

Câu 1. (5,0 điểm)

- a. Tìm số nghiệm của phương trình $\frac{3 \sin x - \cos 2x + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - (1 + \sqrt{3})}{2 \cos x - \sqrt{3}} = 1$ trên đoạn $[0; 2021\pi]$.
- b. Tìm hệ số của x^4 trong khai triển biểu thức $P = (1 - x - 3x^3)^n$ thành đa thức, biết n là số nguyên dương thỏa mãn $2(C_2^2 + C_3^2 + \dots + C_n^2) = 3A_{n+1}^2$.

Câu 2. (4,0 điểm)

- a. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^3 + (1 - 2m)x^2 + (m - 3)x + 3m - 3 = 0$ có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng.
- b. Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 4}{x - 2} = 5$. Tìm $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 4}{(\sqrt[3]{3x + 2} - 2)(\sqrt{2f(x) + 1} + 3)}$.

Câu 3. (2,0 điểm)

Một chuồng có 3 con thỏ trắng và 4 con thỏ xám. Người ta bắt ngẫu nhiên lần lượt từng con ra khỏi chuồng cho đến khi bắt được cả 3 thỏ trắng thì mới dừng lại. Tính xác suất để người đó phải bắt ít nhất 5 lần.

Câu 4. (5,0 điểm)

- a. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi M là trung điểm SB , N là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{NS} + 2\overrightarrow{NC} = \vec{0}$. Tính độ dài SA biết AN vuông góc với CM .
- b. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I là trung điểm $B'C'$ và M là điểm thuộc cạnh $A'C'$. Biết AM cắt $A'C$ tại P , $B'M$ cắt $A'I$ tại Q . Tìm vị trí điểm M trên cạnh $A'C'$ sao cho diện tích tam giác $A'PQ$ bằng $\frac{2}{9}$ diện tích tam giác $A'CI$.

Câu 5. (4,0 điểm)

- a. Cho các số thực x, y, z không âm thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x\sqrt{x} + \sqrt{2}(y + z)$.

b. Cho dãy số (x_n) thỏa mãn $\begin{cases} x_1 = 3, x_2 = 7 \\ x_{n+2} = x_{n+1}^2 - x_n^2 + x_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Đặt $y_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}$. Chứng minh dãy (y_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

HẾT

<https://toanmath.com/>

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay. Giám thị không giải thích gì thêm./

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

LỜI GIẢI TOÁN 11

$$\text{Điều kiện: } \cos x \neq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{6} + l2\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z} \quad (*).$$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$$3\sin x - \cos 2x + 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 1 - \sqrt{3} = 2\cos x - \sqrt{3} \Leftrightarrow 3\sin x + 2\sin^2 x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -2 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

$$\text{Đổi chiều điều kiện ta có } x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$$

$$0 < \frac{5\pi}{6} + k2\pi < 2021\pi \Leftrightarrow -\frac{5}{12} < k < \frac{12121}{12} \Rightarrow k \in \{0; 1; 2; \dots; 1010\}$$

Vậy phương trình có 1011 nghiệm trên đoạn đã cho

Áp dụng công thức $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k, (1 \leq k \leq n-1)$ ta có

$$C_3^3 = C_2^2$$

$$C_4^3 = C_3^2 + C_3^3$$

$$C_5^3 = C_4^2 + C_4^3$$

.....

$$C_n^3 = C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3$$

$$C_{n+1}^3 = C_n^2 + C_n^3$$

Cộng vế theo vế các đẳng thức trên ta được $C_{n+1}^3 = C_2^2 + C_3^2 + \dots + C_n^2$.

$$\text{Kết hợp giả thiết suy ra } 2C_{n+1}^3 = 3A_{n+1}^2 \Leftrightarrow \frac{(n+1)n(n-1)}{3} = 3.(n+1)n \quad (n \geq 2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{n-1}{3} = 3 \Leftrightarrow n = 10.$$

Theo công thức Newton ta có

$$A = \left[1 - x(1 + 3x^2)\right]^{10} = C_{10}^0 - C_{10}^1 x(1 + 3x^2) + C_{10}^2 x^2 (1 + 3x^2)^2 - C_{10}^3 x^3 (1 + 3x^2)^3 + \\ + C_{10}^4 x^4 (1 + 3x^2)^4 - C_{10}^5 x^5 (1 + 3x^2)^5 + \dots + C_{10}^{10} x^{10} (1 + 3x^2)^{10}.$$

