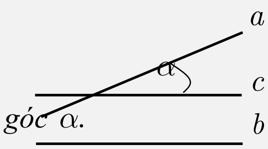
Vấn đề 7 GÓC - KHOẢNG CÁCH

A. GÓC TRONG KHÔNG GIAN

① ***Góc giữa đường thẳng a và đường thẳng b***

Phương pháp 1. *Sử dụng song song, tức dựng đường thẳng $c \parallel b$ và c cắt a.*



Khi đó $\widehat{(a;b)} = \widehat{(a;c)} = \alpha$ như hình vẽ.

Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông hoặc định lí hàm số sin, côsin để tìm góc α.

Phương pháp 2. *Sử dụng tích vô hướng, nghĩa là $\cos(a;b) = \cos(\vec{a};\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \cos\alpha$.*

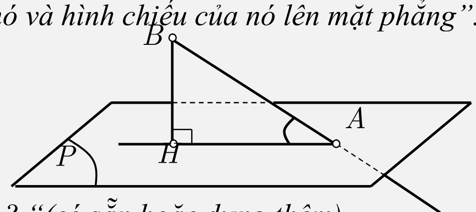
Khi đó, ta cần chèn điểm phù hợp để tính tích vô hướng.

Phương pháp 3. *Ghép vào hệ trục tọa độ Oxyz.*

Lưu ý: *Góc giữa hai đường thẳng là **góc nhọn**, còn góc giữa hai véctơ là góc nhọn hoặc góc tù. Nghĩa là nếu tính $\widehat{(a;b)} = \alpha \le 90^\circ$ thì góc giữa a, b là α, còn nếu tính $\widehat{(a;b)} = \alpha > 90^\circ$ thì góc giữa hai đường thẳng $\widehat{(a;b)} = 180^\circ - \alpha$.*

② ***Góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (P)***

Cần nhớ: *"Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng là góc tạo bởi nó và hình chiếu của nó lên mặt phẳng".*



Phương pháp 1. *Sử dụng hình học 11.*

B. 1. *Tìm $AB \cap (P) = \{A\}$ (1)*

B. 2. *Tìm hình chiếu của B lên mặt phẳng (P).*

Đặt câu hỏi và trả lời: "Đường nào qua B và vuông góc với (P)? "(có sẵn hoặc dựng thêm)

Trả lời: $BH \perp (P)$ tại H (2)

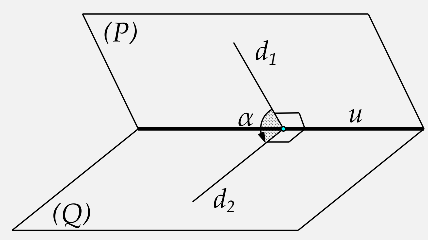
Từ (1),(2), suy ra AH là hình chiếu của AB lên mặt phẳng (P).

Do đó góc giữa đường thẳng AB và mp(P) là góc giữa AB và AH, chính là góc $\widehat{BAH}$.

B. 3. *Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông hoặc định lí hàm số côsin hoặc định lí hàm sin trong tam giác thường để suy ra góc $\widehat{BAH}$.*

Phương pháp 2. *Ghép vào hệ trục tọa độ Oxyz.*

③ ***Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q).***



Phương pháp 1. *Dựa vào định nghĩa*

Ta có: $\begin{cases} (P) \cap (Q) = u \\ u \perp d_1 \subset (P) \\ u \perp d_2 \subset (Q) \end{cases} \Rightarrow \widehat{((P),(Q))} = \widehat{(d_1,d_2)} = \alpha.$

Phhương pháp 2. *Tìm hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt vuông góc với mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q). Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa d_1 và d_2.*

Phương pháp 3. *Sử dụng công thức hình chiếu $S' = S.\cos\alpha$.*

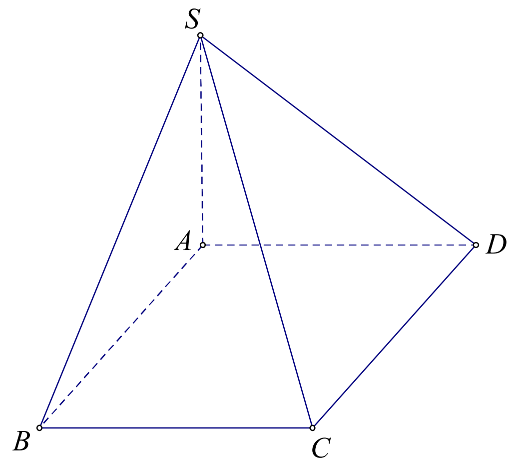
Phương pháp 4. *Trong trường hợp quá khó, nên sử dụng công thức $\sin\alpha = \dfrac{d_{[A,(Q)]}}{d_{(A,u)}}$.*

Trong đó $\alpha = \widehat{((P),(Q))}$, $A \in (P)$ và $(P) \cap (Q) = u$ là giao tuyến của (P) và (Q).

Phương pháp 5. *Ghép vào hệ trục tọa độ Oxyz.*

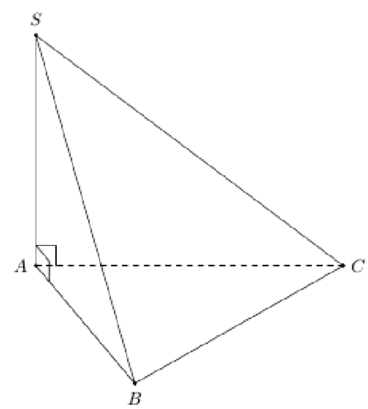
CÂU HỎI CÙNG MỨC ĐỘ ĐỀ MINH HỌA

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $\sqrt{3}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=\sqrt{2}a$. Góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. 45^0. **B.** 60^0. **C.** 30^0. **D.** 90^0.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA=a\sqrt{2}$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AC=2a$ (minh họa như hình bên). Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng



A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có SB vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SB=a\sqrt{3}$, tam giác ABC vuông tại A, $AB=a$ và $AC=2a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Câu 4. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có $AB=a\sqrt{2}$, $SB=2a$. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) bằng

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SB=a\sqrt{6}$, tam giác ABC vuông cân tại C, $AB=2a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

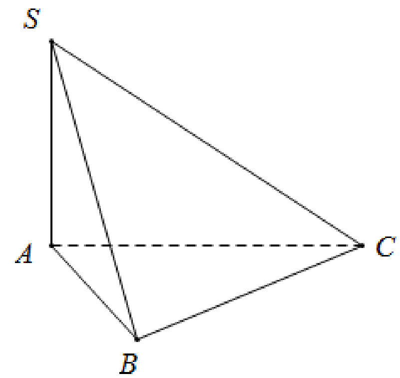
Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a\sqrt{2}, BC=2a$, $SA=3a$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính góc giữa đường thẳng SM và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $120°$.

Câu 7. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng $2a$. Gọi α là góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD). Tính $\cos\alpha$.

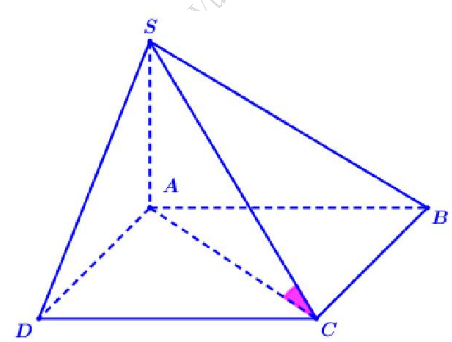
A. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), tam giác ABC vuông cân tại B và $AC = 2a$ (minh họa như hình bên). Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Tính độ dài cạnh bên SA.



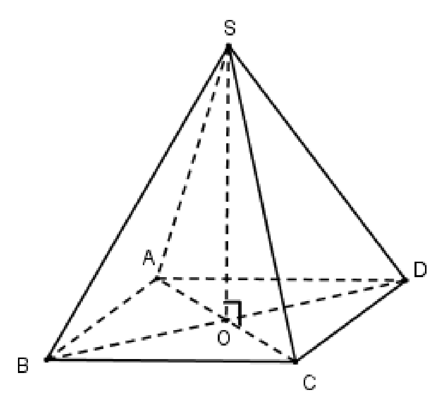
A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $a\sqrt{6}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $2a\sqrt{3}$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 2a, AD = a\sqrt{2}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



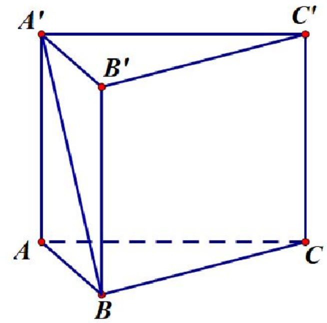
A. 45^0. **B.** 30^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Câu 10. Cho chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $3a$ (minh họa như hình bên). Gọi φ là góc giữa giữa cạnh bên và mặt đáy. Mệnh đề nào sau đây đúng?



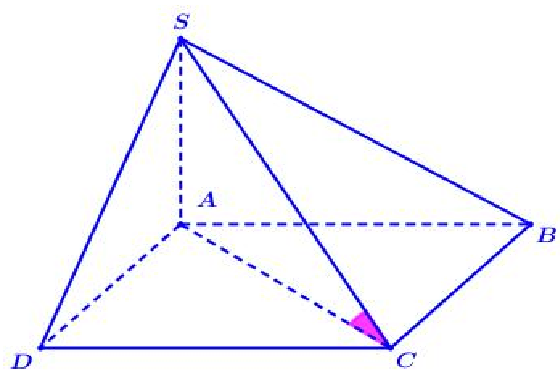
A. $\tan\varphi = \frac{\sqrt{14}}{7}$. **B.** $\tan\varphi = \frac{3}{2}$. **C.** $\varphi = 45^0$. **D.** $\tan\varphi = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

Câu 11. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là ΔABC vuông cân tại B, $AC = 2\sqrt{2}a$ (minh họa như hình bên). Góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Tính độ dài cạnh bên của hình lăng trụ.



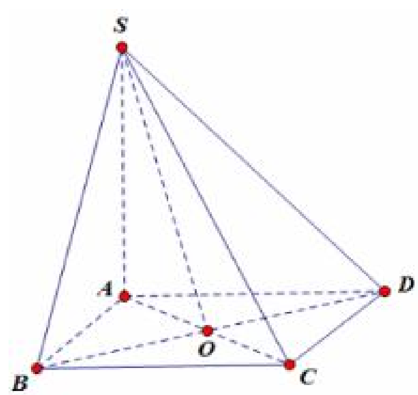
A. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $2a\sqrt{3}$. **C.** $2a\sqrt{6}$. **D.** $2a$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh bằng a, $\widehat{ABC} = 60^0$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$. Tính $\tan\alpha$



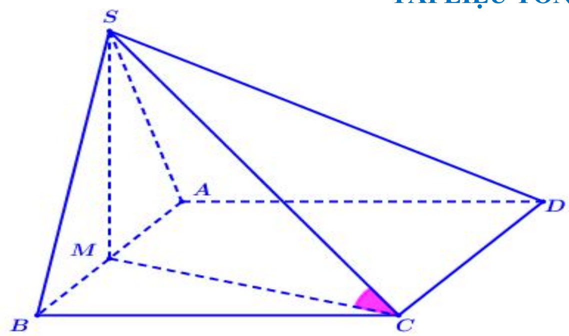
A. $\sqrt{3}$. **B.** 1. **C.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 13. Cho chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh bằng $\sqrt{2}a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi φ góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?



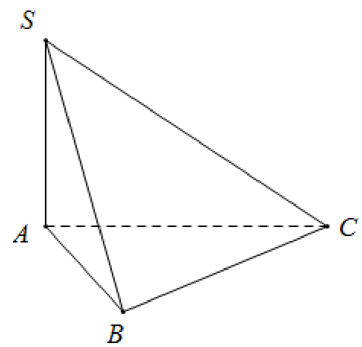
A. $\tan\varphi = \sqrt{6}$. **B.** $\varphi = 45°$. **C.** $\varphi = 60°$. **D.** $\varphi = 90°$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của AB, $SM \perp (ABCD)$ và $SM = a\sqrt{5}$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$. Tính $\tan\alpha$



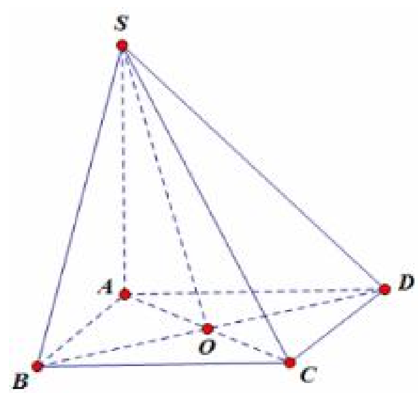
A. $\dfrac{\sqrt{30}}{3}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{22}}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = a\sqrt{3}$, tam giác ABC đều (minh họa như hình bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng $30°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.



A. $\dfrac{9a^3}{4}$. **B.** $\dfrac{27a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{a^3}{4}$. **D.** $\dfrac{81a^3}{4}$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh $2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$ .Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng:



A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Câu 17. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AC' = a\sqrt{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng qua AC' cắt BB', DD' lần lượt tại M, N sao cho tam giác AMN cân tại A có $MN = a$. Tính $\cos\varphi$ với $\varphi = \left(\widehat{(P),(ABCD)}\right)$.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 18. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $AB = 2,\ AD = 3;\ AA' = 4$. Góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$ là α. Tính giá trị gần đúng của góc α ?

A. $45{,}2°$. **B.** $38{,}1°$. **C.** $53{,}4°$. **D.** $61{,}6°$.

Câu 19. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $AB=2,\ AD=3;\ AA'=4$. Góc giữa hai mặt phẳng $(BC'D)$ và $(A'C'D)$ là α. Tính giá trị gần đúng của góc α?

A. $45,2°$. **B.** $38,1°$. **C.** $53,4°$. **D.** $61,6°$.

Câu 20. Cho tứ diện $ABCD$ có $BD=2$. Hai tam giác ABD và BCD có diện tích lần lượt là 6 và 10. Biết thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng 16. Tính số đo góc giữa hai mặt phẳng (ABD) và (BCD).

A. $\arccos\left(\frac{4}{15}\right)$. **B.** $\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)$. **C.** $\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$. **D.** $\arcsin\left(\frac{4}{15}\right)$.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình thoi, $SA=SC$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng?

A. $90°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) bằng?

A. $30°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

Câu 23. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi S là điểm trong không gian sao cho SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H và I lần lượt là trung điểm của AB và BC. Góc giữa hai mặt phẳng (SHC) và (SDI) bằng.

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $90°$. **D.** $45°$.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$.

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

B. KHOẢNG CÁCH TRONG KHÔNG GIAN

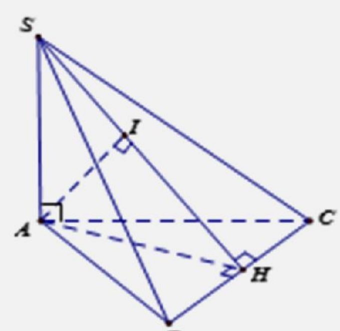
① **Tính khoảng cách từ chân đường cao của hình chóp đến mặt bên của hình chóp**.

