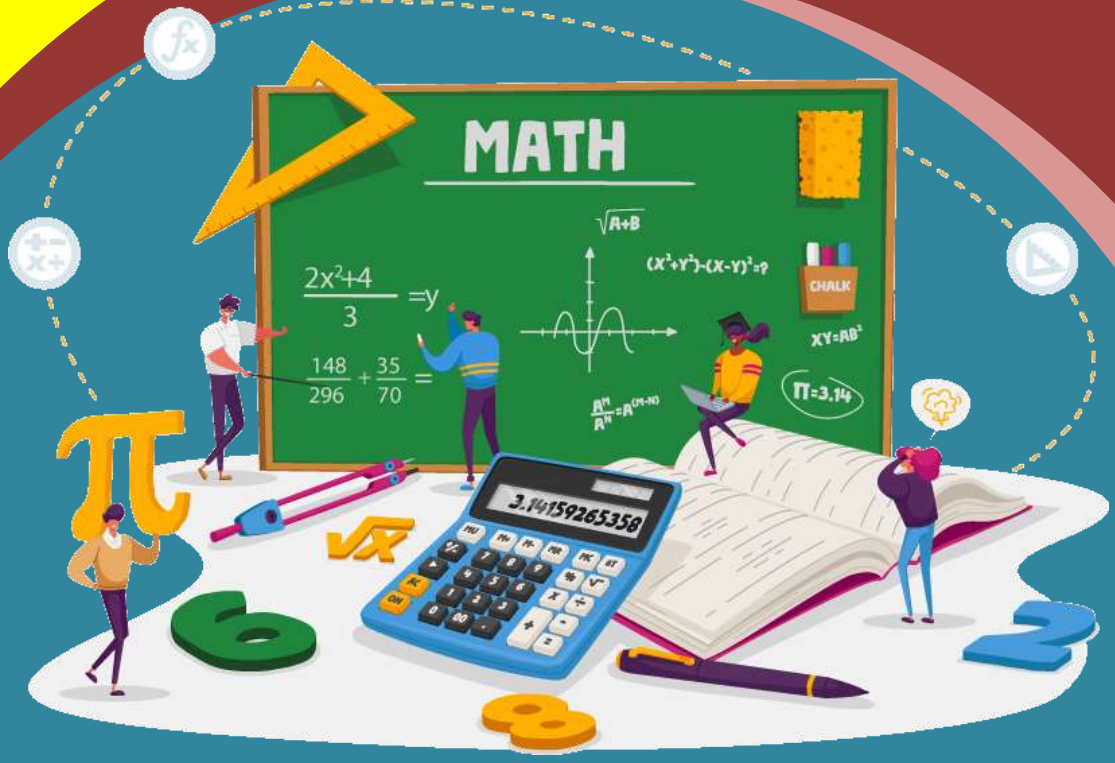
LÊ BÁ BẢO
TRƯỜNG THPT ĐẶNG HUY TRỨ - ADMIN CLB GIÁO VIÊN TRẺ TP HUẾ

TOÁN 12

KHẢO SÁT HÀM SỐ

SỰ TƯƠNG GIAO

- LUYỆN THI THPT QUỐC GIA
- CẬP NHẬT TỪ ĐỀ THI MỚI NHẤT



Chủ đề 7: SỰ TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ

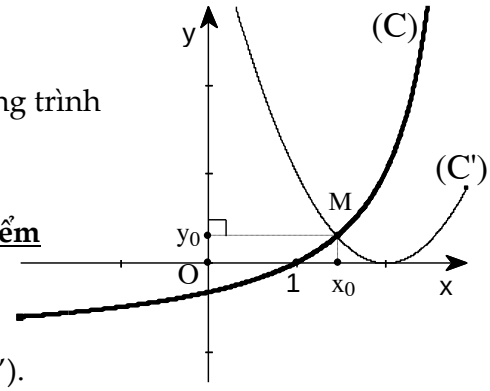
I- LÝ THUYẾT

Giả sử (C) và (C′) là đồ thị của hai hàm số:

$$y = f(x) \text{ và } y = g(x).$$

Hoành độ giao điểm của (C) và (C′), *nếu có*, là nghiệm của phương trình

$$\boxed{f(x) = g(x)} \quad (1)$$



Lưu ý:

Phương trình $f(x) = g(x)$ là **phương trình hoành độ giao điểm** của (C) và (C′).

Đảo lại, nếu x_0 là nghiệm của (1), tức là: $f(x_0) = g(x_0)$ thì điểm $M(x_0; f(x_0))$ hay $M(x_0; g(x_0))$ là điểm chung của (C) và (C′).

Kết quả:

+ Nếu phương trình (1) vô nghiệm thì (C) và (C′) không có điểm chung.
+ Nếu phương trình (1) có n nghiệm thì (C) cắt (C′) tại n điểm phân biệt (n không là nghiệm bội)

II-BÀI TẬP MINH HỌA

DẠNG 1: XÁC ĐỊNH TOẠ ĐỘ GIAO ĐIỂM CỦA 2 ĐỒ THỊ

Bài tập 1: (**ĐHVH-98**) Tìm toạ độ giao điểm của đường thẳng d: $y = 2x + 5$ với đồ thị hàm số (C): $y = x^3 + 3x^2 + 1$.

Lời giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (C):

$$x^3 + 3x^2 + 1 = 2x + 5 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 + 2x - 4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x^2 + 2x - 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 + \sqrt{5} \\ x = -1 - \sqrt{5} \end{array}\right.$$

* Với $x = -1 \Rightarrow y = 2.(-1) + 5 = 3$.

* Với $x = -1 + \sqrt{5} \Rightarrow y = 2(-1 + \sqrt{5}) + 5 = 3 + 2\sqrt{5}$.

* Với $x = -1 - \sqrt{5} \Rightarrow y = 2(-1 - \sqrt{5}) + 5 = 3 - 2\sqrt{5}$.

Kết luận:

Vậy các giao điểm cần tìm là $M_1(-1;3)$, $M_2(-1+\sqrt{5}; 3+2\sqrt{5})$, $M_3(-1-\sqrt{5}; 3-2\sqrt{5})$

Nhận xét: *Khi xác định tung độ giao điểm, ta đã sử dụng hàm số $y = 2x + 5$ để đơn giản hơn.*

Bài tập 2: (**Đề 105**) Chỉ rõ các giao điểm của đồ thị (C): $y = |x+3| + \dfrac{1}{x+1}$ với trục hoành.

Lời giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox: $|x+3| + \dfrac{1}{x+1} = 0$ (1)

TH 1: $-3 \le x \ne -1$, phương trình (1) trở thành:

$(x+3)+\dfrac{1}{x+1}=0 \Leftrightarrow (x+3)(x+1)+1=0 \Leftrightarrow x^2+4x+4=0 \Leftrightarrow x=-2$ (nhận)

TH 2: $x<-3$, phương trình (1) trở thành:

$$-(x+3)+\frac{1}{x+1}=0 \Leftrightarrow -(x+3)(x+1)+1=0 \Leftrightarrow x^2+4x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=-2+\sqrt{2} & \text{(loại)} \\ x=-2-\sqrt{2} & \text{(nhận)} \end{array}\right.$$

Kết luận: Vậy giao điểm cần tìm là $M_1(-2;0)$, $M_2\left(-2-\sqrt{2};0\right)$.

DẠNG 2: BIỆN LUẬN SỐ GIAO ĐIỂM CỦA 2 HỌ ĐỒ THỊ

Bài tập 1: (**Đề 29**) Xác định tất cả các giá trị của a để đường thẳng d: $y=ax+3$ không cắt đồ thị hàm số (C): $y=\dfrac{3x+4}{x-1}$.

Lời giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (C):

$$\frac{3x+4}{x-1}=ax+3 \Leftrightarrow 3x+4=(ax+3)(x-1) \quad (x\neq 1) \Leftrightarrow ax^2-ax-7=0 \quad (x\neq 1) \ (1)$$

Để đường thẳng d không cắt (C) $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x=1$.

TH 1: Xét $a=0$, phương trình (1) trở thành: $-7=0$. Vậy $a=0$ thỏa.

$$\text{TH 2: Y.c.b.t} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta=a^2+28a<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ -28<a<0 \end{cases} \Leftrightarrow a\in(-28;0) \\ \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta=a^2+28a=0 \\ -\dfrac{b}{2a}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-28 \\ -\dfrac{-a}{2a}=1 \end{cases} \text{(vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

Kết luận: Vậy các giá trị cần tìm là $a\in(-28;0]$.

Bài tập 2: (**Đề 34**) Xác định tất cả các giá trị của k để đồ thị hàm số (C): $y=\dfrac{x^2+4x+3}{x+2}$ cắt đường thẳng d: $y=kx+1$ tại 2 điểm phân biệt.

Lời giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (C):

$$\frac{x^2+4x+3}{x+2}=kx+1 \Leftrightarrow x^2+4x+3=(x+2)(kx+1),\ (x\neq -2)$$

$$g(x)=(k-1)x^2+(2k-3)x-1=0 \ (x\neq -2) \quad (1)$$

Để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\neq -2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k-1\neq 0 \\ g(-2)\neq 0 \\ \Delta_g>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k\neq 1 \\ 4(k-1)-2(2k-3)-1\neq 0 \ \forall k \\ (2k-3)^2+4(k-1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k\neq 1 \\ 4k^2-8k+5>0,\ \forall k\in\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow k\neq 1.$$

Kết luận: Vậy các giá trị cần tìm là $k \in (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$.

Bài tập 3: (**ĐHSPII-97**) Tìm m để hàm số (C): $y = (1-m)x^4 - mx^2 + 2m - 1$ cắt Ox tại 4 điểm phân biệt.

Lời giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox: $(1-m)x^4 - mx^2 + 2m - 1 = 0$ (1)

Đặt $t = x^2 \geq 0$, (1) trở thành: $(1-m)t^2 - mt + 2m - 1 = 0$ (2)

Để (C) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt, tức là: $0 < t_1 < t_2$.

$$\text{Y.c.b.t} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ \Delta = m^2 - 4(2m-1)(1-m) > 0 \\ S = \dfrac{m}{1-m} > 0 \\ P = \dfrac{2m-1}{1-m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 9m^2 - 12m + 4 = (3m-2)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq \dfrac{2}{3} \\ 0 < m < 1 \\ \dfrac{1}{2} < m < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \in \left(\frac{1}{2};1\right) \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$$

Kết luận: Vậy các giá trị cần tìm là $m \in \left(\frac{1}{2};1\right) \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$.

CHÚ Ý: *Mối quan hệ về số nghiệm của phương trình* $ax^4 + bx^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$ (1) *và* $at^2 + bt + c = 0$ $(a \neq 0)$ (2) *thông qua phép đặt ẩn phụ:* $t = x^2 \geq 0$.

TH1: Phương trình (2) có duy nhất 1 nghiệm $t < 0 \Rightarrow$ Phương trình (2) không có nghiệm x.

TH2: Phương trình (2) có duy nhất 1 nghiệm $t = 0 \Rightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm $x = 0$.

TH3: Phương trình (2) có duy nhất 1 nghiệm $t > 0 \Rightarrow$ Phương trình (2) có 2 nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \sqrt{t} \\ x = -\sqrt{t} \end{array}\right.$.

Vậy có thể mở rộng yêu cầu của bài toán thành các dạng sau:

3-1) Tìm m để hàm số (C) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm $0 = t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ g(0) = 0 \\ S > 0 \end{cases}$

3-2) Tìm m để hàm số (C) cắt Ox tại 2 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm $\left[\begin{array}{l} t_1 < 0 < t_2 \Leftrightarrow P < 0 \\ 0 < t_1 = t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ S > 0 \end{cases} \end{array}\right.$

3-2) Tìm m để hàm số (C) cắt Ox tại 1 điểm

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm $\left[\begin{array}{l} t_1 < 0 = t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \end{cases} \\ 0 = t_1 = t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ S = 0 \end{cases} \end{array}\right.$

Trên đây là sự mở rộng bài toán cùng hướng giải quyết theo lý thuyết " **Tam thức bậc hai và ứng dụng***". Chúng ta sẽ bàn lại bàn toán này cùng các phương pháp đặc sắc hơn như "* **Ứng dụng tính biến thiên***", "***Phương pháp cực trị hàm số***"…trong các bài viết tiếp theo.*

Bài tập 4: (**Đề dự bị 2003**) Tìm m để đồ thị hàm số $(C): y=(x-1)(x^2+mx+m)$ cắt Ox tại 3 điểm phân biệt.

