

ĐỀ 1

Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại đỉnh B , với $AB = a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy.

- 1) Chứng minh tất cả các mặt bên của hình chóp $S.ABC$ đều là các tam giác vuông.
- 2) Dựng đường cao AH của tam giác SAB , $H \in SB$. Chứng minh AH vuông góc với mặt phẳng (SBC) .
- 3) Gọi I, J lần lượt là các trọng tâm của các tam giác SAB, SAC . Chứng minh IJ vuông góc với AH .
- 4) Gọi α là góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) . Tính $\tan \alpha$.
- 5) Gọi R, T là các điểm nằm trên cạnh SC thỏa mãn $ST = 3TC$ và đường thẳng AT vuông góc với đường thẳng BR . Tính độ dài đoạn SR .

-----Hết-----

ĐỀ 2

Cho hình chóp tam giác $S.MNP$ có đáy MNP là tam giác vuông cân tại đỉnh N , với $MN = a$. Cạnh bên $SM = a\sqrt{2}$ và SM vuông góc với mặt phẳng đáy.

- 1) Chứng minh tất cả các mặt bên của hình chóp $S.MNP$ đều là các tam giác vuông.
- 2) Dựng đường cao MK của tam giác SMN , $K \in SN$. Chứng minh MK vuông góc với mặt phẳng (SNP) .
- 3) Gọi E, F lần lượt là các trọng tâm của các tam giác SMN, SMP . Chứng minh EF vuông góc với MK .
- 4) Gọi α là góc giữa đường thẳng SN và mặt phẳng (SMP) . Tính $\cot \alpha$.
- 5) Gọi I, J là các điểm nằm trên cạnh SP thỏa mãn $SJ = 3JP$ và đường thẳng MJ vuông góc với đường thẳng NI . Tính độ dài đoạn IJ .

-----Hết-----

ĐỀ 1

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a . Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi I, H, K lần lượt là trung điểm của SA, BC, CD .

- 1) Chứng minh tất cả các mặt bên của hình chóp $S.ABCD$ đều là các tam giác vuông.
- 2) Chứng minh đường thẳng HK vuông góc với mặt phẳng (SAC) .
- 3) Chứng minh đường thẳng DH vuông góc với đường thẳng SK .
- 4) Gọi α là góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) . Tính $\sin \alpha$.
- 5) Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng CI và cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại M và N . Khi góc giữa đường thẳng AC và mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất, hãy tính diện tích của tứ giác $CMIN$.

-----Hết-----

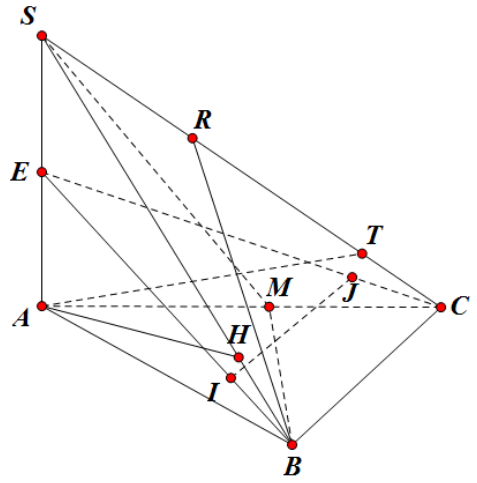
ĐỀ 2

Cho hình chóp $S.MNPQ$ có đáy $MNPQ$ là hình vuông tâm O cạnh a . Cạnh bên $SM = a\sqrt{2}$ và SM vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của các cạnh SM, NP, PQ .

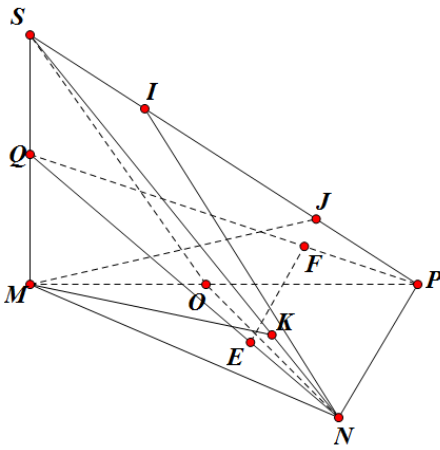
- 1) Chứng minh tất cả các mặt bên của hình chóp $S.MNPQ$ đều là các tam giác vuông.
- 2) Chứng minh FG vuông góc với mặt phẳng (SMP) .
- 3) Chứng minh đường thẳng QF vuông góc với đường thẳng SG .
- 4) Gọi α là góc giữa đường thẳng SP và mặt phẳng (SMN) . Tính $\cos \alpha$.
- 5) Gọi (R) là mặt phẳng chứa đường thẳng PE và cắt các cạnh SN, SQ lần lượt tại K và H . Khi góc giữa đường thẳng MP và mặt phẳng (R) đạt giá trị lớn nhất, hãy tính diện tích của tứ giác $PHEK$.

