

Họ tên:..... Số báo danh:.....

Mã đề 001

Câu 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+m^2}{x+9}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 5.

Câu 2. Bất phương trình $\log_2 \left(\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-7}{x+3} \right) \geq 0$ có tập nghiệm là $(a; b]$. Tính giá trị $P = 3a - b$.

- A. $P = 4$. B. $P = 5$. C. $P = 7$. D. $P = 10$.

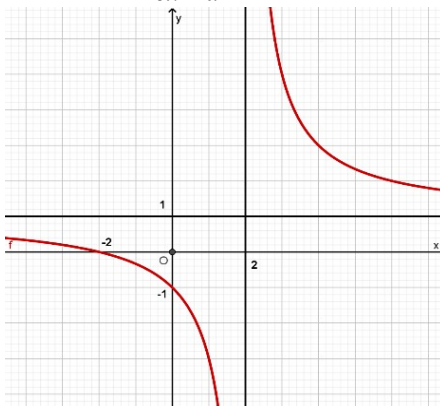
Câu 3. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$

Câu 4. Cho hình nón có bán kính đường tròn đáy bằng R , chiều cao bằng h , độ dài đường sinh bằng l . Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. $l = \sqrt{R^2 + h^2}$. B. $l = \sqrt{R^2 - h^2}$.
C. $R = l^2 + h^2$. D. $h = \sqrt{R^2 - l^2}$.

Câu 5. Tìm các số thực a, c, d để hàm số $y = \frac{ax+2}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên



- A. $a = 1, c = -1, d = 1$. B. $a = 2, c = -1, d = -2$. C. $a = 1, c = 1, d = -2$. D. $a = 1, c = 1, d = 2$.

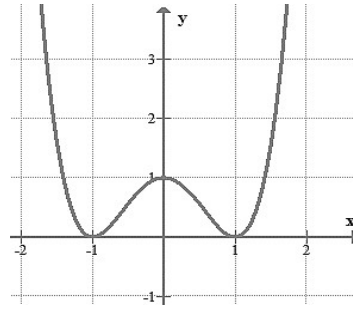
Câu 6. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B . Gọi H là hình chiếu của A trên SB . Xét các khẳng định sau

- (1): $AH \perp SC$; (2): $BC \perp (SAB)$; (3): $SC \perp AB$.

Có bao nhiêu khẳng định đúng?

- A. 3. B. 1. C. 0. D. 2.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;1]$. Giá trị của $M + m$ bằng

- A.** 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.
- Câu 8.** Một bình đựng 8 viên bi xanh và 4 viên bi đỏ khác nhau. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Xác suất để có được ít nhất hai viên bi xanh là bao nhiêu?
- A.** $\frac{14}{55}$. **B.** $\frac{28}{55}$. **C.** $\frac{42}{55}$. **D.** $\frac{41}{55}$.
- Câu 9.** Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ có tổng hoành độ và tung độ bằng
- A.** 6. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 3.
- Câu 10.** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh bằng a . Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng
- A.** $\frac{\sqrt{3}a}{2}$ **B.** a **C.** $2a$ **D.** $\frac{\sqrt{3}a}{3}$
- Câu 11.** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng 45° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng
- A.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.
- Câu 12.** Một hình trụ có bán kính đáy $r = 5a$ và khoảng cách giữa hai đáy là $7a$. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $3a$. Diện tích của thiết diện được tạo nên bằng
- A.** $70a^2$ **B.** $21a^2$ **C.** $56a^2$ **D.** $35a^2$
- Câu 13.** Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc nhau và $OA = a, OB = 2a, OC = 3a$. Diện tích của mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $OABC$ bằng:
- A.** $S = 10\pi a^2$ **B.** $S = 12\pi a^2$ **C.** $S = 8\pi a^2$ **D.** $S = 14\pi a^2$
- Câu 14.** Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + 3x + 2$ là hàm số nào trong các hàm số sau?
- A.** $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 2x + C$. **B.** $F(x) = x^4 + 3x^2 + 2x + C$.
- C.** $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 2x + C$. **D.** $F(x) = 3x^2 + 3 + C$.
- Câu 15.** Cho hàm số $f(x) = x(x^2 + 1)^{2016}$. Khi đó:
- A.** $\int f(x)dx = \frac{(x^2 + 1)^{2017}}{2017} + C$. **B.** $\int f(x)dx = \frac{(x^2 + 1)^{2016}}{2016} + C$.
- C.** $\int f(x)dx = \frac{(x^2 + 1)^{2017}}{4034} + C$. **D.** $\int f(x)dx = \frac{(x^2 + 1)^{2016}}{4032} + C$.
- Câu 16.** Cho a là số thực dương khác 1, biểu thức $a^{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt[3]{a}$ viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ là
- A.** $a^{\frac{14}{15}}$. **B.** $a^{\frac{2}{15}}$. **C.** $a^{\frac{1}{15}}$. **D.** $a^{\frac{17}{5}}$.

- Câu 17.** Đạo hàm của hàm số $y = \ln(1 - x^2)$ là
- A. $\frac{2x}{x^2 - 1}$. B. $\frac{-2x}{x^2 - 1}$. C. $\frac{1}{1 - x^2}$. D. $\frac{1}{x^2 - 1}$.
- Câu 18.** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$.
- A. $\int f(x)dx = \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$. B. $\int f(x)dx = \frac{1}{6}\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$.
C. $\int f(x)dx = -\frac{1}{3}\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$. D. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$.
- Câu 19.** Tập xác định của hàm số $y = (x - 1)^{\frac{1}{3}}$ là
- A. $[1; +\infty)$. B. $\mathbb{R}$. C. $(1; +\infty)$. D. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- Câu 20.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x - 1)(x + 5)^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực đại của hàm số đã cho là
- A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.
- Câu 21.** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x - e^{-x}$.
- A. $\int f(x)dx = -e^x + e^{-x} + C$. B. $\int f(x)dx = -e^x - e^{-x} + C$.
C. $\int f(x)dx = e^x + e^{-x} + C$. D. $\int f(x)dx = e^x - e^{-x} + C$.
- Câu 22.** Thể tích của khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a là
- A. a^3 . B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.
- Câu 23.** Tập nghiệm của bất phương trình $5^{x+2} < \left(\frac{1}{25}\right)^{-x}$ là
- A. $(-\infty; 2)$. B. $(2; +\infty)$. C. $(-\infty; 1)$. D. $(1; +\infty)$.
- Câu 24.** Cấp số nhân (u_n) có số hạng tổng quát là: $u_n = \frac{3}{5} \cdot 2^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Số hạng đầu tiên và công bội của cấp số nhân đó là:
- A. $u_1 = \frac{6}{5}, q = 2$. B. $u_1 = \frac{3}{5}, q = -2$. C. $u_1 = \frac{6}{5}, q = -2$ D. $u_1 = \frac{3}{5}, q = 2$.
- Câu 25.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, góc giữa cạnh bên với mặt đáy bằng 45° . Tính diện tích xung quanh của khối nón đỉnh S , đáy là đường tròn ngoại tiếp $ABCD$.
- A. $4\sqrt{2}\pi a^2$. B. $2\pi a^2$. C. $2\sqrt{2}\pi a^2$. D. $\frac{\sqrt{2}\pi a^2}{2}$.
- Câu 26.** Tập nghiệm của bất phương trình $3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 3 \leq 0$ có dạng $S = [a; b]$ trong đó $a < b$. Giá trị của biểu thức $5b - 2a$ bằng
- A. 7. B. $\frac{43}{3}$. C. $\frac{8}{3}$. D. 3.
- Câu 27.** Cho tập A có n phần tử ($n \in \mathbb{N}^*$), khẳng định nào sau đây **sai**?
- A. $P_n = A_n^n$.
B. Số tổ hợp chập k của n phần tử là $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ với $k \leq n, k \in \mathbb{N}$.
C. Số hoán vị của $(n+1)$ phần tử là: $P_n = 1.2.3 \dots (n-2)(n-1)n$.
D. Số chỉnh hợp chập k của n phần tử là $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ với $k \leq n, k \in \mathbb{N}^*$.