Lời giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox:

$$(x-1)(x^2+mx+m)=0\ (1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ g(x)=x^2+mx+m=0\ (2)\end{array}\right.$$

Để (C) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 1.

$$\text{Y.c.b.t}\Leftrightarrow\begin{cases}g(1)=1+2m\neq 0\\ \Delta_g=m^2-4m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq-\dfrac{1}{2}\\ m<0\ \vee\ m>4\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty)\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$$

Kết luận: Vậy các giá trị cần tìm là $m\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty)\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

Trong bài tập trên, đề bài đã "trình bày" tương đối …dễ thương (!!!) vì đã có dạng $A.B=0$. Chúng ta thử qua bài tập với một sự thay đổi nhẹ nhàng xem sao:

Bài tập 5: (**ĐHKT-98**) Cho hàm số $y=x^3+3x^2+1$ (C). Đường thẳng đi qua $A(-3;1)$ và có hệ số góc bằng k. Xác định k để đường thẳng đó cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt.

Lời giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Đường thẳng d đi qua $A(-3;1)$ và có hệ số góc k có phương trình:

$$d: y-1=k(x+3)\Leftrightarrow y=k(x+3)+1$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d:

$$x^3+3x^2+1=k(x+3)+1\ (1)\Leftrightarrow x^3+3x^2=k(x+3)\Leftrightarrow x^2(x+3)=k(x+3)$$

$$\Leftrightarrow(x+3)(x^2-k)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\ x^2=k\ (2)\end{array}\right.$$

Để d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác -3.

$$\text{Y.c.b.t}\Leftrightarrow\begin{cases}k>0\\ k\neq 9\end{cases}\Leftrightarrow k\in(0;+\infty)\setminus\{9\}$$

Kết luận: Vậy các giá trị cần tìm là $k\in(0;+\infty)\setminus\{9\}$.

Các em chú ý, kỹ thuật phân tích $x^3+3x^2+1=k(x+3)+1\ (1)\Leftrightarrow x^3+3x^2=k(x+3)$, tạo ra được sự thuận lợi trong quá trình phân tích. Còn không, chúng ta phải đoán được nghiệm và phân tích theo sơ đồ Hoc-ner. **Đoán không được nghiệm thì sao nhỉ???**

Chúng ta xét tiếp bài tập sau:

Bài tập 6: Tìm m để đồ thị hàm số (C): $y=\dfrac{1}{3}x^3-x-m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Lời giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox: $\frac{1}{3}x^3-x-m=0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3-x=m$ (1)

Để (C) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Đồ thị $(C'): y=\frac{1}{3}x^3-x$ cắt $d: y=m//Ox$ tại 3 điểm phân biệt.

Xét $g(x)=\frac{1}{3}x^3-x$. Ta có: $g'(x)=x^2-1 \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=-\frac{2}{3} \\ x=-1 \Rightarrow y=\frac{2}{3} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
g'(x)		+	0	–	0	+	
g(x)	$-\infty$	↗	$\frac{2}{3}$	↘	$-\frac{2}{3}$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy để d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow -\frac{2}{3}<m<\frac{2}{3}$.

<u>Kết luận:</u> Vậy các giá trị cần tìm là: $m\in\left(-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

<u>Bài tập 7:</u> (**ĐH A-2003**) Tìm m để đồ thị hàm số $y=\frac{mx^2+x+m}{x-1}$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và hai điểm đó có hoành độ dương.

Lời giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Đồ thị hàm số $y=\frac{mx^2+x+m}{x-1}$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ dương

$\Leftrightarrow$ Phương trình $g(x)=mx^2+x+m=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt $\neq 1$

$$\text{Y.c.b.t} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \Delta=1-4m^2>0 \\ g(1)=2m+1\neq 0 \\ S=-\frac{1}{m}>0 \\ P=\frac{m}{m}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ |m|<\frac{1}{2} \\ m\neq -\frac{1}{2} \\ m<0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<m<0$$

Vậy các giá trị m cần tìm là: $-\frac{1}{2}<m<0$.

<u>Bài tập 8:</u> (**ĐH D-2009**) Tìm m để d: $y=-1$ cắt (C_m): $y=x^4-(3m+2)x^2+3m$ tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2.

Lời giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và đường thẳng $y=-1$ là:

$$x^4-(3m+2)x^2+3m=-1$$

Đặt $t=x^2$ $(t\ge 0)$, phương trình trở thành $t^2-(3m+2)t+3m+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=3m+1 \end{array}\right.$

Yêu cầu bài toán tương đương $\begin{cases} 0<3m+1<4 \\ 3m+1\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow m\in\left(-\frac{1}{3};1\right)\setminus\{0\}$

DẠNG 3: SỐ GIAO ĐIỂM VÀ TÍNH CHẤT GIAO ĐIỂM CỦA HAI HỌ ĐỒ THỊ

Phương pháp:

Bước 1: Thiết lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (C′): $f(x)=g(x)$ (1)

Bước 2: Biện luận *số nghiệm* và *tính chất nghiệm* của (1).

Nhận xét: Rõ ràng hoành độ giao điểm của (C) và (C′) là nghiệm của (1) nên số giao điểm và tính chất giao điểm cũng là *số nghiệm* và *tính chất nghiệm* của (1). Điều này, đưa yêu cầu từ Giải tích sang việc *biện luận phương trình sơ cấp* mà chúng ta đã biết.

Bài tập 1: Cho hàm số $y=\frac{2x+4}{1-x}$. Gọi (*d*) là đường thẳng qua $A(1;1)$ và có hệ số góc *k*. Tìm *k* sao cho (*d*) cắt (*C*) tại hai điểm *M*, *N* và $MN=3\sqrt{10}$.

Lời giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Từ giả thiết ta có: $(d): y=k(x-1)+1$. Bài toán trở thành: Tìm *k* để hệ phương trình sau có hai nghiệm $(x_1;y_1),(x_2;y_2)$ phân biệt sao cho $(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=90$ (*)

$\begin{cases} \frac{2x+4}{-x+1}=k(x-1)+1 \\ y=k(x-1)+1 \end{cases}$ (I). Ta có: (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} kx^2-(2k-3)x+k+3=0 \\ y=k(x-1)+1 \end{cases}$

Dễ có (I) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $kx^2-(2k-3)x+k+3=0$ (**) có hai nghiệm phân biệt. Khi đó dễ có được $k\ne 0,\ k<\frac{3}{8}$.

Ta biến đổi (*) trở thành: $(1+k^2)(x_2-x_1)^2=90 \Leftrightarrow (1+k^2)\left[(x_2+x_1)^2-4x_2x_1\right]=90$ (* * *)

Theo định lí Viet cho (**) ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=\frac{2k-3}{k} \\ x_1x_2=\frac{k+3}{k} \end{cases}$ thế vào (***) ta có phương trình:

$$8k^3+27k^2+8k-3=0 \Leftrightarrow (k+3)(8k^2+3k-1)=0 \Leftrightarrow k=-3 \vee k=\frac{-3+\sqrt{41}}{16} \vee k=\frac{-3-\sqrt{41}}{16}.$$

Kết luận: Vậy các giá trị của k cần tìm là: $k=-3, k=\frac{-3+\sqrt{41}}{16}$, $k=\frac{-3-\sqrt{41}}{16}$.

Bài tập 2: Cho hàm số $y=\frac{2x-2}{x+1}$ (C). Tìm m để đường thẳng d: $y=2x+m$ cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $AB=\sqrt{5}$.

Lời giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x-2}{x+1}=2x+m \Leftrightarrow g(x)=2x^2+mx+m+2=0,\ (x\neq -1)$ (1)

Để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác -1

Y.c.b.t$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta_g=m^2-8(m+2)>0\\ g(-1)=2-m+m+2\neq 0\ \forall m\end{cases} \Leftrightarrow m^2-8m-16>0$

$$\Leftrightarrow m\in\left(-\infty;4-4\sqrt{2}\right)\cup\left(4+4\sqrt{2};+\infty\right)\quad (2)$$

Lúc đó, gọi $A(x_A;2x_A+m)$; $B(x_B;2x_B+m)$, với x_A và x_B là các nghiệm của phương trình (1).

Theo định lý Viet ta có: $\begin{cases}x_A+x_B=-\frac{m}{2}\\ x_A.x_B=\frac{m+2}{2}\end{cases}$ (*)

Ta có: $AB^2=5\Leftrightarrow (x_B-x_A)^2+4(x_B-x_A)^2=5 \Leftrightarrow (x_A+x_B)^2-4x_Ax_B=1$ (**)

Thay (*) vào (**) ta được: $m^2-8m-20=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=10\ \text{(thỏa đk (2))}\\ m=-2\ \text{(thỏa đk (2))}\end{array}\right.$

<u>Kết luận:</u> Vậy các giá trị cần tìm là: $m\in\{-2;10\}$.

<u>Bài tập 3:</u> Cho hàm số: $y=\frac{x-2}{x-1}$ (C). Chứng minh rằng: Với mọi giá trị của m, đường thẳng d: $y=-x+m$ luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm *A, B* phân biệt. Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng AB.

Lời giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

* Phương trình hoành độ giao điểm của d$\cap(C)$ là: $x^2-mx+m-2=0\ (x\neq 1)$ (1)

Vì $\begin{cases}\Delta=m^2-4m+8>0\\ f(1)=-1\neq 0\end{cases}$ $\forall m\in\mathbb{R}$, nên phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 1 với $\forall m$.

Suy ra d cắt (C) tại hai điểm phân biệt với $\forall m$.

* Gọi các giao điểm của d(C) là $A(x_A;-x_A+m)$; $B(x_B;-x_B+m)$, với x_A và x_B là các nghiệm của phương trình (1). Theo định lý Viet ta có: $\begin{cases}x_A+x_B=m\\ x_A.x_B=m-2\end{cases}$ (*)

Ta có: $AB^2=2(x_A-x_B)^2=2\left[(x_A+x_B)^2-4x_A.x_B\right]$ (**)

Thay (*) vào (**) ta được: $AB^2=2\left[m^2-4(m-2)\right]=2\left[(m-2)^2+4\right]=2(m-2)^2+8\geq 8$

Vậy $AB_{\min}=2\sqrt{2}$, đạt được khi $m=2$.

<u>Bài tập 4:</u> Xác định m để đường thẳng $(d): y=mx-2$ cắt $(H): y=\frac{x-1}{x-3}$ tại hai điểm phân biệt M, N sao cho độ dài đoạn thẳng MN nhỏ nhất.

Lời giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng và đồ thị:

$$\frac{x-1}{x-3}=mx-2\Leftrightarrow mx^2-3(m+1)x+7, x\neq 3 \qquad (*)$$

Nhận thấy $x\neq 3$ không phải là nghiệm của phương trình $(*)$.

Đường thẳng cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \Delta=9(m+1)^2-28m>0 \end{cases} \Leftrightarrow m\neq 0$.

Gọi $M(x_1;y_1)$ và $N(x_2;y_2)$ là tọa độ giao điểm của đường thẳng và đồ thị. Khi đó $\begin{cases} y_1=mx_1-2 \\ y_2=mx_2-2 \end{cases}$ và x_1,x_2 là nghiệm của phương trình $(*)$ nên $x_1+x_2=\frac{3(m+1)}{m}, x_1.x_2=\frac{7}{m}$.