-----Hết-----

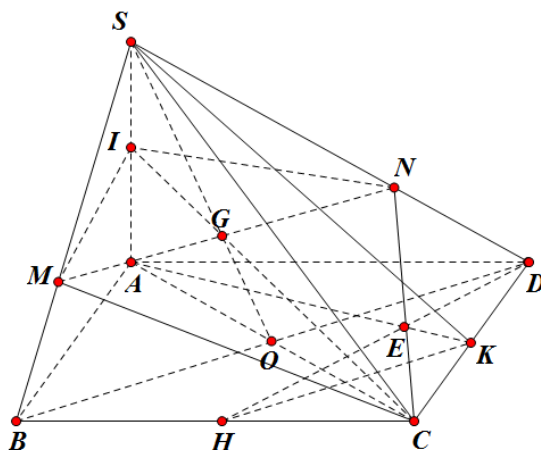
ĐÁP ÁN ĐỀ 1 KHỐI SÁNG

1 (3 điểm)	 $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AB, SA \perp AC$ $\Rightarrow \triangle SAB, \triangle SAC$ vuông tại A. $\left. \begin{matrix} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{matrix} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \triangle SBC$ vuông tại B.	2 đ 1 đ	
2 (2 điểm)	$\left. \begin{matrix} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{matrix} \right\} \Rightarrow AH \perp (SBC)$.	1 đ 1 đ	
3 (2 điểm)	Gọi E là trung điểm của SA. Ta có $\frac{EI}{EB} = \frac{EJ}{EC} = \frac{2}{3} \Rightarrow IJ // BC \Rightarrow IJ \perp (SAB)$ Mà $AH \subset (SAB) \Rightarrow IJ \perp AH$.	1 đ 1 đ	
4 (2 điểm)	Gọi M là trung điểm của AC. $\left. \begin{matrix} BM \perp AC \\ BM \perp SA \end{matrix} \right\} \Rightarrow BM \perp (SAC) \Rightarrow M$ là hình chiếu của B lên (SAC) Suy ra SM là hình chiếu của SB lên (SAC). Do đó $(SB; (SAC)) = (SB; SM) = \widehat{BSM}$, với $\triangle BSM$ vuông tại M. Tính được $SM = \sqrt{SA^2 + AM^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}, BM = \frac{1}{2} AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow \tan \alpha = \frac{BM}{SM} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.	1 đ 1 đ	
5 (1 điểm)	Ta có $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{ST} = \overrightarrow{AS} + \frac{3}{4}\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{AS} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AS} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ Đặt $\overrightarrow{SR} = k\overrightarrow{SC}$. $\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SR} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AS} + k\overrightarrow{SC} = -\overrightarrow{AB} + (1-k)\overrightarrow{AS} + k\overrightarrow{AC}$. Từ GT $\Rightarrow \overrightarrow{AT} \cdot \overrightarrow{BR} = 0$ $\Leftrightarrow \frac{1}{4}(1-k)AS^2 - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{3k}{4}AC^2 = 0$ $\Leftrightarrow \frac{1}{4}(1-k)2a^2 - \frac{3}{4} \cdot a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3k}{4} \cdot 2a^2 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{4}$. Do đó $SR = \frac{1}{4}SC \Rightarrow RT = \frac{1}{2}SC = a$.	0,5 đ 0,5 đ	

