = \dfrac{2 - \sin^2 x}{2} \ne 0, \forall x$.

Cách 1:

Khi đó $f(x) = \dfrac{4\sin^2 x}{2 - \sin^2 x} = \dfrac{8}{2 - \sin^2 x} - 4$.

Vì $0 \le \sin^2 x \le 1 \Rightarrow 1 \le 2 - \sin^2 x \le 2$ nên $4 \le \dfrac{8}{2 - \sin^2 x} \le 8$. Do đó $0 \le f(x) \le 4$.

Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \, (k \in \mathbb{Z})$,

$f(x) = 4 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \, (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là 0 đạt được khi $x = k\pi \, (k \in \mathbb{Z})$,

giá trị lớn nhất của $f(x)$ là 4 đạt được khi $x = \pm \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \, (k \in \mathbb{Z})$.

Cách 2: Đặt $\sin^2 x = t$, Điều kiện $t \in [0;1]$

2. Điều kiện: $\begin{cases} x \le 3 \\ y \le 2 \end{cases}$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$(x-2)^3 + 3(x-2) = (y-1)^3 + 3(y-1) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+3t, t\in\mathbb{R}$.

Khi đó ta có $f'(t)=3t^2+3>0, \forall t\in\mathbb{R}$. Do đó $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Nên phương trình (1) trở thành $f(x-2)=f(y-1)\Leftrightarrow x-2=y-1\Leftrightarrow y=x-1$.

Thay $y=x-1$ vào phương trình thứ hai ta được:

$2\sqrt{3-x}=2x-2\Leftrightarrow\sqrt{3-x}=x-1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\ 3-x=x^2-2x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\ \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=2$$

Với $x=2$ thì $y=1$ (thỏa mãn).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)=(2;1)$.

Câu 3: **(4,0 điểm)**

1. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau được chọn từ các số $0;1;2;3;4;5;6;7;8;9$. Xác định số phần tử của S. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để số được chọn là số chẵn.

2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(0;9), B(3;6)$. Gọi D là miền nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}2x-y+a\leq 0\\ 6x+3y+5a\geq 0\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của a để $AB\subset D$.

Lời giải

1. Số phần tử của tập S là $n(S)=9.9.8.7.6=27216$.

Gọi số chẵn thuộc tập S có dạng $\overline{abcde}\,(a\neq 0)$.

Nếu $e\in\{2;4;6;8\}$, trường hợp này ta có: $8.8.7.6.4=10752$ số.

Nếu $e=0$, trường hợp này ta có: $9.8.7.6=3024$ số.

Vậy xác suất cần tìm là: $P=\dfrac{10752+3024}{27216}=\dfrac{13776}{27216}=\dfrac{41}{81}$.

2. Phương trình đường thẳng $AB: x+y-9=0$.

Trường hợp 1: Nếu AB là đường thẳng.

Xét hệ $\begin{cases}a\leq -2x+y\\ 5a\geq -6x-3y\end{cases}$.

Dễ thấy điểm $C(2;7)\in AB$ nhưng $C\notin D$ vì $\begin{cases}a\leq -12\\ 5a\geq -\dfrac{33}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\leq -12\\ a\geq -\dfrac{33}{10}\end{cases}\Leftrightarrow a\in\phi$.

Trường hợp 2: Nếu AB là đoạn thẳng. Ta thay $y=9-x\,(x\in[0;3])$ vào hệ $\begin{cases}a\leq -2x+y\\ 5a\geq -6x-3y\end{cases}$

ta được $\begin{cases} a \le 9-3x \\ a \ge \dfrac{-3x-27}{5} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{-3x-27}{5} \le a \le 9-3x \; (*)$

$(*)$ đúng với $\forall x \in [0;3] \Leftrightarrow -\dfrac{27}{5} \le a \le 0$.

Vậy $-\dfrac{27}{5} \le a \le 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4: **(4,0 điểm)**

1. Cho hình chóp $SABC$. Trên các đoạn thẳng $SA,\ SB,\ SC$ lần lượt lấy các điểm A', B', C' khác với điểm S. Chứng minh rằng: $\dfrac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}} = \dfrac{SA}{SA'}.\dfrac{SB}{SB'}.\dfrac{SC}{SC'}$

2. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, có $AB = a, SA = a\sqrt{3}$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, G là trọng tâm tam giác SCD.