Ta có: $MN=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+m^2(x_2-x_1)^2}$

$=\sqrt{(1+m^2)(x_2-x_1)^2}=\sqrt{(1+m^2)\left[(x_2+x_1)^2-4x_1x_2\right]}$

$=\sqrt{(1+m^2)\left[\frac{9(m+1)^2}{m^2}-4.\frac{7}{m}\right]}=\sqrt{9\left(m^2+\frac{1}{m^2}\right)-10\left(m+\frac{1}{m}\right)+18}$

Đặt $t=m+\frac{1}{m}$ (điều kiện $|t|\geq 2$), suy ra $m^2+\frac{1}{m^2}=t^2-2$. Khi đó $MN=\sqrt{9t^2-10t}$.

Dùng đạo hàm tìm GTNN của hàm số $f(t)=\sqrt{9t^2-10t}$ trên các nửa khoảng $(-\infty;-2]$ và $[2;+\infty)$. Ta tìm được $\min f(t)=f(2)=4$ khi $t=2$.

Với $t=2\Rightarrow m+\frac{1}{m}=2\Leftrightarrow m=1$.

Vậy MN nhỏ nhất bằng 4 khi $m=1$.

Bài tập 5: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+\frac{2}{3}$ (C_m). Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2+x_2^2+x_3^2>15$.

Lời giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$\frac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+\frac{2}{3}=0\Leftrightarrow x^3-3mx^2-3x+3m+2=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left[x^2+(1-3m)x-3m-2\right]=0 \quad (1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ g(x)=x^2+(1-3m)x-3m-2=0 \quad (2) \end{array}\right.$

Để (C_m) cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có hai ngiệm phân biệt khác 1.

Y.c.b.t $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=(1-3m)^2+4(3m+2)>0 \\ g(1)=-6m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2+2m+3>0, \forall m \\ m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\neq 0$ (*)

Giả sử $x_3=1$, lúc đó x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (2).

Theo định lý Viet, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3m - 1 \\ x_1.x_2 = -3m - 2 \end{cases}$ (3)

Khi đó: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 + 1 > 15 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 14 > 0$ (4)

Thay (3) vào (4) ta được: $(3m-1)^2 + 2(3m+2) - 14 > 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow m < -1 \vee m > 1$

Đối chiếu với điều kiện (*) suy ra tập các giá trị cần tìm là: $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Bài tập 6: (**Khối A-2011**) Cho hàm số $y = \dfrac{-x+1}{2x-1}$. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì đường thẳng $d: y = x + m$ luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B. Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến tại A và B. Tìm m để tổng $k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d:

$$\frac{-x+1}{2x-1} = x + m \Leftrightarrow g(x) = 2x^2 + 2mx - m - 1 = 0 \quad (*) \left(x \neq \frac{1}{2}\right)$$

Để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\neq \dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g' > 0 \\ g\left(\dfrac{1}{2}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m + 1 > 0 & \forall m \\ \dfrac{1}{2} + m - m - 1 \neq 0 & \forall m \end{cases}$$

Suy ra d luôn cắt (C) tại 2 điểm A, B phân biệt.

Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (*). Áp dụng định lí Vi-et: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1.x_2 = \dfrac{-m-1}{2} \end{cases}$ (*)

Hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại x_1 là: $k_1 = f'(x_1) = -\dfrac{1}{(x_1 - 1)^2}$

Hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại x_2 là: $k_2 = f'(x_2) = -\dfrac{1}{(x_2 - 1)^2}$

Cách 1: **CHUẨN_ ĐƠN GIẢN_ DỄ HIỂU**

Ta có: $k_1 + k_2 = -\dfrac{1}{(2x_1 - 1)^2} - \dfrac{1}{(2x_2 - 1)^2} = -\dfrac{4(x_1 + x_2)^2 - 8x_1x_2 - 4(x_1 + x_2) + 2}{\left[4x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 1\right]^2}$ (**)

Thay (*) vào (**) ta được: $k_1 + k_2 = -4m^2 - 8m - 6 = -4(m+1)^2 - 2 \leq -2$.

Suy ra $k_1 + k_2$ lớn nhất bằng -2, đạt được khi chỉ khi $m = -1$.

Cách 2: **ĐẶC SẮC**

Ta có: $k_1 + k_2 = -\dfrac{1}{(2x_1 - 1)^2} - \dfrac{1}{(2x_2 - 1)^2}$ (1)

Áp dụng Bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\frac{1}{(2x_1-1)^2}+\frac{1}{(2x_2-1)^2}\ge\frac{2}{\sqrt{(2x_1-1)^2(2x_2-1)^2}}=\frac{2}{|2x_1-1|.|2x_2-1|}$$

nên (1) trở thành:

$$k_1+k_2=-\left[\frac{1}{(2x_1-1)^2}+\frac{1}{(2x_2-1)^2}\right]\le-\frac{2}{|2x_1-1|.|2x_2-1|}=-\frac{2}{|(2x_1-1)(2x_2-1)|}$$

$$=-\frac{1}{\left|\left[4x_1x_2-2(x_1+x_2)+1\right]\right|}=-\frac{2}{\left|\left[4\frac{-m-1}{2}-2(-m)+1\right]\right|}=-2$$

Suy ra k_1+k_2 lớn nhất bằng -2, đạt được khi chỉ khi

$$\frac{1}{(2x_1-1)^2}=\frac{1}{(2x_2-1)^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x_1-1=2x_2-1\ \text{(loại do } x_1\ne x_2\text{)}\\2x_1-1=-2x_2+1\Leftrightarrow x_1+x_2=1\Leftrightarrow m=-1\end{array}\right.$$

Cách 3: **CẦN CÙ VÀ CHÍNH XÁC**

Theo trên, d luôn cắt (C) tại 2 điểm A, B phân biệt.

Lúc đó: $2x^2+2mx-m-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=\dfrac{-m+\sqrt{m^2+2m+2}}{2}\\x_2=\dfrac{-m-\sqrt{m^2+2m+2}}{2}\end{array}\right.$

Ta có: $k_1+k_2=-\dfrac{1}{(2x_1-1)^2}-\dfrac{1}{(2x_2-1)^2}=-\dfrac{1}{\left(-m+\sqrt{m^2+2m+2}-1\right)^2}-\dfrac{1}{\left(-m-\sqrt{m^2+2m+2}-1\right)^2}$

$$=-\frac{1}{\left[\sqrt{m^2+2m+2}-(1+m)\right]^2}-\frac{1}{\left[\sqrt{m^2+2m+2}+(1+m)\right]^2}$$

$$=-\frac{\left[\sqrt{m^2+2m+2}-(1+m)\right]^2+\left[\sqrt{m^2+2m+2}+(1+m)\right]^2}{\left[\sqrt{m^2+2m+2}-(1+m)\right]^2\left[\sqrt{m^2+2m+2}+(1+m)\right]^2}$$

$$=-\frac{2(m^2+2m+2)+2(m^2+2m+1)}{\left[\left(\sqrt{m^2+2m+2}\right)^2-(1+m)^2\right]^2}=-4m^2-8m-6=-4(m+1)^2-2\le-2$$

Suy ra k_1+k_2 lớn nhất bằng -2, đạt được khi chỉ khi $m=-1$.

Bài tập 7: Cho hàm số $y=\dfrac{m-x}{x+2}$ có đồ thị là (H_m). Tìm m để $d:2x+2y-1=0$ cắt (H_m) tại hai điểm cùng với gốc tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích là $S=\dfrac{3}{8}$.

Lời giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Hoành độ giao điểm A, B của d và (H_m) là các nghiệm của phương trình: $\dfrac{-x+m}{x+2}=-x+\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 2x^2+x+2(m-1)=0,\ x\ne-2 \qquad (1)$$

Để d cắt (H_m) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình(1) có 2 nghiệm x_1, x_2 phân biệt khác -2

Y.c.b.t $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 17 - 16m > 0 \\ 2.(-2)^2 - 2 + 2(m-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{17}{16} \\ m \neq -2 \end{cases}$ (*)

Ta có: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{2}.\sqrt{(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{2}.\sqrt{(x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{17 - 16m}.$

Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến d là $h = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Suy ra $S_{\Delta OAB} = \dfrac{1}{2}.h.AB = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2\sqrt{2}}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{17 - 16m} = \dfrac{3}{8} \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$, thỏa mãn (*)

<u>Kết luận:</u> Vậy $m = \dfrac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

<u>Bài tập 8:</u> Cho hàm số $y = \dfrac{2x}{x-2}$ (C). Tìm m để đường thẳng (d): $y = x + m$ cắt đồ thị (C) tại 2 điểm *<u>phân biệt thuộc 2 nhánh khác nhau</u>* của đồ thị sao cho khoảng cách giữa 2 điểm đó là nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Lời giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (C):

$$\frac{2x}{x-2} = x + m \Leftrightarrow x^2 + (m-4)x - 2m = 0,\ (x \neq 2) \quad (1)$$

Để (d) cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 2.

Y.c.b.t $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 + 16 \\ -4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \forall m \in \mathbb{R}$ (2).

Lúc đó, gọi $A(x_1; x_1 + m)$, $B(x_2; x_2 + m)$ là 2 giao điểm của d và (C), với x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (1). Theo định lí viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 - m \\ x_1x_2 = -2m \end{cases}$ (3)

* Để A, B thuộc 2 nhánh khác nhau của đồ thị thì A, B nằm khác phía đối với TCĐ: $x - 2 = 0$.

Suy ra: $(x_1 - 2)(x_2 - 2) < 0 \Leftrightarrow x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 < 0$ (4)

Thay (3) vào 4 ta được : – 4 < 0 luôn đúng (5)

* Mặt khác ta lại có $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{2(x_1 + x_2)^2 - 8x_1x_2}$ (6)

Thay (3) vào (6) ta được $AB = \sqrt{2m^2 + 32} \geq \sqrt{32}$. Suy ra: $AB_{\min} = \sqrt{32}$ khi $m = 0$.

<u>Kết luận:</u> Vậy $m = 0$ thoả mãn.

<u>Bài tập 9:</u>Tìm a và b để đường thẳng d: $y = ax + b$ cắt đồ thị (C): $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua đường thẳng $\Delta: x - 2y + 3 = 0$.

Lời giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Phương trình $\Delta: x-2y+3=0$ được viết lại: $\Delta: y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$. Để thỏa mãn đề bài thì trước hết $a=-2$. Vậy d: $y=-2x+b$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (C):

$$\frac{x-1}{x+1}=-2x+b \Leftrightarrow g(x)=2x^2-(b-3)x-(b+1)=0 \ (x\neq -1) \quad (1)$$

Để (d) cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác -1.

Y.c.b.t $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g=(b-3)^2+8(b+1)>0 \\ g(-1)=2+(b-3)-(b+1)\neq 0 \ \forall b \end{cases} \Leftrightarrow b^2+2b+17>0 \Rightarrow \forall b\in\mathbb{R}$ (2).

Lúc đó, gọi $A(x_1;-2x_1+b)$, $B(x_2;-2x_2+b)$ là 2 giao điểm của d và (C), với x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (1). Theo định lí viet ta có $\begin{cases} x_1+x_2=\frac{b-3}{2} \\ x_1x_2=\frac{b+1}{2} \end{cases}$ (3)

Gọi I là trung điểm của AB, ta có: $\begin{cases} x_I=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{b-3}{4} \\ y_I=-2x_I+b=\frac{b+3}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{b-3}{4};\frac{b+3}{2}\right)$.

Lúc đó, yêu cầu bài toán:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Tồn tại A, B.} \\ AB\perp\Delta \\ I\in\Delta \Leftrightarrow \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall b \\ a=-2 \\ x_I-2y_I+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ \frac{b-3}{4}-(b+2)+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \end{cases}.$$

<u>Kết luận:</u> Vậy các giá trị cần tìm là $a=-2$ và $b=-1$.