Tính khoảng cách từ A đến mặt bên (SBC) của hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$

- **B1**. Xác định giao tuyến của mặt bên và mặt phẳng đáy $(SBC)\cap(ABC)=BC$.
- **B2**. Dựng hình $\begin{cases}AH\perp BC\\ AI\perp SH\end{cases}\Rightarrow AI\perp(SBC)$.

Suy ra $d(A;(SBC))=AI$.

- **B3**. Tính AI.



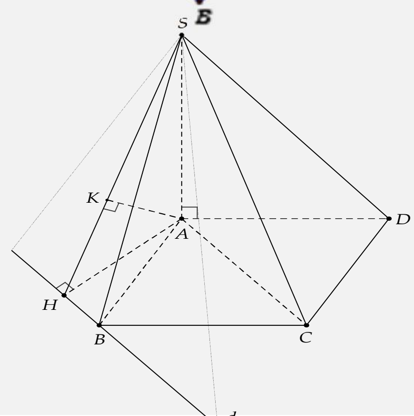
Các phương pháp quy về bài toán chân đường cao:
— Kẻ song song để dời điểm về chân đường vuông góc.
— Dùng tỉ số khoảng cách để dời về chân đường vuông góc.
— Tạo chân đường cao giả (∥ đường cao, khi mặt chứa chân).

② **Tính khoảng cách giữa cạnh bên và cạnh thuộc mặt đáy.**

Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$. Hãy tính khoảng cách giữa cạnh bên SB và cạnh thuộc mặt đáy AC.

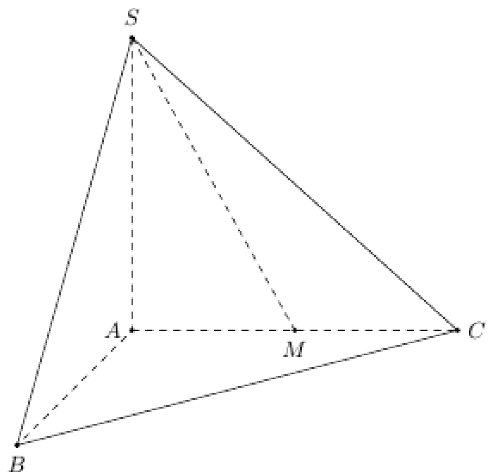
- **B1**. Xác định giao điểm của cạnh bên SB và mặt phẳng đáy $SB\cap(ABCD)=B$.
- **B2**. Qua giao điểm B, dựng đường thẳng d song song với AC. Khi đó: $d(AC,SB)=d(AC,(SB,d))=d(A,(SB,d))$.

Đây là bài toán tìm khoảng cách từ chân đến mặt bên. Cụ thể:
$d(AC,SB)=d(AC,(SB,d))=d(A,(SB,d))=AK$.



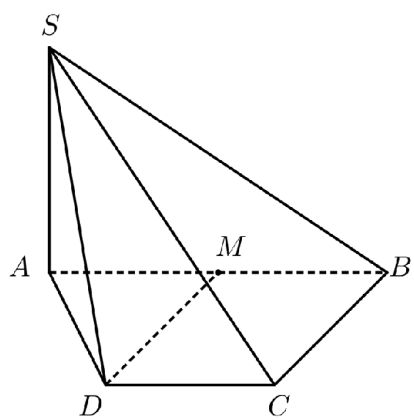
CÂU HỎI CÙNG MỨC ĐỘ ĐỀ MINH HỌA

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = 2a$, $AC = 4a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$ (hình minh họa). Gọi M là trung điểm của AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BC bằng



A. $\frac{2a}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}a}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a}{3}$. **D.** $\frac{a}{2}$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $AB = 2a$, $AD = DC = CB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 3a$ (minh họa như hình bên). Gọi M là trung điểm của AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và DM bằng



A. $\frac{3a}{4}$. **B.** $\frac{3a}{2}$. **C.** $\frac{3\sqrt{13}a}{13}$. **D.** $\frac{6\sqrt{13}a}{13}$.

Câu 3. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và cạnh bên có độ dài bằng a. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng $(A'BC')$.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{7}$. **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{16}$.

Câu 4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với O. Biết tam giác $AA'C$ vuông cân tại A'. Tính khoảng cách h từ điểm D đến mặt phẳng $(ABB'A')$.

A. $h = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. **B.** $h = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $h = \frac{a\sqrt{2}}{6}$. **D.** $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $AD = 2a$, $DC = a$, $AB = 2a$. Gọi I là trung điểm cạnh AD, hai mặt phẳng (SIB), (SIC) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc $60°$. Tính khoảng cách h từ I đến mặt phẳng (SBC).

A. $h=\dfrac{a\sqrt{15}}{15}$. **B.** $h=\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **C.** $h=\dfrac{3a\sqrt{15}}{10}$. **D.** $h=\dfrac{3a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là nửa lục giác đều $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD=2a$ và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ với $SA=a\sqrt{6}$. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD).

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $(SAC)\perp(ABC)$, $AB=3a$, $BC=5a$. Biết rằng $SA=2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SAC}=30^0$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng :

A. $\dfrac{3\sqrt{17}}{4}a$. **B.** $\dfrac{6\sqrt{7}}{7}a$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{7}}{14}a$. **D.** $\dfrac{12}{5}a$.

Câu 8. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm CD. Khoảng cách giữa AC và BM là

A. $\dfrac{a\sqrt{154}}{28}$. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{22}}{11}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

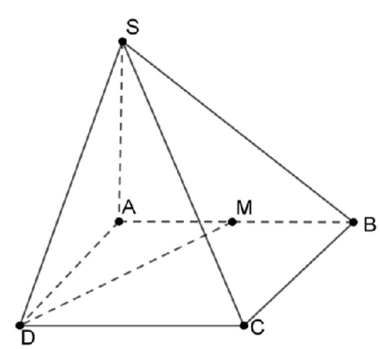
Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$, có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, $SA=2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy (minh họa như hình vẽ). Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB,AC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và SC bằng.

A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{57}}{19}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=2a, AD=4a, SA\perp(ABCD)$, $SA=2a\sqrt{15}$. Gọi M là trung điểm của BC, N là điểm nằm trên cạnh AD sao cho $AD=4DN$. Khoảng cách giữa MN *và* SB là

A. $\dfrac{4a\sqrt{285}}{19}$ **B.** $\dfrac{2a\sqrt{285}}{15}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{285}}{19}$ **D.** $\dfrac{2a\sqrt{285}}{19}$

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Gọi M là trung điểm AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và DM bằng



A. $\dfrac{2\sqrt{21}}{21}a$ **B.** $\dfrac{\sqrt{21}}{8}a$ **C.** $\dfrac{4\sqrt{21}}{21}a$ **D.** a

Câu 12. Cho hình chóp đáy là hình vuông cạnh $a, SD=\frac{a\sqrt{17}}{2}$, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trung điểm H của đoạn AB. Gọi K là trung điểm của đoạn AD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng HK và SD theo a.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{5}$ **B.** $\frac{a\sqrt{286}}{26}$ **C.** $\frac{5a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{39}}{3}$

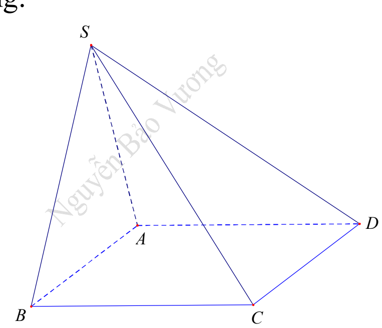
Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $3a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Gọi M là điểm thảo mãn $\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và DM bằng

A. $\frac{\sqrt{154}}{77}a$. **B.** $\frac{3\sqrt{154}a}{154}$. **C.** $\frac{6\sqrt{154}}{77}a$. **D.** $\frac{2\sqrt{154}}{77}a$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN với DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SH=a\sqrt{3}$.Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a.

A. $\frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}$. **B.** $\frac{\sqrt{21}a}{7}$. **C.** $\frac{a\sqrt{57}}{6}$. **D.** $\frac{3\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên $SA=a\sqrt{5}$, mặt bên SAB là tam giác cân đỉnh S và thuộc mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách gữa hai đường thẳng AD và SC bằng:



A. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{4a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{15}}{5}$.

Câu 16. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB=a$, $BC=2a$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AC, CC', $A'B$ và H là hình chiếu của A lên BC. Tính khoảng cách giữa MP và NH.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a}{2}$.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABC$ đều. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC sao cho $SG=AB=a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CG bằng

A. $\frac{a}{2}$. **B.** a. **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là vuông cạnh a, $SA=2a$ và vuông góc với $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của SD. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SB và CM.

A. $d=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $d=\frac{3a}{2}$. **C.** $d=\frac{2a}{3}$. **D.** $d=\frac{a}{3}$.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật. Tam giác SAB vuông cân tại A và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy và $SB=4\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh SD. Tính khoảng cách l từ điểm M đến mặt phẳng (SBC)

A. $l=2$. **B.** $l=2\sqrt{2}$. **C.** $l=\sqrt{2}$. **D.** $l=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD}=60°$, $SB=a$ và mặt phẳng (SBA) và mặt phẳng (SBC) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\frac{\sqrt{21}a}{7}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}a}{7}$. **C.** $\frac{\sqrt{21}a}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{15}a}{3}$.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng $2a\sqrt{3}$, góc $\widehat{BAD}$ bằng $120°$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Góc gữa mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng $45°$. Khoảng cách h từ A đến mặt phẳng (SBC) là

A. $h=2a\sqrt{2}$. **B.** $h=\frac{2a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $h=\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $h=a\sqrt{3}$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, $\widehat{ADC}=30°$, $AB=a$, $AD=2a$, $SA=a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a}{2}$.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$, $AC=2a$, $SA=2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{84}}{7}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 24. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh $2a$, $\widehat{ABC}=60°$, hình chiếu vuông góc của S lên $(ABCD)$ trùng với trung điểm I của BO, $SI=a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\frac{3a\sqrt{3}}{5}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{3}}{5}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\frac{4a\sqrt{3}}{5}$.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang cân đáy AD có $AD=2AB=2BC=2a$, $SA=a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

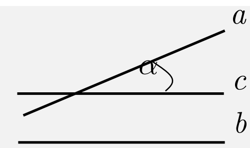
A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $2a$.

------------------- HẾT -------------------

Vấn đề 7 GÓC - KHOẢNG CÁCH

A. GÓC TRONG KHÔNG GIAN

① ***Góc giữa đường thẳng*** a ***và đường thẳng*** b



<u>Phương pháp 1.</u> *Sử dụng song song, tức dựng đường thẳng* $c \parallel b$ *và* c *cắt* a.

Khi đó $\widehat{(a;b)} = \widehat{(a;c)} = \alpha$ *như hình vẽ.*

Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông hoặc định lí hàm số sin, côsin để tìm góc α.

<u>Phương pháp 2</u>. *Sử dụng tích vô hướng, nghĩa là* $\cos(a;b) = \cos(\vec{a};\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|} = \cos\alpha.$

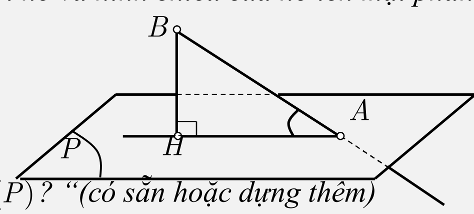
Khi đó, ta cần chèn điểm phù hợp để tính tích vô hướng.

<u>Phương pháp 3</u>. *Ghép vào hệ trục tọa độ* $Oxyz$.

<u>Lưu ý</u>: *Góc giữa hai đường thẳng là* ***góc nhọn***, *còn góc giữa hai véctơ là góc nhọn hoặc góc tù. Nghĩa là nếu tính* $\widehat{(a;b)} = \alpha \le 90^\circ$ *thì góc giữa* a, b *là* α, *còn nếu tính* $\widehat{(a;b)} = \alpha > 90^\circ$ *thì góc giữa hai đường thẳng* $\widehat{(a;b)} = 180^\circ - \alpha$.

② ***Góc giữa đường thẳng*** AB ***và mặt phẳng*** (P)

Cần nhớ: *"Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng là góc tạo bởi nó và hình chiếu của nó lên mặt phẳng".*



<u>Phương pháp 1</u>. *Sử dụng hình học 11.*

<u>B.1</u>. *Tìm* $AB \cap (P) = \{A\}$ (1)

<u>B.2</u>. *Tìm hình chiếu của* B *lên mặt phẳng* (P).

Đặt câu hỏi và trả lời: "Đường nào qua B *và vuông góc với* (P)*? "(có sẵn hoặc dựng thêm)*

Trả lời: $BH \perp (P)$ *tại* H (2)

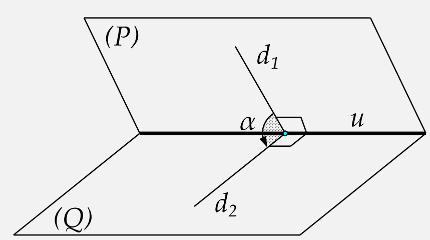
Từ $(1),(2)$, *suy ra* AH *là hình chiếu của* AB *lên mặt phẳng* (P).

Do đó góc giữa đường thẳng AB *và mp*(P) *là góc giữa* AB *và* AH, *chính là góc* $\widehat{BAH}$.

<u>B.3.</u> *Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông hoặc định lí hàm số côsin hoặc định lí hàm sin trong tam giác thường để suy ra góc* $\widehat{BAH}$.

<u>Phương pháp 2.</u> *Ghép vào hệ trục tọa độ* $Oxyz$.

③ ***Góc giữa mặt phẳng*** (P) ***và mặt phẳng*** (Q).



<u>Phương pháp 1.</u> *Dựa vào định nghĩa*

Ta có: $\begin{cases} (P) \cap (Q) = u \\ u \perp d_1 \subset (P) \\ u \perp d_2 \subset (Q) \end{cases} \Rightarrow \widehat{((P),(Q))} = \widehat{(d_1,d_2)} = \alpha.$

<u>Phhương pháp 2</u>. *Tìm hai đường thẳng* d_1 *và* d_2 *lần lượt vuông góc với mặt phẳng* (P) *và mặt phẳng* (Q). *Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa* d_1 *và* d_2.

<u>Phương pháp 3</u>. *Sử dụng công thức hình chiếu* $S' = S.\cos\alpha$.

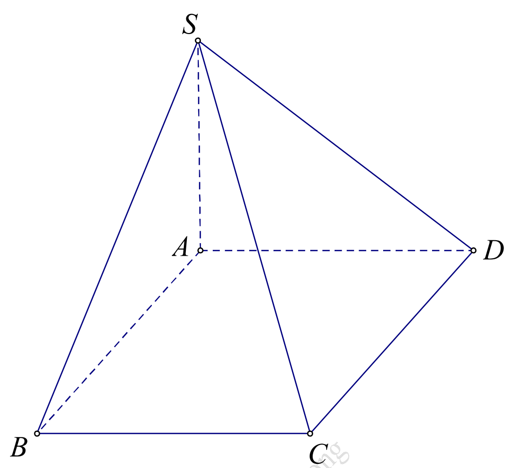
Phương pháp 4. *Trong trường hợp quá khó, nên sử dụng công thức* $\sin\alpha = \dfrac{d_{[A,(Q)]}}{d_{(A,u)}}$.

Trong đó $\alpha = \widehat{((P),(Q))}$, $A \in (P)$ *và* $(P) \cap (Q) = u$ *là giao tuyến của* (P) *và* (Q).