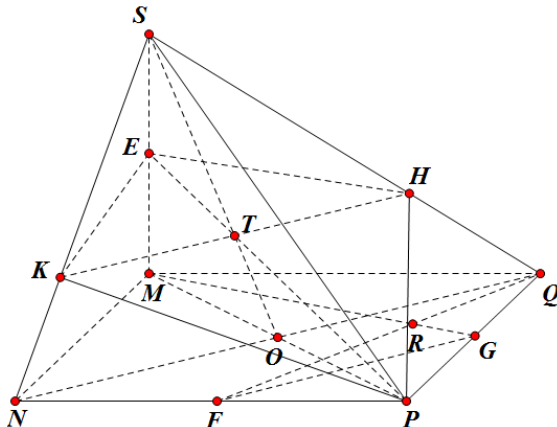
ĐÁP ÁN ĐỀ 2 KHỐI SÁNG

1 (3 điểm)	 $SM \perp (MNP) \Rightarrow SM \perp MN, SM \perp MP$ $\Rightarrow \triangle SMN, \triangle SMP$ vuông tại M. $\left. \begin{matrix} PN \perp MN \\ PN \perp SM \end{matrix} \right\} \Rightarrow PN \perp (SMN) \Rightarrow PN \perp SN \Rightarrow \triangle SNP$ vuông tại N.	2 đ 1 đ
2 (2 điểm)	$\left. \begin{matrix} MK \perp SN \\ MK \perp NP \end{matrix} \right\} \Rightarrow MK \perp (SNP)$.	1 đ 1 đ
3 (2 điểm)	Gọi Q là trung điểm của SM. Ta có $\frac{QE}{QN} = \frac{QF}{QP} = \frac{2}{3} \Rightarrow EF \parallel NP \Rightarrow EF \perp (SMN)$ Mà $MK \subset (SMN) \Rightarrow EF \perp MK$.	1 đ 1 đ
4 (2 điểm)	Gọi O là trung điểm của MP. $\left. \begin{matrix} NO \perp MP \\ NO \perp SM \end{matrix} \right\} \Rightarrow NO \perp (SMP) \Rightarrow O$ là hình chiếu của N lên (SMP) Suy ra SO là hình chiếu của SN lên (SMP). Do đó $(SN; (SMP)) = (SN; SO) = \widehat{NSO}$, với $\triangle NSO$ vuông tại O. Tính được $SO = \sqrt{SM^2 + MO^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}, NO = \frac{1}{2}MP = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow \cot \alpha = \frac{SO}{NO} = \sqrt{5}$.	1 đ 1 đ
5 (1 điểm)	Ta có $\overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SJ} = \overrightarrow{MS} + \frac{3}{4}\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{MS} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{SM} + \overrightarrow{MP}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{MS} + \frac{3}{4}\overrightarrow{MP}$ Đặt $\overrightarrow{SI} = k\overrightarrow{SP}$. $\overrightarrow{NI} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SI} = -\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MS} + k\overrightarrow{SP} = -\overrightarrow{MN} + (1-k)\overrightarrow{MS} + k\overrightarrow{MP}$. Từ GT $\Rightarrow \overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{NI} = 0$ $\Leftrightarrow \frac{1}{4}(1-k)MS^2 - \frac{3}{4}\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} + \frac{3k}{4}MP^2 = 0$ $\Leftrightarrow \frac{1}{4}(1-k)2a^2 - \frac{3}{4} \cdot a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3k}{4} \cdot 2a^2 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{4}$. Do đó $SI = \frac{1}{4}SP \Rightarrow IJ = \frac{1}{2}SP = a$.	0,5 đ 0,5 đ