<u>Bài tập 10:</u> Cho hàm số: $y=\frac{x-1}{x+1}$ (C). <u>*Một nhánh*</u> của đồ thị (C) cắt Ox, Oy lần lượt tại A, B. Tìm điểm C thuộc <u>*nhánh còn lại*</u> sao cho diện tích tam giác ABC bằng 3.

Lời giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Tìm được tọa độ của $A(1;0)$, $B(0;-1)\Rightarrow$ Phương trình của AB: $x-y-1=0$.

Do $M\in(C)$ nên tọa độ $M\left(x;\frac{x-1}{x+1}\right)$, $(x\neq -1)$ và A, B thuộc nhánh các điểm có hoành độ lớn hơn -1 nên M thuộc nhánh đồ thị có các điểm có hoành độ $x<-1$.

Ta có : $S_{MAB}=\frac{1}{2}AB.\text{d}(M;AB)=\frac{1}{2}\frac{\left|x-\frac{x-1}{x+1}-1\right|}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}=\frac{1}{2}\left|\frac{x^2-x}{x+1}\right|=3$

$$\Leftrightarrow |x^2-x|=6|x+1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+5x+6=0 \\ x^2-7x-6=0 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2\Rightarrow y=3 \\ x=-3\Rightarrow y=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(-2;3) \\ M_2(-3;2) \end{array}\right..$$

Vậy các điểm cần tìm là $M_1(-2;3)$, $M_2(-3;2)$.

Bài tập 11: Tìm m để $d: y = 2x + m - 2$ cắt $(C): y = \frac{x-2}{x-1}$ tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho tứ giác $AMBN$ có diện tích bằng $\frac{5\sqrt{17}}{4}$, biết $M(1;-2)$, $N(3;-3)$.

Lời giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có phương trình đường thẳng $MN: y = -\frac{1}{2}x - 3$ nên $d \perp MN$ tại I. I có tọa độ là nghiệm của hệ $\begin{cases} y = 2x + m - 2 \\ y = -\frac{1}{2}x - 3 \end{cases}$ nên $I\left(\frac{1-2m}{5}; \frac{m-8}{5}\right)$.

Vì $AMBN$ là tứ giác lồi nên I thuộc đoạn thẳng MN tức là $1 < \frac{1-2m}{5} < 3$ và $-3 < \frac{m-8}{5} < -2$, nghĩa là $-7 < m < -2$ (a), đường thẳng d cắt (H) tại hai điểm A, B phân biệt khi phương trình: $2x + m - 2 = \frac{x-2}{x-1}$ có hai nghiệm phân biệt, nghĩa là: $2x^2 + (m-5)x + 4 - m = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác $1 \Leftrightarrow m < 1 - 2\sqrt{2}$ hoặc $m > 1 + 2\sqrt{2}$ và $m > 1 + 2\sqrt{2}$ không thỏa (a).

Gọi x_A, x_B là hoành độ của A, B thì chúng là hai nghiệm của phương trình (1).

Nên $x_A + x_B = \frac{5-m}{2}; x_A.x_B = \frac{4-m}{2}$, do đó:

$$(x_B - x_A)^2 = (x_A + x_B)^2 - 4x_A.x_B = \frac{(5-m)^2}{4} - 4.\frac{4-m}{2} = \frac{(m-1)^2}{4} - 2$$

$$y_A = 1 - \frac{1}{x_A - 1}; y_B = 1 - \frac{1}{x_B - 1} \Rightarrow y_B - y_A = \frac{1}{x_A - 1} - \frac{1}{x_B - 1} = \frac{x_B - x_A}{x_A.x_B - (x_A + x_B)}$$

Ta có: $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = \frac{(m-1)^2}{4} - 2 + \frac{\frac{(m-1)^2}{4} - 2}{\left(\frac{4-m}{2} - \frac{5-m}{2}\right)^2}$

$$= \frac{(m-1)^2 - 8}{4}\left[1 + \frac{4}{(4-m)^2 - 2(4-m)(5-m) + (5-m)^2}\right] \qquad (*)$$

Ta có: $\frac{5\sqrt{17}}{4} = S_{AMBN} = \frac{1}{2}MN.AB = \frac{1}{2}\sqrt{5}.AB$, tức là: $AB^2 = \frac{5.17}{4}$ $(**)$.

Từ $(*),(**)$ ta được $(m-1)^2 - 8 = 17 \Leftrightarrow m = -4$ hoặc $m = 6$.

Vậy $m = -4$ là giá trị cần tìm.

Bài tập 12*: Tìm giá trị tham số $m \in \mathbb{R}$ sao cho đồ thị $(C): y = x^3 - 3x + 2$ và đường thẳng $y = m(x+2)$ giới hạn hai hình phẳng có cùng diện tích.

Lời giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 3x + 2 = m(x+2) \Leftrightarrow x = -2$ hoặc $x = 1 \pm \sqrt{m}, m \geq 0$. Điều kiện d và (C) giới hạn 2 hình phẳng: $0 < m \neq 9$.

Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích các hình phẳng nhận được theo thứ tự từ trái sang phải.

d qua A khi $m=1$ (tức là d qua *điểm uốn*).

Khi đó, $S_1=S_2=4$.

+ Nếu $0<m<1: S_1>4>S_2$.

+ Nếu $1<m<9: S_1<4<S_2$.

+ Nếu $m>9 \Rightarrow 1-\sqrt{m}<-2; 1+\sqrt{m}>4$.

Khi đó: $S_1=\int_{1-\sqrt{m}}^{-2}\left|x^3-3x+2-m(x+2)\right|dx$; $S_2=\int_{-2}^{1+\sqrt{m}}\left|x^3-3x+2-m(x+2)\right|dx$.

Suy ra $S_2-S_1=2m\sqrt{m}>0$.

Vậy $m=1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Bài tập 13: Tìm m để $(d): y=\frac{9}{4}x-3$ cắt đồ thị (C) $y=mx^3-6x^2+9mx-3$ tại 3 điểm phân biệt $A(0;-3)$, B, C thỏa mãn điều kiện B nằm giữa A và C đồng thời $AC=3AB$.

Lời giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Số giao điểm của đồ thị đã cho với đường thẳng d là số nghiệm của phương trình:

$$mx^3-6x^2+9mx-3=\frac{9}{4}x-3 \Leftrightarrow x\left(mx^2-6x+9m-\frac{9}{4}\right)=0 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ mx^2-6x+9m-\frac{9}{4}=0 \quad (2) \end{array}\right.$$

Đường thẳng d và đồ thị đã cho cắt nhau tại 3 điểm phân biệt $A(0;-3), B, C$ khi và chỉ khi phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt $A(0;-3), B, C$, tức là (2) phải có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$$\text{Y.c.b.t} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \Delta'=9-m\left(9m-\frac{9}{4}\right)>0 \\ 9m-\frac{9}{4}\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ -m^2+\frac{m}{4}+1>0 \\ m\neq \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \frac{1-\sqrt{65}}{8}<m<\frac{1+\sqrt{65}}{8} \\ m\neq \frac{1}{4} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow m\in\left(\frac{1-\sqrt{65}}{8};\frac{1+\sqrt{65}}{8}\right)\setminus\left\{0,\frac{1}{4}\right\} \ (*)$$

Gọi $B(x_1;y_1), C(x_2;y_2)$ với $y_1=\frac{9}{4}x_1-3, y_2=\frac{9}{4}x_2-3$, trong đó x_1, x_2 là 2 nghiệm của (2).

Ta có $\overrightarrow{AB}=(x_1;y_1+3), \overrightarrow{AC}=(x_2;y_2+3)$ và $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=3x_1 \\ y_2+3=3(y_1+3) \end{cases} \Leftrightarrow x_2=3x_1$.

Ta có hệ: $\begin{cases} x_2 = 3x_1 \\ x_1 + x_2 = \dfrac{6}{m} \\ x_1x_2 = 9 - \dfrac{9}{4m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{2m} \\ x_2 = \dfrac{9}{2m} \\ x_1x_2 = 9 - \dfrac{9}{4m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{2m} \\ x_2 = \dfrac{9}{2m} \\ 4m^2 - m - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\dfrac{3}{4} \end{array}\right.$ thỏa (*)

Vậy $m = -\dfrac{3}{4}$; $m = 1$ thỏa mãn bài toán.

Bài tập 14: Tìm các giá trị $m > 0$ để đồ thị (C_m): $y = x^4 - 3(m+1)x^2 + 3m + 2$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt và tiếp tuyến tại điểm có hoành độ lớn nhất cùng với 2 trục tọa độ tạo thành tam giác có diện tích bằng 24.

Lời giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục hoành:

$x^4 - 3(m+1)x^2 + 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)\left[x^2 - (3m+2)\right] = 0 \qquad (*)$

Với $m > 0$ thì (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt và $x = \sqrt{3m+2}$ là hoành độ lớn nhất.

Giả sử $A\left(\sqrt{3m+2}; 0\right)$ là giao điểm có hoành độ lớn nhất và tiếp tuyến d tại A có phương trình: $y = 2(3m+1)\sqrt{3m+2}.x - 2(3m+1)(3m+2)$.

Gọi B là giao điểm của d với Oy, suy ra $B\left(0; -2(3m+1)(3m+2)\right)$.

Theo giả thiết, tam giác OAB vuông tại O và $S_{OAB} = 24 \Leftrightarrow OA.OB = 48$

hay $\sqrt{3m+2}\left(18m^2 + 22m + 4\right) = 48 \qquad (*)$.

Xét $f(m) = \sqrt{3m+2}\left(18m^2 + 22m + 4\right) - 48,\ m > 0$.

Ta có $f'(m) > 0$ với mọi $m > 0$, suy ra $f(m)$ đồng biến với mọi $m > 0$ và $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = 0$. Do đó phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $m = \dfrac{2}{3}$.

Vậy $m = \dfrac{2}{3}$ thỏa mãn đề bài.

Bài tập 15: Tìm m để đường thẳng $(d): y = 2x - \dfrac{1}{2}$ cắt $(C_m): y = \dfrac{2mx+5}{x+m}$ tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 - 9x_1 = 8x_2$.

Lời giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Hoành độ giao điểm của đường thẳng d và (C_m) là nghiệm của phương trình

$\dfrac{2mx+5}{x+m} = 2x - \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 4x^2 - x - m - 10 = 0 \qquad (\forall x \neq -m)$.

Đặt $g(x) = 4x^2 - x - m - 10$.

Để d cắt (C_m) tại hai điểm phân biệt $A,B \Leftrightarrow$ Phương trình $g(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác $-m$, tức là phải có: $\begin{cases}\Delta>0\\ g(-m)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}16m+161>0\\ 2m^2-5m\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>\dfrac{161}{16}\\ m\neq \pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}\end{cases}$

Áp dụng định lý Viet cho x_1,x_2, ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{4}\\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}=-\dfrac{m+10}{4}\end{cases}$

Xét điều kiện bài toán $x_1^2-9x_1=8x_2 \Leftrightarrow x_1^2-9x_1=8\left(\dfrac{1}{4}-x_1\right) \Leftrightarrow x_1^2-x_1-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=-1\\ x_1=2\end{array}\right.$

+) Với $x_1=-1 \Rightarrow x_2=\dfrac{5}{4} \Rightarrow m=-5.$

+) Với $x_1=2 \Rightarrow x_2=-\dfrac{7}{4} \Rightarrow m=4.$

Kết hợp với điều kiện $m>-\dfrac{161}{16}$ và $m\neq \pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

Vậy $m=-5$ hoặc $m=4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 16: Tìm m để $(C_m): y=x^3-2(m+1)x^2+(5m-2)x-2m+4$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho B, C có hoành độ nhỏ hơn 1.

Lời giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Cách 1: Gọi x_1,x_2 là hoành độ của $B,C \Rightarrow x_1,x_2$ cũng là nghiệm của phương trình $g(x)=0$.