Phương pháp 5. *Ghép vào hệ trục tọa độ* $Oxyz$.

CÂU HỎI CÙNG MỨC ĐỘ ĐỀ MINH HỌA

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $\sqrt{3}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{2}a$. Góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. 45^0. **B.** 60^0. **C.** 30^0. **D.** 90^0.

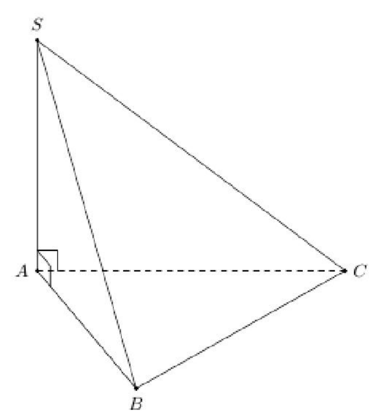
Lời giải

Chọn C

Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên ta có $\widehat{(SC,(ABCD))} = \widehat{SCA}$

$$\tan\widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a.\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30^0$$

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = a\sqrt{2}$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AC = 2a$ (minh họa như hình bên). Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng



A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\left.\begin{matrix} SB \cap (ABC) = B \\ SA \perp (ABC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB trên mặt phẳng (ABC)

$\Rightarrow \widehat{(SB,(ABC))} = \widehat{SBA}$

Do tam giác ABC vuông cân tại $B \Rightarrow AB^2 + BC^2 = AC^2 \Leftrightarrow 2AB^2 = (2a)^2 \Leftrightarrow 2AB^2 = 4a^2 \Leftrightarrow AB = a\sqrt{2}.$

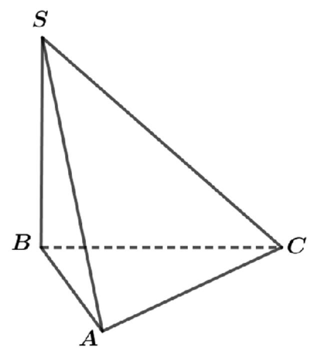
Xét tam giác vuông SAB vuông tại A, có $SA = AB = a\sqrt{2} \Rightarrow \Delta SAB$ vuông cân tại $A \Rightarrow \widehat{SBA} = 45°.$

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có SB vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SB = a\sqrt{3}$, tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$ và $AC = 2a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\left.\begin{matrix} CA \perp AB \\ CA \perp SB \end{matrix}\right\} \Rightarrow CA \perp (SAB).$

Do đó góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) là $\widehat{CSA}$.

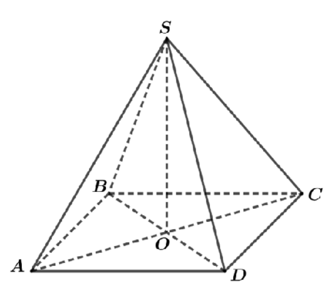
Ta có $SA = \sqrt{SB^2 + AB^2} = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a$; $\tan\widehat{CSA} = \dfrac{AC}{SA} = \dfrac{2a}{2a} = 1 \Rightarrow \widehat{CSA} = 45°$.

Câu 4. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có $AB = a\sqrt{2}$, $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) bằng

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $O = AC \cap BD$. Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Do đó $AO \perp (SBD) \Rightarrow$ góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) là $\widehat{ASO}$.

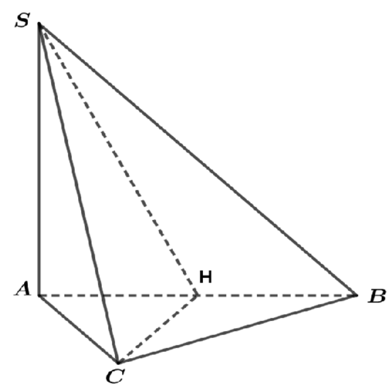
Ta có $SA = 2a;\ AC = 2a \Rightarrow AO = a$; $\sin\widehat{ASO} = \dfrac{AO}{SA} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{ASO} = 30°$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SB = a\sqrt{6}$, tam giác ABC vuông cân tại C, $AB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm của AB. Vì ΔABC cân tại $C \Rightarrow CH \perp AB \Rightarrow CH \perp (SAB)$.

Do đó hình chiếu vuông góc của C lên mặt phẳng (SAB) là H.

$\Rightarrow$góc giữa SC và mặt phẳng (SAB) bằng góc $\widehat{CSH}$.

Ta có ΔABC vuông cân tại C, $AB = 2a \Rightarrow CA = CB = a\sqrt{2}$; $CH = a$;

$SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{6a^2 - 4a^2} = a\sqrt{2}$; $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{2a^2 + 2a^2} = 2a$.

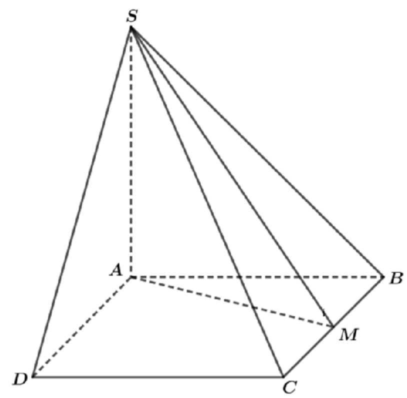
Xét ΔSHC vuông tại H có $SC = 2CH \Rightarrow \widehat{CSH} = 30°$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a\sqrt{2}, BC = 2a$, $SA = 3a$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính góc giữa đường thẳng SM và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $120°$.

Lời giải

Chọn B



Vì $SA\perp(ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng SM và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{SMA}$.

Ta có $BM=\dfrac{BC}{2}=a$; $AM=\sqrt{AB^2+BM^2}=\sqrt{2a^2+a^2}=a\sqrt{3}$;

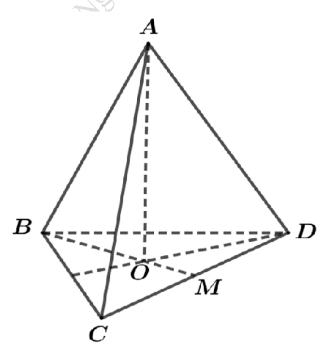
$\tan\widehat{SMA}=\dfrac{SA}{AM}=\dfrac{3a}{a\sqrt{3}}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{SMA}=60°$.

Câu 7. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng $2a$. Gọi α là góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD). Tính $\cos\alpha$.

A. $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn C

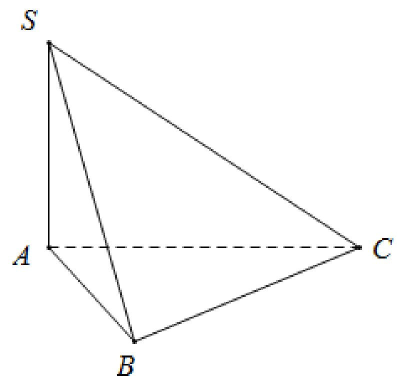


Gọi O là trọng tâm tam giác BCD. Vì $ABCD$ là tứ diện đều nên $AO\perp(BCD)$.

Do đó góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (ABC) bằng $\widehat{ABO}=\alpha$.

Ta có $BM=BC.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}\Rightarrow BO=\dfrac{2}{3}BM=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$; $\cos\alpha=\cos\widehat{ABO}=\dfrac{BO}{AB}=\dfrac{\frac{2a\sqrt{3}}{3}}{2a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), tam giác ABC vuông cân tại B và $AC=2a$ (minh họa như hình bên). Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Tính độ dài cạnh bên SA.



A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $a\sqrt{6}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $2a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

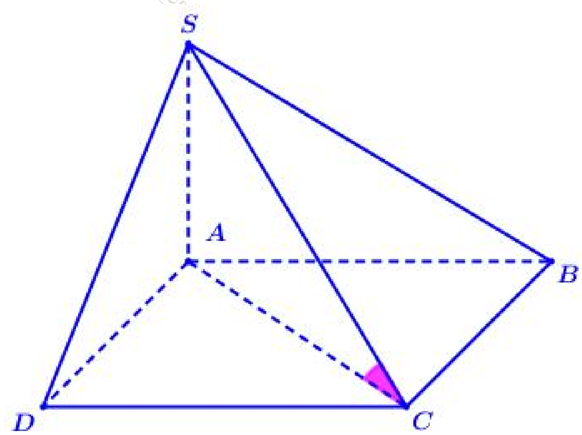
Ta có $\left.\begin{array}{l} SB\cap(ABC)=B \\ SA\perp(ABC) \end{array}\right\}\Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB trên (ABC),

$\Rightarrow\left(\widehat{SB,(ABC)}\right)=\left(\widehat{SB,AB}\right)=\widehat{SBA}=60^0$

Mà tam giác ABC vuông cân tại B và $AC=2a\Rightarrow AB=a\sqrt{2}$

Khi đó xét trong tam giác vuông SAB suy ra $SA=AB\tan 60^0=a\sqrt{6}$

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB=2a, AD=a\sqrt{2}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. 45^0. **B.** 30^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải

Chọn B

Vì $SA\perp(ABCD)$ nên AC là hình chiếu của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$

Do đó góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SCA}$

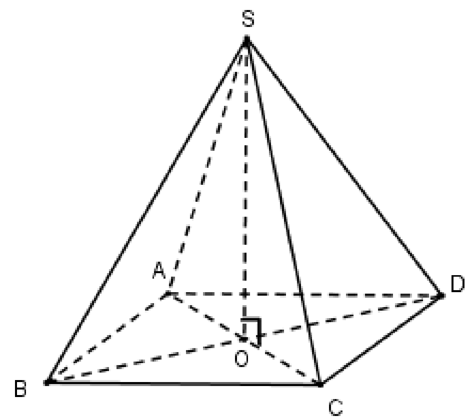
Đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB=2a, BC=AD=a\sqrt{2}$ nên

$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{4a^2+2a^2}=a\sqrt{6}$

Trong tam giác vuông SAC: $\tan\widehat{SCA}=\dfrac{SA}{AC}=\dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\widehat{SCA}=30^\circ$.

Vậy góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30°.

Câu 10. Cho chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $3a$ (minh họa như hình bên). Gọi φ là góc giữa giữa cạnh bên và mặt đáy. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{14}}{7}$. **B.** $\tan\varphi=\dfrac{3}{2}$. **C.** $\varphi=45^0$. **D.** $\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

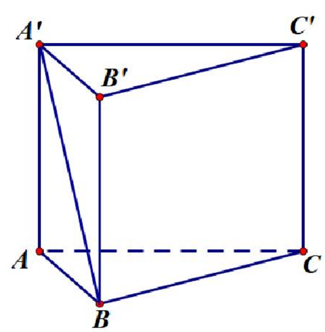
Gọi $O=AC\cap BD\Rightarrow SO\perp(ABCD)\Rightarrow AO$ là hình chiếu của SA trên mp (ABCD)

$\Rightarrow\left(\widehat{SA,(ABCD)}\right)=\left(\widehat{SA,AO}\right)=\widehat{SAO}=\varphi$

Xét trong tam giác vuông ΔSAO ta có

$SA=3a, AO=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{1}{2}2a.\sqrt{2}=a\sqrt{2}\Rightarrow SO=a\sqrt{7}\Rightarrow\tan\varphi=\dfrac{SO}{AO}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Câu 11. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là ΔABC vuông cân tại B, $AC=2\sqrt{2}a$ (minh họa như hình bên). Góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Tính độ dài cạnh bên của hình lăng trụ.



A. $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $2a\sqrt{3}$. **C.** $2a\sqrt{6}$. **D.** $2a$.

Lời giải

Chọn B

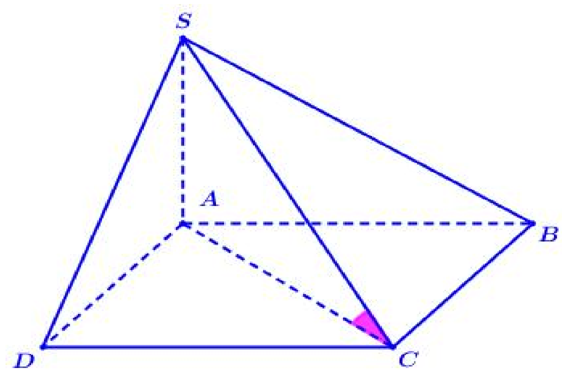
Ta có $\left.\begin{array}{l} A'B \cap (ABC) = B \\ A'A \perp (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow AB$ là hình chiếu của $A'B$ trên (ABC).

$\Rightarrow \left(\widehat{A'B,(ABC)}\right) = \left(\widehat{A'B,AB}\right) = \widehat{A'BA} = 60^0$

Khi đó xét trong tam giác vuông $A'BA$ ta có:

$AB = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = 2a, \tan\widehat{A'BA} = \dfrac{A'A}{AB} \Rightarrow A'A = AB\tan 60^0 = 2a\sqrt{3}.$

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh bằng a, $\widehat{ABC} = 60^0$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$. Tính $\tan\alpha$



A. $\sqrt{3}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn A

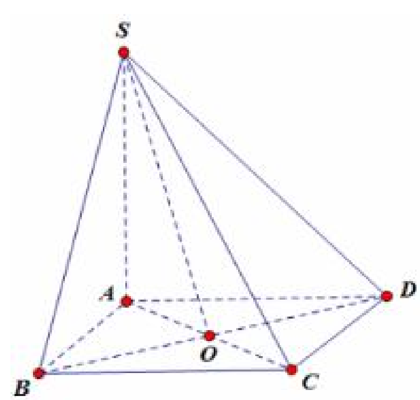
Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$

Do đó góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SCA} = \alpha$

Đáy $ABCD$ là hình thoi có $\widehat{ABC} = 60^0$ nên ΔABC đều $\Rightarrow AC = AB = BC = a$

Xét ΔSAC vuông tại A: $\tan\alpha = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$

Câu 13. Cho chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh bằng $\sqrt{2}a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi φ góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $\tan\varphi = \sqrt{6}$. **B.** $\varphi = 45°$. **C.** $\varphi = 60°$. **D.** $\varphi = 90°$.

Lời giải

Chọn C

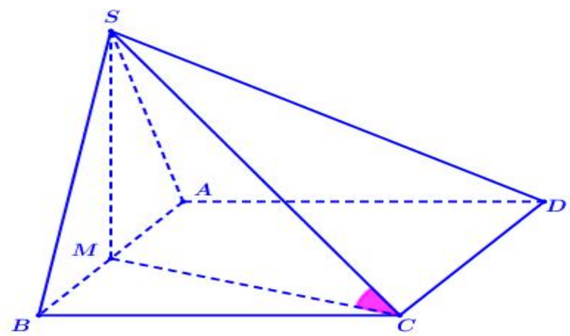
Ta có $\left.\begin{matrix} SO \cap (ABCD) = O \\ SA \perp (ABCD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow AO$ là hình chiếu của SO trên $(ABCD)$.

$\Rightarrow \left(\widehat{SO,(ABCD)}\right) = \left(\widehat{SO,AO}\right) = \widehat{SOA}$.