Câu 28. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+3}$ là

- A. $x = -1$. B. $x = 3$. C. $x = 1$. D. $x = -3$.

Câu 29. Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 3a^2$ và chiều cao $h = a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

- A. $3a^3$. B. $\frac{1}{3}a^3$. C. a^3 . D. $\frac{3}{2}a^3$.

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-	-
$f(x)$	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Hiệu của số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.

Câu 31. Biết $\int xe^{2x} dx = axe^{2x} + be^{2x} + C$ ($a, b \in \mathbb{Q}, C \in \mathbb{R}$). Tính tích $a.b$

- A. $ab = -\frac{1}{8}$ B. $ab = -\frac{1}{4}$ C. $ab = \frac{1}{8}$ D. $ab = \frac{1}{4}$

Câu 32. Tích các nghiệm của phương trình $\log_5(6^{x+1} - 36^x) = 1$ bằng

- A. $\log_6 5$. B. $\log_5 6$. C. 5. D. 0.

Câu 33. Diện tích xung quanh của hình trụ có bán kính đáy bằng 7 và chiều cao bằng 6 là:

- A. 294π B. 63π C. 84π D. 42π

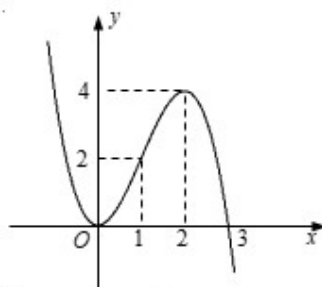
Câu 34. Nghiệm của phương trình $\log_2(x-1) = 3$ là

- A. $x = 1$. B. $x = 9$. C. $x = 10$. D. $x = 5$.

Câu 35. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = \left(\frac{1}{\sqrt{5}-2}\right)^x$. B. $y = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-x}$. C. $y = \frac{1}{5^x}$. D. $y = \left(\frac{e}{3}\right)^x$.

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào?



- A. $(1;3)$. B. $(-\infty;0)$. C. $(0;+\infty)$. D. $(0;2)$.

Câu 37. Khối cầu (S) có diện tích bằng $36\pi a^2$ (cm^2), $a > 0$ thì có thể tích là:

- A. $27\pi a^3$ (cm^3) B. $12\pi a^3$ (cm^3) C. $36\pi a^3$ (cm^3) D. $\frac{16}{3}\pi a^3$ (cm^3)

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 3a$ và $AD = 4a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

- A. $4\sqrt{2}a^3$. B. $\frac{4\sqrt{2}a^3}{3}$. C. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$. D. $12\sqrt{2}a^3$.

Câu 39. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết rằng $SC = a\sqrt{3}$.

- A. $V_{S.ABCD} = a^3$. B. $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. D. $V_{S.ABCD} = \frac{a^3}{3}$.

Câu 40. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-2021; 2021]$ để phương trình $\frac{2^x - m}{\sqrt{\log_3^2 x - 2\log_3 x}} = 0$ có nghiệm?

- A. 1510. B. Vô số. C. 1512. D. 1509.

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A . Mặt bên $(SAB) \perp (ABC)$ và ΔSAB đều cạnh bằng 1. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{21}}{6}$. C. $\frac{\sqrt{15}}{6}$. D. $\frac{3\sqrt{21}}{2}$.

Câu 42. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $BM = 3MC$ và N là trung điểm cạnh $B'C'$. Gọi d là đường thẳng đi qua A , cắt $A'M$ tại E , cắt BN tại F . Tính tỉ số $\frac{V_{EABC}}{V_{FA'B'C'}}$.

- A. $\frac{5}{4}$. B. $\frac{6}{5}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{3}{4}$.

Câu 43. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-2021; 2021]$ để hàm số $y = \left| \frac{x^2 + m}{x^2 + 1} \right|$ có đúng ba điểm cực trị?

- A. 2020. B. 2022. C. 2021. D. 2019.

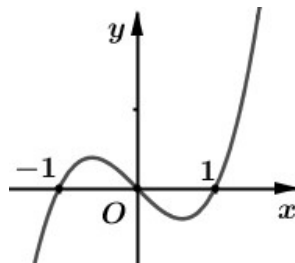
Câu 44. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $(x^2 + y^2 + 1) + \log_2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = (xy - 1)^2$. Khi đó $x + y$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu:

- A. 4. B. 8. C. 1. D. $\frac{9}{2}$.

Câu 45. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị cắt trục hoành tại 2 điểm $x = -1$ và $x = 3$. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x) = am + 3bx + d$ có 3 nghiệm phân biệt?

- A. 2 B. 3 C. 5 D. 4

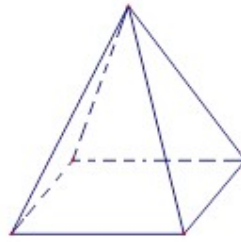
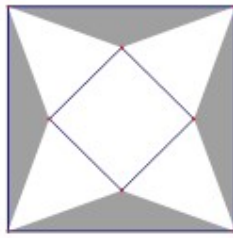
Câu 46. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình dưới đây.



Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(x^2 + 4x + 4)$ trên $[-3; -1]$ là

- A. $g(-1)$. B. $g(-3)$. C. $f(-2)$. D. $f(0)$.

Câu 47. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh $1m$ như hình vẽ dưới đây. Người ta cắt phần tô đậm của tấm nhôm rồi gập thành một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng x (m), sao cho bốn đỉnh của hình vuông gập lại thành đỉnh của hình chóp. Giá trị của x để khối chóp nhận được có thể tích lớn nhất là



A. $x = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

B. $x = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

C. $x = \frac{1}{2}$.

D. $x = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 48. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $(2^x - 2x)\sqrt{(3)^{2^x} - m} = 0$ (với m là tham số thực).
Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-2021; 2022]$ để tập hợp S có hai phần tử?

A. 2093.

B. 2095.

C. 2094.

D. 2096.

Câu 49. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$								

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$
 0 1 0

Hàm số $y = f(\sin^2 2x - 4 \sin 2x + 1)$ trên $[0; 2021\pi]$ có bao nhiêu khoảng đồng biến?

A. 4042.

B. 8084.

C. 2021.

D. 2020.

Câu 50. Cho phương trình $\log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_{2021}(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \log_a(x + \sqrt{x^2 - 1})$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(3; 25)$ của tham số a sao cho phương trình đã cho có nghiệm lớn hơn 3?

A. 16.

B. 18.

C. 19.

D. 17.

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+m^2}{x+9}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y = \frac{x+m^2}{x+9} \Rightarrow y' = \frac{9-m^2}{(x-9)^2}$. Để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ

khi $y' > 0 \Leftrightarrow 9-m^2 > 0 \Leftrightarrow -3 < m < 3 \Leftrightarrow m \in \{\pm 2; \pm 1; 0\}$

Câu 2: Bất phương trình $\log_2 \left(\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-7}{x+3} \right) \geq 0$ có tập nghiệm là $(a; b]$. Tính giá trị $P = 3a - b$.

