CHUYÊN ĐỀ 2: MŨ VÀ LÔGARIT

BÀI 1: LŨY THỪA – HÀM SỐ LŨY THỪA

Mục tiêu

❖ **Kiến thức**

+ Biết các khái niệm và tính chất của lũy thừa với số mũ nguyên, lũy thừa với số mũ hửu tỉ không nguyên và lũy thừa với số mũ thực.
+ Biết khái niệm và tính chất của căn bậc n.
+ Biết khái niệm và tính chất của hàm số lũy thừa.
+ Biết công thức tính đạo hàm của hàm số lũy thừa.
+ Biết dạng đồ thị của hàm số lũy thừa.

❖ **Kĩ năng**

+ Biết dùng các tính chất của lũy thừa để rút gọn biểu thức, so sánh những biểu thức có chứa lũy thừa.
+ Biết khảo sát hàm số lũy thừa.
+ Tính được đạo hàm của hàm số lũy thừa.

I. LÍ THUYẾT TRỌNG TÂM

LŨY THỪA

1. Lũy thừa với số mũ nguyên

Cho n là một số nguyên dương.

- Với a tùy ý: $a^n = \underbrace{a.a...a}_{n \text{ thừa số}}$
- Với $a \neq 0$: $a^0 = 1$; $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ (a: cơ số, n: số mũ).

Chú ý:

0^0, 0^{-n} không có nghĩa.

Lũy thừa với số mũ nguyên có các tính chất tương tự như lũy thừa với số mũ nguyên dương.

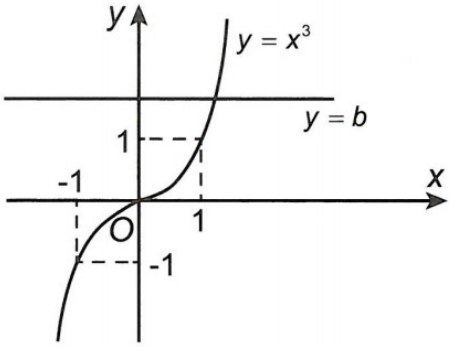
2. Phương trình $x^n = b(*)$

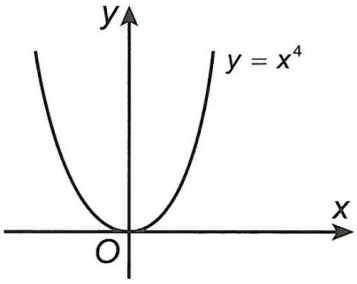
- Với n lẻ: Phương trình (*) luôn có nghiệm duy nhất.
- Với n chẵn

  + Nếu $b > 0$: Phương trình (*) có hai nghiệm trái dấu.

  + Nếu $b = 0$: Phương trình (*) có một nghiệm $x = 0$

  + Nếu $b < 0$: Phương trình (*) vô nghiệm.





3. Căn bậc n

Khái niệm

Cho $b \in R$, $n \in N^* \ (n \geq 2)$. Số a được gọi là căn bậc n của b nếu $a^n = b$.

- Với n lẻ và $b \in R$, phương trình $x^n = b$ có duy nhất một căn bậc n của b, ký hiệu là $\sqrt[n]{b}$.
- Với n chẵn:

  $b < 0$: Không có căn bậc n của b.

$b=0$: Có một căn bậc n của 0 là 0.

$b>0$: Có hai căn trái dấu, ký hiệu giá trị dương là $\sqrt[n]{b}$, còn giá trị âm là $-\sqrt[n]{b}$.

Tính chất

Với $a,b\ge 0$, $m,n\in N^*$; $p\in\mathbb{Z}$ ta có:

- $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$;
- $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b>0$;
- $\sqrt[n]{a^p}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^p, \left(a>0\right)$;
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n.m]{a}$;
- $\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases} a \text{ khi n lẻ} \\ |a| \text{ khi n chẵn.}\end{cases}$

4. Lũy thừa với số mũ hửu tỉ

Cho số thực a dương và số hửu tỉ $r=\dfrac{m}{n}$, trong đó $m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}^*$. Lũy thừa của a với số mũ r được xác định như sau: $a^r=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

Ví dụ: $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$.

5. Lũy thừa với số mũ vô tỉ

Cho $a>0$, α là một số vô tỉ. Ta thừa nhận rằng luôn có một dãy số hữu tỉ $\left(r_n\right)$ mà $\alpha=\lim\limits_{n\to+\infty} r_n$ và một dãy số tương ứng $\left(a^{r_n}\right)$ có giới hạn không phụ thuộc vào việc chọn dãy số $\left(r_n\right)$.

Khi đó ta kí hiệu $a^\alpha=\lim\limits_{n\to+\infty} a^{r_n}$ là lũy thừa của a với số mũ α.

6. Lũy thừa với số mũ thực

Tính chất

Với mọi *a, b* là các số thực dương; α, β là các số thực tùy ý, ta có:

- $a^\alpha.a^\beta=a^{\alpha+\beta}$;
- $\dfrac{a^\alpha}{a^\beta}=a^{\alpha-\beta}$;

• $\left(a^{\alpha}\right)^{\beta}=a^{\alpha.\beta}$;

• $\left(a.b\right)^{\alpha}=a^{\alpha}.b^{\alpha}$;

• $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\alpha}=\dfrac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$;

So sánh hai lũy thừa

• So sánh cùng cơ số

- Nếu cơ số $a>1$ thì $\alpha>\beta\Leftrightarrow a^{\alpha}>a^{\beta}$.

- Nếu cơ số $0<a<1$ thì $\alpha>\beta\Leftrightarrow a^{\alpha}<a^{\beta}$.

• So sánh cùng số mũ

- Nếu số mũ $\alpha>0$ thì $a>b>0\Rightarrow a^{\alpha}>b^{\alpha}$.

- Nếu số mũ $\alpha<0$ thì $a>b>0\Rightarrow a^{\alpha}<b^{\alpha}$.

Ví dụ:

$2,5>1,2\Leftrightarrow\left(\pi\right)^{2,5}>\left(\pi\right)^{1,2}$

$-0,5>-1,1\Leftrightarrow\left(0,3\right)^{-0,5}<\left(0,3\right)^{-1,1}$

Ví dụ:

$\dfrac{3}{4}>\dfrac{2}{3}\Rightarrow\left(\dfrac{3}{4}\right)^{0,8}>\left(\dfrac{2}{3}\right)^{0,8}$

$\dfrac{3}{4}>\dfrac{2}{3}\Rightarrow\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-0,8}<\left(\dfrac{2}{3}\right)^{0,8}$

HÀM SỐ LŨY THỪA

1. Khái niệm hàm số lũy thừa

Hàm số $y=x^{\alpha}$, với $\alpha\in\mathbb{R}$ được gọi là hàm số lũy thừa.

