

Thời gian : 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1 (2 điểm). Cho hàm số $y = -x^3 + (2m+1)x^2 - (m^2 - 3m + 2)x - 4$. (C_m). (Với m là tham số)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 1$.

b) Tìm m để đồ thị hàm số (C_m) có các điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía của trục tung.

Câu 2 (1 điểm). Giải các phương trình sau

a) $\cos^2 3x + \sin^2 2x = 1$;

b) $\log_2^2 x + 2\log_{\sqrt{2}} x - \log_{\frac{1}{32}} x = 0$

Câu 3 (1 điểm). Tính tích phân sau: $\int_0^1 x(x-1)^3 dx$;

Câu 4 (0.5 điểm). Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \frac{x^2 + x + 9}{x + 1}$ trên đoạn $[0; 4]$

Câu 5 (0.5 điểm). Cho A là tập hợp các số tự nhiên bé hơn 100, lấy ngẫu nhiên một số từ tập A . Tính xác suất để số lấy được chia hết cho 3.

Câu 6 (1 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$; Các mặt phẳng (SAD) và (SAB) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$; Góc tạo bởi SC với $mp(ABCD)$ bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng NC và SD với N là điểm nằm trên cạnh AD sao cho $DN = 2AN$.

Câu 7 (2 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy

a) Cho điểm $M(1; 2)$, $N(3; 1)$ và đường tròn $(C) : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$. Viết phương trình đường thẳng MN và tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng MN với đường tròn (C) .

b) Cho tam giác cân ABC , ($AB = AC$); H là trung điểm của BC , $D(2; -3)$ là hình chiếu của H lên AC , M là trung điểm DH và điểm $I\left(\frac{16}{5}; -\frac{13}{5}\right)$ là giao điểm của BD với AM ; Đường thẳng

AC có phương trình: $x + y + 1 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC

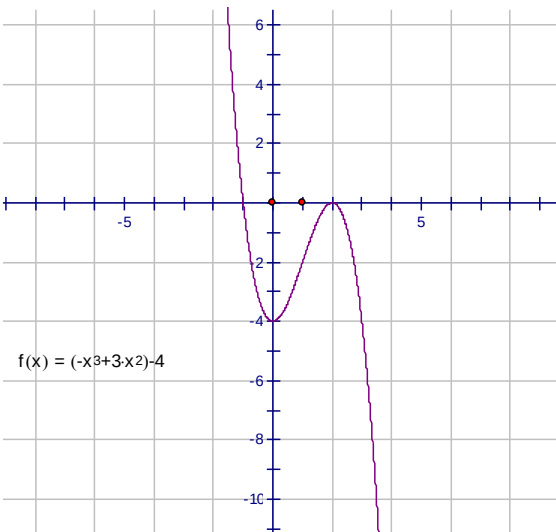
Câu 8 (1 điểm) Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2 + 6y = \frac{x}{y} - \sqrt{x-2y} \\ 3^{\sqrt{x+\sqrt{x-2y}+2}} \cdot 2^{2x+6y-3} + 9 \cdot 2^{2x+6y-3} = 2^{2 \cdot \sqrt{x+\sqrt{x-2y}+1}} \cdot 3^{x+3y} + 18 \cdot 4^{\sqrt{x+\sqrt{x-2y}}} \end{cases}$$

Câu 9 (1 điểm) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn: $abc \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a+\sqrt{bc}}} + \frac{b}{\sqrt{b+\sqrt{ac}}} + \frac{c}{\sqrt{c+\sqrt{ba}}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Hướng dẫn chấm