Theo bài toán ta có:

$$\begin{cases}x_1<1\\ x_2<1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1-1<0\\ x_2-1<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1-1+x_2-1<0\\ (x_1-1)(x_2-1)<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1+x_2<2\\ x_1x_2-(x_1+x_2)+1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2m<2\\ m-2-2m+1>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}m<1\\ m<-1\end{cases} \Leftrightarrow m<-1$$

Vậy $m<-1$ là giá trị cần tìm.

Cách 2: Hoành độ của 3 điểm A,B,C là nghiệm của phương trình:

$$x^3-2(m+1)x^2+(5m-2)x-2m+4=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-2mx+m-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ g(x)=x^2-2mx+m-2=0\end{array}\right.$$

Vì hoành độ của B,C nhỏ hơn 1 nên giả sử hai nghiệm của $g(x)=0$ là $x_1=m-\sqrt{m^2-m+2}$, $x_2=m+\sqrt{m^2-m+2}$.

Vì $x_1<x_2$ nên $\begin{cases}x_1<1\\ x_2<1\end{cases} \Leftrightarrow x_2<1 \Leftrightarrow m+\sqrt{m^2-m+2}<1 \Leftrightarrow \sqrt{m^2-m+2}<1-m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m + 2 = 0 \geq 0 \\ 1 - m > 0 \\ m^2 - m + 2 < m^2 - 2m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall m \in \mathbb{R} \\ m < 1 \\ m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1.$$

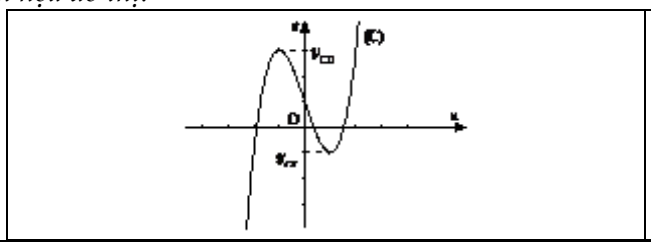
KỸ THUẬT: ***Vận dụng Cực trị để giải quyết bài toán sự tương giao của các đồ thị hàm số và trục Ox.***

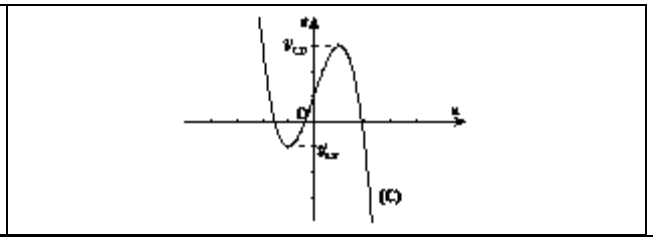
Hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(a \neq 0)$ có đồ thị (C).

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

TH 1: (C) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Hàm số có 2 cực trị} \\ y_{CĐ} \cdot y_{CT} < 0 \end{cases}$

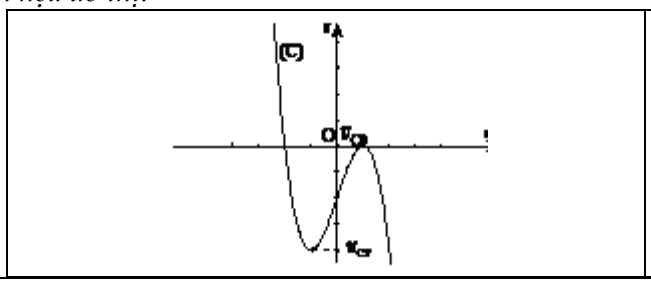
Minh họa đồ thị:

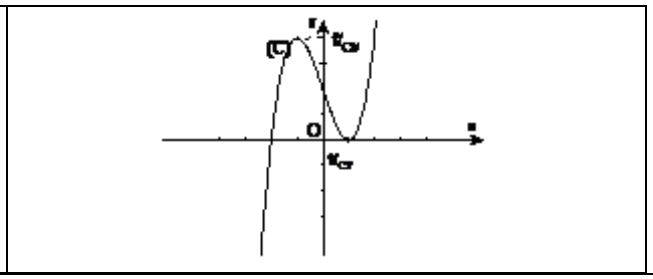




TH 2: (C) cắt Ox tại 2 điểm $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Hàm số có 2 cực trị} \\ y_{CĐ} \cdot y_{CT} = 0 \end{cases}$

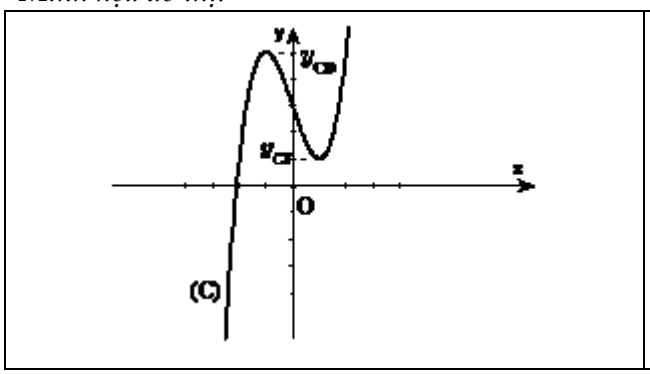
Minh họa đồ thị:

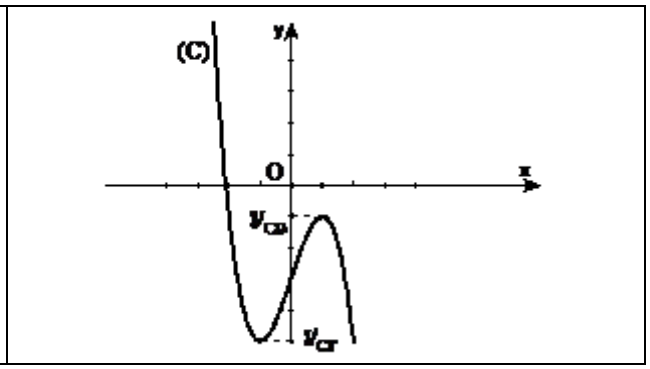


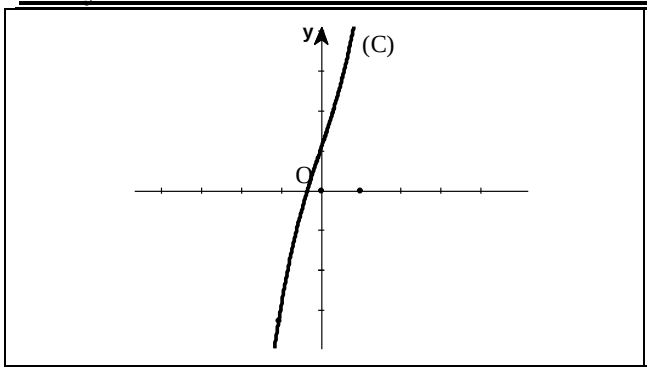


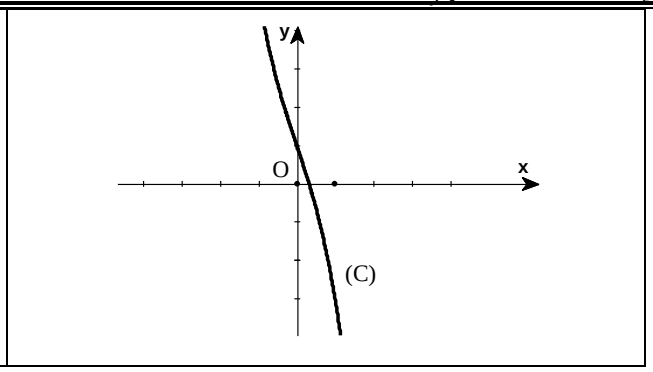
TH 3: (C) cắt Ox tại 1 điểm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Hàm số không có cực trị} \\ \begin{cases} \text{Hàm số có 2 cực trị} \\ y_{CĐ} \cdot y_{CT} > 0 \end{cases} \end{array} \right.$

Minh họa đồ thị:









Nhận xét:

+ Việc xử lí các biểu thức cực trị thì quí độc giả xem lại bài viết cực trị;

+ Với hàm số trùng phương $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$, $(a \neq 0)$ *thì hoàn toàn biện luận sơ cấp cho đơn giản;*

Tất nhiên việc giải quyết một bài toán tương giao của hai đồ thị thì có nhiều phương pháp, nhưng theo tinh thần đổi mới của chương trình SGK, cũng như mức độ đề thi Quốc gia, chúng tôi cho rằng, phương pháp này chỉ mang tính chất tham khảo thêm! Các phương pháp cơ bản và sơ cấp đã hoàn toàn giải quyết được các đề thi mức độ thi THPT Quốc gia!

Ta xét một số bài tập minh họa cho phương pháp này!

Bài tập 17: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 + mx + 2$ cắt trục hoành tại điểm duy nhất.

Lời giải:

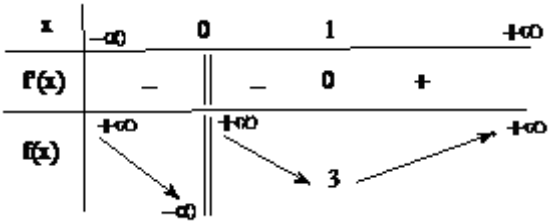
TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Cách 1: Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số đã cho với trục Ox:

$x^3 + mx + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \dfrac{2}{x} = -m$.

Xét hàm số $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x} \Rightarrow f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -m < 3 \Leftrightarrow m > -3$.

Cách 2: Để đồ thị hàm số đã cho cắt Ox tại duy nhất một điểm ta có các trường hợp sau:

TH 1: Đồ thị hàm số đã cho không có cực trị hay là hàm số luôn đồng biến (do $a = 1 > 0$) trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = 3x^2 + m \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \geq 0$.

TH 2: Đồ thị hàm số có hai cực trị cùng dấu $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\dfrac{m}{3} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-\dfrac{m}{3}}$

với $m < 0$.

Hai giá trị cực trị là: $y_1 = 2 + \dfrac{2m}{3}\sqrt{-\dfrac{m}{3}}; y_2 = 2 - \dfrac{2m}{3}\sqrt{-\dfrac{m}{3}} \Rightarrow y_1.y_2 = 4 + \dfrac{4m^3}{27} > 0 \Leftrightarrow -3 < m < 0$.

Vậy $m > -3$ là những giá trị cần tìm.

Bài tập 18: Tìm m để đồ thị (C): $y=\frac{1}{3}x^3-x-m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Lời giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Cách 1: (*Đã trình bày ở bài tập 6*)

Cách 2:

Ta có: $y'=x^2-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=-\frac{2}{3}-m\\ x=-1\Rightarrow y=\frac{2}{3}-m\end{array}\right.$.

Lúc đó, hàm số có 2 cực trị với các giá trị cực trị tương ứng là $-\frac{2}{3}-m$ và $\frac{2}{3}-m$.

Để (C) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt thì $\left(-\frac{2}{3}-m\right)\left(\frac{2}{3}-m\right)<0\Leftrightarrow m^2-\frac{4}{9}<0\Leftrightarrow m\in\left(-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Bài tập 19: Tìm m để đồ thị (C_m): $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+\frac{2}{3}$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Lời giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Cách 1: (*Đã trình bày ở bài tập 5- Dạng 3*)

Cách 2:

Ta có: $y'=x^2-2mx-1$.

Để hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$\Leftrightarrow 4m^2+4>0,\ \forall m\in\mathbb{R}$.

Lúc đó, ta viết: $y=y'\left(\frac{1}{3}x-\frac{m}{3}\right)+\left(\frac{-2-2m^2}{3}\right)x+\frac{2m}{3}+\frac{2}{3}$.

Suy ra: $\begin{cases}y_1=\left(\frac{-2-2m^2}{3}\right)x_1+\frac{2m}{3}+\frac{2}{3}\\ y_2=\left(\frac{-2-2m^2}{3}\right)x_2+\frac{2m}{3}+\frac{2}{3}\end{cases}$.