A. $P = 4$.

B. $P = 5$.

C. $P = 7$.

D. $P = 10$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $0 < \frac{3x-7}{x+3} < 1 \Leftrightarrow \frac{7}{3} < x < 5$.

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} \log_2 \left(\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-7}{x+3} \right) \geq 0 &= \log_2 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-7}{x+3} \geq 1 = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{3x-7}{x+3} \leq \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow \frac{3x-7}{x+3} - \frac{1}{3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{8x-24}{3x+9} \leq 0 \Leftrightarrow -3 < x \leq 3 \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ta có: $\frac{7}{3} < x \leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{3} \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow P = 3a - b = 4$

Câu 3: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y = x^4 - 2x^2 + 1 \Rightarrow y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên $(-\infty; -2) \subset (-\infty; -1)$.

Câu 4: Cho hình nón có bán kính đường tròn đáy bằng R , chiều cao bằng h , độ dài đường sinh bằng l . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $l = \sqrt{R^2 + h^2}.$

B. $l = \sqrt{R^2 - h^2}.$

C. $R = l^2 + h^2.$

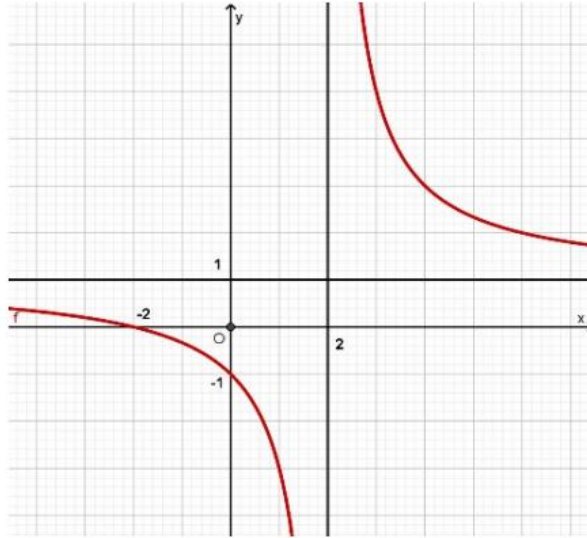
D. $h = \sqrt{R^2 - l^2}.$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $l = \sqrt{R^2 + h^2}.$

Câu 5: Tìm các số thực a, c, d để hàm số $\frac{ax+2}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên



A. $a = 1, c = -1, d = 1.$

B. $a = 2, c = -1, d = -2.$

C. $a = 1, c = 1, d = -2.$

D. $a = 1, c = 1, d = 2.$

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị hàm số ta có:

Giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{ax+2}{cx+d}$ và trục Oy : $x = 0 \Rightarrow \frac{2}{d} = -1 \Rightarrow d = -2$

Tiệm cận đứng $x = \frac{-d}{c} = 2 \Rightarrow c = 1.$

Tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c} = 1 \Rightarrow a = c = 1.$

Câu 6: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B . Gọi H là hình chiếu của A trên SB . Xét các khẳng định sau:

(1) $AH \perp SC$ (2) $BC \perp (SAB)$ (3) $SC \perp AB$

Có bao nhiêu khẳng định đúng?

A. 3.

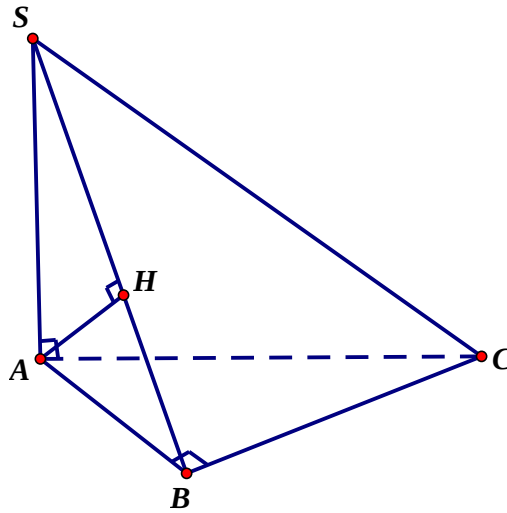
B. 1.

C. 0.

D. 2.

Lời giải

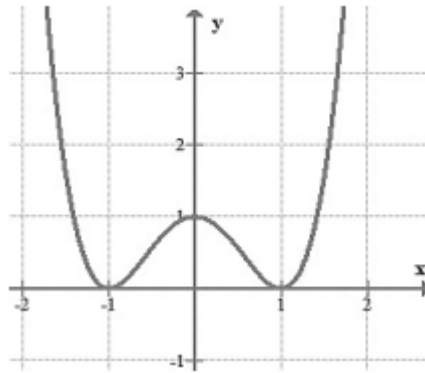
Chọn D



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH \text{ (do } AH \subset (SAB))$

$\begin{cases} AH \perp SB \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$. Giá trị của $M + m$ bằng

- A. 3 B. 0 **C. 1** D. 2

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị hàm số ta có $M = 1$ và $m = 0$ nên $M + m = 1$.

Câu 8: Một bình đựng 8 viên bi xanh và 4 viên bi đỏ khác nhau. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Xác suất để có được ít nhất hai viên bi xanh là bao nhiêu?

- A. $\frac{14}{55}$ B. $\frac{28}{55}$ **C. $\frac{42}{55}$** D. $\frac{41}{55}$

Lời giải

Chọn C

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_{12}^3$.

Gọi A là biến cố “Lấy được ít nhất hai viên bi xanh” ta có: $n(A) = C_8^2 \cdot C_4^1 + C_8^3$.

Xác suất của biến cố A là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{42}{55}$.

Câu 9: Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ có tổng hoành độ và tung độ bằng

A. 6

B. 1

C. -1

D. 3

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 12x + 9, y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

$$y'' = 6x - 12, y''(1) = -6 < 0 \text{ nên hàm số đạt cực đại tại } x = 1.$$

Vậy điểm cực đại của đồ thị hàm số là $A(1; 5)$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh bằng a . Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

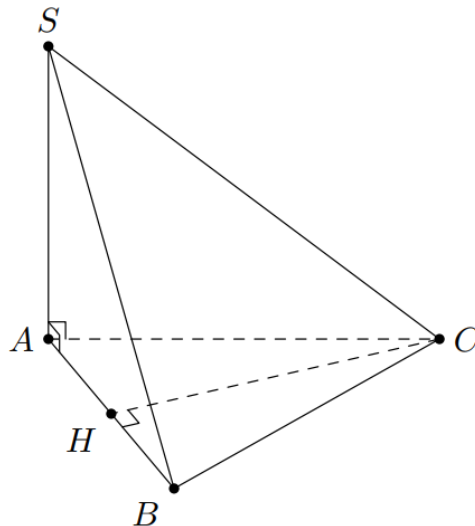
B. a .

C. $2a$.

D. $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.

Lời giải

Chọn A.



Gọi H là trung điểm AB . Ta có $CH \perp (SAB)$ nên $d(C, (SAB)) = CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 11: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng 45° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

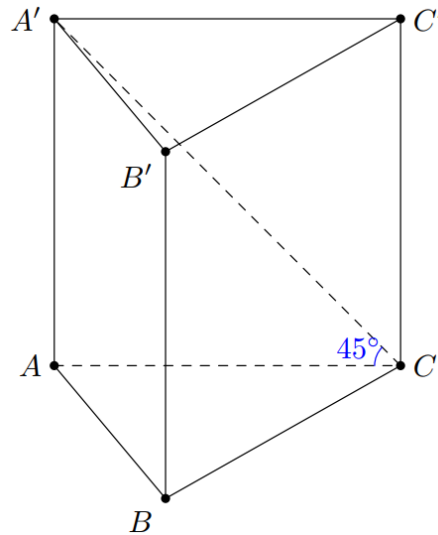
B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A.