Câu 1	Hàm số $y = -x^3 + (2m+1)x^2 - (m^2 - 3m + 2)x - 4$. (C)	2 đ																							
a	Với $m=1$. $y = -x^3 + 3x^2 - 4$ +TXĐ: $D=\mathbb{R}$ + $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \mp\infty$ + $y'=-3x^2 + 6x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$ + Bảng biến thiên: <table><tr><td>X</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td>$\searrow$</td><td>$\nearrow$</td><td>$\searrow$</td><td>$-\infty$</td></tr><tr><td></td><td></td><td>-4</td><td>0</td><td></td><td></td></tr></table> + Tính đồng biến trên khoảng $(0; 2)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$ +Cực trị CT $(0;4)$, CĐ $(2;0)$ + Vẽ đồ thị: Đồ thị nhận $(1;-2)$ làm tâm đối xứng  $f(x) = (-x^3 + 3x^2) - 4$	X	$-\infty$	0	2	$+\infty$	y'	-	0	+	0	-	y	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$-\infty$			-4	0			0.25đ 0.25đ 0.25đ 0.25đ
X	$-\infty$	0	2	$+\infty$																					
y'	-	0	+	0	-																				
y	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$-\infty$																				
		-4	0																						
b	Ta có: $y'=-3x^2 + 2(2m+1)x - (m^2 - 3m + 2)$ Để hàm số có các điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía của trục tung khi: $y' = 0$ có 2 nghiệm trái dấu. Khi và chỉ khi : $m^2 - 3m + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2$ Vậy $m \in (1; 2)$	0.25đ 0.5đ 0.25đ																							
Câu 2		1đ																							
A	$\cos^2 3x + \sin^2 2x = 1$ $\Leftrightarrow \frac{\cos 6x + 1}{2} + \frac{1 - \cos 4x}{2} = 1 \Leftrightarrow \cos 6x = \cos 4x$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 4x + k2\pi \\ 6x = -4x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{5}$	0.25đ 0.25đ																							
B	(1) ĐK: $x > 0$ $(1) \Leftrightarrow \log_2^2 x + 4\log_2 x + \frac{1}{5}\log_2 x = 0$ $\Leftrightarrow \log_2 x \left(\log_2 x + \frac{21}{5} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2^{-\frac{21}{5}} \end{cases}$	0.25đ 0.25đ																							
Câu 3	$I = \int_0^1 x(x-1)^3 dx$ Đặt $x-1=t$, khi đó	0.25đ																							

[illegible]

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{x + \sqrt{x - 2y}} = x + 3y - 2$$

$$\text{TH1} \quad \begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{x-2y}} = x+3y-2 \\ -2y = \sqrt{x-2y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5y=2 \\ 4y^2+2y=x \\ y \leq 0 \\ x \geq 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12 \\ y=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y = \sqrt{x-2y} \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}} = x+3y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = \sqrt{x-2y} \\ \sqrt{x+3y} = x+3y-2 \end{cases}$$

$$\text{TH2} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = \sqrt{x-2y} \\ \sqrt{x+3y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9y^2 + 2y = x \\ x + 3y = 4 \\ y \geq 0 \\ x \geq 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ y = \frac{4}{9} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm là $(12;-2)$ và $(8/3;4/9)$

0.25d

Câu 9

$$\frac{a}{\sqrt{a+\sqrt{bc}}} + \frac{b}{\sqrt{b+\sqrt{ac}}} + \frac{c}{\sqrt{c+\sqrt{ba}}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Đặt $x = \sqrt{a}$; $y = \sqrt{b}$; $z = \sqrt{c}$

Bài toán trở thành:
$$P = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + yz}} + \frac{y^2}{\sqrt{y^2 + xz}} + \frac{z^2}{\sqrt{z^2 + xy}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Ta có:

$$P^2 \geq \left[\frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{x^2+yz} + \sqrt{y^2+xz} + \sqrt{z^2+xy}} \right]^2 = \frac{(x+y+z)^4}{(\sqrt{x^2+yz} + \sqrt{y^2+xz} + \sqrt{z^2+xy})^2}$$

$$\geq \frac{(x+y+z)^4}{3(x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz)} = \frac{(x+y+z)^4}{3[(x+y+z)^2-(xy+xz+yz)]}$$

$$\geq \frac{(x+y+z)^4}{3[(x+y+z)^2-3]} \quad (\text{vì } xy+xz+yz \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2} \geq 3)$$

$$\text{Đặt } t=(x+y+z)^2 \Rightarrow t \geq 9$$

$$\text{Khi đó } P^2 \geq \frac{t^2}{3(t-3)} = \frac{3t+15}{12} + \frac{t-3}{12} + \frac{3}{t-3} \geq \frac{3.9+15}{12} + 2 \cdot \sqrt{\frac{t-3}{12} \cdot \frac{3}{t-3}} = \frac{9}{2} \Rightarrow P \geq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Dấu “=” khi $a=b=c=1$

0.25d

0.25d

0.25d

0.25d