Khi đó xét trong tam giác vuông SOA ta có:

$AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{2}a.\sqrt{2} = a; SA = a\sqrt{3} \Rightarrow \tan\widehat{SOA} = \frac{SA}{AO} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SOA} = 60^0$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của AB, $SM \perp (ABCD)$ và $SM = a\sqrt{5}$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$. Tính $\tan\alpha$



A. $\frac{\sqrt{30}}{3}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{22}}{4}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

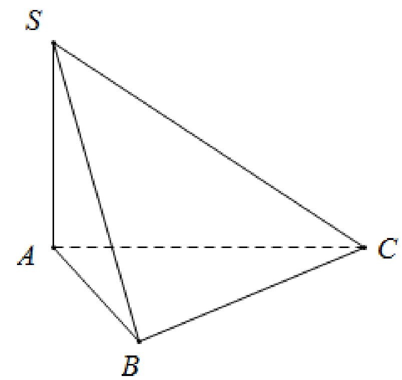
Vì $SM \perp (ABCD)$ nên MC là hình chiếu của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$

Do đó góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SCM} = \alpha$

Đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$ nên $BM = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow MC = \sqrt{BC^2 + BM^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$

Xét ΔSMC vuông tại M: $\tan\alpha = \frac{SM}{MC} = \frac{a\sqrt{5}}{\frac{a\sqrt{10}}{2}} = \sqrt{2}$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = a\sqrt{3}$, tam giác ABC đều (minh họa như hình bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 30°. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.



A. $\frac{9a^3}{4}$. **B.** $\frac{27a^3}{4}$. **C.** $\frac{a^3}{4}$. **D.** $\frac{81a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn A

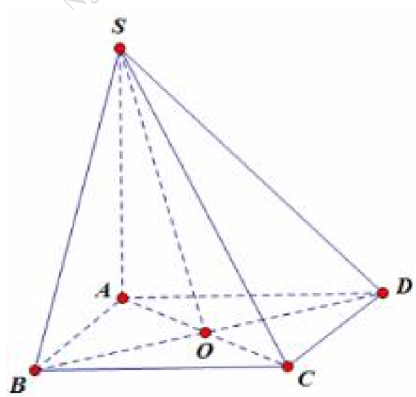
Ta có $\left.\begin{matrix} SC\cap(ABC)=C \\ SA\perp(ABC) \end{matrix}\right\}\Rightarrow AB$ là hình chiếu của SC trên (ABC),

$\Rightarrow\left(\widehat{SC,(ABC)}\right)=\left(\widehat{SC,AB}\right)=\widehat{SCA}=30^0$.

Khi đó xét trong tam giác vuông SAC ta có $\tan 30^0=\frac{SA}{AC}\Leftrightarrow AC=3a$.

Tam giác ABC đều nên $S_{\Delta ABC}=\frac{(3a)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{9a^2\sqrt{3}}{4}\Rightarrow V_{SABC}=\frac{1}{3}a\sqrt{3}.\frac{9a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{9a^3}{4}$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh $2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=2a$ .Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng:



A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\left.\begin{matrix} SB\cap(SAC)=S \\ BO\perp(SAC) \end{matrix}\right\}\Rightarrow SO$ là hình chiếu của SB trên $(ABCD)$,

$\Rightarrow\left(\widehat{SB,(SAC)}\right)=\left(\widehat{SB,SO}\right)=\widehat{BSO}$.

Khi đó xét trong tam giác vuông SBO ta có:

$BO=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}2a.\sqrt{2}=a\sqrt{2};SA=2a\Rightarrow SO=a\sqrt{6}$.

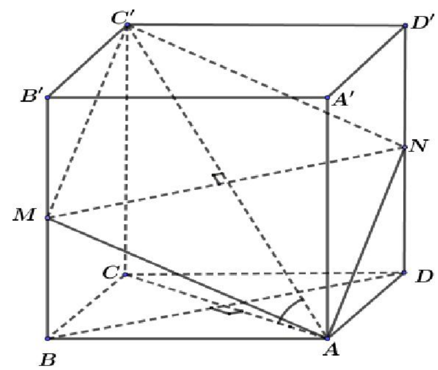
$\Rightarrow \tan\widehat{BSO} = \dfrac{BO}{SO} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{BSO} = 30^0$

Câu 17. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AC' = a\sqrt{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng qua AC' cắt BB', DD' lần lượt tại M, N sao cho tam giác AMN cân tại A có $MN = a$. Tính $\cos\varphi$ với $\varphi = \left(\widehat{(P),(ABCD)}\right)$.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $AMC'N$ là hình bình hành, mà tam giác AMN cân tại A nên $MN \perp AC'$.

Ta có $(BDD'B')$ cắt ba mặt phẳng $(ABCD)$, $(A'B'C'D')$, $(AMC'N)$ lần lượt theo ba giao tuyến $BD // B'D' // MN$.

Hai mặt phẳng (P) và $(ABCD)$ có điểm chung A và lần lượt chứa hai đường thẳng song song MN, BD nên giao tuyến của chúng là đường thẳng d đi qua A và song song với MN, BD.

Trên hai mặt phẳng (P) và $(ABCD)$ lần lượt có hai đường thẳng AC' và AC cùng vuông góc với d nên góc giữa hai mặt phẳng (P) và $(ABCD)$ chính là góc giữa AC' và AC, bằng góc $\widehat{CAC'}$. Xét tam giác $C'CA$ vuông tại C có:

$\cos\varphi = \dfrac{AC}{AC'} = \dfrac{BD}{AC'} = \dfrac{MN}{AC'} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Cách 2:

Theo chứng minh ở trên thì $MN // BD$ và $MN = BD = a$.

Đa giác $AMC'N$ nằm trên mặt phẳng (P) có hình chiếu trên mặt $(ABCD)$ là hình vuông $ABCD$ nên:

$$\cos\varphi = \frac{S_{ABCD}}{S_{AMC'N}} = \frac{AB^2}{\frac{1}{2}AC'.MN} = \frac{\left(\frac{BD}{\sqrt{2}}\right)^2}{\frac{1}{2}AC'.MN} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 18. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $AB = 2$, $AD = 3$; $AA' = 4$. Góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$ là α. Tính giá trị gần đúng của góc α?

A. $45,2°$. **B.** $38,1°$. **C.** $53,4°$. **D.** $61,6°$.

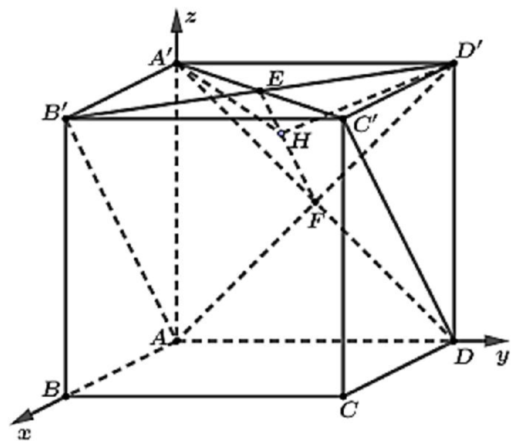
Lời giải

Chọn D

Cách 1: Hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$ có giao tuyến là EF như hình vẽ.

Do $EF//AB'$ mà $A'D' \perp (A'ABB')$ nên $A'D' \perp AB' \Rightarrow EF // A'D'$

Từ A' kẻ vuông góc lên giao tuyến EF tại H thì $A'H \perp EF \Rightarrow$ $EF \perp (A'D'H) \Rightarrow EF \perp D'H$. Khi đó, góc giữa hai mặt phẳng cần tìm chính là góc giữa hai đường thẳng $A'H$ và $D'H$.



Tam giác $D'EF$ lần lượt có $D'E = \frac{D'B'}{2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$, $D'F = \frac{D'A}{2} = \frac{5}{2}$, $EF = \frac{B'A}{2} = \sqrt{5}$.

Theo Hê-rông ta có: $S_{D'EF} = \frac{\sqrt{61}}{4}$. Suy ra $D'H = \frac{2S_{DEF}}{EF} = \frac{\sqrt{305}}{10}$.

Dễ thấy $\Delta A'EF = \Delta D'EF \Rightarrow A'H = D'H$.

Tam giác $D'A'H$ có: $\cos\widehat{A'HD'} = \frac{HA'^2 + HD'^2 - A'D'^2}{2HA'.HD'} = -\frac{29}{61}$.

Do đó $\widehat{A'HD'} \approx 118,4°$ hay $\left(\widehat{A'H, D'H}\right) \approx 180° - 118,4° = 61,6°$.

Cách 2: Gắn hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ vào hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $D(0;3;0)$, $C(2;3;0)$, $A'(0;0;4)$, $B'(2;0;4)$, $D'(0;3;4)$, $C'(2;3;4)$.

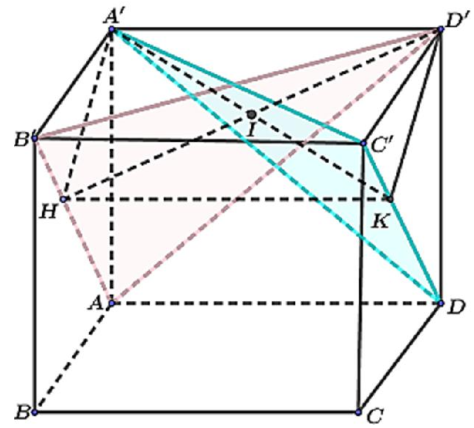
Gọi $\overrightarrow{n_1}$ là véc tơ pháp tuyến của $(AB'D')$. Có $\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{AB'}; \overrightarrow{AD'}\right] = (-12; -8; 6)$.

Gọi $\overrightarrow{n_2}$ là véc tơ pháp tuyến của $(A'C'D)$. Có $\overrightarrow{n_2} = \left[\overrightarrow{A'C'}; \overrightarrow{A'D}\right] = (-12; 8; 6)$.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$

$\cos\alpha = \left|\dfrac{\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}\right| = \dfrac{29}{61}$. Vậy giá trị gần đúng của góc α là $61,6°$.

Cách 3.



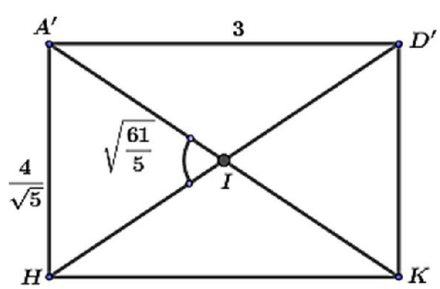
Do hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$ chứa hai đường AB' và $C'D$ song song với nhau nên giao tuyến của chúng song song hai đường đó.

Kẻ $A'H \perp AB'$, $H \in AB'$, dựng hình bình hành $A'HKD'$ có tâm I như hình vẽ.

Do $A'D' \perp (A'ABB')$ nên $A'D' \perp AB'$ suy ra $AB' \perp (A'HKD')$ $\Rightarrow$góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$ là góc giữa $A'K$ và $D'H$.

Trong tam giác vuông $AA'B'$ có $A'H$ là đường cao nên $\dfrac{1}{A'H^2} = \dfrac{1}{A'B'^2} + \dfrac{1}{AA'^2} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} = \dfrac{5}{16}$.

Vậy $A'H = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$.



Xét tam giác $A'IH$ có $\cos I = -\cos(A' + H) = -\cos A' \cos H + \sin A' \sin H = \dfrac{29}{61}$.

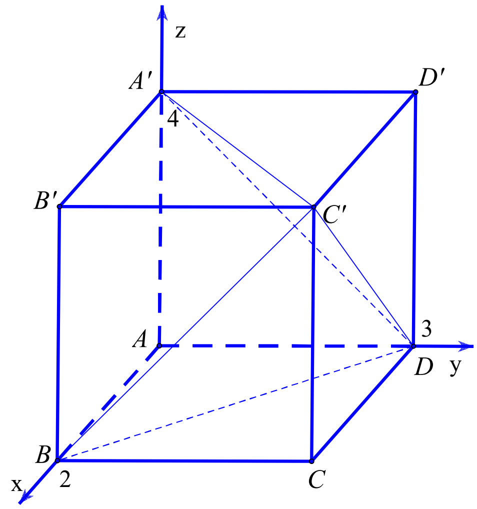
Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$gần đúng bằng $61,6°$.

Câu 19. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $AB = 2,\ AD = 3; AA' = 4$. Góc giữa hai mặt phẳng $(BC'D)$ và $(A'C'D)$ là α. Tính giá trị gần đúng của góc α?

A. $45,2°$. **B.** $38,1°$. **C.** $53,4°$. **D.** $61,6°$.

Lời giải

Chọn D



Dựng hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, ta có $A(0;0;0), B(2;0;0), D(0;3;0)$ và $A'(0;0;4), C'(2;3;4)$.

$\overrightarrow{BC'}=(0;3;4), \overrightarrow{BD}=(-2;3;0), \overrightarrow{A'C'}=(2;3;0), \overrightarrow{A'D}=(0;3;-4)$

Véc tơ pháp tuyến của $(BC'D)$ là: $\vec{n}_1=\left[\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{BD}\right]=(-12;-8;6)$

Véc tơ pháp tuyến của $(A'C'D)$ là: $\vec{n}_2=\left[\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'D}\right]=(-12;8;6)$.

Ta có:

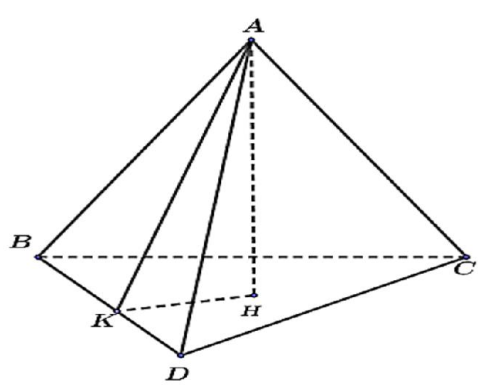
$\cos\alpha=\left|\cos\left(\vec{n}_1, \vec{n}_2\right)\right|=\frac{29}{61} \Rightarrow \alpha \approx 61,6°$

Câu 20. Cho tứ diện $ABCD$ có $BD=2$. Hai tam giác ABD và BCD có diện tích lần lượt là 6 và 10. Biết thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng 16. Tính số đo góc giữa hai mặt phẳng (ABD) và (BCD).

A. $\arccos\left(\frac{4}{15}\right)$. **B.** $\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)$. **C.** $\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$. **D.** $\arcsin\left(\frac{4}{15}\right)$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là hình chiếu của A xuống (BCD). Ta có $V_{ABCD}=\frac{1}{3}AH.S_{BCD} \Rightarrow AH=\frac{3V}{S_{BCD}}=\frac{24}{5}$.

Gọi K là hình chiếu của A xuống BD, dễ thấy $HK \perp BD$. Vậy $\left(\widehat{(ABD),(BCD)}\right) = \widehat{AKH}$

Mặt khác $S_{ABD} = \frac{1}{2}AK.BD \Rightarrow AK = \frac{2S_{ABD}}{BD} = 6$.

Do đó $\left(\widehat{(ABD),(BCD)}\right) = \widehat{AKH} = \arcsin\frac{AH}{AK} = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right)$.

Cách khác

Gọi H là hình chiếu của A xuống (BCD). Ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{3}AH.S_{BCD} \Rightarrow AH = \frac{3V}{S_{BCD}} = \frac{24}{5}$.

Ta có: $S_{\Delta ABD} = 6$.

Gọi K là hình chiếu của A xuống BD. Do $BD = 2$ nên $SK = \frac{2S_{\Delta ABD}}{BD} = 6$.