Chú ý: Tập xác định của hàm số $y=x^{\alpha}$ tùy thuộc vào giá trị của α.

Cụ thể:

• α nguyên dương: $D=\mathbb{R}$;

• α nguyên âm hoặc bằng 0: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$;

• α không nguyên: $D=\left(0;+\infty\right)$.

Ví dụ: Tập xác định của hàm số

$y=x^{5}$ là $D=\mathbb{R}$;

$y=x^{-5}$ là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$;

$y=x^{\frac{2}{7}}, y=x^{\pi}$ là $D=\left(0;+\infty\right)$.

2. Đạo hàm của hàm số lũy thừa

Hàm số lũy thừa $y=x^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ có đạo hàm với mọi $x>0$ và:

• $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$;

• $\left(u^{\alpha}\right)'=\alpha u^{\alpha-1}.u'$ với u là biểu thức chứa x.

Ví dụ: Đạo hàm của hàm số

$y=x^{-5}$ là $y'=-5.x^{-6}$;

$y=\sin^{2}x$ là

$y'=2\sin x.\left(\sin x\right)'=2\sin x.\cos x$

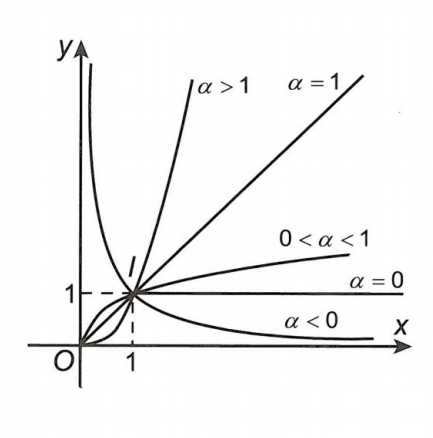
3. Khảo sát hàm số lũy thừa $y=x^{\alpha}$

$y=x^{\alpha},\ \alpha>0$	$y=x^{\alpha},\alpha<0$
a. Tập khảo sát: $\left(0;+\infty\right)$	**a.** Tập khảo sát: $\left(0;+\infty\right)$
b. Sự biến thiên: • $y'=\alpha x^{\alpha-1}>0,\ \forall\ x>0$	**b.** Sự biến thiên: • $y'=\alpha x^{\alpha-1}<0,\ \forall\ x>0$

Lưu ý: *Khi khảo sát hàm số lũy thừa với số mũ cụ thể, ta phải xét hàm số đó trên toàn bộ tập xác định của nó. Chẳng hạn: Khảo sát các hàm số $y=x^{3}$ trên tập xác định của nó là $\mathbb{R}$, khảo sát hàm số $y=x^{-2}$ trên tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$.*

Hàm số luôn đồng biến. • Giới hạn đặc biệt: $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = 0, \lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha = +\infty.$ • Tiệm cận: Không có.	Hàm số luôn nghịch biến. • Giới hạn đặc biệt: $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty, \lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha = 0.$ • Tiệm cận: Trục Ox là tiệm cận ngang. Trục Oy là tiệm cận đứng.
c. Bảng biến thiên: x: 0 … $+\infty$ y': $+$ y: $0 \nearrow +\infty$	**c.** Bảng biến thiên: x: 0 … $+\infty$ y': $-$ y: $+\infty \searrow 0$

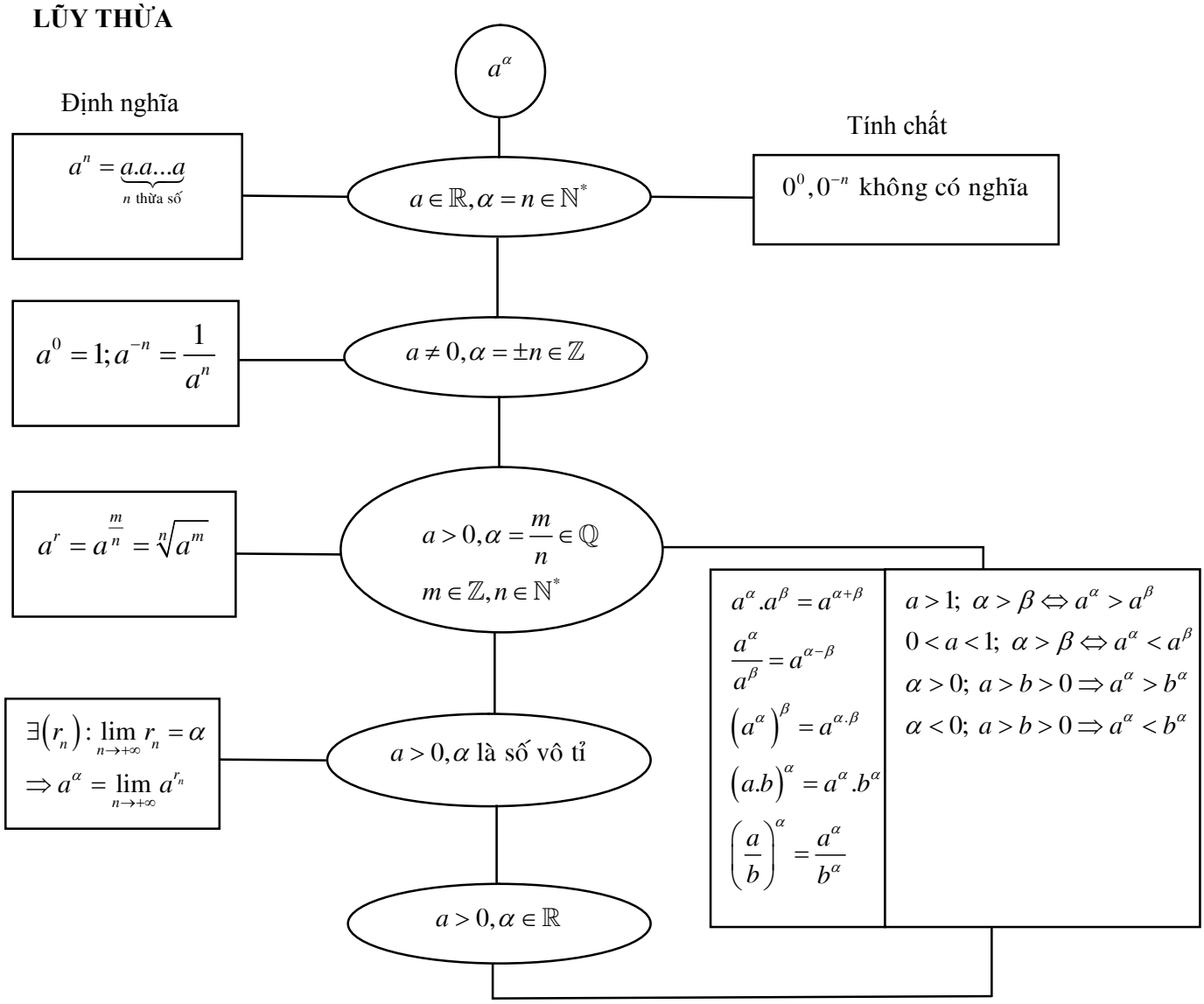
d. Đồ thị:

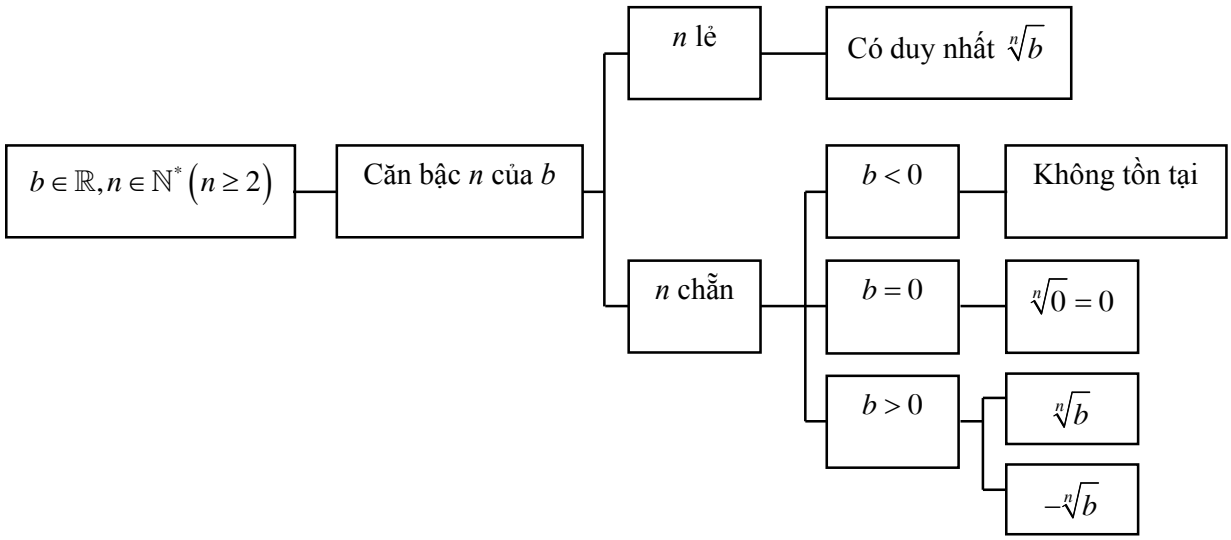


Nhận xét: *Đồ thị của hàm số lũy thừa luôn đi qua điểm* $I(1;1)$.

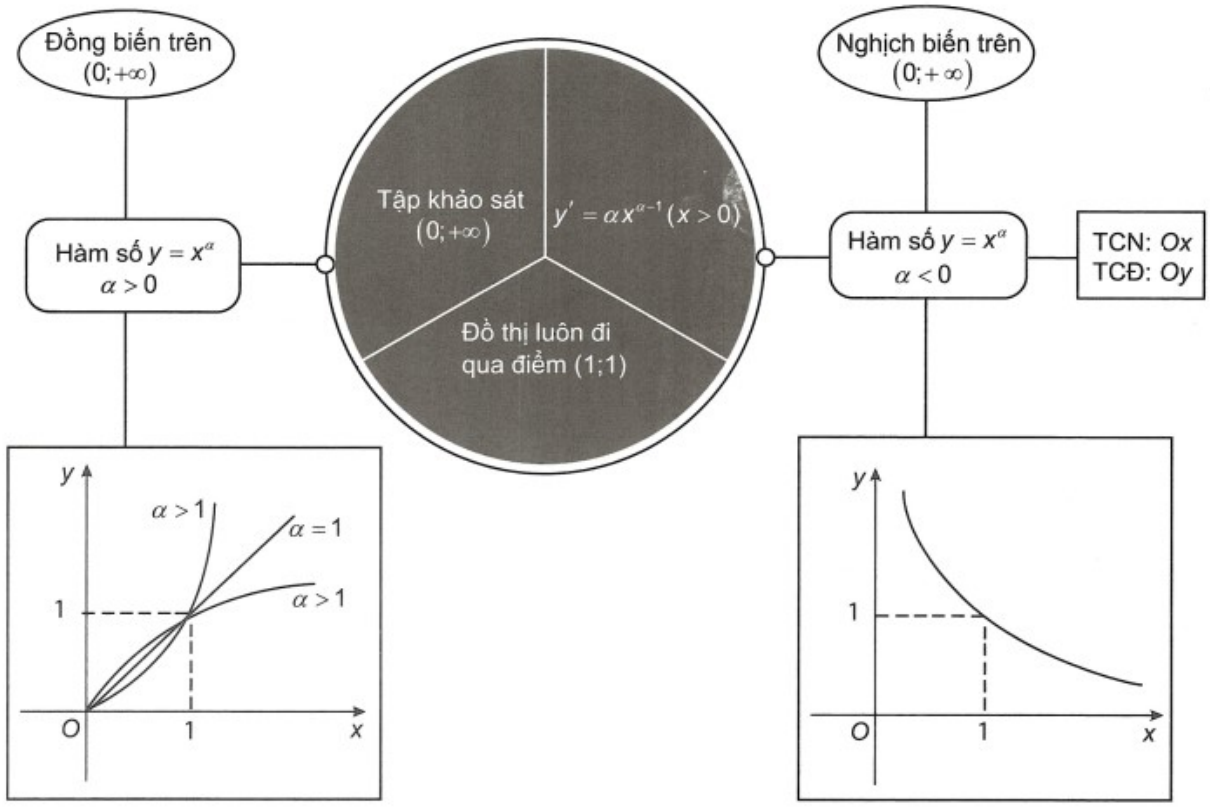
SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA

LŨY THỪA





HÀM SỐ LŨY THỪA



II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Lũy thừa

Bài toán 1. Viết lũy thừa với dạng số mũ hữu tỷ

Bài toán 1.1. Thu gọn biểu thức chứa căn thức

Phương pháp giải

Tính chất của căn bậc n

- $\sqrt[n]{ab} = \left[\begin{array}{l} \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} \text{ Khi } n \text{ lẻ} \\ \sqrt[n]{|a|}.\sqrt[n]{|b|} \text{ Khi } n \text{ chẵn} \end{array}\right.$;

- $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \text{ Khi } n \text{ lẻ } (b \neq 0) \\ \dfrac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}} \text{ Khi } n \text{ chẵn } (b \neq 0) \end{array}\right.$;

- $\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p, (a > 0)$;

- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$;

- $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a \text{ khi } n \text{ lẻ} \\ |a| \text{ khi } n \text{ chẵn} \end{cases}$.