Ta có $(A'C, (ABC)) = A'CA = 45^\circ$ nên $\triangle AA'C$ vuông cân tại A suy ra $AA' = AC = a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = Sh = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 12: Một hình trụ có bán kính đáy $r = 5a$ và khoảng cách giữa hai đáy là $7a$. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $3a$. Diện tích của thiết diện được tạo nên bằng

A. $70a^2$.

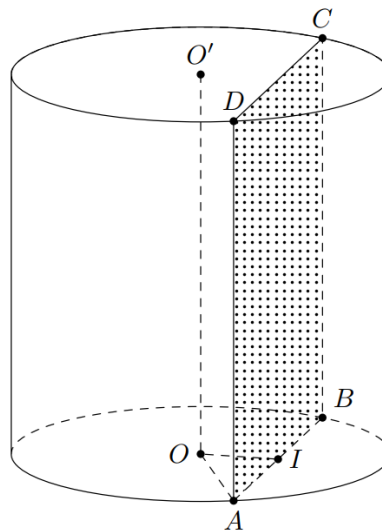
B. $21a^2$.

C. $56a^2$.

D. $35a^2$.

Lời giải

Chọn C.



Gọi $ABCD$ là thiết diện của khối trụ như hình vẽ. Gọi I là trung điểm AB .

Ta có $OI = 3a$ nên $AI = \sqrt{OA^2 - OI^2} = 4a$. Suy ra $AB = 8a$.

Vậy diện tích thiết diện là $8a \cdot 7a = 56a^2$.

Câu 13: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = a$, $OB = 2a$, $OC = 3a$. Diện tích mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $OABC$ bằng

A. $S = 10\pi a^2$.

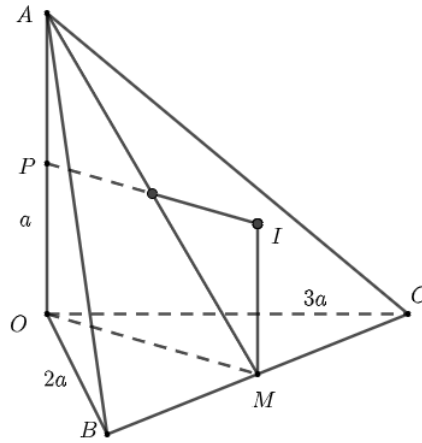
B. $S = 12\pi a^2$.

C. $S = 8\pi a^2$.

D. $S = 14\pi a^2$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm cạnh BC ; $OM = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$.

Gọi P là trung điểm cạnh OA ; $OP = \frac{a}{2}$.

Đường thẳng song song với OA , đi qua M là trục của tam giác OBC .

$PI \parallel OM$ (I thuộc trục của tam giác OBC). Khi đó ta được I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$, bán kính mặt cầu $R = OI$.

$$OI = \sqrt{OM^2 + IM^2} = \sqrt{\frac{13a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{14}}{2}.$$

Diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2 = 14\pi a^2$.

Câu 14: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + 3x + 2$ là hàm số nào trong hàm số sau

A. $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 2x + C.$

B. $F(x) = x^4 + 3x^2 + 2x + C.$

C. $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 2x + C.$

D. $F(x) = 3x^2 + 3 + C.$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Vì } [F(x)]' = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 2x + C \right)' = x^3 + 3x + 2 = f(x).$$

Câu 15: Cho hàm số $f(x) = x.(x^2 + 1)^{2016}$. Khi đó:

A. $\int f(x)dx = \frac{(x^2 + 1)^{2017}}{2017} + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{(x^2 + 1)^{2016}}{2016} + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{(x^2 + 1)^{2017}}{4034} + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{(x^2 + 1)^{2016}}{4032} + C.$

Lời giải

Chọn C

$$\int f(x)dx = \int x.(x^2 + 1)^{2016} dx = \frac{1}{2} \int (x^2 + 1)^{2016} .d(x^2 + 1) = \frac{(x^2 + 1)^{2017}}{4034} + C.$$

Câu 16: Cho a là số thực dương khác 1, biểu thức $a^{\frac{3}{5}} . \sqrt[3]{a}$ viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ là

A. $a^{\frac{14}{15}}$

B. $a^{\frac{2}{15}}$

C. $a^{\frac{1}{15}}$

D. $a^{\frac{17}{3}}$

Lời giải

Chọn A

Với a là số thực dương ta có $a^{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt[3]{a} = a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{3+1}{5}} = a^{\frac{4}{5}}$

Câu 17: Đạo hàm của hàm số $y = \ln(1-x^2)$ là

A. $\frac{2x}{x^2-1}$

B. $\frac{-2x}{x^2-1}$

C. $\frac{1}{1-x^2}$

D. $\frac{1}{x^2-1}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = \frac{(1-x^2)'}{1-x^2} = \frac{-2x}{1-x^2} = \frac{2x}{x^2-1}$.

Câu 18: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$

A. $\int f(x) dx = \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$

B. $\int f(x) dx = \frac{1}{6} \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$

C. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) dx = \frac{1}{3} \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$

Câu 19: Tập xác định của hàm số $y = (x-1)^{\frac{1}{3}}$ là

A. $[1; +\infty)$.

B. $\mathbb{R}$.

C. $(1; +\infty)$.

D. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = (x-1)^{\frac{1}{3}}$ xác định khi và chỉ khi $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Vậy tập xác định của hàm số $y = (x-1)^{\frac{1}{3}}$ là $D = (1; +\infty)$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+5)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. 3.

B. 1.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -5 \end{cases}$.

x	$-\infty$	-5	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$							

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số đã cho có 1 điểm cực đại.

Câu 21: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x - e^{-x}$.

A. $\int f(x)dx = -e^x + e^{-x} + C.$

B. $\int f(x)dx = -e^x - e^{-x} + C.$

C. $\int f(x)dx = e^x + e^{-x} + C.$

D. $\int f(x)dx = e^x - e^{-x} + C.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int f(x)dx = \int (e^x - e^{-x})dx = e^x - (-e^{-x}) + C = e^x + e^{-x} + C.$

Câu 22: Tính thể tích khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a là

A. a^3

B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

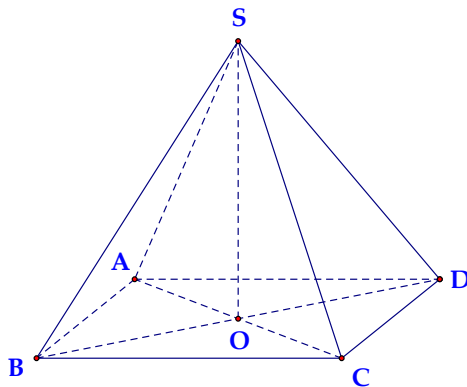
C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

Lời giải

Chọn C

Giả sử $S.ABCD$ là khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a .



Trong $(ABCD)$, gọi $O = AC \cap BD$ suy ra $SO \perp (ABCD)$.

Ta có $OA = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}.AB\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$

Thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$

Câu 23: Tập nghiệm của bất phương trình $5^{x+2} < \left(\frac{1}{25}\right)^{-x}$ là

A. $(-\infty; 2)$

B. $(2; +\infty)$

C. $(-\infty; 1)$

D. $(1; +\infty)$

Lời giải

Chọn B

Ta có $5^{x+2} < \left(\frac{1}{25}\right)^{-x} \Leftrightarrow 5^{x+2} < (5^{-2})^{-x} \Leftrightarrow 5^{x+2} < 5^{2x} \Leftrightarrow x+2 < 2x \Leftrightarrow x > 2.$

Tập nghiệm của bất phương trình là $D = (2; +\infty)$.