Có $KH = \sqrt{SK^2 - AH^2} = \frac{18}{5} \Rightarrow S_{\Delta HBD} = \frac{1}{2}HK.BD = \frac{18}{5}$.

Gọi φ là góc giữa mặt phẳng (ABD) và (BCD).

Vì ΔHBD là hình chiếu của ΔABD trên (BCD) nên $\cos\varphi = \frac{S_{\Delta HBD}}{S_{\Delta ABD}} = \frac{3}{5}$.

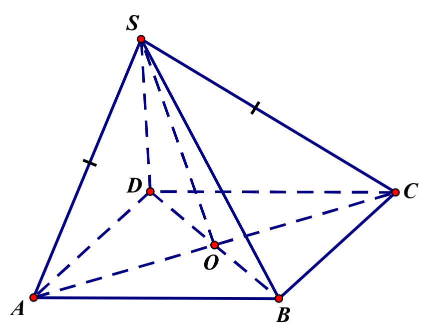
Vậy $\sin\varphi = \frac{4}{5} \Rightarrow \varphi = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right)$.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình thoi, $SA = SC$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng?

A. $90°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$.

Ta có $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow (ABCD) \perp (SBD)$.

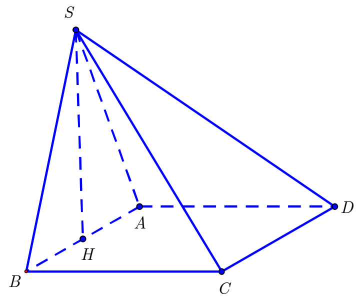
Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng $90°$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) bằng?

A. $30°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Ta có $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp AH \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow (SAD) \perp (SAB)$.

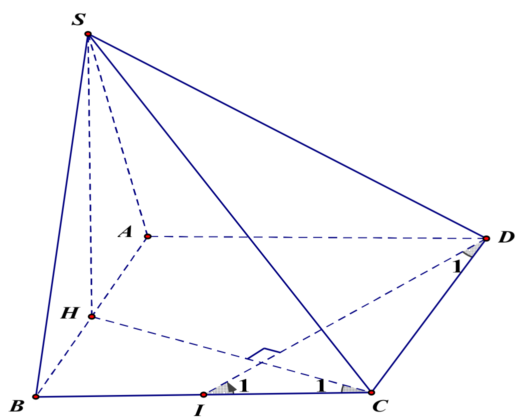
Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) bằng $90°$.

Câu 23. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi S là điểm trong không gian sao cho SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H và I lần lượt là trung điểm của AB và BC. Góc giữa hai mặt phẳng (SHC) và (SDI) bằng.

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $90°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn C



Do H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow DI \perp SH$.

Ta lại có: $\Delta BCH = \Delta CDI\,(c.g.c) \Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{D_1}$, mà $\widehat{D_1} + \widehat{I_1} = 90° \Rightarrow \widehat{C_1} + \widehat{I_1} = 90° \Rightarrow DI \perp HC$

Khi đó $DI \perp (SHC) \Rightarrow (SDI) \perp (SHC)$

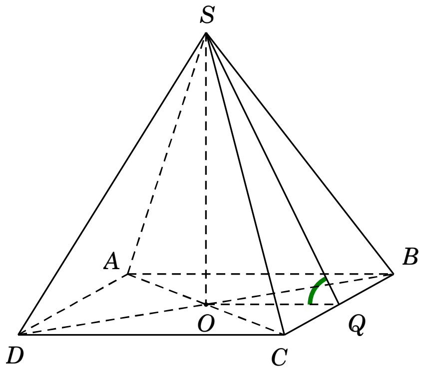
Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SHC) và (SDI) bằng $90°$.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$.

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn C



Gọi Q là trung điểm BC, suy ra $OQ \perp BC$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp OQ \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOQ)$

Do đó $\widehat{((SBC),(ABCD))} = \left(\widehat{SQ,OQ}\right) = \widehat{SQO}$.

Tam giác vuông SOQ, có $\tan \widehat{SQO} = \dfrac{SO}{OQ} = \sqrt{3}$.

Vậy mặt phẳng (SBC) hợp với mặt đáy $(ABCD)$ một góc $60°$.

B. KHOẢNG CÁCH TRONG KHÔNG GIAN

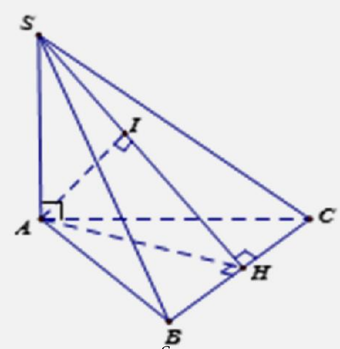
① **Tính khoảng cách từ chân đường cao của hình chóp đến mặt bên của hình chóp**.

Tính khoảng cách từ A đến mặt bên (SBC) của hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$

- **B1**. Xác định giao tuyến của mặt bên và mặt phẳng đáy $(SBC) \cap (ABC) = BC$.
- **B2**. Dựng hình $\begin{cases} AH \perp BC \\ AI \perp SH \end{cases} \Rightarrow AI \perp (SBC)$.

Suy ra $d(A;(SBC)) = AI$.

- **B3**. Tính AI.



Các phương pháp quy về bài toán chân đường cao:

— Kẻ song song để dời điểm về chân đường vuông góc.

— Dùng tỉ số khoảng cách để dời về chân đường vuông góc.

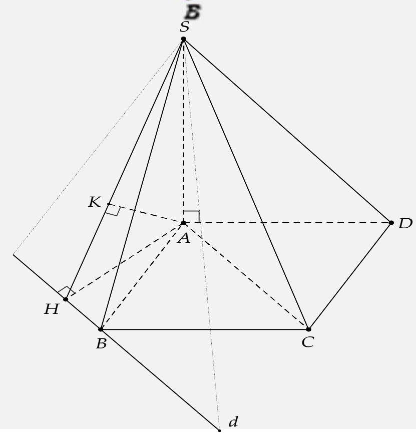
— Tạo chân đường cao giả (|| đường cao, khi mặt chứa chân).

② **Tính khoảng cách giữa cạnh bên và cạnh thuộc mặt đáy**.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$. Hãy tính khoảng cách giữa cạnh bên SB và cạnh thuộc mặt đáy AC.

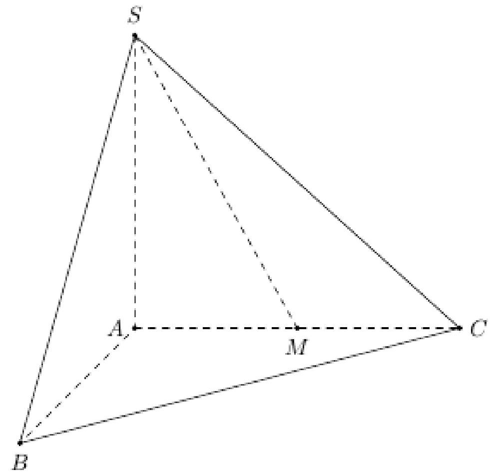
- **B1**. Xác định giao điểm của cạnh bên SB và mặt phẳng đáy $SB \cap (ABCD) = B$.
- **B2**. Qua giao điểm B, dựng đường thẳng d song song với AC. Khi đó: $d(AC,SB) = d(AC,(SB,d)) = d(A,(SB,d))$.

Đây là bài toán tìm khoảng cách từ chân đến mặt bên. Cụ thể: $d(AC,SB) = d(AC,(SB,d)) = d(A,(SB,d)) = AK$.



CÂU HỎI CÙNG MỨC ĐỘ ĐỀ MINH HỌA

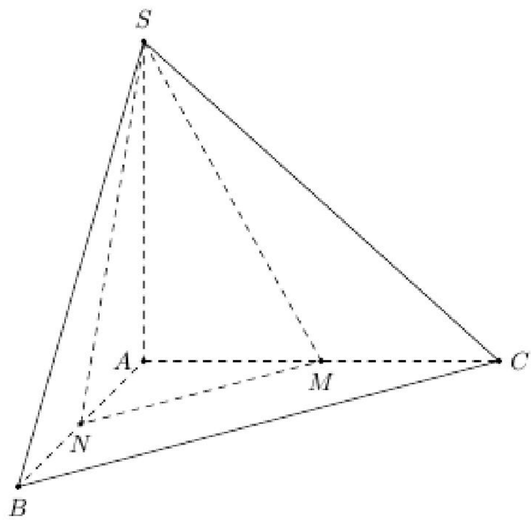
Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = 2a$, $AC = 4a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$ (hình minh họa). Gọi M là trung điểm của AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BC bằng



A. $\dfrac{2a}{3}$.　　B. $\dfrac{\sqrt{6}a}{3}$.　　C. $\dfrac{\sqrt{3}a}{3}$.　　D. $\dfrac{a}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi N là trung điểm của AC, ta có: $MN//\text{BC}$ nên ta được $BC//(SMN)$.

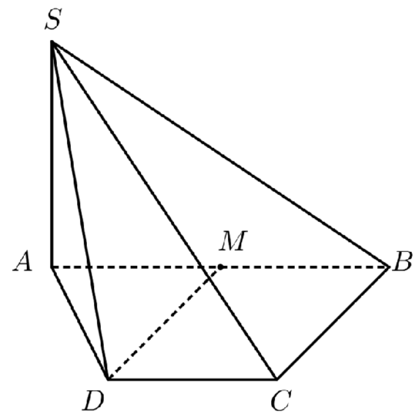
Do đó $d(BC,SM)=d(BC,(SMN))=d(B,(SMN))=d(A,(SMN))=h$.

Tứ diện $A.SMN$ vuông tại A nên ta có:

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AN^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{4a^2}=\frac{9}{4a^2}\Rightarrow h=\frac{2a}{3}.$$

Vậy $d(BC,SM)=\dfrac{2a}{3}$.

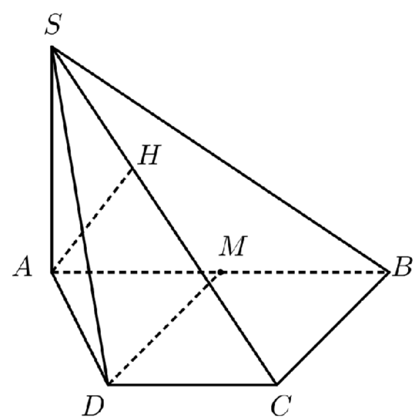
Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $AB=2a$, $AD=DC=CB=a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=3a$ (minh họa như hình bên). Gọi M là trung điểm của AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và DM bằng



A. $\dfrac{3a}{4}$. **B.** $\dfrac{3a}{2}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{13}a}{13}$. **D.** $\dfrac{6\sqrt{13}a}{13}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có M là trung điểm của AB.

Theo giả thiết suy ra $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính AB

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{ACB} = 90°; \widehat{ABC} = 60° \\ AC = a\sqrt{3} \end{cases}$$

Vì $DM // BC \Rightarrow DM // (SBC)$

Do đó $d(DM, SB) = d(DM, (SBC)) = d(M, (SBC)) = \dfrac{1}{2} d(A, (SBC))$ (vì $MB = \dfrac{1}{2} AB$)

Kẻ $AH \perp SC$.

Ta lại có $\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow AH \perp BC$.

Khi đó $\begin{cases} AH \perp SC \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$.

Xét tam giác SAC vuông tại A, ta có

$$AH^2 = \frac{AC^2.SA^2}{AC^2 + SA^2} = \frac{(a\sqrt{3})^2.(3a)^2}{(a\sqrt{3})^2 + (3a)^2} = \frac{9a^2}{4} \Rightarrow AH = \frac{3}{2}a.$$

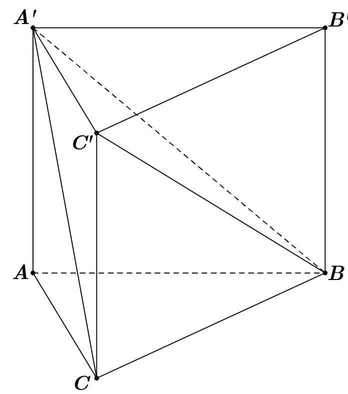
Vậy $d(DM, SB) = \dfrac{1}{2} d(A, (SBC)) = \dfrac{1}{2} AH = \dfrac{3a}{4}$.

Câu 3. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và cạnh bên có độ dài bằng a. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng $\left(A'BC'\right)$.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{7}$. **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{16}$.

Lời giải

Chọn C



Ở đây nếu tính trực tiếp rất dài và khó nên ta sẽ vận dụng phương pháp thể tích.

$$V_{C.A'BC'}=\frac{1}{3}S_{A'BC'}.d\left[C;\left(A'BC'\right)\right].$$

Cách 1. [Không dùng công thức nhanh về tỉ số thể tích]

Gọi H là trung điểm của $B'C'$. Dễ chứng minh $A'H$ là đường cao của hình chóp $A'.BCC'B'$.

$V_{A'.BCC'B'}=\frac{1}{3}S_{BCC'B'}.A'H=\frac{1}{3}\left(a^2\right)\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Suy ra $V_{A'.BCC'}=\frac{1}{2}V_{A'.BCC'B'}=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}=V_{C.A'BC'}$.

Mặt khác $BC'=BA'=a\sqrt{2}$ và $A'C'=a$, dùng Hê-rông ta được $S_{A'BC'}=\frac{a^2\sqrt{7}}{4}$.

Vậy khoảng cách $d\left[C;\left(A'BC'\right)\right]=\frac{3V_{C.A'BC'}}{S_{A'BC'}}=\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Cách 2. [Dùng công thức nhanh về tỉ số thể tích]

Ta có thể tích khối lăng trụ đã cho là $V=S_{ABC}.AA'=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích khối tứ diện có 4 đỉnh là 4 đỉnh của lăng trụ, có thể tích là $V_{C.A'BC'}=\frac{1}{3}V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Mặt khác $BC'=BA'=a\sqrt{2}$ và $A'C'=a$, dùng Hê-rông ta được $S_{A'BC'}=\frac{a^2\sqrt{7}}{4}$.

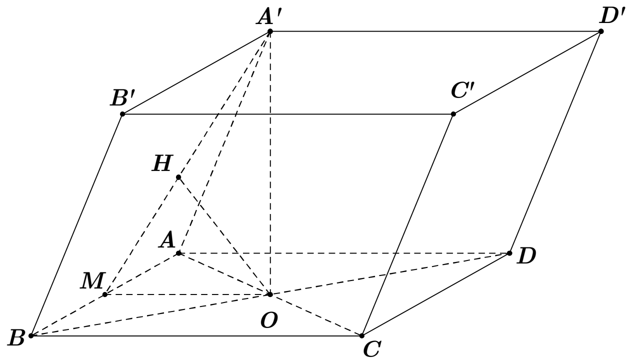
Vậy khoảng cách $d\left[C;\left(A'BC'\right)\right]=\frac{3V_{C.A'BC'}}{S_{A'BC'}}=\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ trùng với O. Biết tam giác $AA'C$ vuông cân tại A'. Tính khoảng cách h từ điểm D đến mặt phẳng $\left(ABB'A'\right)$.

A. $h=\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **B.** $h=\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $h=\frac{a\sqrt{2}}{6}$. **D.** $h=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $CD // AB \Rightarrow CD // \left(ABB'A'\right)$.