Công thức lũy thừa với số mũ thực

- $\left(a^m\right)^n = a^{m.n}$;
- $a^m.a^n = a^{m+n}$;
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;
- $a^m.b^m = \left(a.b\right)^m$;
- $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Cho x là số thực dương. Biểu thức $\sqrt[4]{x^2\sqrt[3]{x}}$ được viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là

A. $x^{\frac{7}{12}}$. **B.** $x^{\frac{5}{6}}$. **C.** $x^{\frac{12}{7}}$. **D.** $x^{\frac{6}{5}}$.

Hướng dẫn giải.

Điều kiện x là số thực dương làm cho biểu thức ở dạng thũy thừa với số mũ hửu tỉ xác định.

Ta có: $\sqrt[4]{x^2\sqrt[3]{x}} = \sqrt[4]{x^2x^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[4]{x^{\frac{7}{3}}} = \left(x^{\frac{7}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{7}{12}}$.

Chọn A.

Ví dụ 2: Cho hai số thực dương *a* và *b*. Biểu thức $\sqrt[5]{\dfrac{a}{b}\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}\sqrt{\dfrac{a}{b}}}}$ được viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là

A. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{7}{30}}$. **B.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{31}{30}}$. **C.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{30}{31}}$. **D.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{6}}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\sqrt[5]{\dfrac{a}{b}\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}\sqrt{\dfrac{a}{b}}}} = \sqrt[5]{\dfrac{a}{b}\sqrt[3]{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1}\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt[5]{\dfrac{a}{b}\sqrt[3]{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{-1}{2}}}}$

$= \sqrt[5]{\dfrac{a}{b}\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{-1}{6}}} = \sqrt[5]{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{5}{6}}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{6}}$.

Chọn D.

Bài toán 1.2. Thu gọn biểu thức chứa lũy thừa

Phương pháp giải

Các hằng đẳng thức đáng nhớ:

- $\left(a \pm b\right)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;
- $\left(a \pm b\right)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$;
- $a^2 - b^2 = \left(a - b\right)\left(a + b\right)$;
- $a^3 + b^3 = \left(a + b\right)\left(a^2 - ab + b^2\right)$;
- $a^3 - b^3 = \left(a - b\right)\left(a^2 + ab + b^2\right)$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Cho $P = \left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)^2 \left(1 - 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}\right)^{-1}$. Biểu thức rút gọn của P là

A. x. **B.** $2x$. **C.** $x + 1$. **D.** $x - 1$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $P = \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \left(\frac{x - 2\sqrt{xy} + y}{x}\right)^{-1} = \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \frac{x}{\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2} = x$

Chọn A.

Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức $\left(\frac{a^{0,5} + 2}{a + 2a^{0,5} + 1} - \frac{a^{0,5} - 2}{a - 1}\right).\frac{a^{0,5} + 1}{a^{0,5}}$ (với $0 < a \neq 1$) ta được

A. $\frac{a - 2}{2}$. **B.** $\frac{a - 1}{2}$. **C.** $\frac{2}{1 - a}$. **D.** $\frac{2}{a - 1}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\left(\frac{a^{0,5} + 2}{a + 2a^{0,5} + 1} - \frac{a^{0,5} - 2}{a - 1}\right).\frac{a^{0,5} + 1}{a^{0,5}}$

$$= \left[\frac{a^{0,5} + 2}{\left(a^{0,5} + 1\right)^2} - \frac{a^{0,5} - 2}{\left(a^{0,5} - 1\right)\left(a^{0,5} + 1\right)}\right].\frac{a^{0,5} + 1}{a^{0,5}}$$

$$= \left(\frac{a^{0,5} + 2}{a^{0,5} + 1} - \frac{a^{0,5} - 2}{a^{0,5} - 1}\right).\frac{1}{a^{0,5}}$$

$$= \frac{a + a^{0,5} - 2 - a + a^{0,5} + 2}{a - 1}.\frac{1}{a^{0,5}} = \frac{2}{a - 1}$$

Chọn D.

Ví dụ 3: Rút gọn biểu thức $\left[\dfrac{x\sqrt{x}-x}{\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}-1}{\sqrt[4]{x}-1}-\sqrt{x}\right)\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}+1}{\sqrt[4]{x}+1}-\sqrt{x}\right)}\right]^3$ (với $x>0, x\neq 1$) ta được

A. x^2. **B.** $-x^2$. **C.** $-x^3$. **D.** x^3.

Hướng dẫn giải.

Ta có: $\left[\dfrac{x\sqrt{x}-x}{\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}-1}{\sqrt[4]{x}-1}-\sqrt{x}\right)\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}+1}{\sqrt[4]{x}+1}-\sqrt{x}\right)}\right]^3$

$$=\left[\frac{x\sqrt{x}-x}{\left(\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{x}+1-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{x}+1-\sqrt{x}\right)}\right]^3$$

$$=\left[\frac{x\sqrt{x}-x}{\left(\sqrt[4]{x}+1\right)\left(1-\sqrt[4]{x}\right)}\right]^3=\left(\frac{x\left(\sqrt{x}-1\right)}{1-\sqrt{x}}\right)^3=-x^3.$$

Chọn C.

Bài toán 2. Tính giá trị biểu thức

Phương pháp giải

Công thức đặc biệt

$f\left(x\right)=\dfrac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}$ thì $f\left(x\right)+f\left(1-x\right)=1$.