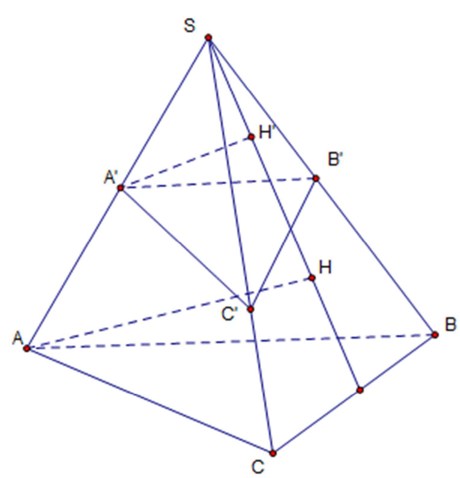
a) Tính thể tích khối chóp $S.OGC$.

b) Tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC).

c) Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SA và BG.

Lời giải

1.



Gọi H, H' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, A' trên (SBC).

Ta có $\dfrac{AH}{AH'} = \dfrac{SA}{SA'}$

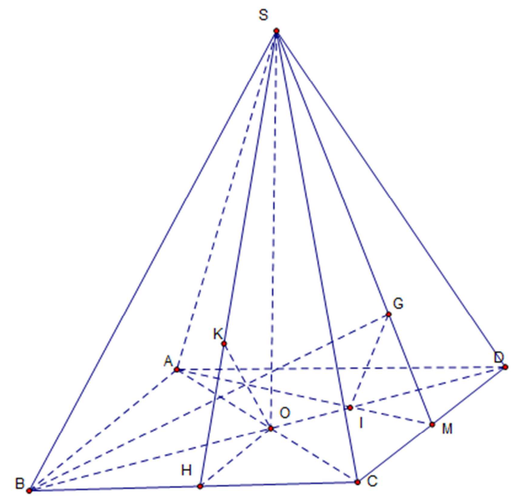
$S_{SBC} = \dfrac{1}{2} SB.SC.\sin \widehat{BSC}$; $S_{SB'C'} = \dfrac{1}{2} SB'.SC'.\sin \widehat{BSC}$

Khi đó $V_{S.ABC} = V_{A.SBC} = \dfrac{1}{3} AH.S_{SBC} = \dfrac{1}{6} AH.SB.SC.\sin \widehat{BSC}$

$V_{S.A'B'C'} = V_{A'.SB'C'} = \dfrac{1}{3} A'H'.S_{SB'C'} = \dfrac{1}{6} A'H'.SB'.SC'.\sin \widehat{BSC}$

Vậy $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}}=\frac{AH}{A'H'}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SC}{SC'}=\frac{SA}{SA'}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SC}{SC'}$

2.



a) Ta có $AC=a\sqrt{2}$; $SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=\frac{a\sqrt{10}}{2}$

Gọi M là trung điểm CD

Khi đó $V_{S.OCM}=\frac{1}{6}SO.OM.MC=\frac{a^3\sqrt{10}}{48}$

$\frac{V_{S.OCG}}{V_{S.OCM}}=\frac{SG}{SM}=\frac{2}{3}$

Suy ra $S.OGC=\frac{2}{3}S.OMC=\frac{a^3\sqrt{10}}{72}$.

b) Ta có $d(G,(SBC))=\frac{2}{3}d(M,(SBC))=\frac{2}{3}d(O,(SBC))$

Gọi H là trung điểm BC, K là hình chiếu vuông góc của O trên SH.

Ta có $\frac{1}{OK^2}=\frac{1}{OH^2}+\frac{1}{OH^2}=\frac{4}{a^2}+\frac{4}{10a^2}=\frac{22}{5a^2}$

$d(O,(SBC))=OK=\frac{a\sqrt{110}}{22}$

$d(G,(SBC))=\frac{2}{3}d(O,(SBC))=\frac{a\sqrt{110}}{33}$

c) Gọi I là giao điểm của BD và AM, I là trong tam tam giác ADC.

Suy ra $IG//SA$ nên góc giữa hai đường thẳng SA và BG bằng góc giữa hai đường thẳng IG và BG

Ta có $IG=\frac{1}{3}SA=\frac{a\sqrt{3}}{3}$; $BI=\frac{2a\sqrt{2}}{3}$; $BG=\frac{a\sqrt{11}}{3}$

$\cos\widehat{IGB}=\frac{BG^2+IG^2-BI^2}{2.BG.IG}=\frac{\sqrt{33}}{11}$

Ta có thể tọa độ hóa.

Câu 5: **(2,0 điểm)**

1. Cho phương trình $(m+2)\sqrt{x(x^2+1)}-x^2+(m-6)x-1=0\ (1)$. Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm thực.

2. Cho đa thức $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+ax+1$ có nghiệm thực. Chứng minh rằng $a^2+b^2-4b+1>0$.

Lời giải

1. Điều kiện: $x\ge 0$.

- Với $x=0$ thì phương trình vô nghiệm.

- Với $x>0$, phương trình $(1)\Leftrightarrow (m+2)\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}-\dfrac{x^2+1}{x}+m-6=0$.