Để đồ thị (C) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt thì

$$y_1.y_2<0\Leftrightarrow\left[\left(\frac{-2-2m^2}{3}\right)x_1+\frac{2m}{3}+\frac{2}{3}\right]\left[\left(\frac{-2-2m^2}{3}\right)x_2+\frac{2m}{3}+\frac{2}{3}\right]<0$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{-2-2m^2}{3}\right)^2x_1x_2+\left(\frac{-2-2m^2}{3}\right)\left(\frac{2m}{3}+\frac{2}{3}\right)(x_1+x_2)+\left(\frac{2m}{3}+\frac{2}{3}\right)^2<0$$

$$\Leftrightarrow-\frac{\left(2+2m^2\right)^2}{9}-\frac{\left(2+2m^2\right)2m}{3}.\left(\frac{2m+2}{3}\right)+\frac{(2m+2)^2}{9}<0$$

$$\Leftrightarrow-\left(4+8m^2+4m^4\right)-\left(4m+4m^3\right)(2m+2)+\left(4m^2+8m+4\right)<0$$

$$\Leftrightarrow-12m^4-8m^3-12m^2<0\Leftrightarrow-4m^2\left(3m^2+m+3\right)<0\Leftrightarrow m\neq0$$

Do $3m^2+m+3>0,\ \forall m\in\mathbb{R}$

Vậy $m\neq0$ là yêu cầu bài toán.

CHÚ Ý: **MỘT SỐ BÀI TOÁN QUAN TRỌNG**

Bài toán 1: Xác định tham số để đồ thị hàm số $(C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

Phương pháp:

Sử dụng: Điều kiện cần và đủ đối với phương trình: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (1)

Bước 1: *Điều kiện cần*:

+ Giải sử phương trình (1) có 3 nghiệm $x_1, x_2, x_3\ (x_1 < x_2 < x_3)$. Khi đó, theo định lý Viet đối với phương trình (1): $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -b/a \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = c/a \\ x_1x_2x_3 = -d/a \end{cases}$

+ Để $x_1, x_2, x_3\ (x_1 < x_2 < x_3)$ lập thành CSC thì $x_1 + x_3 = 2x_2 \Leftrightarrow 3x_2 = -b/a \Leftrightarrow x_2 = -b/3a$.

Thay vào (1) $\Rightarrow m$

Bước 2: *Điều kiện đủ*: Với m tìm được giải phương trình (1) và kết luận.

Lưu ý: *Tư duy thuật toán còn áp dụng cho bài toán: 3 nghiệm lập thành cấp số nhân. Tất nhiên, phương pháp nêu trên chỉ mang tính gợi ý, còn trong rất nhiều TH khác thì sẽ có các cách khác tốt hơn.*

Bài tập 1: (**ĐHYHCM-98**) Xác định m để đồ thị (C): $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt với hoành độ lập thành một cấp số cộng.

Lời giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox: $x^3 - 3x^2 - 9x + m = 0$ (1)

+ Giả sử (1) có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, khi đó ta phân tích được:

$$x^3 - 3x^2 - 9x + m = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$
$$= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3 \quad (2)$$

Đồng nhất hệ số của x^2 trong phương trình (2), ta được: $x_1 + x_2 + x_3 = 3$ (3)

Mặt khác, do x_1, x_2, x_3 theo thứ tự đó lập thành một cấp số công nên ta có: $x_1 + x_3 = 2x_2$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $x_2 = 1$. Thay $x_2 = 1$ vào (1) ta được: $m = 11$.

+ Kiểm tra với $m = 11$, ta có: $x^3 - 3x^2 - 9x + 11 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - 11) = 0$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 1 + 2\sqrt{3} \vee x = 1 - 2\sqrt{3}.$$

Dễ thấy 3 nghiệm vừa tìm được lập thành một cấp số cộng.

Vậy $m = 11$ là yêu cầu bài toán.

Bài tập tương tự:

Bài tập 2: (**ĐHYHCM-96**) Tìm a để d: $y = x$ cắt đồ thị $(C): y = x^3 - 3ax^2 + 4a^3$ tại 3 điểm phân biệt A, B, C với $AB = BC$.

Bài toán 2: Xác định tham số để đồ thị hàm số $(C): y = ax^4 + bx^2 + c\ (a \neq 0)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

Phương pháp:

Lập phương trình hoành độ giao điểm: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (2)

Đặt $t = x^2 \ge 0$: (2) có dạng: $at^2 + bt + c = 0$ (3).

Để (2) có 4 nghiệm phân biệt khi chỉ khi (3) có 2 nghiệm phân biệt: $t_1,\ t_2 : 0 < t_1 < t_2$ (4)

Lúc đó (2) có 4 nghiệm: $-\sqrt{t_2},\ -\sqrt{t_1},\ \sqrt{t_1},\ \sqrt{t_2}$.

<u>Các nghiệm này lập thành CSC</u> <u>khi:</u> $\begin{cases} -\sqrt{t_2} + \sqrt{t_1} = -2\sqrt{t_1} \\ -\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} = 2\sqrt{t_1} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1$.

+ Áp dụng định lý Viet đối với phương trình (3):

$\begin{cases} t_1 + t_2 = S \\ t_1 t_2 = P \ (*) \end{cases}$ và $t_2 = 9t_1 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = S/10 \\ t_2 = 9S/10 \end{cases}$. Từ đây:(*) $\Leftrightarrow \dfrac{9S^2}{100} = P$ hay $9S^2 = 100P$ (5)

+ Kết hợp (4) và (5) nhận được điều kiện của tham số.

<u>BÀI TẬP:</u>

<u>Bài tập:</u> (**ĐHY-D-HCM-98**) Xác định m để đồ thị $(C): y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

Lời giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox: $x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1 = 0$ (1)

<u>Cách 1:</u> Đặt $t = x^2 \ge 0$. Khi đó, (1) trở thành: $t^2 - 2(m+1)t + 2m + 1 = 0$ (2)

Để (C) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 4(m+1)^2 - 4(2m+1) > 0 \\ S = 2(m+1) > 0 \\ P = 2m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m \ne 0. \ (3)$$

+ Với điều kiện (3), ta tìm được hai nghiệm của (2) là $t_1 = m + 1 - \sqrt{\Delta}; t_2 = m + 1 + \sqrt{\Delta}$

Như vậy, 4 giao điểm của (C) và Ox lần lượt là $A\left(-\sqrt{t_2};0\right)$, $B\left(-\sqrt{t_1};0\right)$, $C\left(\sqrt{t_1};0\right)$, $D\left(\sqrt{t_2};0\right)$. Để 4 điểm này có hoành độ lập thành 1 cấp số cộng thì chúng phải chắn trên Ox thành 3 đoạn thẳng bằng nhau, tức là:

$$AB = BC = CD \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = 2\sqrt{t_2} \\ -\sqrt{t_2} + \sqrt{t_1} = -2\sqrt{t_1} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1. \qquad (4)$$

Mặt khác, áp dụng định lí Viet với phương trình (2) ta có: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 2(m+1) & (5) \\ t_1 + t_2 = 2m + 1 & (6) \end{cases}$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra: $t_1 = \dfrac{2(m+1)}{10} = \dfrac{m+1}{5} \Rightarrow t_2 = \dfrac{9(m+1)}{5}$ thay vào (6) ta được:

$\dfrac{m+1}{5} \cdot \dfrac{9(m+1)}{5} = 2m + 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = -\dfrac{4}{9} \end{array}\right.$. Vậy $m = 4;\ m = -\dfrac{4}{9}$ là yêu cầu bài toán.

<u>Cách 2:</u> Ta có (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2m + 1 \end{array}\right.$.

Để (C) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1>0 \\ 2m+1\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<m\neq 0$.

Lúc đó, ta tìm được hoành độ của 4 giao điểm lần lượt là $-\sqrt{2m+1},\ \sqrt{2m+1},\ -1,\ 1$.

TH 1: $m>0$, thứ tự 4 hoành độ giao điểm là $-\sqrt{2m+1},\ -1,\ 1,\ \sqrt{2m+1}$.

Điều kiện để 4 hoành độ giao điểm này tạo thành 1 cấp số cộng là:

$$\begin{cases} \left(-\sqrt{2m+1}\right)+1=2.(-1) \\ (-1)+\sqrt{2m+1}=2.1 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{2m+1}=3 \Leftrightarrow m=4.$$

TH 2: $-\frac{1}{2}<m<0$, thứ tự 4 hoành độ giao điểm là $-1,\ -\sqrt{2m+1},\ \sqrt{2m+1},\ 1$.

Điều kiện để 4 hoành độ giao điểm này tạo thành 1 cấp số cộng là:

$$\begin{cases} \left(-\sqrt{2m+1}\right)+1=2.\left(\sqrt{2m+1}\right) \\ (-1)+\sqrt{2m+1}=2.\left(-\sqrt{2m+1}\right) \end{cases} \Leftrightarrow 3\sqrt{2m+1}=31 \Leftrightarrow m=-\frac{4}{9}.$$

Vậy $m=4;\ m=-\frac{4}{9}$ là yêu cầu bài toán.

III- BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1) Tìm tọa độ giao điểm của các đồ thị sau:

a) $\begin{cases} y=-\frac{x^2}{2}+3x-\frac{3}{2} \\ y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} y=\frac{2x-4}{x-1} \\ y=-x^2+2x+4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y=4x^3-3x \\ y=-x+2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y=x^4-x^2+1 \\ y=4x^2-5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} y=x^3-5x^2+10x-5 \\ y=x^2-x+1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} y=\frac{x^2}{x-1} \\ y=-3x+1 \end{cases}$

2) Biện luận số giao điểm của các đồ thị sau:

a) $\begin{cases} y=x^3-3x-2 \\ y=m(x-2) \end{cases}$ b) $\begin{cases} y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x \\ y=m\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{13}{12} \end{cases}$ c) $\begin{cases} y=-\frac{x^3}{3}+3x \\ y=m(x-3) \end{cases}$

d) $\begin{cases} y=\frac{2x+1}{x+2} \\ y=2x+m \end{cases}$ e) $\begin{cases} y=\frac{x+1}{x-1} \\ y=-2x+m \end{cases}$ f) $\begin{cases} y=\frac{x^2-6x+3}{x+2} \\ y=x-m \end{cases}$

g) $\begin{cases} y=-x+3+\frac{1}{1-x} \\ y=mx+3 \end{cases}$ h) $\begin{cases} y=\frac{x^2-3x+3}{x-2} \\ y=mx-4m-1 \end{cases}$ i) $\begin{cases} y=2x^3-x+1 \\ y=m(x^2-1) \end{cases}$

3) (**Đề 34**) Xác định tất cả các giá trị của k để đồ thị hàm số $y=\frac{x^2+4x+3}{x+2}$ cắt đường thẳng d: $y=kx+1$ tại 2 điểm phân biệt.

4) (**ĐHKT-98**) Cho hàm số $y=x^3+3x^2+1$ (C). Đường thẳng đi qua $A(-3;1)$ và có hệ số góc bằng k. Xác định k để đường thẳng đó cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt.

5) (**ĐHSPII-97**) Tìm m để hàm số $y=(1-m)x^4-mx^2+2m-1$ cắt Ox tại 4 điểm phân biệt.

6) (**Đề 148**) Tìm m để đường thẳng d: $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+mx-1}{x-1}$ tại 2 điểm *A, B* với $OA\perp OB$.

7) (**ĐH A-03**) Tìm m để đồ thị hàm số (C): $y=\dfrac{mx^2+x+m}{x-1}$ cắt Ox tại 2 điểm phân biệt và 2 điểm đó có hoành độ dương.

8) (**ĐH D-03**) Tìm m để đường thẳng d_m : $y=mx+2-2m$ cắt (C): $y=\dfrac{x^2-x+4}{x-2}$ tại 2 điểm phân biệt.

9)(**Dự bị 02**) Tìm m để đồ thị hàm số $(C): y=x^4-mx^2+m-1$ cắt Ox tại 4 điểm phân biệt.

10) (**Đề dự bị 2003**) Tìm m để đồ thị hàm số (C): $y=(x-1)(x^2+mx+m)$ cắt Ox tại 3 điểm phân biệt.