Thật vậy, ta có:

$$f\left(1-x\right)=\frac{\dfrac{a}{a^x}}{\dfrac{a}{a^x}+\sqrt{a}}=\frac{a}{a+\sqrt{a}.a^x}$$

$$\Rightarrow f\left(1-x\right)=\frac{\sqrt{a}}{a^x+\sqrt{a}}$$

Nên: $f\left(x\right)+f\left(1-x\right)=1$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Cho $f\left(x\right)=\dfrac{2018^x}{2018^x+\sqrt{2018}}$. Tính giá trị biểu thức sau đây ta được

$$S=f\left(\frac{1}{2019}\right)+f\left(\frac{2}{2019}\right)+...+f\left(\frac{2018}{2019}\right)$$

A. $S=2018$. **B.** $S=2019$. **C.** $S=1009$. **D.** $S=\sqrt{2018}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $f\left(1-x\right)=\dfrac{\sqrt{2018}}{2018^x+\sqrt{2018}}\Rightarrow f\left(x\right)+f\left(1-x\right)=1$

Suy ra $S=f\left(\dfrac{1}{2019}\right)+f\left(\dfrac{2}{2019}\right)+...+f\left(\dfrac{2018}{2019}\right)=f\left(\dfrac{1}{2019}\right)+f\left(\dfrac{2018}{2019}\right)+$

$$+f\left(\dfrac{2}{2019}\right)+f\left(\dfrac{2017}{2019}\right)+...+f\left(\dfrac{1009}{2019}\right)+f\left(\dfrac{1010}{2019}\right)=1009.$$

Chọn C.

Ví dụ 2: Cho $9^x+9^{-x}=23.$ Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{5+3^x+3^{-x}}{1-3^x-3^{-x}}$ ta được

A. $-2.$ **B.** $\dfrac{3}{2}.$ **C.** $\dfrac{1}{2}.$ **D.** $-\dfrac{5}{2}.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $9^x+9^{-x}=23\Leftrightarrow\left(3^x+3^{-x}\right)^2=25\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^x+3^{-x}=5\\3^x+3^{-x}=-5\ \left(\text{loại}\right)\end{array}\right.$

Từ đó, thế vào $P=\dfrac{5+\left(3^x+3^{-x}\right)}{1-\left(3^x+3^{-x}\right)}=\dfrac{5+5}{1-5}=-\dfrac{5}{2}.$

Chọn D.

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. a^{-n} xác định với mọi $\forall a\in\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\};\forall n\in\mathbb{N}.$ **B.** $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m};\forall a\in\mathbb{R}.$

C. $a^0=1;\forall a\in\mathbb{R}.$ **D.** $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}};\forall a\in\mathbb{R};\forall m,\text{n}\in\mathbb{Z}.$

Câu 2: Rút gọn biểu thức $\dfrac{a^{2\sqrt{2}}-b^{2\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}}-b^{\sqrt{3}}\right)^2}+1$ (với $a>0,b>0$ và $a^{\sqrt{2}}\neq b^{\sqrt{3}}$) được kết quả

A. 2. **B.** $2a^{\sqrt{2}}.$ **C.** $\dfrac{a^{\sqrt{2}}+b^{\sqrt{3}}}{a^{\sqrt{2}}-b^{\sqrt{3}}}.$ **D.** $\dfrac{2a^{\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{2}}-b^{\sqrt{3}}}.$

Câu 3: Cho số thực dương a. Rút gọn $P=\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a\sqrt[5]{a}}}}$ ta được

A. $a^{\frac{25}{13}}.$ **B.** $a^{\frac{37}{13}}.$ **C.** $a^{\frac{53}{36}}.$ **D.** $a^{\frac{43}{60}}.$

Câu 4: Viết biểu thức $P=a.\sqrt[3]{a^2.\sqrt{a}}\left(a>0\right)$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ ta được

A. $P=a^{\frac{5}{3}}.$ **B.** $P=a^{\frac{5}{6}}.$ **C.** $P=a^{\frac{11}{6}}.$ **D.** $P=a^2.$

Câu 5: Viết biểu thức $\sqrt[5]{\frac{b}{a}\sqrt[3]{\frac{a}{b}}},\left(a,b>0\right)$ về dạng lũy thừa $\left(\frac{a}{b}\right)^m$ ta được m bằng

A. $\frac{2}{15}$. **B.** $\frac{4}{15}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{-2}{15}$.

Câu 6: Rút gọn biểu thức $Q=b^{\frac{5}{3}}:\sqrt[3]{b}$ với $b>0$ ta được

A. $Q=b^2$. **B.** $Q=b^{\frac{5}{9}}$. **C.** $Q=b^{-\frac{4}{3}}$. **D.** $Q=b^{\frac{4}{3}}$.

Câu 7: Giả sử a là số thực dương, khác 1 và $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$ được viết dưới dạng a^{α}.. Giá trị của α là

A. $\alpha=\frac{11}{6}$. **B.** $\alpha=\frac{5}{3}$. **C.** $\alpha=\frac{2}{3}$. **D.** $\alpha=\frac{1}{6}$.

Câu 8: Rút gọn biểu thức $P=x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x}$ với $x>0$ ta được

A. $P=x^2$. **B.** $P=\sqrt{x}$. **C.** $P=x^{\frac{1}{8}}$. **D.** $P=x^{\frac{2}{9}}$.

Câu 9: Cho *a, b* là các số thực dương. Viết biểu thức $\sqrt[12]{a^3b^3}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ ta được

A. $a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{2}}$. **B.** $a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{9}}$. **C.** $a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}$. **D.** $a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}$.

Câu 10: Cho a là một số dương, viết $a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ ta được

A. $a^{\frac{7}{6}}$. **B.** a^3. **C.** $a^{\frac{1}{6}}$. **D.** a^2.

Câu 11: Cho $a>0$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\sqrt{a}\sqrt[3]{a}=\sqrt[4]{a}$. **B.** $\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}}=a^{\frac{5}{6}}$. **C.** $\left(a^2\right)^4=a^6$. **D.** $\sqrt[7]{a^5}=a^{\frac{7}{5}}$.

Câu 12: Cho biểu thức $P=\frac{\left(a^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}}{a^{\sqrt{5}-3}.a^{4-\sqrt{5}}}$, với $a>0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P=a^{\frac{1}{2}}$. **B.** $P=a$. **C.** $P=a^{\frac{3}{2}}$. **D.** $P=a^{\sqrt{3}}$.