ĐÁP ÁN ĐỀ 1 KHỐI CHIỀU

1 (3 điểm)	 $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AB, SA \perp AD \Rightarrow \triangle SAB, \triangle SAD$ vuông tại A. $\left. \begin{matrix} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{matrix} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \triangle SBC$ vuông tại B. $\left. \begin{matrix} DC \perp AD \\ DC \perp SA \end{matrix} \right\} \Rightarrow DC \perp (SAD) \Rightarrow DC \perp SD \Rightarrow \triangle SDC$ vuông tại D.	1 đ 1 đ 1 đ	
2 (2 điểm)	$\left. \begin{matrix} HK // BD \\ BD \perp (SAC) \end{matrix} \right\} \Rightarrow HK \perp (SAC)$.	1 đ 1 đ	
3 (2 điểm)	Gọi $E = DH \cap AK \Rightarrow \triangle DEK$ vuông tại E. Suy ra $DH \perp AK$. Mà $DH \perp SA \Rightarrow DH \perp (SAK) \Rightarrow DH \perp SK$.	1 đ 1 đ	
4 (2 điểm)	Ta có B là hình chiếu vuông góc của C lên mặt phẳng (SAB) nên SB là hình chiếu vuông góc của SC C lên mặt phẳng (SAB). Suy ra $(SC; (SAB)) = (SC; SB) = \widehat{BSC}$, với tam giác BSC vuông tại B. Ta có $BC = a, SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2a$. Suy ra $\sin \alpha = \frac{BC}{SC} = \frac{1}{2}$.	1 đ 1 đ	
5 (1 điểm)	Gọi P, I theo thứ tự là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P) và đường thẳng AI. Ta có $(AC; (P)) = \widehat{ACP}$. Có $\sin \widehat{ACP} = \frac{AP}{AC} \leq \frac{AJ}{AC} = \text{const}$. Suy ra $(AC; (P))$ lớn nhất khi $P \equiv J \Rightarrow (P) \perp AJ$. Mà $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AJ \Rightarrow BD // (P) \Rightarrow BD // MN$. Gọi G là trọng tâm của $\triangle SAC$ và cũng là trọng tâm của $\triangle SBD \Rightarrow MN$ đi qua G. Khi đó $MN = \frac{2}{3} BD = \frac{2a\sqrt{2}}{3}; CI = \sqrt{CA^2 + AI^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$. Vậy $S_{\text{CMIN}} = \frac{1}{2} CI \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{10}}{2} = \frac{a^2\sqrt{5}}{3}$.	0,5 đ 0,5 đ	

ĐÁP ÁN ĐỀ 2 KHỐI CHIỀU

1 (3 điểm)	 $SM \perp (MNPQ) \Rightarrow SM \perp MN, SM \perp MQ \Rightarrow \triangle SMN, \triangle SMQ$ vuông tại M. $\left. \begin{matrix} PN \perp MN \\ PN \perp SM \end{matrix} \right\} \Rightarrow PN \perp (SMN) \Rightarrow PN \perp SN \Rightarrow \triangle SNP$ vuông tại N. $\left. \begin{matrix} PQ \perp MQ \\ PQ \perp SM \end{matrix} \right\} \Rightarrow PQ \perp (SMQ) \Rightarrow PQ \perp SQ \Rightarrow \triangle SPQ$ vuông tại Q.	1 đ 1 đ 1 đ
2 (2 điểm)	$\left. \begin{matrix} FG \parallel NQ \\ NQ \perp (SMP) \end{matrix} \right\} \Rightarrow FG \perp (SMQ).$	1 đ 1 đ
3 (2 điểm)	Gọi $R = MG \cap FQ \Rightarrow \triangle QRG$ vuông tại R. Suy ra $MG \perp FQ$. Mà $FQ \perp SM \Rightarrow DFQ(SMG) \Rightarrow FQ \perp SG$.	1 đ 1 đ
4 (2 điểm)	Ta có N là hình chiếu vuông góc của P lên mặt phẳng (SMN) nên SN là hình chiếu vuông góc của SP lên mặt phẳng (SNP). Suy ra $(SP; (SMN)) = (SP; SN) = \widehat{NSP}$, với tam giác NSP vuông tại N. Ta có $NP = a, SP = \sqrt{SM^2 + MC^2} = 2a$. Suy ra $\sin \alpha = \frac{PN}{SP} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.	1 đ 1 đ
5 (1 điểm)	Gọi U, V theo thứ tự là hình chiếu của M lên mặt phẳng (R) và đường thẳng PE. Ta có $(MP; (R)) = \widehat{MPU}$. Có $\sin \widehat{MPU} = \frac{MU}{MP} \leq \frac{MV}{MP} = \text{const.}$ Suy ra $(MP; (R))$ lớn nhất khi $U \equiv V \Rightarrow (R) \perp AU$. Mà $NQ \perp (SMP) \Rightarrow NQ \perp AU \Rightarrow NQ \parallel (R) \Rightarrow NQ \parallel HK$. Gọi T là trọng tâm của $\triangle SMP$ và cũng là trọng tâm của $\triangle SNQ \Rightarrow HK$ đi qua T. Khi đó $HK = \frac{2}{3} NQ = \frac{2a\sqrt{2}}{3}; PE = \sqrt{PM^2 + ME^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$. Vậy $S_{PHEK} = \frac{1}{2} PE.HK = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{10}}{2} = \frac{a^2\sqrt{5}}{3}$.	0,5 đ 0,5 đ