11) (**ĐH A-2004**) Tìm m để đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số (C): $y=\dfrac{-x^2+3x-3}{2(x-1)}$ tại 2 điểm A, B sao cho $AB=1$.

12) (**ĐH A-06**) Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(3;20)$ và có hệ số góc là m. Tìm m để d cắt đồ thị $(C): y=x^3-3x+2$ tại 3 điểm phân biệt.

13) (**ĐHBK A-01**) Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M\left(2;\dfrac{2}{5}\right)$ sao cho d cắt đồ thị $(C): y=\dfrac{x^2+3}{x+1}$ tại hai điểm A, B phân biệt và M là trung điểm của AB.

14) Tìm các giá trị của m sao cho trên $(C): y=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$ có hai điểm khác nhau $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ thoả mãn điều kiện: $\begin{cases} x_A+y_A=m \\ x_B+y_B=m \end{cases}$.

15) **CMR**: Đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}x-m$ luôn cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+2}$ tại hai điểm phân biệt *A, B*. Tìm m sao cho độ dài đoạn *AB* là nhỏ nhất.

16) (**ĐHCĐ- 98**) Tìm các giá trị của m để đường thẳng d_m : $y=mx+2-m$ cắt đồ thị hàm số $(C): y=\dfrac{x^2+4x+1}{x+2}$ tại hai điểm phân biệt cùng thuộc một nhánh của đồ thị (C).

17) Cho hàm số $y=x^3-2mx^2+(2m^2-1)x+m(1-m^2)$ (C_m). Tìm m để đường cong (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương.

18)* Cho hàm số $y=x^3-3x^2+3(1-m)x+1+3m$ (C_m). Tìm m để đường cong (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

19) Cho hàm số $y=x^3+3mx^2-3x-3m+2$ (C_m). Tìm m để đường cong (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 sao cho: $x_1^2+x_2^2+x_3^2=15$.

20) CMR: Với mọi m đường thẳng Δ: $2x-y+m=0$ luôn cắt đồ thị $(C): y=\dfrac{x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt thuộc hai nhánh khác nhau của (C).

21) CMR: Với mọi m đường thẳng Δ: $y=2x+m=0$ luôn cắt $(C): y=-x+3+\dfrac{3}{x-1}$ tại hai điểm A, B phân biệt có hoành độ x_1, x_2. Lúc đó, xác định m sao cho: $(x_1-x_2)^2$ min.

22) Tìm m để đường thẳng d_m : $y = m(x-5)+10$ cắt $(C): y = \dfrac{x^2-2x+9}{x-2}$ tại 2 điểm A, B phân biệt và nhận $M(5;10)$ làm trung điểm.

23) (**ĐH A-2010**) Tìm m để (C): $y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 sao cho: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$.

24) (**ĐH B- 2010**) Tìm m để đường thẳng $y = -2x + m$ cắt $(C): y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ tại 2 điểm A, B phân biệt sao cho tam giác OAB có diện tích bằng $\sqrt{3}$.

25) (**ĐH A-2011**) Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng $y = x + m$ luôn cắt đồ thị hàm số $(C): y = \dfrac{-x+1}{2x-1}$ tại hai điểm phân biệt A và B. Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến của (C) tại A, B. Tìm m để $k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất.

26) (**ĐH D-2011**) Tìm k để đường thẳng $y = kx + 2k + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ tại hai điểm A, B sao cho khoảng cách từ A, B đến trục hoành bằng nhau.

27) Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ (1) có đồ thị (C).Chứng minh rằng đường thẳng $(d): y = 2x + m$ luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B thuộc hai nhánh khác nhau. Xác định m để đoạn AB có độ dài ngắn nhất.

HỆ THỐNG VÀ KHÁI QUÁT:
SỰ TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ

HÀM BẬC BA: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ (a \neq 0)$

1) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 6x$, (C) và đường thẳng d đi qua gốc tọa độ O và có hệ số góc k. Tìm k để d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt O, A, B sao cho $AB = \sqrt{17}$.
2) Tìm m để đường thẳng d : $y = x + 4$ cắt (C): $y = x^3 + 2mx^2 + (m+4)x + 4$ tại ba điểm $A(0;4)$, B, C sao cho tam giác IBC có diện tích bằng $8\sqrt{2}$ với $I(3;1)$.
3) Tìm m để đường thẳng d : $y = -x + 2$ cắt (C): $y = x^3 + 2mx^2 + 3(m-1)x + 2$ tại ba điểm $A(0;2)$, B, C sao cho tam giác IBC có diện tích bằng $2\sqrt{6}$ với $I(1;3)$.
4) Tìm m để (C): $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3mx - m + 1$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biết trong đó có ít nhất một điểm có hoành độ âm.
5) Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 6$, (C). Tìm m để (d): $y = mx - 2m - 4$ cắt (C) tại 3 điểm phân biệt.
6) Cho hàm số $y = -x^3 + mx^2 - m$ (C_m). Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.
7) Cho hàm số: $y = x^3 + (m-1)x^2 + x - m - 1$ (C_m). Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương.
8) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2-1)x - (m^2-1)$, (C_m). Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương.
9) Cho hàm số $y = x^3 - x^2 + 18mx - 2m$ (C_m). Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương.
10) Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 3(m^2-1)x - m^2 + 1$ (C_m). Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ âm.

11) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$, (C_m). Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt trong đó có đúng hai điểm có hoành độ âm.
12) Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx - 2$ (C_m). Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại duy nhất 1 điểm.
13) Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 2(m^2 + 4m + 1)x - 4m(m+1)$ (C_m). Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt trong đó có hoành độ lớn hơn 1.
14) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$, (C_m). Xác định m để (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm có hoành độ lập thành cấp số cộng.
15) Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (3m-1)x + 6m - 6$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ $x_1, x_2, x_3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2x_3 = 20$.
16) Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + \frac{2}{3}$. Tìm m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $x_1, x_2, x_3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 15$.
17) Tìm m để d: $y = (1-m)x + m - 5$ cắt (C): $y = x^3 - 2x^2 - (3m-1)x + m + 3$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x_1, x_2, x_3 : x_1 < x_2 < 1 < x_3$.
18) Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 + (2m+1)x - m - 2$. Chứng minh rằng đồ thị hàm số luôn đi qua điểm cố định A trên trục hoành. Tìm m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt A, B, C thỏa mãn: $\left(\frac{OA}{OB}\right)^2 + \left(\frac{OA}{OC}\right)^2 = \frac{19}{48}$.
19) Cho (C): $y = x(x+3)^2 + 4$ và d là đường thẳng đi qua $A(-1;0)$ và có hệ số góc bằng k. Tìm k để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt. Trong trường hợp này, tìm tập hợp trung điểm M của đoạn thẳng nối hai giao điểm lưu động khi k thay đổi.
20) Cho (C): $y = x^3 - 3x^2 + 4$ và đường thẳng d đi qua $A(3;4)$ và có hệ số góc m. Tìm m để đường thẳng d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt A, M, N sao cho hai tiếp tuyến của (C) tại M và N vuông góc nhau.
21) Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + 1$. Tìm m để đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hàm số tại ba điểm phân biệt $I(0;1)$, A và B. Với giá trị nào của m, các tiếp tuyến của đồ thị hàm số các điểm A, B vuông góc nhau.
22) Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 - x - m$. Tìm m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt sao hoành độ của chúng lập thành cấp số cộng.

HÀM TRÙNG PHƯƠNG: $y = ax^4 + bx^2 + c$, $(a \neq 0)$

1) Cho hàm số $y = x^4 - mx^2 + m - 1$. Tìm m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.
2) Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^2 - 1$. Tìm m để đồ thị cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 2.
3) Cho hàm số $y = x^4 - (3m+2)x^2 + 3m$. Tìm m để đường thẳng $y = -1$ cắt đồ thị hàm số tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2.
4) Cho hàm số $y = mx^4 - (m-3)x^2 + 3m$. Tìm m để đồ thị hàm số cắt Ox tại 4 điểm phân biệt với một điểm có hoành độ nhỏ hơn – 2 và 3 điểm kia có hoành độ lớn hơn – 1.

5) Cho hàm số $y=-x^4+2(m+2)x^2-2m-3$. Tìm m để đồ thị hàm số cắt Ox tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.
6) Tìm m để (C): $y=x^4-(3m+2)x^2+3m$ cắt đường thẳng $y=-1$ tại 4 điểm phân biệt có hoành độ $x_1, x_2, x_3, x_4 : x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_1x_2x_3x_4=4$.
7) Tìm điều kiện đối với a và b để (C): $y=x^4-ax^2$ cắt đường thẳng $y=b$ tại 4 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 ($x_1<x_2<x_3<x_4$). Trong trường hợp này, tính tổng: $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$.
8) Cho hàm số $y=\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2}$, (C). Tìm m để tiếp tuyến của (C) tại điểm M có hoành độ $x_0=m$ còn cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt A, B khác M.
9) Cho hàm số $y=3x^4-2(m+1)x^2+3m-3$, (C). Tìm m sao cho đồ thị (C):
   a) Không cắt trục hoành.
   b) Cắt trục hoành tại đúng hai điểm A, B sao cho $AB=2$.

HÀM NHẤT BIẾN: $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, $(ad-bc\neq 0)$

1) Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x+2}$, (C) và đường thẳng d: $y=-x+m$. Tìm m để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt AB sao cho AB ngắn nhất.
2) Cho hàm số $y=\frac{2x+4}{x+1}$, (C). Tìm m để đường thẳng d: $y=-2x+m$ cắt (C) tại hai điểm A, B. Khi đó hãy tìm tập hợp trung điểm I của đoạn thẳng AB.
3) Cho hàm số $y=\frac{2x+m}{x-1}$, (C) và đường thẳng d: $y=mx+2$.
   a) Tìm m để (C) và d cắt nhau tại hai điểm A, B phân biệt có khoảng cách đến trục hoành bằng nhau.
   b) Tính diện tích hình chữ nhật nhận A, B (ở câu a) là các đỉnh đối diện và các cạnh song song với hai trục tọa độ. Tính diện tích hình chữ nhật này. Xác định m để diện tích hình chữ nhật bằng 10.
4) Tìm m để đường thẳng $\Delta: y=\frac{1}{2}x+m$ cắt đồ thị (C): $y=\frac{2x}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trung điểm của đoạn AB nằm trên đường thẳng d: $2x+y-4=0$.
5) Cho hàm số $y=\frac{3x+2}{x+2}$, (C).
   a) Tìm a, b để đường thẳng $\Delta: y=ax+2b-4$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho M, N đối xứng nhau qua O.
   b) Đường thẳng $y=x$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm A, B. Tìm m để đường thẳng $y=x+m$ cắt (C) tại hai điểm C, D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.
6) Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}$, (C). Xác định m để đường thẳng $y=2x+m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tiếp tuyến của (C) tại A và B song song nhau.
7) Cho hàm số $y=\frac{2x}{x+1}$, (C). Tìm $M\in(C)$, biết rằng tiếp tuyến với (C) tại M cắt Ox, Oy lần lượt tại A và B tạo thành tam giác OAB có diện tích bằng $\frac{1}{4}$.

8) Cho hàm số $y=\frac{x+2}{2x-2}$, (C). Xác định m để đường thẳng $y=x+m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt *A, B* sao cho $OA^2+OB^2=\frac{37}{2}$ (*O* là gốc tọa độ).

9) Cho hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$, (C). Xác định a,b để đường thẳng $y=ax+b$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt *A, B* đối xứng nhau đường thẳng $\Delta: x-2y+3=0$.