Câu 13: Cho hàm số $f\left(a\right)=\frac{a^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{a^{-2}}-\sqrt[3]{a}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(\sqrt[8]{a^3}-\sqrt[8]{a^{-1}}\right)}$ với $a>0,a\neq 1$. Giá trị của $M=f\left(2017^{2018}\right)$ là

A. $M=2017^{2018}+1$. **B.** $M=2017^{1009}$. **C.** $M=2017^{1009}+1$. **D.** $M=-2017^{1009}-1$.

Câu 14: Giá trị của biểu thức $P=\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2017}\left(7-4\sqrt{3}\right)^{2016}$ bằng

A. 1. **B.** $7-4\sqrt{3}$. **C.** $7+4\sqrt{3}$. **D.** $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2016}$.

Câu 15: Giá trị của biểu thức $P=\left(9+4\sqrt{5}\right)^{2017}\left(9-4\sqrt{5}\right)^{2016}$ bằng

A. 1. **B.** $9-4\sqrt{5}$. **C.** $9+4\sqrt{5}$. **D.** $\left(9-4\sqrt{5}.\right)^{2017}$.

Câu 16: Cho $4^x+4^{-x}=14$. Giá trị của biểu thức $P=\dfrac{10-2^x-2^{-x}}{3+2^x+2^{-x}}$ là

A. $P=2$. **B.** $P=\dfrac{1}{2}$. **C.** $P=\dfrac{6}{7}$. **D.** $P=7$.

Câu 17: Cho $25^x+25^{-x}=7$. Giá trị của biểu thức $P=\dfrac{4-5^x-5^{-x}}{9+5^x+5^{-x}}$ là

A. $P=12$. **B.** $P=12^{-1}$. **C.** $P=\dfrac{1}{9}$. **D.** $P=2$.

Câu 18: Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{9^x}{9^x+3};x\in\mathbb{R}$ và *a, b* thỏa $a+b=1$. Giá trị $f\left(a\right)+f\left(b\right)$ bằng

A. -1. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 19: Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$. Tổng $P=f\left(\dfrac{1}{100}\right)+f\left(\dfrac{2}{100}\right)+...+f\left(\dfrac{98}{100}\right)+f\left(\dfrac{99}{100}\right)$ bằng

A. $\dfrac{99}{2}$. **B.** $\dfrac{301}{6}$. **C.** $\dfrac{101}{2}$. **D.** $\dfrac{149}{3}$.

Câu 20: Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$. Giá trị của biểu thức sau đây bằng

$$S=f\left(\frac{1}{2015}\right)+f\left(\frac{2}{2015}\right)+f\left(\frac{3}{2015}\right)+...+f\left(\frac{2013}{2015}\right)+f\left(\frac{2014}{2015}\right)$$

A. 2014. **B.** 2015. **C.** 1008. **D.** 1007.

Dạng 2: Hàm số lũy thừa

Bài toán 1. Tìm tập xác định của hàm số lũy thừa

Phương pháp giải

Ta tìm điều kiện xác định của hàm số $y=\left[f\left(x\right)\right]^{\alpha}$, dựa vào số mũ α của nó như sau:

• Nếu α là số nguyên dương thì không có điều kiện xác định của $f\left(x\right)$.

• Nếu α là số nguyên âm hoặc bằng 0 thì điều kiện xác định là $f\left(x\right)\neq 0$.

• Nếu α là số không nguyên thì điều kiện xác định là $f\left(x\right)>0$.

Ví dụ: Tập xác định của hàm số $y=\left(x^2-6x+5\right)^{-3}$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\left\{1;5\right\}$.

C. $\left(1;5\right)$. **D.** $\left(-\infty;1\right)\cup\left(5;+\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

Số mũ -3 là số nguyên âm. Do đó, điều kiện xác định của hàm số là: $x^2-6x+5\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\x\neq 5\end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbb{R}\setminus\left\{1;5\right\}$.

Chọn B.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Tập xác định của hàm số $y=\left(-x^2+5x-6\right)^{-\frac{1}{5}}$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\left\{2;3\right\}$. **B.** $\left(-\infty;2\right)\cup\left(3;+\infty\right)$.

C. $\left(2;3\right)$. **D.** $\left(3;+\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

Số mũ $-\frac{1}{5}$ không phải là số nguyên. Do đó, điều kiện xác định của hàm số là:

$-x^2+5x-6>0 \Leftrightarrow x\in\left(2;3\right)$. Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\left(2;3\right)$.

Chọn C.

Ví dụ 2: Tập xác định của hàm số $y=x^{\sin\left(2018\pi\right)}$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $\left(0;+\infty\right)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$. **D.** $\left[0;+\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y=x^{\sin\left(2018\pi\right)}=x^0$ nên tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$.

Chọn C.

Ví dụ 3: Tập xác định của hàm số $y=\left(1+\sqrt{x}\right)^{-2019}$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $\left(0;+\infty\right)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$. **D.** $\left[0;+\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

Vì số mũ -2019 là số nguyên âm nên điều kiện xác định của hàm số là

$1+\sqrt{x}\neq 0$, ngoài ra hàm số còn chứa căn thức bậc hai nên $x\geq 0$.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 1+\sqrt{x}\neq 0 \ \left(\text{luôn đúng } \forall x\geq 0\right) \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq 0.$

Vậy $D=\left[0;+\infty\right)$.

Chọn D.

Ví dụ 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in\left(-2018;2018\right)$ để hàm số $y=\left(x^2-2x-m+1\right)^{\sqrt{5}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$?

A. 4036. **B.** 2018. **C.** 2017. **D.** Vô số

Hướng dẫn giải

Vì số mũ $\sqrt{5}$ không phải là số nguyên nên hàm số xác định với $\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow x^2-2x-m+1>0, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' < 0 \\ a > 0 \left(\text{luôn đúng vì } a = 1 > 0\right) \end{cases}$

$\Leftrightarrow 1 - \left(-m + 1\right) > 0$

$\Leftrightarrow m > 0$

Mà $\begin{cases} m \in \left(-2018; 2018\right) \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in \left\{1, 2, 3, ..., 2017\right\}$.

Vậy có 2017 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu.

Chọn C.

Bài toán 2. Tính đạo hàm của hàm số lũy thừa

Phương pháp giải

Công thức tính đạo hàm	**Ví dụ:**
• $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha - 1} \left(x > 0, \alpha \in \mathbb{R}\right)$;	$\left[\left(2x + 5\right)^3\right]' = 6\left(2x + 5\right)^2$.
• $\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha u^{\alpha - 1}.u'$ với u là biểu thức chứa x.	

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Tìm đạo hàm của hàm số $y = \left(1 - x^2\right)^{-\frac{1}{4}}$.

A. $y' = -\frac{1}{4}\left(1 - x^2\right)^{-\frac{5}{4}}$.

B. $y' = -\frac{5}{2}x\left(1 - x^2\right)^{-\frac{5}{4}}$.

C. $y' = \frac{5}{2}x\left(1 - x^2\right)^{-\frac{5}{4}}$.

D. $y' = \frac{1}{2}x\left(1 - x^2\right)^{-\frac{5}{4}}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = -\frac{1}{4}\left(1 - x^2\right)^{-\frac{1}{4} - 1}.\left(1 - x^2\right)' = -\frac{1}{4}\left(1 - x^2\right)^{-\frac{5}{4}}.\left(-2x\right) = \frac{1}{2}x\left(1 - x^2\right)^{-\frac{5}{4}}$.