Câu 24: Cấp số nhân (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = \frac{3}{5} \cdot 2^{n-1}, n \in \mathbb{N}^*$. Số hạng đầu tiên và công bội của cấp số nhân đó là

A. $u_1 = \frac{6}{5}, q = 2$.

B. $u_1 = \frac{3}{5}, q = -2$.

C. $u_1 = \frac{6}{5}, q = -2$

D. $u_1 = \frac{3}{5}, q = 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $u_1 = \frac{3}{5} \cdot 2^{1-1} = \frac{3}{5}$ và $u_2 = \frac{3}{5} \cdot 2^{2-1} = \frac{6}{5} \Rightarrow q = \frac{u_2}{u_1} = 2$.

Vậy $u_1 = \frac{3}{5}$ và $q = 2$.

Câu 25: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, góc giữa cạnh bên với mặt đáy bằng 45° . Tính diện tích xung quanh của khối nón đỉnh S , đáy là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$.

A. $4\sqrt{2}\pi a^2$.

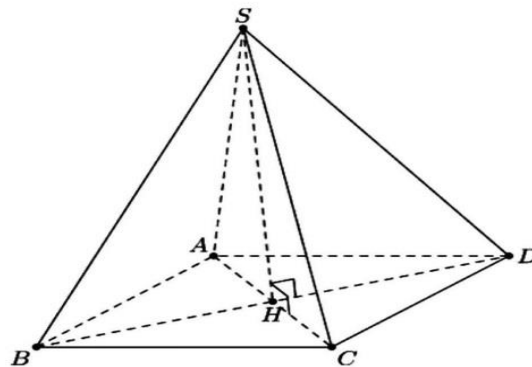
B. $2\pi a^2$.

C. $2\sqrt{2}\pi a^2$.

D. $\frac{\sqrt{2}\pi a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Vì đường tròn ngoại tiếp $ABCD$ mà đáy là hình vuông nên $R = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot 2a\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác vuông SAH có $SA = l = \frac{AC}{2 \cos 45^\circ} = \frac{2a\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 2a$.

Diện tích xung quanh của hình nón là: $S = \pi Rl = \pi \cdot a\sqrt{2} \cdot 2a = 2\sqrt{2}\pi a^2$.

Câu 26: Tập nghiệm của bất phương trình $3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 3 \leq 0$ có dạng $S = [a; b], a < b$, biểu thức $5b - 2a$ bằng

A. 7.

B. $\frac{43}{3}$.

C. $\frac{8}{3}$.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$3.9^x - 10t + 3 \leq 0 \Leftrightarrow 3.t^2 - 10t + 3 \leq 0 (3^x = t > 0).$$

$$\frac{1}{3} \leq t \leq 3 \Leftrightarrow 3^{-1} \leq 3^x \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow S = [-1; 1] = [a; b].$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } 5b - 2a = 5.1 - 2.(-1) = 5 + 2 = 7.$$

Câu 27: Cho tập A hợp có n phần tử ($n \in N^*$), khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $P_n = A_n^n$.

B. Số tổ hợp chập k của n là $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, k \leq n, k \in N$

C. Số hoán vị của $n+1$ là $P_n = 1.2.3... (n-2)(n-1)n$.

D. Số chỉnh hợp chập k của n phần tử là $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ với $k \leq n, k \in N^*$

Lời giải

Chọn C.

Vì Số hoán vị của $n+1$ là $P_n = 1.2.3... (n-2)(n-1).n.(n+1)$.

Câu 28: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+3}$ là

A. $x = -1$.

B. $x = 3$.

C. $x = 1$.

D. $x = -3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -3^+} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow -3^-} y = +\infty$.

Suy ra tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+3}$ là đường thẳng $x = -3$.

Câu 29: Khối chóp có diện tích đáy $B = 3a^2$ và chiều cao $h = a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $3a^3$.

B. $\frac{1}{3}a^3$.

C. a^3 .

D. $\frac{3}{2}a^3$.

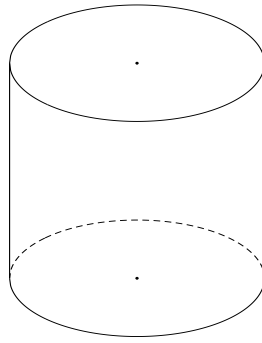
Lời giải

Chọn C

Thể tích của khối chóp: $V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}.3a^2.a = a^3$ (đvtt).

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

Chọn C



Ta có $S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 7,6 = 84\pi$.

Câu 34: [Mức độ 2] Nghiệm của phương trình $\log_2(x-1)=3$ là:

A. $x = 1$.

B. $x = 9$.

C. $x = 10$.

D. $x = 5$.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D = (1; +\infty)$.

Ta có: $\log_2(x-1)=3 \Leftrightarrow x-1=8 \Leftrightarrow x=9$.

Câu 35: [Mức độ 2] Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $\left(\frac{1}{\sqrt{5}-2}\right)^x$

B. $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-x}$

C. $\frac{1}{5^x}$

D. $\left(\frac{e}{3}\right)^x$

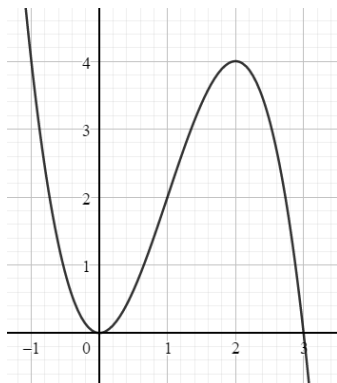
Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a > 1$.

Nhận thấy: $\frac{1}{\sqrt{5}-2} = \sqrt{5} + 2 > 1 \Rightarrow$ hàm số: $y = \left(\frac{1}{\sqrt{5}-2}\right)^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 36: [Mức độ 1] Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào?



A. $(1; 3)$.

B. $(-\infty; 0)$.

C. $(0; +\infty)$.

D. $(0; 2)$.

Lời giải

Chọn D

Trong khoảng $(0; 2)$ ta thấy đáng đồ thị đi lên.

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

Câu 37: Khối cầu (S) có diện tích bằng $36\pi a^2$ (cm^2), $a > 0$ thì có thể tích là:

- A. $27\pi a^3$ (cm^3) B. $12\pi a^3$ (cm^3) C. $36\pi a^3$ (cm^3) D. $\frac{16}{3}\pi a^3$ (cm^3)

Lời giải

Chọn C

Khối cầu (S) có diện tích bằng $36\pi a^2$ (cm^2) có bán kính là:

$$r = \sqrt{\frac{36\pi a^2}{4\pi}} = \sqrt{9a^2} = 3a.$$

Thể tích khối cầu là:

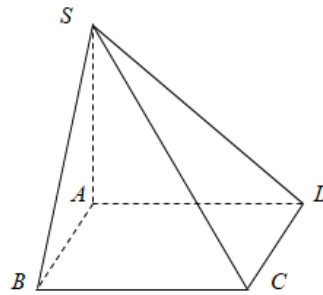
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi (3a)^3 = 36\pi a^3$$
 (cm^3).