$d\left[D;\left(ABB'A'\right)\right]=d\left[C;\left(ABB'A'\right)\right]$ (1)

Do CO cắt $\left(ABB'A'\right)$ tại A

$\Rightarrow \frac{d\left[C;\left(ABB'A'\right)\right]}{d\left[O;\left(ABB'A'\right)\right]}=\frac{AC}{AO}=2$ (2)

Gọi M là trung điểm AB và H là hình chiếu của O lên SM.

Khi đó $d\left[O;\left(ABB'A'\right)\right]=OH$ (3)

$\Delta AA'C$ vuông cân tại A' có $AC=a\sqrt{2}\Rightarrow A'O=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

OM là đường trung bình của $\Delta ABC \Rightarrow OM=\frac{BC}{2}=\frac{a}{2}\Rightarrow OH=\frac{A'O.OM}{\sqrt{A'O^2+OM^2}}=\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

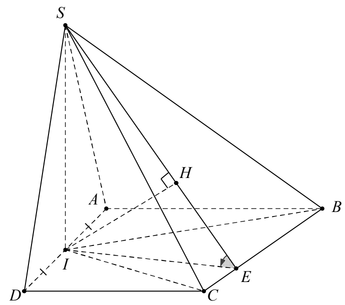
(1) (2) (3) $\Rightarrow d\left[D;\left(ABB'A'\right)\right]=2OH=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

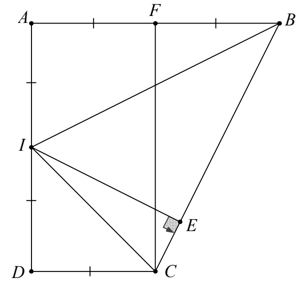
Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $AD=2a$, $DC=a$, $AB=2a$. Gọi I là trung điểm cạnh AD, hai mặt phẳng (SIB), (SIC) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc $60°$. Tính khoảng cách h từ I đến mặt phẳng (SBC).

A. $h=\frac{a\sqrt{15}}{15}$. **B.** $h=\frac{a\sqrt{15}}{5}$. **C.** $h=\frac{3a\sqrt{15}}{10}$. **D.** $h=\frac{3a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn C





Theo giả thiết, ta có: $\begin{cases}(SIB)\perp(ABCD)\\(SIC)\perp(ABCD)\\(SIB)\cap(SIC)=SI\end{cases}\Rightarrow SI\perp(ABCD)$.

Gọi E là hình chiếu của I trên BC, H là hình chiếu của I trên SE, F là trung điểm AB.

$\begin{cases}BC\perp IE\\BC\perp SI\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SIE)$

$\begin{cases}(SBC)\cap(ABCD)=BC\\IE\perp BC\\SE\perp BC\left(BC\perp(SIE)\right)\end{cases}\Rightarrow\left((SBC);(ABCD)\right)=\widehat{SEI}=60^\circ$.

$\begin{cases}(SIE)\perp(SBC),\left(BC\perp(SIE)\right)\\(SIE)\cap(SBC)=SE\\IH\perp SE\end{cases}\Rightarrow d\left(I;(SBC)\right)=IH$.

$BC=\sqrt{CF^2+FB^2}=a\sqrt{5}$

$S_{IBC}=S_{ABCD}-S_{IAB}-S_{ICD}\Leftrightarrow S_{IBC}=\frac{1}{2}AD.(AB+CD)-\frac{1}{2}IA.AB-\frac{1}{2}ID.DC$

$\Leftrightarrow S_{IBC}=3a^2-a^2-\frac{a^2}{2}=\frac{3a^2}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}IE.BC=\frac{3a^2}{2}\Rightarrow IE=\frac{3a^2}{a\sqrt{5}}=\frac{3a}{\sqrt{5}}$.

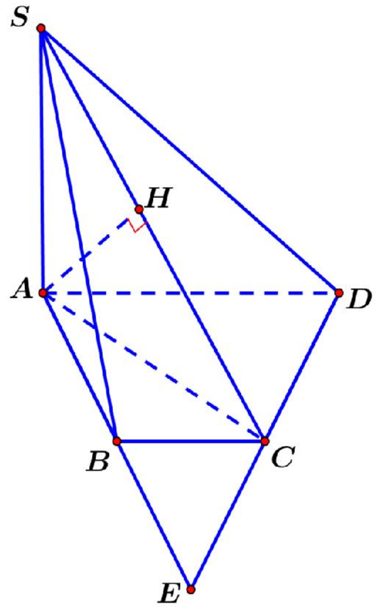
Tam giác HIE vuông tại H: $IH=IE.\sin 60^\circ=\frac{3a\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}=\frac{3a\sqrt{15}}{10}$.

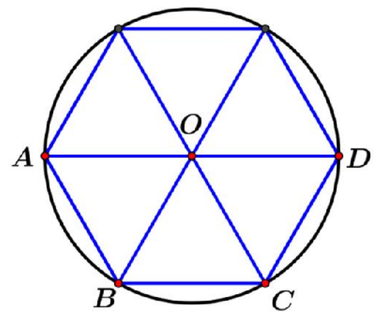
Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là nửa lục giác đều $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD=2a$ và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ với $SA=a\sqrt{6}$. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD).

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C





Từ giả thiết suy ra: $AB = BC = CD = \dfrac{AD}{2} = a$, $AC = a\sqrt{3}$.

Gọi $E = AB \cap CD$, suy ra tam giác ADE đều.

Khi đó C là trung điểm của ED và $AC \perp ED$.

Dựng $AH \perp SC$ thì $AH \perp (SCD)$, suy ra $d\left(A,(SCD)\right) = AH$.

Xét tam giác SAC vuông tại A, có AH là đường cao

Suy ra: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AC^2} \Rightarrow AH = \sqrt{2}a$.

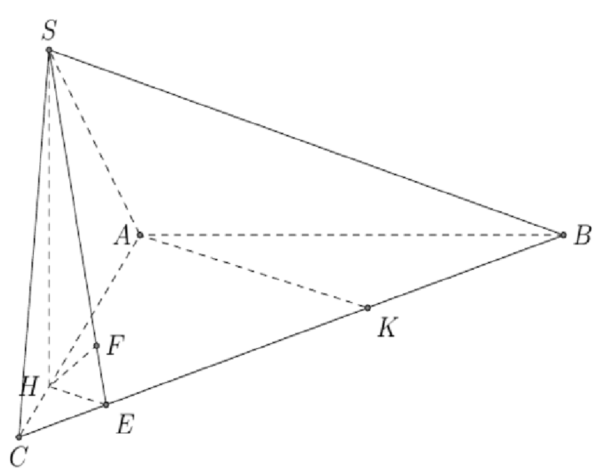
Mà $d\left(B,(SCD)\right) = \dfrac{1}{2}d\left(A,(SCD)\right) = \dfrac{1}{2}AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $(SAC) \perp (ABC)$, $AB = 3a$, $BC = 5a$. Biết rằng $SA = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SAC} = 30^0$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng :

A. $\dfrac{3\sqrt{17}}{4}a$. **B.** $\dfrac{6\sqrt{7}}{7}a$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{7}}{14}a$. **D.** $\dfrac{12}{5}a$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là hình chiếu của S lên AC. Ta có $\begin{cases}(SAC)\perp(ABC)\\ SH\perp AC\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABC)$.

Xét tam giác SAH, ta có $SH=SA\cdot\sin 30°=a\sqrt{3}$ và $AH=\sqrt{SA^2-SH^2}=3a$.

Xét tam giác ABC, ta có $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=4a$ và $HC=AC-HA=a$.

Gọi E là hình chiếu vuông góc của H lên BC và F là hình chiếu vuông góc của H lên SE.

Ta có $\begin{cases}BC\perp HE\\ BC\perp SH\ \left(SH\perp(ABC)\supset BC\right)\end{cases}$ suy ra $BC\perp(SHE)\supset HF$.

Do đó $\begin{cases}HF\perp BC\\ HF\perp SE\end{cases}\Rightarrow HF\perp(SBC)$ suy ra $d\left(H,(SBC)\right)=HF$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên BC. Ta có $AK\,//\,HE$, do đó

$\dfrac{HE}{AK}=\dfrac{CH}{CA}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow HE=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{AB\cdot AC}{\sqrt{AB^2+AC^2}}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{12}{5}\cdot a=\dfrac{3}{5}a$.

Suy ra $d\left(H,(SBC)\right)=HF=\dfrac{HS\cdot HE}{\sqrt{HS^2+HE^2}}=\dfrac{3\sqrt{7}}{14}a$.

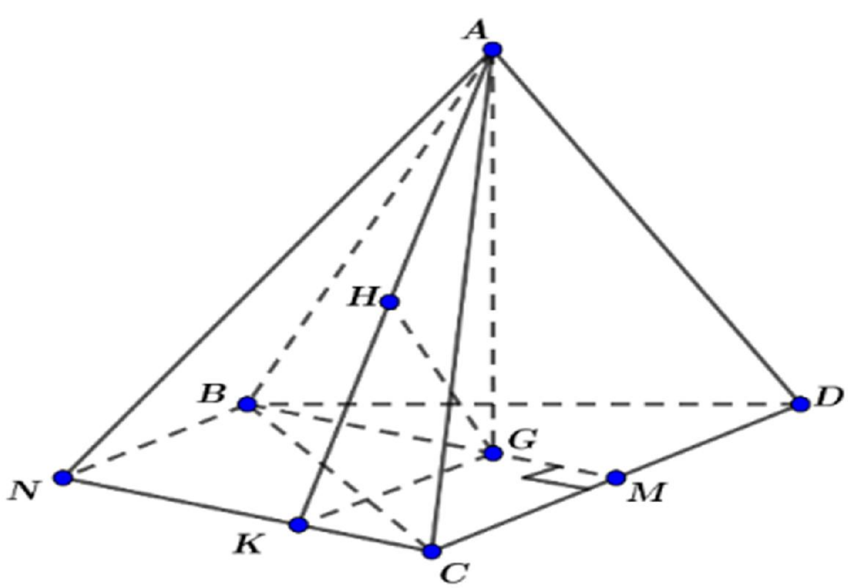
Ta có $\dfrac{d\left(A,(SBC)\right)}{d\left(\mathrm{H},(SBC)\right)}=\dfrac{CA}{CH}=4\Rightarrow d\left(A,(SBC)\right)=4\cdot HF=\dfrac{6\sqrt{7}}{7}a$.

Câu 8. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm CD. Khoảng cách giữa AC và BM là

A. $\dfrac{a\sqrt{154}}{28}$. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{22}}{11}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi G là tâm tam giác đều $BCD\Rightarrow AG\perp(BCD)$.

Trong mặt phẳng (BCD), dựng hình hình bình hành $BMCN$ mà $BM\perp CM$ nên $BMCN$ là hình chữ nhật.

Ta có $BM // (ACN) \Rightarrow d(BM, AC) = d(BM, (ACN)) = d(G, (ACN))$.

Kẻ $GK \perp NC$ $(K \in NC)$ và $GH \perp AK$ $(H \in AK) \Rightarrow d(G, (ACN)) = GH$.

Ta có $AG = \sqrt{AB^2 - BG^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

$GK = CM = \frac{a}{2}$.

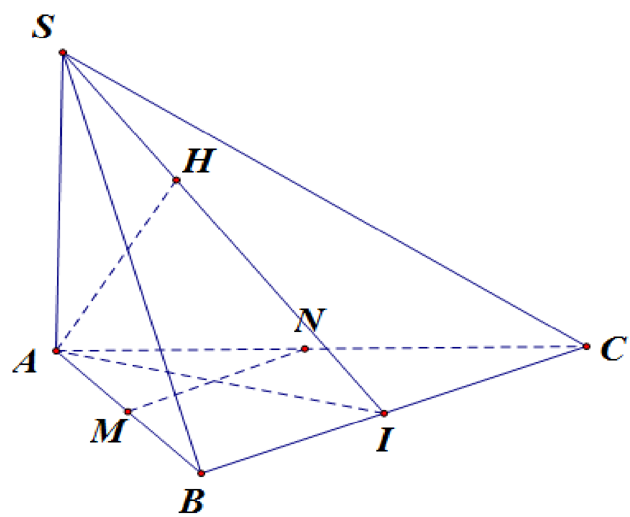
Vậy $GH = \frac{AG.GK}{\sqrt{AG^2 + GK^2}} = \frac{a\sqrt{22}}{11}$ cm.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$, có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, $SA = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy (minh họa như hình vẽ). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và SC bằng.

A. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{14}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$. **D.** $\frac{a\sqrt{57}}{19}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có:

$MN // BC \Rightarrow MN // (SBC) \Rightarrow d(MN, SC) = d(MN, (SBC)) = d(N, (SBC)) = \frac{1}{2} d(A, (SBC))$

Gọi I là trung điểm của BC. Ta có:

$\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow (SBC) \perp (SAI)$, $(SBC) \cap (SAI) = SI$ (1)

Trong (SAI) kẻ $AH \perp SI$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH = \frac{SA.AI}{\sqrt{SA^2 + AI^2}}$

Ta có: $SA = 2a; AI = 2a.\frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} \Rightarrow AH = \frac{2a.a\sqrt{3}}{\sqrt{4a^2 + 3a^2}} = \frac{2a\sqrt{21}}{7}$

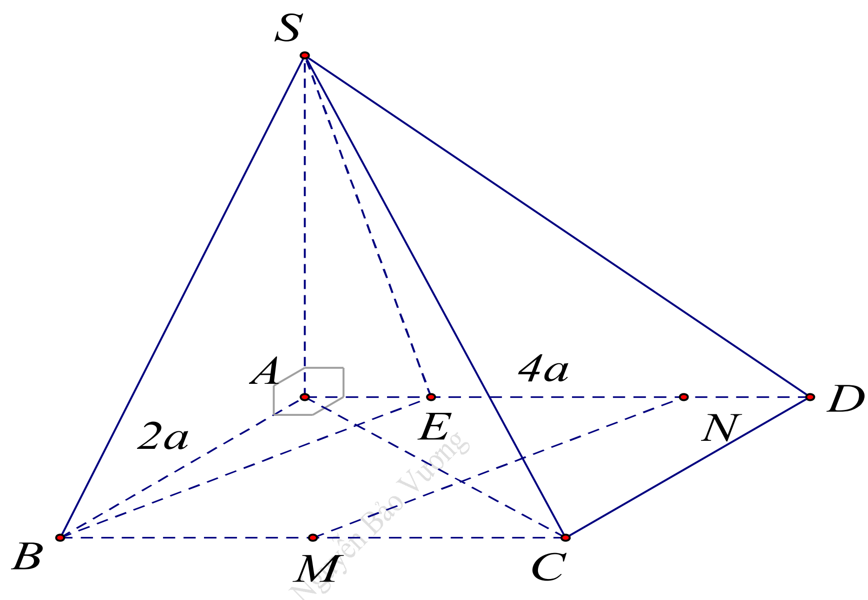
Vậy $d\left(MN,SC\right)=d\left(MN,\left(SBC\right)\right)=d\left(N,\left(SBC\right)\right)=\dfrac{1}{2}d\left(A,\left(SBC\right)\right)=\dfrac{1}{2}AH=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=2a, AD=4a, SA\perp(ABCD)$, $SA=2a\sqrt{15}$. Gọi M là trung điểm của BC, N là điểm nằm trên cạnh AD sao cho $AD=4DN$. Khoảng cách giữa MN và SB là

A. $\dfrac{4a\sqrt{285}}{19}$ **B.** $\dfrac{2a\sqrt{285}}{15}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{285}}{19}$ **D.** $\dfrac{2a\sqrt{285}}{19}$

Lời giải

Chọn D



$AC=\sqrt{4a^2+16a^2}=2\sqrt{5}a.$

Gọi E là điểm thuộc cạnh AD sao cho $AD=4AE$.