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}\Rightarrow\begin{cases} t\ge\sqrt{2} \\ t^2=\dfrac{x^2+1}{x}\end{cases}$;

Ta được phương trình mới theo ẩn phụ: $(m+2)t-t^2+m-6=0\Leftrightarrow\dfrac{t^2-2t+6}{t+1}=m\ (2)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (2)$ có nghiệm trên $\left[\sqrt{2};+\infty\right)$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2-2t+6}{t+1}\Rightarrow f'(t)=\dfrac{t^2+2t-8}{(t+1)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=-4\,(l) \\ t=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-4		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y					$2\sqrt{2}-2$		2		$+\infty$

Vậy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m\ge 2$.

2. Giả sử đa thức đã cho có nghiệm trong trường hợp $a^2+b^2-4b+1\le 0$.

$a^2+b^2-4b+1\le 0\Leftrightarrow a^2+(b-2)^2\le 3\ (1)$.

Vì $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình $f(x)=0$ nên

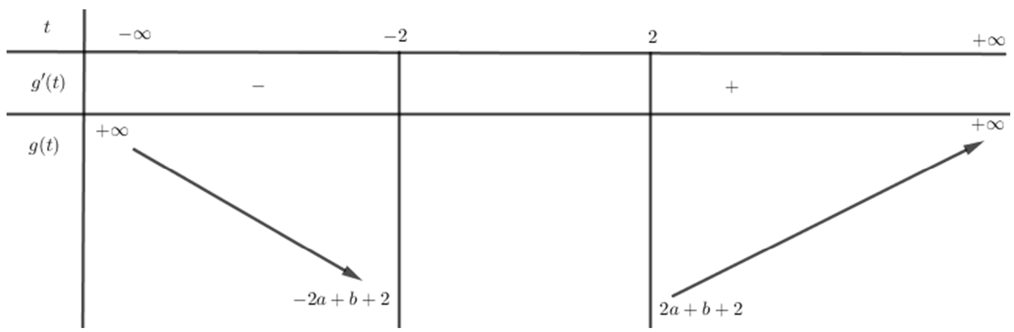
$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0 \Leftrightarrow \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+a\left(x+\frac{1}{x}\right)+b=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2+a\left(x+\frac{1}{x}\right)+b-2=0.$$

Đặt $t=x+\frac{1}{x}$ thì phương trình trên có nghiệm khi và chỉ khi $t^2+at+b-2=0$ có nghiệm thoả mãn $|t|\geq 2$.

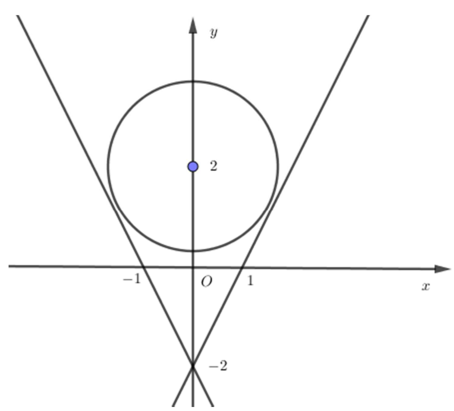
Xét hàm số $g(t)=t^2+at+b-2$

$g'(t)=2t+a$; $g'(t)=0 \Leftrightarrow t=\frac{-a}{2}$. Như (1) trên thì $\frac{-a}{2}\notin(-2;2)$

Do đó ta có bảng biến thiên:



Phương trình có nghiệm thì $\left[\begin{array}{ll} -2a+b+2\leq 0 & (2) \\ 2a+b+2\leq 0 & (3) \end{array}\right.$



Những điểm $M(a;b)$ thoả (1) thì nằm bên trong hoặc biên đường tròn tâm $I(0;2)$ và bán kính bằng $\sqrt{3}$.

Những điểm $N(a;b)$ thoả mãn (2) và (3) là những điểm thuộc phần không chứa gốc tạo độ của các đường thẳng $\left[\begin{array}{l} -2x+y+2=0 \\ 2x+y+2=0 \end{array}\right.$.

Những phần đó theo hình vẽ là không có điểm chung, vì vậy ta có mâu thuẫn.

Ta có điều phải chứng minh: Nếu đã thức đã cho có nghiệm thì $a^2+b^2-4b+1>0$.

Chú ý: Bài có thể giải nhanh như sau:

$$t^2+at+b-2=0 \Leftrightarrow t^2=-at+2-b \Rightarrow t^4=\left(-at+2-b\right)^2 \le \left[a^2+\left(b-2\right)^2\right]\left(1+t^2\right)$$

$$\Rightarrow a^2+\left(b-2\right)^2>\frac{t^4-1}{t^2+1}=t^2-1\ge 3 \Rightarrow a^2+b^2-4b+1>0.$$