Câu 38: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, $AB = 3a$ và $AD = 4a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SA = a\sqrt{2}$. Thể tích khối chóp S.ABCD bằng

- A. $4\sqrt{2}a^3$ B. $\frac{4\sqrt{2}}{3}a^3$ C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}a^3$ D. $12\sqrt{2}a^3$

Lời giải

Chọn A



Diện tích hình chữ nhật là:

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD = 3a \cdot 4a = 12a^2.$$

Thể tích khối chóp là:

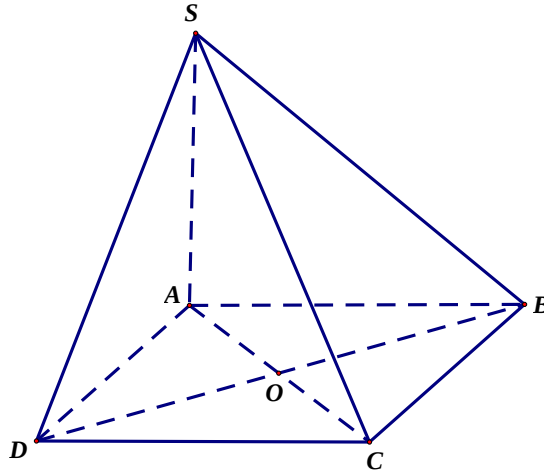
$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot 12a^2 = 4\sqrt{2}a^3.$$

Câu 39: Cho khối chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a . Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp S.ABCD biết rằng $SC = a\sqrt{3}$.

- A. $V_{ABCD} = a^3$. B. $V_{SABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $V_{SABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. D. $V_{SABCD} = \frac{a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có
$$\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAD) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (SAD) = SA \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABCD).$$

$ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $AC = a\sqrt{2}$.

Tam giác SAC vuông tại A nên $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = a$.

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot AB^2 = \frac{a^3}{3}.$$

Câu 40: Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-2021; 2021]$ để phương trình $\frac{2^x - m}{\sqrt{\log_3^2 x - 2\log_3 x}} = 0$ có nghiệm?

A. 1510.

B. Vô số.

C. 1512

D. 1509.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x > 0 \\ \log_3^2 x - 2\log_3 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_3 x > 2 \\ \log_3 x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 9 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > 9 \end{cases}.$$

Khi đó ta có

$$\frac{2^x - m}{\sqrt{\log_3^2 x - 2\log_3 x}} = 0 \Leftrightarrow 2^x - m = 0 \Leftrightarrow 2^x = m \xrightarrow[0 < x < 1]{x > 9} \begin{cases} m \in (1; 2) \\ m \in (512; +\infty) \end{cases} \text{ mà } m \text{ là số nguyên}$$

thuộc đoạn $[-2021; 2021]$ nên có 1509 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 41: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A . Mặt bên $(SAB) \perp (ABC)$ và tam giác $\triangle SAB$ đều cạnh bằng 1. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

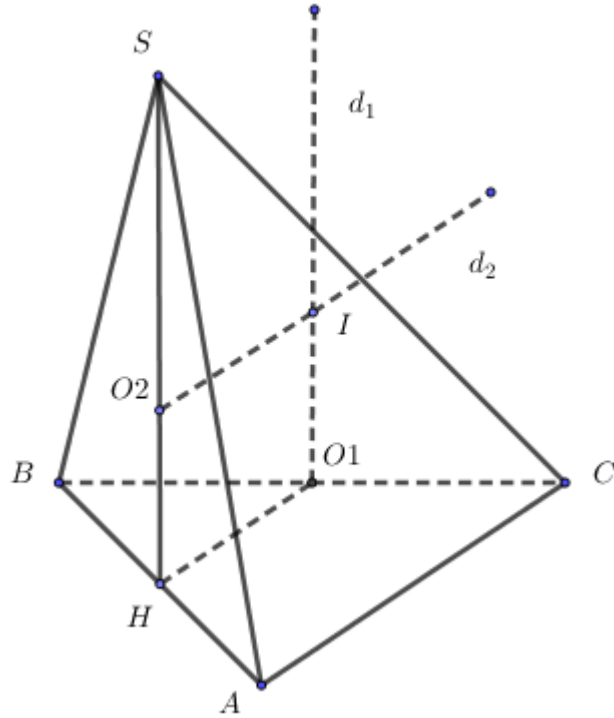
B. $\frac{\sqrt{21}}{6}$.

C. $\frac{\sqrt{15}}{6}$.

D. $\frac{3\sqrt{21}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và SAB

Qua O_1 dựng đường thẳng d_1 vuông góc với (ABC) thì d_1 là trục của tam giác ABC và $d_1 // O_2H$

Qua O_2 dựng đường thẳng d_2 vuông góc với (SAB) thì d_2 là trục của tam giác SAB và $d_2 // O_1H$

Từ đó suy ra tâm I mặt cầu là giao điểm của d_1 và d_2

Ta có tứ giác HQ_1IO_2 là hình chữ nhật, suy ra $IH^2 = O_1H^2 + O_2H^2$

Gọi R_1, R_2 là bán kính đường tròn ngoại tiếp ABC và SAB

$$\text{Ta có } \begin{cases} O_1H^2 = R_1^2 - \frac{AB^2}{4} \\ O_2H^2 = R_2^2 - \frac{AB^2}{4} \end{cases} \Rightarrow IH^2 = R_1^2 + R_2^2 - \frac{AB^2}{2}$$

Bán kính tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp là

$$R^2 = IH^2 + HA^2 = R_1^2 + R_2^2 - \frac{AB^2}{2} + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = R_1^2 + R_2^2 - \frac{AB^2}{4} \Rightarrow R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - \frac{AB^2}{4}}$$

$$\text{Thay số vào ta được } R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1^2}{4}} = \frac{\sqrt{21}}{6}.$$

Câu 42: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $BM = 3MC$ và N là trung điểm của $B'C'$. Gọi d là đường thẳng qua A , cắt $A'M$ tại E , cắt BN tại F . Tính tỉ số

$$\frac{V_{EABC}}{V_{FA'B'C'}}.$$

A. $\frac{5}{4}$.

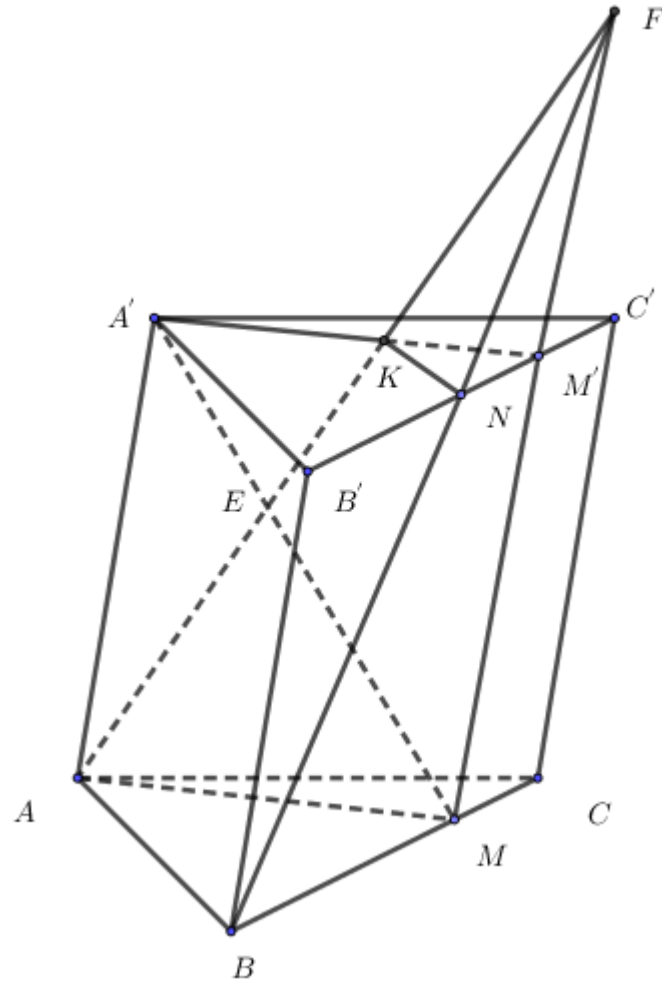
B. $\frac{6}{5}$.