$EBMN$ là hình bình hành

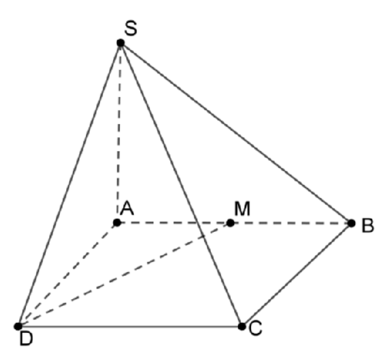
$\Rightarrow EB\ //\ MN\Rightarrow MN\ //\left(SEB\right)\Rightarrow d\left(MN,SB\right)=d\left(MN,\left(SEB\right)\right)$

$=d\left(N,\left(SEB\right)\right)=2d\left(A,\left(SEB\right)\right)=2d$

Ta lại có

$\dfrac{1}{d^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AE^2}=\dfrac{1}{60a^2}+\dfrac{1}{4a^2}+\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{76}{60a^2}\Rightarrow d=\dfrac{\sqrt{285}}{19}a\Rightarrow d\left(MN,SB\right)=\dfrac{2\sqrt{285}}{19}a$

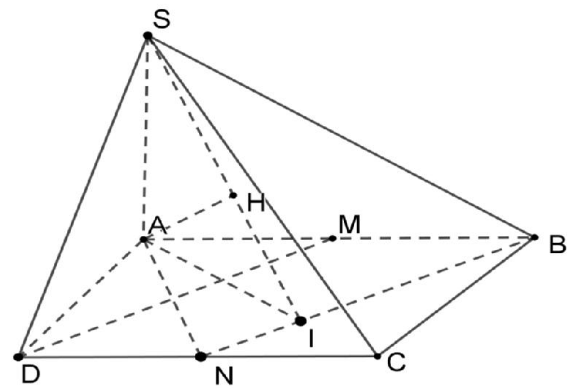
Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Gọi M là trung điểm AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và DM bằng



A. $\frac{2\sqrt{21}}{21}a$ **B.** $\frac{\sqrt{21}}{8}a$ **C.** $\frac{4\sqrt{21}}{21}a$ **D.** a

Lời Giải

Chọn A



Gọi N là trung điểm của CD; Lấy I,H lần lượt là hình chiếu của A lên BN,SI.

Ta có $DM//(SNB) \Rightarrow d(DM,SB)=d(DM,(SNB))=\frac{1}{2}d(A,(SNB))=\frac{1}{2}AH$.

Tam giác ANB có diện tích: $S_{ANB}=S_{ABCD}-2.S_{ADN}=2a^2 \Rightarrow AI=\frac{2S_{ANB}}{BN}=\frac{4a}{\sqrt{5}}$.

Tam giác vuông SAI có $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AI^2}+\frac{1}{SA^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{\frac{16}{5}a^2}=\frac{21}{16a^2} \Rightarrow AH=\frac{4\sqrt{21}}{21}a$.

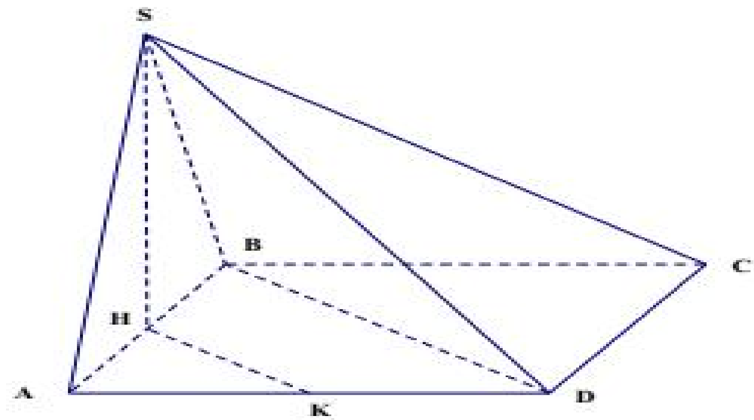
$d(DM,SB)=\frac{2\sqrt{21}}{21}a$.

Câu 12. Cho hình chóp đáy là hình vuông cạnh $a, SD=\frac{a\sqrt{17}}{2}$, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trung điểm H của đoạn AB. Gọi K là trung điểm của đoạn AD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng HK và SD theo a.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{5}$ **B.** $\frac{a\sqrt{286}}{26}$ **C.** $\frac{5a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{39}}{3}$

Lời giải

Chọn A



Ta có $SH^2 = SD^2 - HD^2 = SD^2 - AH^2 - AD^2 = 3a^2 \Rightarrow SH = a\sqrt{3}$.

Do $HK \,//\, (SBD) \Rightarrow d(HK, SD) = d(HK, (SBD)) = d(H, (SBO)) = h$, với O là tâm hình vuông $ABCD$.

Ta có $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{BH^2} + \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{25}{3a^2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{5}$.

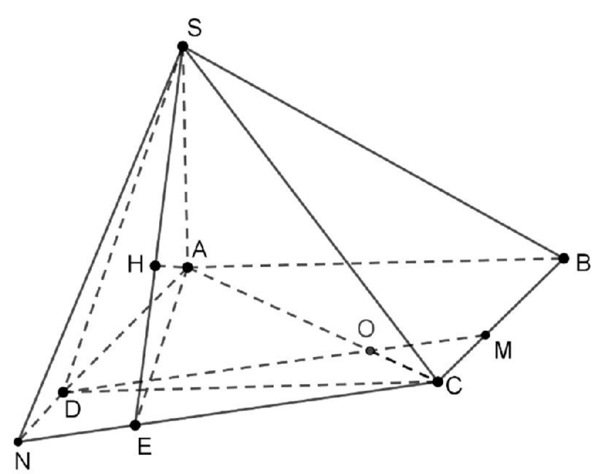
Vậy $d(HK, SD) = \frac{a\sqrt{3}}{5}$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $3a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi M là điểm thảo mãn $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và DM bằng

A. $\frac{\sqrt{154}}{77}a$. **B.** $\frac{3\sqrt{154}a}{154}$. **C.** $\frac{6\sqrt{154}}{77}a$. **D.** $\frac{2\sqrt{154}}{77}a$.

Lời giải

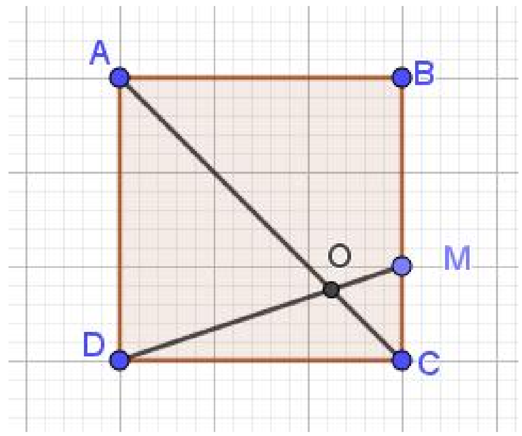
Chọn B



Gọi N là đỉnh thứ tư của hình bình hành $DMCN$; Lấy E, H lần lượt là hình chiếu của A lên CN, SE.

Ta có

$DM \,//\, (SCN) \Rightarrow d(DM, SC) = d(DM, (SNB)) = d(O, (SCN)) = \frac{1}{4} d(A, (SCN)) = \frac{1}{4} AH$



Tam giác ANC có diện tích: $S_{ACN} = \frac{1}{2}S_{ABCD} + S_{DNC} = \frac{9a^2}{2} + \frac{3a^2}{2} = 6a^2 \Rightarrow AE = \frac{2S_{ANB}}{CN} = \frac{6\sqrt{10}a}{5}$

Tam giác vuông SAE có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\frac{72}{5}a^2} = \frac{77}{72a^2} \Rightarrow AH = \frac{6\sqrt{154}}{77}a$.

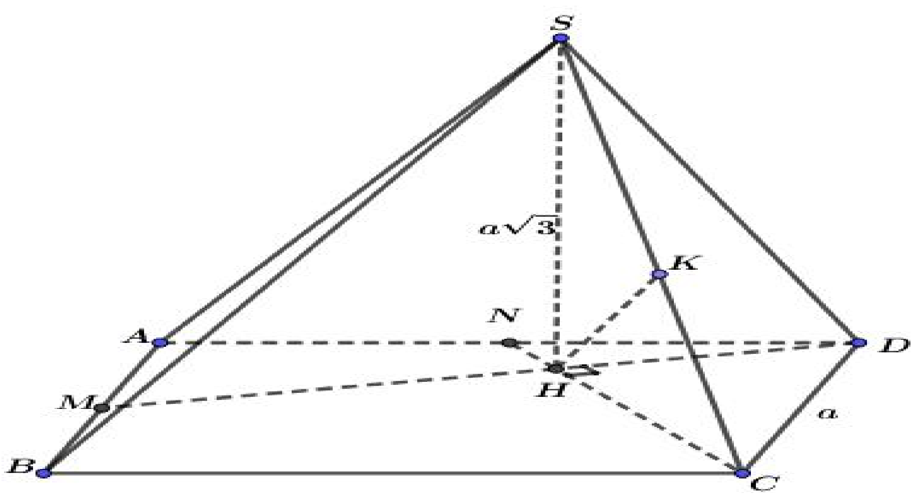
$\Rightarrow d(SC, DM) = \frac{6\sqrt{154}}{4.77}a = \frac{3\sqrt{154}}{154}a$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN với DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SH = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a.

A. $\frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}$. **B.** $\frac{\sqrt{21}a}{7}$. **C.** $\frac{a\sqrt{57}}{6}$. **D.** $\frac{3\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi K là hình chiếu của H trên SC.

Do $ABCD$ là hình vuông nên $DM \perp CN$.

Có $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp DM$.

Suy ra $DM \perp (SHC) \Rightarrow DM \perp HK$.

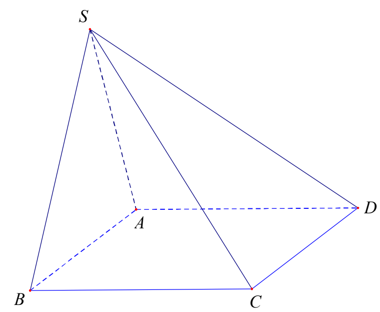
Vậy HK là đoạn vuông góc chung của DM và SC.

Có DH là đường cao của tam giác vuông CDN nên $CH.CN = DC^2 \Rightarrow CH = \dfrac{DC^2}{CN} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Lại có HK là đường cao trong tam giác vuông SHC nên

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HC^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{5}{4a^2} = \frac{19}{12a^2} \Rightarrow HK = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}.$$

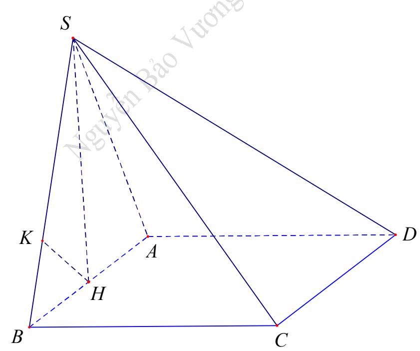
Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên $SA = a\sqrt{5}$, mặt bên SAB là tam giác cân đỉnh S và thuộc mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách gữa hai đường thẳng AD và SC bằng:



A. $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.   **B.** $\dfrac{4a\sqrt{5}}{5}$.   **C.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.   **D.** $\dfrac{2a\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của cạnh AB.

Do tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy nên $SH \perp (ABCD)$.

Theo giả thiết ta có $AB = 2a \Rightarrow AH = a$.

Mà ta lại có $SA = a\sqrt{5}$ nên $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = 2a$

Ta có $AD // BC \Rightarrow AD // (SBC)$

$\Rightarrow d(AD, SC) = d(AD, (SBC)) = d(A, (SBC)) = 2d(H, (SBC))$.

Do mặt phẳng $(SBC) \perp (SAB)$ nên từ H kẻ $HK \perp SB$ thì $HK = d(H, (SBC))$.

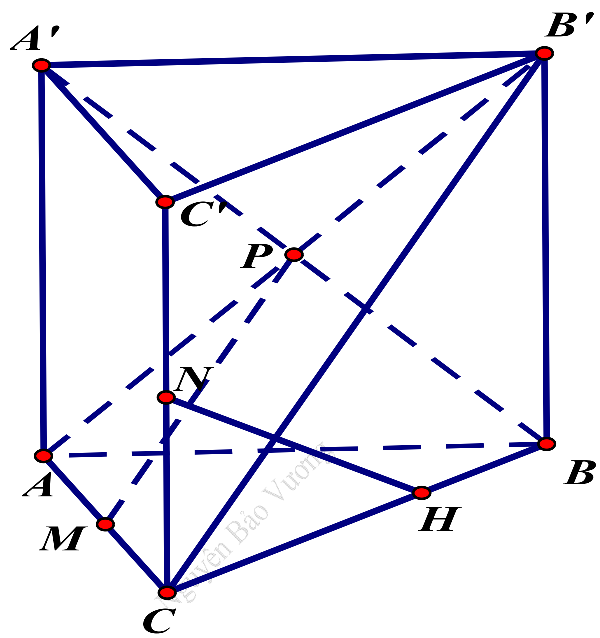
Ta có $HK = \dfrac{SH.HB}{SB} = \dfrac{2a.a}{a\sqrt{5}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5} \Rightarrow d\left(AD, SC\right) = 2HK = \dfrac{4a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 16. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $BC = 2a$. Gọi M, N, P lầ lượt là trung điểm của AC, CC', $A'B$ và H là hình chiếu của A lên BC. Tính khoảng cách giữa MP và NH.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Vì $A'B'BA$ là hình bình hành nên P cũng là trung điểm của AB'. Do đó $MP // B'C$. Mặt phẳng $BCC'B'$ chứa NH và song song với MP nên

$$\mathrm{d}\left(MP, NH\right) = \mathrm{d}\left(MP, \left(BCC'B'\right)\right) = \mathrm{d}\left(M, \left(BCC'B'\right)\right) = \frac{1}{2}\mathrm{d}\left(A, \left(BCC'B'\right)\right) = \frac{1}{2}AH.$$

Tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$, $BC = 2a$ suy ra $AC = a\sqrt{3}$

$$\Rightarrow AH = \frac{AC.AB}{BC} = \frac{a.a\sqrt{3}}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

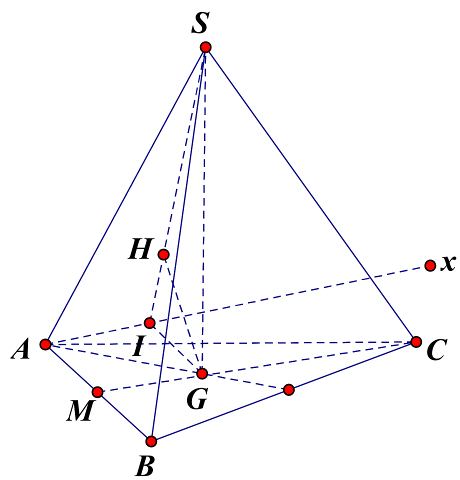
Vậy $\mathrm{d}\left(MP, NH\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABC$ đều. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC sao cho $SG = AB = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CG bằng

A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** a. **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm của AB. Từ A kẻ $Ax//CM \Rightarrow (SAx)//CM$. Khi đó

$d(SA,GC)=d(GC,(SAx))=d(G,(SAx))$

Kẻ $GI\perp Ax; GH\perp SI$. Ta có $\begin{cases} SG\perp Ax \\ IG\perp Ax \end{cases} \Rightarrow (SGI)\perp Ax \Rightarrow GH\perp Ax$

Mà $SI\perp GH$. Nên $GH\perp(SAx)\Rightarrow d\left(G,(SAx)\right)=GH$

Ta có $\begin{cases} AM//GI \\ AI//GM \\ GM\perp AM \end{cases} \Rightarrow AIGM$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AM=GI=\dfrac{a}{2}$.