Chọn D.

Ví dụ 2: Tìm đạo hàm của hàm số $y = \left(2 + 3\cos 2x\right)^4$.

A. $y' = -24\left(2 + 3\cos 2x\right)^3 \sin 2x$.

B. $y' = -12\left(2 + 3\cos 2x\right)^3 \sin 2x$.

C. $y' = 24\left(2 + 3\cos 2x\right)^3 \sin 2x$.

D. $y' = 12\left(2 + 3\cos 2x\right)^3 \sin 2x$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = 4\left(2 + 3\cos 2x\right)^3 \left(2 + 3\cos 2x\right)'$

$= 4\left(2 + 3\cos 2x\right)^3 \left(-6\sin 2x\right)$

$= -24\left(2+3\cos 2x\right)^3 \sin 2x.$

Chọn A.

Ví dụ 3: Đạo hàm của hàm số $y=\left(x\sin x\right)^{\frac{2}{3}}$ là

A. $y'=\frac{2}{3}\left(x\sin x\right)^{-\frac{1}{3}}.$

B. $y'=\frac{2}{3}\left(x\sin x\right)^{-\frac{1}{3}}.\left(\sin x+x\cos x\right).$

C. $y'=\frac{2}{3}.\frac{\sin x+x\cos x}{\sqrt[3]{x^2\sin^2 x}}.$

D. $y'=\frac{2}{3}\left(x\sin x\right)^{-\frac{1}{3}}.\cos x.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=\frac{2}{3}\left(x\sin x\right)^{\frac{2}{3}-1}.\left(x\sin x\right)'=\frac{2}{3}\left(x-\sin x\right)^{-\frac{1}{3}}.\left(\sin x+x\cos x\right).$

Chọn B.

Ví dụ 4: Đạo hàm của hàm số $y=\left(1+\sqrt{x}\right)^{-\frac{2}{3}}$ là

A. $y'=\frac{-1}{\left(3x+3\sqrt{x}\right).\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}}.$ **B.** $y'=-\frac{2}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^{-\frac{5}{3}}.\frac{1}{\sqrt{x}}.$

C. $y'=\frac{-1}{\left(x+\sqrt{x}\right).\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}}.$ **D.** $y'=-\frac{2}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^{-\frac{5}{3}}.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=-\frac{2}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^{-\frac{2}{3}-1}.\left(1+\sqrt{x}\right)'=-\frac{2}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^{-\frac{5}{3}}.\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$=-\frac{1}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^{-\frac{5}{3}}.\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{-1}{\left(3x+3\sqrt{x}\right).\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}}.$

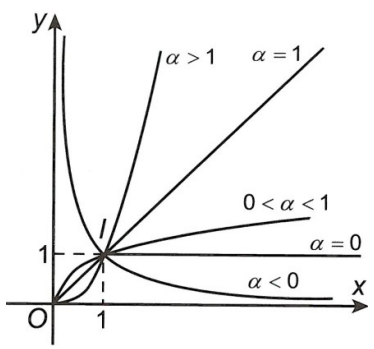
Chọn A.

Bài toán 3. Khảo sát sự biến thiên và nhận dạng đồ thị của hàm số lũy thừa

Phương pháp giải

Đồ thị của hàm số lũy thừa $y=a^{\alpha}$ trên $\left(0;+\infty\right)$:

Lưu ý: Khi khảo sát hàm số lũy thùa với số mũ cụ thể, ta phải xét hàm số đó trên toàn bộ tập xác định của nó. Chẳng hạn: Khảo sát các hàm số $y=x^3$ trên tập xác định của nó là $\mathbb{R}$, khảo sát hàm số $y=x^{-2}$ trên tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$.



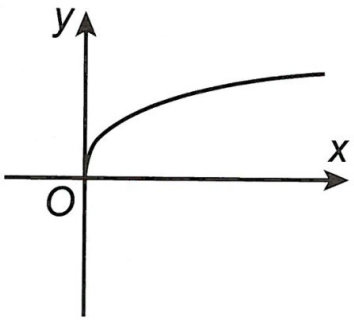
Nhận xét: Đồ thị của hàm số lũy thừa luôn đi qua điểm $I(1;1)$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi $f(x)$ có thể là hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây?

A. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$. **B.** $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

C. $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$. **D.** $f(x) = x^3$.



Hướng dẫn giải

Hàm số có tập xác định là $D = (0;+\infty)$, loại đáp án B, D.

Hàm số đồng biến trên *D*, loại C.

Chọn A.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = f(x) = x^{-\sqrt{2}}$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số tăng trên $(0;+\infty)$. **B.** Đồ thị (C) không có tiệm cận.

C. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$. **D.** Hàm số không có cực trị.

Hướng dẫn giải

Hàm số có tập xác định là $D = (0;+\infty)$.

Ta có: $y' = -\sqrt{2}x^{-\sqrt{2}-1} < 0, \forall x \in D$.

Hàm số nghịch biến trên $D \Rightarrow$ Hàm số không có cực trị.

Chọn D.

Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Tập xác định *D* của hàm số $y = (x^2 - 3x - 4)^{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ là

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;4\}$. **B.** $D=(-\infty;-1]\cup[4;+\infty)$.

C. $D=\mathbb{R}$. **D.** $D=(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$.

Câu 2: Trong các hàm số sau đây, hàm số nào có tập xác định $D=\mathbb{R}$?

A. $y=\left(2+\sqrt{x}\right)^{\pi}$. **B.** $y=\left(2+\frac{1}{x^2}\right)^{\pi}$. **C.** $y=\left(2+x^2\right)^{\pi}$. **D.** $y=\left(2+x\right)^{\pi}$.

Câu 3: Tập xác định D của hàm số $y=\left(x^2-3x\right)^{-4}$ là

A. $(0;3)$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{0;3\}$. **C.** $D=\mathbb{R}$. **D.** $D=(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$.

Câu 4: Tập xác định của hàm số $y=\left(x^2-4x\right)^{\frac{2019}{2020}}$ là

A. $(-\infty;0]\cup[4;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$. **C.** $(0;4)$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{0;4\}$.

Câu 5: Tập xác định D của hàm số $y=(3-x)^0$ là

A. $D=(-\infty;3)$. **B.** $D=(-\infty;3]$. **C.** $D=\mathbb{R}\setminus\{3\}$. **D.** $D=\mathbb{R}$.

Câu 6: Tập xác định D của hàm số $y=\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{-\sin\frac{\pi}{2}}$ là

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{-2;3\}$. **B.** $D=(-\infty,-2)\cup[3,+\infty)$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\{3\}$. **D.** $D=(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$.