C. $\frac{4}{3}$.

D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $NM' // BM \Rightarrow \frac{FK}{FA} = \frac{KM'}{AM} = \frac{NM'}{BM} = \frac{1}{3}$.

$\Rightarrow A'K = \frac{2}{3} A'M' = \frac{2}{3} AM \Rightarrow EK = \frac{1}{3} KA$.

Từ đó suy ra $\begin{cases} EA = \frac{4}{9} FA \\ FK = \frac{1}{3} FA \end{cases} \Rightarrow \frac{EA}{FK} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{d(E, (ABC))}{d(F, (A'B'C'))} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{V_{E.ABC}}{V_{F.A'B'C'}} = \frac{4}{3}$.

Câu 43: Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-2021; 2021]$ để hàm số $y = \left| \frac{x^2 + m}{x^2 + 1} \right|$ có đúng ba điểm cực trị

A. 2020

B. 2022

C. 2021

D. 2019

Lời giải

Chọn C

Đặt $y = f(x) = \frac{x^2 + m}{x^2 + 1}$, $f'(x) = \frac{2(1-m)x}{(x^2 + 1)^2}$.

Với $m = 1 \Rightarrow y = 1$, hàm số đã cho không có điểm cực trị nào. (loại).

Với $m \neq 1$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, như vậy $f(x)$ có một điểm cực trị.

Hàm số $y = \left| \frac{x^2 + m}{x^2 + 1} \right|$ có đúng ba điểm cực trị khi đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + m}{x^2 + 1}$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt khác 0, điều này tương đương với $m < 0$.
 $m \in [-2021; 2021]$ nên $m \in \{-2021; -2020; \dots; -1\}$. Đáp án **C**.

Câu 44: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $(x^2 + y^2 + 1) + \log_2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = (xy - 1)^2$. Khi đó $x + y$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

A. 4 B. 8 C. 1 D. $\frac{9}{2}$

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$\begin{aligned} & (x^2 + y^2 + 1) + \log_2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = (xy - 1)^2 \\ \Leftrightarrow & (x^2 + y^2 + 1) + \log_2 \left(\frac{x+y}{xy} \right) = (xy)^2 - 2xy + 1 \\ \Leftrightarrow & (x^2 + y^2 + 1) + \log_2 \left(\frac{x+y}{xy} \right) = (xy)^2 - 2xy + 1 \\ \Leftrightarrow & \log_2 (x+y) + (x+y)^2 = \log_2 xy + (xy)^2 \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \log t + t^2, (t > 0)$, $f'(t) = \frac{1}{t \ln 10} + 2t > 0, \forall t > 0$.

Từ đó suy ra $x + y = xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} \Rightarrow (x+y)^2 - 4(xy) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x+y \geq 4 \\ x+y \leq 0 \end{cases}$

Vì các số thực dương x, y nên $x + y \geq 4 \Rightarrow \text{Min}(x + y) = 4$

Câu 45: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị cắt trục hoành tại 2 điểm $x = -1$ và $x = 3$. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x) = am + 3bx + d$ có 3 nghiệm phân biệt?

A. 2. B. 3. C. 5. D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ ($a \neq 0$).

$$\begin{cases} f'(-1)=0 \\ f'(3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-2b+c=0 \\ 27a+6b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-3a \\ c=-9a \end{cases}$$

Ta có phương trình $f(x) = am + 3bx + d \Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + (c - 3b)x = am$

$$\Leftrightarrow ax^3 - 3ax^2 = am \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = m.$$

Đặt $g(x) = x^3 - 3x^2$.

$$g'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

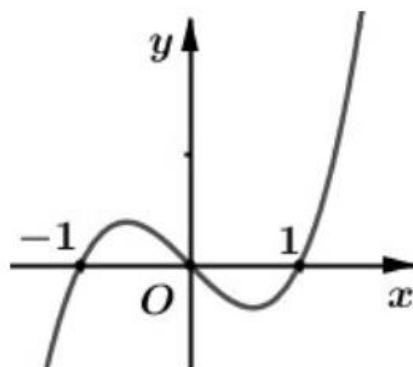
Bảng biến thiên $q(x)$

x	$-\infty$	0			2	$+\infty$	
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗ 0			↘ -4	↗ $+\infty$	

Phương trình có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -4 < m < 0$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-3; -2; -1\}$.

Câu 46: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình dưới đây.



Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(x^2 + 4x + 4)$ trên $[-3; -1]$ là

A. $g(-1)$.

B. $g(-3)$.

C. $f(-2)$.

D. $f(0)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên hàm số $f(x)$

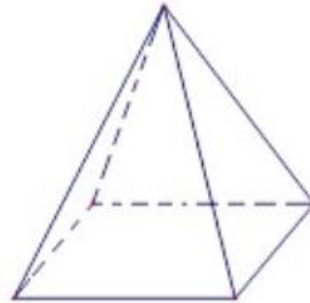
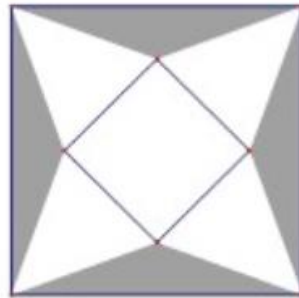
x	$-\infty$	-1		0	1	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y								

$$g'(x) = (2x + 4)f'(x^2 + 4x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$$

Khi đó, $g(-1) = f(1)$, $g(-3) = f(1)$, $g(-2) = f(0)$.

Dựa vào BBT hàm số $f(x)$ ta được $\max_{[-3;-1]} g(x) = f(0)$.

Câu 47: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh $1m$ như hình vẽ dưới đây. Người ta cắt phần tô đậm của tấm nhôm rồi gập thành một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $x(m)$, sao cho bốn đỉnh của hình vuông gập lại thành bốn đỉnh của hình chóp. Giá trị của x để khối chóp nhận được có thể tích lớn nhất là



A. $x = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

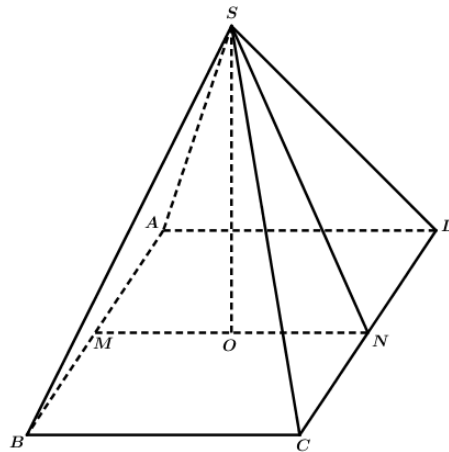
B. $x = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

C. $x = \frac{1}{2}$.

D. $x = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Độ dài đường chéo tấm nhôm bằng $\sqrt{2}(m)$

Gọi hình chóp tứ giác đều là $S.ABCD$, M, N lần lượt là trung điểm AB, CD

Khi đó $MN = x(m)$, $SN = \frac{\sqrt{2}-x}{2}(m)$ với $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Gọi O là tâm của hình vuông, ta có

$$SO = \sqrt{SN^2 - ON^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}-x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2-2\sqrt{2}x}$$

Thể tích khối chóp $V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{1}{6}x^2\sqrt{2-2\sqrt{2}x}$

Ta có $V' = \frac{x(4-5\sqrt{2}x)}{6\sqrt{2-2\sqrt{2}x}}$, $V' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{2}}{5}$ với $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
V'	+	0	-
V	$\frac{4\sqrt{10}}{375}$		

Vậy khi $x = \frac{2\sqrt{2}}{5}$ thì thể tích khối chóp nhận được là lớn nhất.