Vậy hệ số của x^4 là $C_{10}^2 \cdot C_2^1 \cdot 3^1 + C_{10}^4 = 270 + 210 = 480$

$$x^3 + (1 - 2m)x^2 + (m - 3)x + 3m - 3 = 0 \quad (1) \Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - 2mx + 3m - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ x^2 - 2mx + 3m - 3 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $x \neq -1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 3 > 0 \\ 5m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq \frac{2}{5} \quad (*)$$

Giả sử $x_1 = -1$, còn x_2, x_3 là nghiệm của (2). Ta xét các trường hợp sau:

$$\text{TH1: } x_2, x_1, x_3 \text{ lập thành một cấp số cộng} \Leftrightarrow x_2 + x_3 = 2x_1 \Leftrightarrow 2m = -2 \Leftrightarrow m = -1$$

TH2: x_1, x_2, x_3 lập thành một cấp số cộng $\Leftrightarrow x_1 + x_3 = 2x_2 \Leftrightarrow x_3 = 2x_2 + 1$

$$\text{Kết hợp Viet: } x_2 + x_3 = 2m \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{4m+1}{3} \\ x_2 = \frac{2m-1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Lại theo Viet: } x_2 x_3 = 3m - 3 \Leftrightarrow \frac{4m+1}{3} \cdot \frac{2m-1}{3} = 3m - 3 \Leftrightarrow 8m^2 - 29m + 26 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{13}{8} \end{cases}$$

Đổi chiều điều kiện ta có: $m = -1; m = 2; m = \frac{13}{8}$.

Nếu $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) - 4] = L \neq 0$ thì $\lim_{x \rightarrow 2} \left| \frac{f(x) - 4}{x - 2} \right| = +\infty$, trái giả thiết

Do đó $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) - 4] = 0$ hay $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

$$\begin{aligned} P &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 4}{(\sqrt[3]{3x+2} - 2)(\sqrt{2f(x)+1} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\left[\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4 \right] [f(x) - 4]}{(3x-6)(\sqrt{2f(x)+1} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 4}{3(x-2)} \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\left[\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4 \right]}{(\sqrt{2f(x)+1} + 3)} = \frac{5}{3} \cdot \frac{12}{6} = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

Gọi A là biến cố thỏa mãn bài toán thì $\bar{A}$ là biến cố “người đó bắt hết thỏ trắng trong 3 hoặc 4 lần”. Ta tính $P(\bar{A})$:

TH1: Cần 3 lần để bắt được hết thỏ trắng. Xác suất TH này là $\frac{3!}{A_7^3} = \frac{1}{35}$.

TH2: Cần 4 lần để bắt được hết thỏ trắng. Khi đó trong 3 lần đầu phải có 1 con thỏ xám, lần thứ 4 bắt được thỏ trắng. Xác suất TH này là $\frac{4 \cdot 3 \cdot 3!}{A_7^4} = \frac{3}{35}$. (Có 4 cách chọn thỏ đen, 3 cách chọn vị trí cho thỏ đen, 3! hoán vị 3 thỏ trắng).

Vậy $P(\bar{A}) = \frac{3!}{A_7^3} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 3!}{A_7^4} = \frac{4}{35}$, nên xác suất cần tìm là $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{31}{35}$

Ta có $3\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AS}$

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{CM} &= \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \\ &= \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

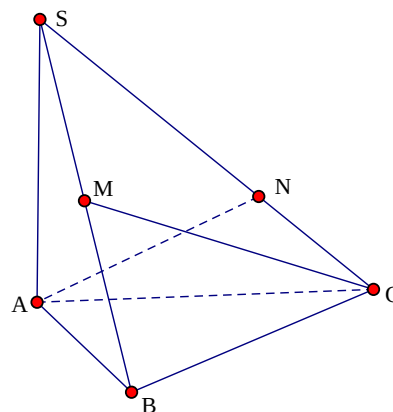
Do đó $AN \perp CM \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{CM} = 0 \Leftrightarrow$

$$(2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AS})(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}) = 0 \quad (1) \quad (1,5 \text{ điểm})$$