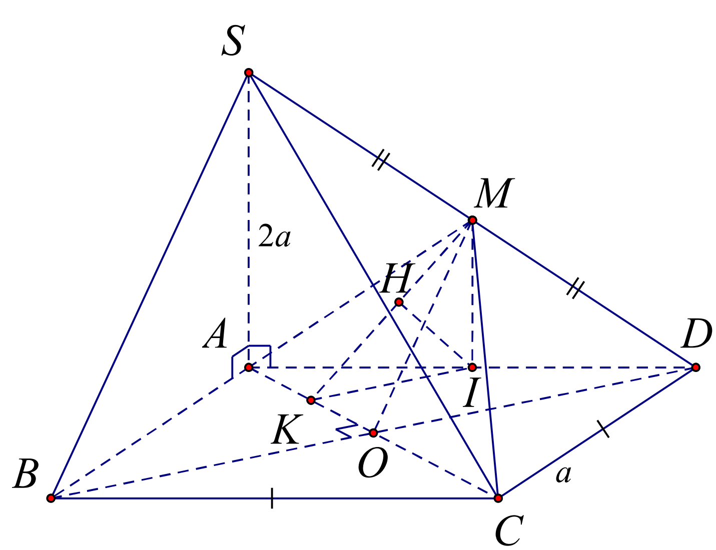
Xét tam giác SGI vuông tại G có: $GH\perp SI \Rightarrow GH=\dfrac{a\sqrt{5}}{5} \Rightarrow d(SA,GC)=\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là vuông cạnh a, $SA=2a$ và vuông góc với $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của SD. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SB và CM.

A. $d=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $d=\dfrac{3a}{2}$. **C.** $d=\dfrac{2a}{3}$. **D.** $d=\dfrac{a}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $O = AC \cap BD$; I và K lần lượt là trung điểm của AD và OA; H là hình chiếu vuông góc của I lên MK, ta có $SB\ //\ MO \Rightarrow SB\ //\ (MAC)$.

Do đó $d(SB;CM) = d(SB;(MAC)) = d(B;(MAC)) = d(D;(MAC)) = 2d(I;(MAC))$.

Mặt khác, ta có $\begin{cases} AC \perp MI \\ AC \perp KI \end{cases} \Rightarrow AC \perp (MKI)$. Suy ra $IH \perp (MAC)$ hay $d(I;(MAC)) = IH$.

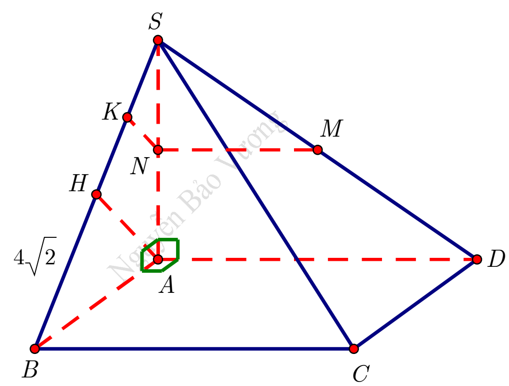
Vậy $d(SB;CM) = 2IH = 2.\dfrac{MI.IK}{\sqrt{MI^2 + IK^2}} = 2.\dfrac{MI.IK}{\sqrt{MI^2 + IK^2}} = \dfrac{2a}{3}$.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật. Tam giác SAB vuông cân tại A và nằm trong
mặt phẳng vuông góc với đáy và $SB = 4\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh SD. Tính khoảng cách l từ điểm M đến mặt phẳng (SBC)

A. $l = 2$. **B.** $l = 2\sqrt{2}$. **C.** $l = \sqrt{2}$. **D.** $l = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Theo giả thiết, ta có $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD), (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ SA \perp AB \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABCD)$.

Gọi N, H, K lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB và đoạn SH.

Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$.

Mà $AH \perp SB$ ($\triangle ABC$ cân tại A có AH là trung tuyến).

Suy ra $AH \perp (SBC)$, do đó $KN \perp (SBC)$ (vì $KN \parallel AH$, do KN đường trung bình của ΔSAH).

Mặt khác $MN \parallel BC \Rightarrow MN \parallel (SBC)$.

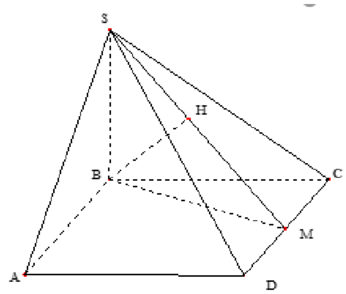
Nên $l = d(M,(SBC)) = d(N,(SBC)) = NK = \dfrac{1}{2}AH = \sqrt{2}$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60°$, $SB = a$ và mặt phẳng (SBA) và mặt phẳng (SBC) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}a}{7}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{21}a}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{15}a}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M làtrungđiểmcủa CD. Do tam giác BCD đềucạnh a nên $BM \perp DC$ và $BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Suyra $\Rightarrow DC \perp (SBM)$. Trong tam giác SBM kẻ $BH \perp SM$ tại $H \Rightarrow CD \perp BH$

$\begin{cases} BH \perp SM \\ BH \perp DC \end{cases} \Rightarrow BH \perp (SCD) \Rightarrow d(B;(SCD)) = BH$

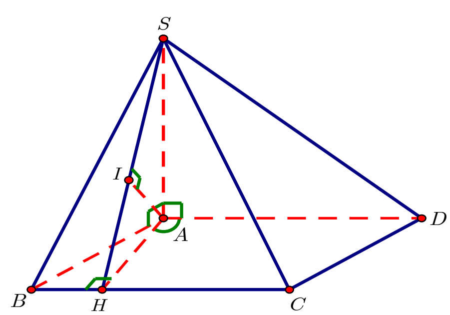
Trong tam giácvuông SBM ta có $\dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{SB^2} + \dfrac{1}{BM^2} = \dfrac{7}{21a^2} \Rightarrow BH = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng $2a\sqrt{3}$, góc $\widehat{BAD}$ bằng $120°$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Góc gữa mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng $45°$. Khoảng cách h từ A đến mặt phẳng (SBC) là

A. $h = 2a\sqrt{2}$. **B.** $h = \dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $h = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $h = a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Từ giả thiết suy ra ΔABC đều. Gọi H là trung điểm của

$CB \Rightarrow AH \perp BC$ và $AH = \dfrac{2a\sqrt{3}.\sqrt{3}}{2} = 3a$

Ta có $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SH$

Ta có $\begin{cases}(SBC)\cap(ABCD)=BC\\ AH\perp BC\\ SH\perp BC\end{cases} \Rightarrow ((SBC),(ABCD))=\angle SHA=45°$

Trong tam giác SAH vuông tại A, kẻ $AI\perp SH$ tại I. Do đó $AI\perp(SBC)$

Vì $\begin{cases}AI\perp SH\\ AI\perp CB\end{cases}$ nên AI là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

Trong tam giác vuông AIH ta có $\sin H=\dfrac{AI}{AH}\Rightarrow AI=AH.\sin H=3a.\sin 45°=\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$

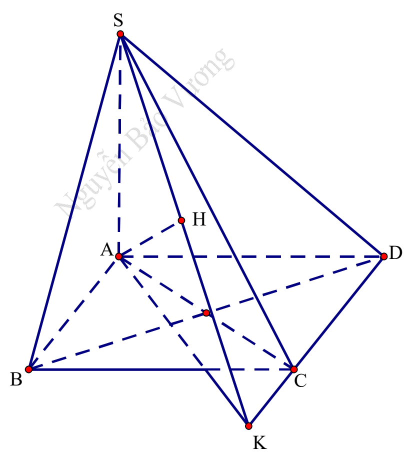
$\Rightarrow d(A,(SBC))=AI=\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, $\widehat{ADC}=30°$, $AB=a$, $AD=2a$, $SA=a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $AB // CD\Rightarrow AB//(SCD)$, suy ra $d(B,(SCD))=d(A,(SCD))$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, kẻ $AK\perp CD$ tại K khi đó tam giác AKD vuông tại K và có $\widehat{ADK}=30°\Rightarrow AK=a$.

Trong mặt phẳng (SAK), kẻ $AH\perp SK$ tại $H\Rightarrow AH\perp(SCD)\Rightarrow d(A,(SCD))=AH$.

Do $SA=AK=a$ nên tam giác SAK vuông cân tại A suy ra $AH=\dfrac{1}{2}SK=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

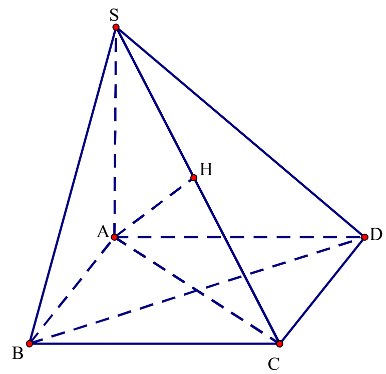
Vậy $d(B,(SCD))=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$, $AC=2a$, $SA=2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{84}}{7}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $AB // CD \Rightarrow AB // (SCD)$, suy ra $d(B,(SCD)) = d(A,(SCD))$.

Xét tam giác ADC ta có $AC^2 = AD^2 + DC^2 = 4a^2$ nên $AC \perp CD$ mà $SA \perp CD \Rightarrow CD \perp (SAC)$

$\Rightarrow (SCD) \perp (SAC)$ lại có $(SCD) \cap (SAC) = SC$ nên từ A dựng $AH \perp SC$ tại H thì $AH \perp (SCD) \Rightarrow AH = d(A,(SCD))$

Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AC^2} + \dfrac{1}{AS^2} = \dfrac{1}{4a^2} + \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{1}{2a^2} \Rightarrow AH = a\sqrt{2}$

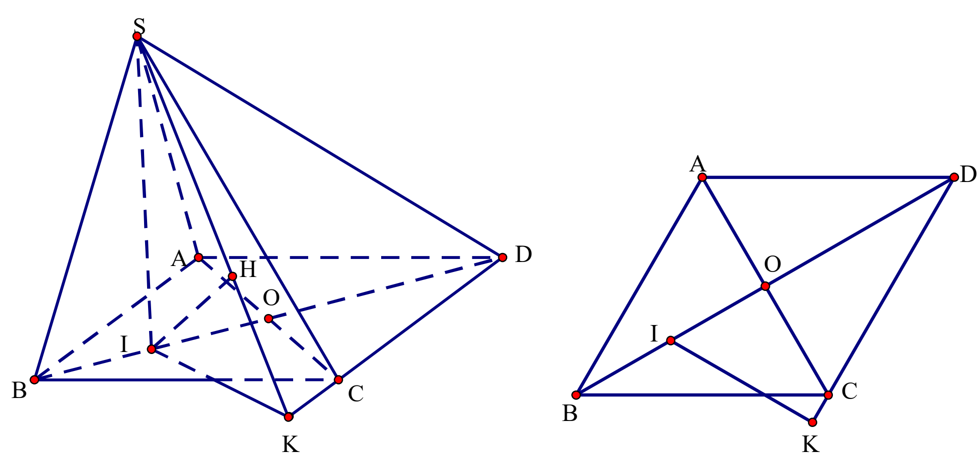
Vậy $d(B,(SCD)) = a\sqrt{2}$.

Câu 24. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh $2a$, $\widehat{ABC} = 60°$, hình chiếu vuông góc của S lên $(ABCD)$ trùng với trung điểm I của BO, $SI = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{3a\sqrt{3}}{5}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\dfrac{4a\sqrt{3}}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $BI \cap (SCD) = \{D\}$, suy ra $d(B,(SCD)) = \dfrac{4}{3} d(I,(SCD))$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, kẻ $IK \perp CD$ tại K.

Trong mặt phẳng (SIK), kẻ $IH \perp SK$ tại $H \Rightarrow IH \perp (SCD) \Rightarrow d(I,(SCD)) = IH$.

Xét tam giác IDK vuông tại K ta có $\widehat{BDC} = 30° \Rightarrow IK = \frac{1}{2}ID = \frac{1}{2}.\frac{3}{2}.BO = \frac{3}{4}a\sqrt{3}$ (do tam giác ABC đều cạnh $2a$ nên $BO = a\sqrt{3}$).

Ta có $\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IK^2} + \frac{1}{IS^2} = \frac{16}{27a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{25}{27a^2} \Rightarrow IH = \frac{3a\sqrt{3}}{5}$

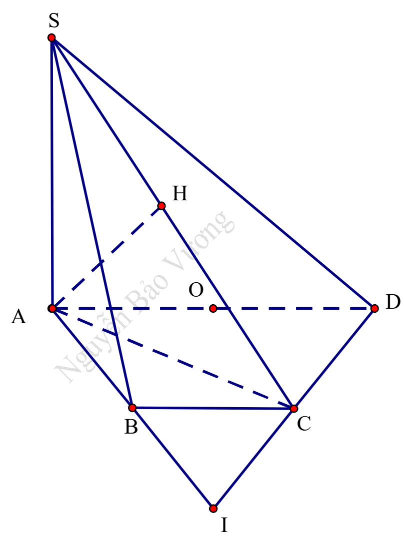
Vậy $d(B,(SCD)) = \frac{4}{3}.\frac{3a\sqrt{3}}{5} = \frac{4a\sqrt{3}}{5}$.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang cân đáy AD có $AD = 2AB = 2BC = 2a$, $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $2a$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O là trung điểm của AD khi đó tứ giác $ABCO$ là hình thoi nên

$CO = a \Rightarrow CO = \frac{1}{2}AD \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại C

$\Rightarrow AC \perp CD$ mà $SA \perp CD \Rightarrow CD \perp (SAC) \Rightarrow (SCD) \perp (SAC)$

Ta có $(SCD) \cap (SAC) = SC$ nên từ A dựng $AH \perp SC$ tại H thì

$AH \perp (SCD) \Rightarrow AH = d(A,(SCD))$.

ΔACD vuông tại C $\Rightarrow AC = \sqrt{AD^2 - DC^2} = a\sqrt{3}$.

Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi I là giao điểm của AB và CD khi đó BC là đường trung bình của tam giác $IAD \Rightarrow d(B,(SCD)) = \frac{1}{2}d(A,(SCD)) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

-------------------- HẾT --------------------