Câu 48: Gọi S là tập nghiệm của phương trình $(2^x - 2x)\sqrt{3^{2^x} - m} = 0$ (với m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên $m \in [-2021; 2022]$ để tập hợp S có hai phần tử?

A. 2093.

B. 2095.

C. 2094.

D. 2096.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } (2^x - 2x)\sqrt{3^{2^x} - m} = 0 (*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x - 2x = 0 \\ 3^{2^x} - m = 0 \\ 3^{2^x} - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x - 2x = 0 \quad (1) \\ 3^{2^x} = m \\ 3^{2^x} \geq m \end{cases}$$

Xét phương trình $2^x - 2x = 0$ với $f(x) = 2^x - 2x \Rightarrow f'(x) = 2^x \ln 2 - 2$

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \log_2 \left(\frac{2}{\ln 2} \right)$ nên ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\log_2\left(\frac{2}{\ln 2}\right)$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	

$f\left(\log_2\left(\frac{2}{\ln 2}\right)\right)$

Vì $f\left(\log_2 \left(\frac{2}{\ln 2} \right)\right) < 0 \Rightarrow$ phương trình $2^x - 2x = 0$ có hai nghiệm $x = 1 \vee x = 2$

Xét phương trình $3^{2^x} = m \Leftrightarrow 2^x = \log_3 m$ có nghiệm khi $m > 1$

Ta có: $x = 1 \Rightarrow 3^{2^x} = 9$; $x = 2 \Rightarrow 3^{2^x} = 81$

+ Nếu $m \leq 1 \Rightarrow m < 9$; $m < 81 \Rightarrow$ nhận nghiệm $x = 1 \vee x = 2$ đồng thời phương trình $3^{2^x} = m$ vô nghiệm nên phương trình (*) có 2 nghiệm thỏa yêu cầu bài toán.

+ Nếu $m > 1 \Rightarrow$ phương trình $3^x = m$ có nghiệm nên phương trình (*) có 2 nghiệm thỏa yêu cầu bài toán khi nghiệm của phương trình $3^x = m$ thuộc $\{1; 2\}$ hoặc chỉ có một trong hai

$$x \in \{1; 2\} \text{ thỏa điều kiện } 3^x - m \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{2^1} = m; 3^{2^2} \geq m \\ 3^{2^2} = m; 3^{2^1} \geq m \\ 3^{2^1} < m < 3^{2^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 = m; 81 \geq m \\ 81 = m; 9 \geq m \\ 9 < m < 81 \end{cases}$$

Vì m nguyên và $m \in [-2021; 2022] \Rightarrow m \in \{-2021; -2020; \dots; -1; 0\} \cup \{9; 10; \dots; 80\}$

Vậy có 2094 m nguyên và $m \in [-2021; 2022]$ thỏa đề.

Câu 49: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$					

Hàm số $y = f(\sin^2 2x - 4\sin 2x + 1)$ trên $[0; 2021\pi]$ có ít nhất bao nhiêu khoảng đồng biến?

A. 2042

B. 8084

C. 2021

D. 2020

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = \sin 2x$ có chu kỳ $T = \pi$, nên ta xét hàm số $y = f(\sin^2 2x - 4\sin 2x + 1)$ trên $[0; \pi]$.

Ta có $y' = f'(\sin^2 2x - 4\sin 2x + 1) \cdot 4\cos 2x(\sin 2x - 2)$.

Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow f'(\sin^2 2x - 4\sin 2x + 1) \cdot 2\cos 2x(\sin 2x - 2) > 0$

$$\Leftrightarrow \cos 2x \cdot f'(\sin^2 2x - 4\sin 2x + 1) < 0 \quad (*)$$

Vì $-1 \leq \sin 2x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq \sin^2 2x - 4\sin 2x + 1 \leq 6$.

Trường hợp 1: $\cos 2x < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < 2x < \frac{3\pi}{2}$.

$$(*) \Rightarrow f'(\sin^2 2x - 4\sin 2x + 1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < \sin^2 2x - 4\sin 2x + 1 < 0 \\ 1 < \sin^2 2x - 4\sin 2x + 1 < 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - \sqrt{3} < \sin 2x < 2 - \sqrt{2} \\ -1 < \sin 2x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin(2 - \sqrt{2}) < x < \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin(2 - \sqrt{3}) \\ \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

Trường hợp 2: $\cos 2x > 0 \Leftrightarrow 2x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

$$(*) \Rightarrow f'(\sin^2 2x - 4\sin 2x + 1) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < \sin^2 2x - 4\sin 2x + 1 < -1 \\ 0 < \sin^2 2x - 4\sin 2x + 1 < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - \sqrt{2} < \sin 2x < 1 \\ 0 < \sin 2x < 2 - \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \arcsin(2 - \sqrt{2}) < x < \frac{\pi}{4} \\ 0 < x < \frac{1}{2} \arcsin(2 - \sqrt{3}) \end{cases}.$$

Suy ra hàm số $y = f(\sin^2 2x - 4\sin 2x + 1)$ trên $[0; \pi]$ có 4 khoảng đồng biến.

Vậy hàm số $y = f(\sin^2 2x - 4\sin 2x + 1)$ trên $[0; 2021\pi]$ có ít nhất 8084 khoảng đồng biến.

Câu 50: Cho phương trình $\log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_{2021}(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \log_a(x + \sqrt{x^2 - 1})$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(3; 25)$ của tham số a sao cho phương trình đã cho có nghiệm lớn hơn 3?

A. 16.

B. 18.

C. 19.

D. 17.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x - \sqrt{x^2 - 1} > 0 \\ x + \sqrt{x^2 - 1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$$

$$\log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_{2021}(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \log_a(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_{2021} 2 \cdot \log_2(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_a 2 \cdot \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) = 0 & (2) \\ \log_2(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_a 2021 & (3) \end{cases}$$

- Ta có $(2) \Leftrightarrow x - \sqrt{x^2 - 1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 1} = x - 1 \Leftrightarrow x = 1$ (không thỏa mãn $x > 3$)

- Vậy phương trình đã cho có nghiệm lớn hơn 3 khi phương trình (3) có nghiệm lớn hơn 3.

Xét hàm số $f(x) = \log_2(x + \sqrt{x^2 - 1})$ trên $(3; +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} > 0, \forall x > 3. \text{ Suy ra hàm số đồng biến trên } (3; +\infty).$$

Mặt khác hàm số $f(x)$ liên tục trên $[3; +\infty)$; $f(3) = \log_2(3 + 2\sqrt{2})$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Suy ra tập giá trị của hàm số $f(x)$ trên $(3; +\infty)$ là $(\log_2(3 + 2\sqrt{2}); +\infty)$.

Vậy phương trình (3) có nghiệm lớn hơn 3 khi:

$$\log_a 2021 > 3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_{2021} a} > \log_2(3 + 2\sqrt{2}) \Leftrightarrow 3 < a < 2021^{\frac{1}{\log_2(3 + 2\sqrt{2})}} \approx 19,94.$$

Vậy có 16 giá trị nguyên của tham số a .