Đề ý $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC} = 0; \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{a^2}{2}$ nên từ (1)

$$\text{ta có } -4\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AS}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

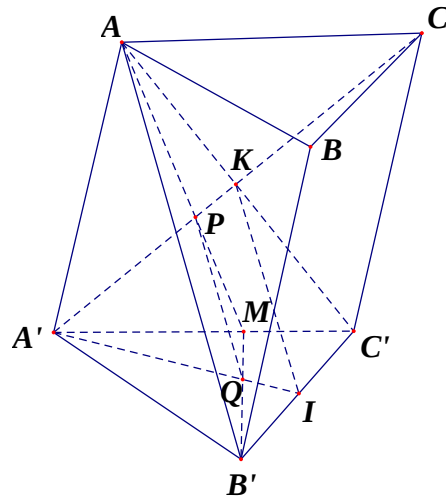
$$\Leftrightarrow AS^2 - 3a^2 = 0 \Leftrightarrow AS = a\sqrt{3} \quad (1 \text{ điểm})$$



Gọi I là trung điểm B'C' và K là giao điểm của AC' với A'C. Ta thấy ba mặt phẳng (AB'C'), (A'IC), (AB'M) đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến là: AB', PQ, IK nên ba giao tuyến ấy đồng qui hoặc đôi một song song. Mà AB' // IK nên AB' // IK // PQ. **(1.0 điểm)**

$$\frac{S_{\Delta A'PQ}}{S_{\Delta A'CI}} = \frac{A'P}{A'C} \cdot \frac{A'Q}{A'I} = \frac{1}{2} \cdot \frac{A'P}{A'K} \cdot \frac{A'Q}{A'I} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{A'Q}{A'I} \right)^2 = \frac{2}{9} \Rightarrow \frac{A'Q}{A'I} = \frac{2}{3} \quad . \quad \textbf{(1 điểm)}$$

Suy ra Q là trọng tâm $\Delta A'B'C'$. Vậy M là trung điểm của cạnh A'C'. **(0,5 điểm)**



Từ giả thiết suy ra tồn tại tam giác ABC không tù sao cho $x = \cos A, y = \cos B, z = \cos C$

$$P = \cos^2 A + \sqrt{2}(\cos B + \cos C) = \cos A \cdot \sqrt{\cos A} + 2\sqrt{2} \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} \leq$$

$$\cos A \cdot \sqrt{\cos A} + 2\sqrt{2} \sin \frac{A}{2}$$

Do tam giác ABC không tù nên $0 \leq \cos A \leq 1 \Rightarrow \cos A \cdot \sqrt{\cos A} \leq \cos A$, do đó

$$P \leq \cos A + 2\sqrt{2} \sin \frac{A}{2} = 1 - 2\sin^2 \frac{A}{2} + 2\sqrt{2} \sin \frac{A}{2} = 2 - \left(\sqrt{2} \sin \frac{A}{2} - 1 \right)^2 \leq 2$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} A = \frac{\pi}{2} \\ B = C = \frac{\pi}{4} \end{cases}$. Vậy $\max P = 2$ khi $x = 0, y = z = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Ta có $x_{n+2} - x_{n+1}^2 + x_{n+1} = x_{n+1} - x_n^2 + x_n = \dots = x_2 - x_1^2 + x_1 = 1$, suy ra:

$$x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1.$$

Ta được: $\frac{1}{x_k} = \frac{1}{x_k - 1} - \frac{1}{x_{k+1} - 1}.$

Cho k chạy qua các giá trị $1, 2, \dots, n$ và lấy tổng, được:

$$y_n = \frac{1}{x_1 - 1} - \frac{1}{x_{n+1} - 1}.$$

Ta có $x_{n+1} - x_n = (x_n - 1)^2 \geq 0$, suy ra (x_n) là dãy tăng.

Giả sử (x_n) bị chặn trên thì (x_n) có giới hạn hữu hạn.

Đặt $L = \lim x_n$, ta có: $L = L^2 - L + 1$, suy ra $L = 1$, vô lí. Do đó $L = \lim x_n = +\infty$.

Vậy: $\lim y_n = \frac{1}{2}.$