Câu 7: Tập xác định D của hàm số $y=x^e+\left(x^2-1\right)^{\pi}$ là

A. $D=(-1;1)$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$. **C.** $D=(1;+\infty)$. **D.** $D=\mathbb{R}$.

Câu 8: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-50;50)$ để hàm số $y=\left(x^2-2x-m+1\right)^{\frac{1}{2}}$ có tập xác định $\mathbb{R}$?

A. 99. **B.** 49. **C.** 50. **D.** 100.

Câu 9: Biết tham số $m\in(a;b)$, với $a<b$ thì hàm số $y=\left(x^2-2x-m^2+5m-5\right)^{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$ có tập xác định là Giá trị tổng $a+b$ là

A. -5. **B.** 5. **C.** 3. **D.** -3.

Câu 10: Tất cả các giá trị thực của *m* để hàm số $y=\left(x^2-4x+m\right)^{\frac{2019}{2020}}$ xác định trên $\mathbb{R}$ là

A. $m>4$. **B.** $m<4$. **C.** $m\ge 4$. **D.** $m\le 4$.

Câu 11: Tất cả các giá trị thực của *m* để hàm số $y=\left(x^2-2x-m\right)^{\sqrt{2020}}$ xác định trên $\mathbb{R}$ là

A. $m>1$. **B.** $m>-1$. **C.** $m<1$. **D.** $m<-1$.

Câu 12: Tất cả các giá trị thực của tham số *m* sao cho hàm số $y=\left(x^2-mx+1\right)^{\sin\frac{\pi}{3}}$ có tập xác định $\mathbb{R}$ là

A. $-2 \le m \le 2.$ **B.** $m < -2 \vee m > 2.$ **C.** $-1 < m < 1.$ **D.** $-2 < m < 2.$

Câu 13: Tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = \left(\dfrac{x^2 + 2mx + m + 2}{x^2 + 3}\right)^{-\sqrt{2}}$ xác định trên $\mathbb{R}$ là

A. $-1 < m < 2.$ **B.** $-1 \le m < 2.$ **C.** $-2 < m < 2.$ **D.** $-1 < m \le 2.$

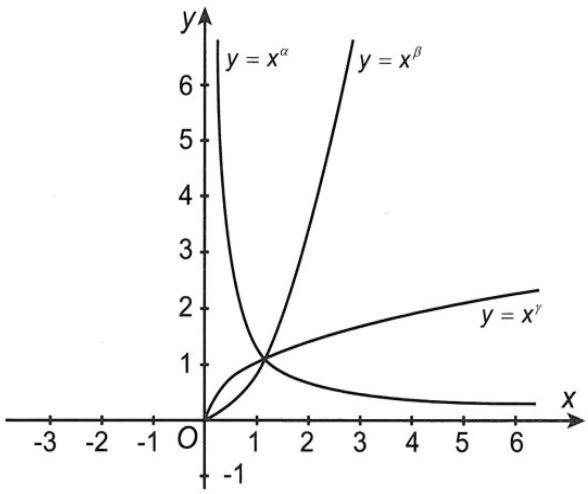
Câu 14: Phương trình tiếp tuyến của $(C): y = x^{\frac{\pi}{2}}$ tại điểm M_0 có hoành độ $x_0 = 1$ là

A. $y = \dfrac{\pi}{2}x + 1.$ **B.** $y = \dfrac{\pi}{2}x - \dfrac{\pi}{2} + 1.$ **C.** $y = \pi x - \pi + 1.$ **D.** $y = -\dfrac{\pi}{2}x + \dfrac{\pi}{2} + 1.$

Câu 15: Trên đồ thị của hàm số $y = x^{\frac{\pi}{2}+1}$ lấy điểm M_0 có hoành độ $x_0 = 2^{\frac{2}{\pi}}$. Tiếp tuyến của (C) tại điểm M_0 có hệ số góc bằng

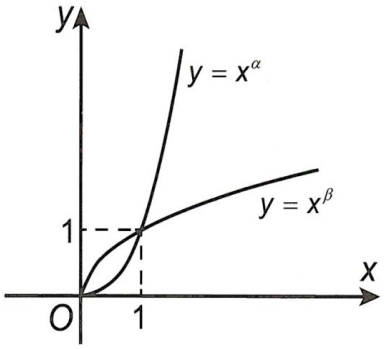
A. $\pi + 2.$ **B.** $2\pi.$ **C.** $2\pi - 1.$ **D.** $3.$

Câu 16: Cho các hàm số lũy thừa $y = x^{\alpha}, y = x^{\beta}, y = x^{\gamma}$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $\gamma > \beta > \alpha.$ **B.** $\beta > \gamma > \alpha.$ **C.** $\beta > \alpha > \gamma.$ **D.** $\alpha > \beta > \gamma.$

Câu 17: Cho α, β là các số thực. Đồ thị các hàm số $y = x^{\alpha}, y = x^{\beta}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ được cho trong hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $0 < \beta < 1 < \alpha.$ **B.** $\beta < 0 < 1 < \alpha.$ **C.** $0 < \alpha < 1 < \beta.$ **D.** $\alpha < 0 < 1 < \beta.$

Câu 18: Bảng biến thiên dưới đây là của hàm số nào?

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	‖	$-$	
y	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

A. $y = x^3$. **B.** $y = \log_3 x$. **C.** $y = x^{-2}$. **D.** $y = 3^x$.

Câu 19: Cho hàm số $y = x^{-4}$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Hàm số có một trục đối xứng. **B.** Đồ thị hàm số đi qua điểm $(1;1)$.

C. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận. **D.** Đồ thị hàm số có một tâm đối xứng.

Câu 20: Trong các phương trình sau đây, phương trình nào có nghiệm?

A. $x^{\frac{1}{6}} + 1 = 0$. **B.** $\sqrt{x-4} + 5 = 0$. **C.** $x^{\frac{1}{5}} + (x-1)^{\frac{1}{6}} = 0$. **D.** $x^{\frac{1}{4}} - 1 = 0$

ĐÁP ÁN

Dạng 1. Lũy thừa

1-A	2-D	3-D	4-C	5-D	6-D	7-C	8-B	9-C	10-A
11-B	12-B	13-D	14-C	15-C	16-C	17-B	18-C	19-A	20-D

Dạng 2. Hàm số lũy thừa

1-D	2-C	3-B	4-B	5-C	6-A	7-C	8-B	9-B	10-A
11-D	12-D	13-A	14-B	15-A	16-B	17-A	18-C	19-D	20-A