IV- TÀI LIỆU THAM KHẢO

1) **Tuyển tập đề thi ĐH - CĐ toàn quốc**	*Bộ giáo dục và đào tạo*
2) **Phương pháp hàm số**	*Lê Hồng Đức*
3) **Tuyển tập đề thi thử ĐH trên toàn quốc**	
4) **Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ**	*NXB Giáo dục Việt Nam*
5) Các bài viết chuyên đề từ các website Toán học	

P/S: *Các bài tập trong tài liệu chưa nhận được sự cho phép của quí thầy cô và các cơ quan liên quan, nhưng tài liệu biên soạn chỉ với mục đích chia sẽ cho đồng nghiệp và tặng cho các em học sinh có nguồn tư liệu quí để phục vụ khả năng tự học nên chúng tôi xin phép các tác giả, xin cảm ơn các tác giả!*

Trong quá trình biên soạn không thể tránh khỏi sai sót, kính mong quí thầy cô và các em học sinh đóng góp để các bản update tiếp theo được hoàn thiện hơn! Xin chân thành cám ơn!

Page: CLB GIÁO VIÊN TRẺ TP HUẾ

Chuyên đề: **KHẢO SÁT HÀM SỐ**

Chủ đề 5: **SỰ TƯƠNG GIAO**

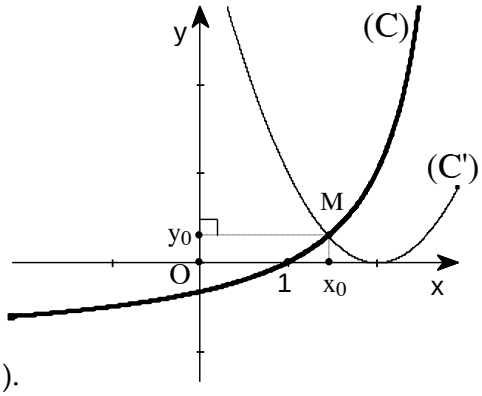
Môn: TOÁN 12 _GIẢI TÍCH

I- LÝ THUYẾT

Giả sử (C) và (C′) là đồ thị của hai hàm số:

$$y = f(x) \text{ và } y = g(x).$$

Hoành độ giao điểm của (C) và (C′), nếu có, là nghiệm của phương trình $\boxed{f(x) = g(x)}$ (1)



Lưu ý: Phương trình $f(x) = g(x)$ là **phương trình hoành độ giao điểm** của (C) và (C′).

Đảo lại, nếu x_0 là nghiệm của (1), tức là: $f(x_0) = g(x_0)$ thì điểm $M(x_0; f(x_0))$ hay $M(x_0; g(x_0))$ là điểm chung của (C) và (C′).

Kết quả:

- Nếu (1) vô nghiệm thì (C) và (C′) không có điểm chung.
- Nếu (1) có n nghiệm thì (C) cắt (C′) tại n điểm phân biệt (n không là nghiệm bội).

Dạng toán: Tìm giao điểm và tính chất giao điểm của hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$

Phương pháp:

Bước 1: Thiết lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (C′): $f(x) = g(x)$ (1)

Bước 2: Biện luận *số nghiệm* và *tính chất nghiệm* của (1).

Nhận xét: Rõ ràng hoành độ giao điểm của (C) và (C′) là nghiệm của (1) nên số giao điểm và tính chất giao điểm cũng là *số nghiệm* và *tính chất nghiệm* của (1). Điều này, đưa yêu cầu từ tính chất đồ thị sang việc *biện luận phương trình sơ cấp* mà chúng ta đã biết.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

DẠNG 1: TÌM GIAO ĐIỂM – SỐ GIAO ĐIỂM – TÍNH CHẤT GIAO ĐIỂM

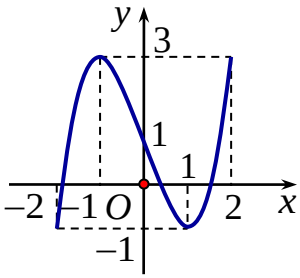
Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	-2	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(x) - 2 = 0$ là

A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Số nghiệm của phương trình $3f(x)-4=0$ trên đoạn $[-2;2]$ là

A. 3. B. 4. C. 2. D. 1.

Câu 3: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^2.|x^2-4|$ với đường thẳng $y=3$ là

A. 8. B. 2. C. 4. D. 6.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $2f(x)+3=0$ là

A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 5: Biết rằng đường thẳng $y=-2x+2$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+x+2$ tại một điểm duy nhất, ký hiệu $(x_0;y_0)$ là tọa độ điểm đó. Tìm y_0.

A. $y_0=4$. B. $y_0=0$. C. $y_0=2$. D. y_0-1.

Câu 6: Đồ thị hàm số $y=x^3-3x-2$ cắt trục tung tại điểm có tọa độ là

A. $(-1;0)$. B. $(0;-2)$. C. $(0;2)$. D. $(2;0)$.

Câu 7: Biết đường thẳng $y=x-2$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A,B có hoành độ lần lượt x_A,x_B. Khi đó giá trị của x_A+x_B bằng

A. 5. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 8: Đồ thị của hàm số nào sau đây cắt trục tung tại điểm có tung độ âm?

A. $y=\dfrac{-2x+3}{x+1}$. B. $y=\dfrac{2x-3}{3x-1}$. C. $y=\dfrac{4x+1}{x+2}$. D. $y=\dfrac{3x+4}{x-1}$.

Câu 9: Biết rằng đường thẳng $y=4x+5$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2x+1$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0;y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0.

A. $y_0=10$. B. $y_0=13$. C. $y_0=11$. D. $y_0=12$.

Câu 10: Đồ thị hàm số $y=2x^3-x^2+x+2$ cắt parabol $y=-6x^2-4x-4$ tại một điểm duy nhất. Kí hiệu $(x_0;y_0)$ là tọa độ điểm đó. Tính giá trị của biểu thức x_0+y_0.

A. 1. B. -1. C. -22. D. 4.

Câu 11: Đường thẳng Δ có phương trình $y=2x+1$ cắt đồ thị của hàm số $y=x^3-x+3$ tại hai điểm A và B với tọa độ được kí hiệu lần lượt là $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$ trong đó $x_B<x_A$. Tính x_B+y_B.

A. $x_B+y_B=-5$. B. $x_B+y_B=-2$. C. $x_B+y_B=4$. D. $x_B+y_B=7$.

Câu 12: Tính tổng hoành độ của các giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x+6}{x+2}$ và đường thẳng $y=-x$.

A. -7. B. -5. C. 5. D. 7.

Câu 13: Cho hàm số $y=x^3-3x$ có đồ thị hàm số là (C). Tìm số giao điểm của (C) và trục hoành.

A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

Câu 14: Cho hàm số $y=(x-2)(x^2+1)$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. (C) cắt trục hoành tại hai điểm. B. (C) cắt trục hoành tại một điểm.

C. (C) không cắt trục hoành. D. (C) cắt trục hoành tại ba điểm.

Câu 15: Đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$ và đồ thị của hàm số $y = -x^2 + 4$ có tất cả bao nhiêu điểm chung?

A. 0. B. 4. C. 1. D. 2.

Câu 16: Tìm số giao điểm n của đồ thị hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 3$ và đường thẳng $y = 10$.

A. $n = 0$. B. $n = 4$. C. $n = 2$. D. $n = 3$.

Câu 17: Tọa độ tất cả các giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2 - 1$ và đường thẳng $y = -1$ là

A. $(0;-1),(-1;-1)$. B. $(1;-1);(-1;-1)$.

C. $(0;-1),(1;1)$. D. $(0;-1),(1;-1),(-1;-1)$.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	
y	1 ↘		$-\sqrt{2}$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	-1

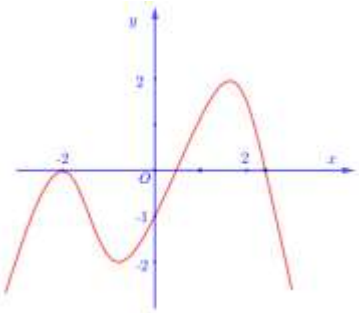
Số nghiệm của phương trình $f(x) = -1$ là

A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.

Câu 19: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Tìm số nghiệm của phương trình $f(f(x)) = 0$.

A. 5. B. 9. C. 4. D. 7.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp nghiệm của phương trình $f(f(x)) + 1 = 0$ có bao nhiêu phần tử?



A. 4. B. 7. C. 6. D. 9.

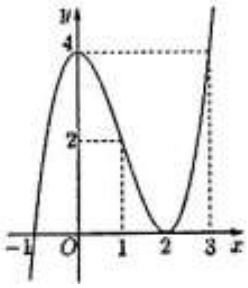
Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;-2);(-2;+\infty)$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	2	↗	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $(f(x))^2 - 2f(x) - 3 = 0$ là

A. 2. B. 1. C. 0. D. 4.

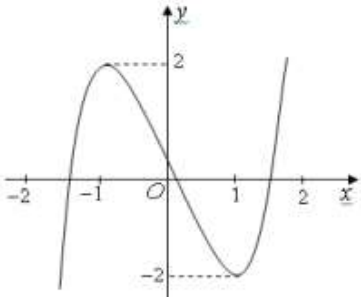
Câu 22: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tập nghiệm của phương trình $f(x)\left[f(x)-4\right]=0$ là

A. $\{-1;0;1;2;3\}$. B. $\{-1;2\}$. C. $\{0;3\}$. D. $\{-1;0;2;3\}$.

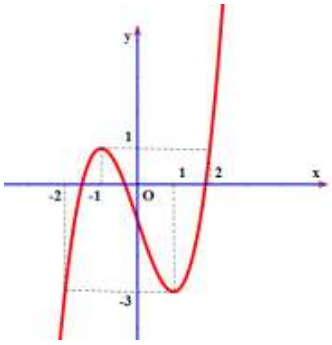
Câu 23: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ (a \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 3. B. 7. C. 9. D. 5.

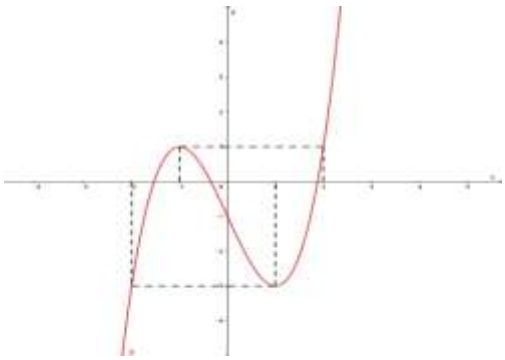
Câu 24: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Phương trình $f\left(3-2f\left(x\right)\right)=1$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 6. B. 5. C. 7. D. 4.

Câu 25: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình bên dưới:



Phương trình $f\left(f\left(x\right)-1\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 6. B. 5. C. 7. D. 4.

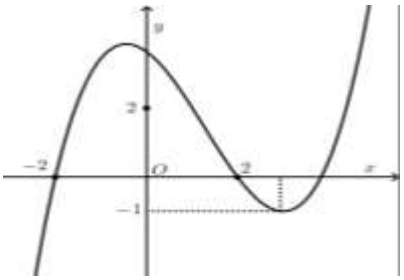
Câu 26: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	1	↘	-1	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $\left|f\left(x^2-2x\right)\right|=2$ là

A. 4 . B. 2 . C. 3 . D. 8 .

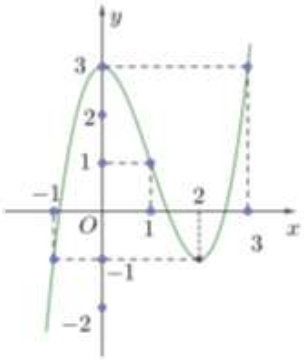
Câu 27: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\frac{1}{2}$ là

A. 6 . B. 10 . C. 12 . D. 3 .

Câu 28: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^4-2x^2\right)\right|=2$ là

A. 8 . B. 9 . C. 7 . D. 10 .

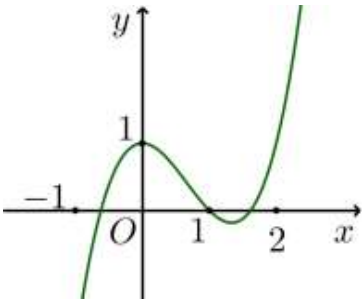
Câu 29: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-1	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f\left(3x^4-6x^2+1\right)=1$ là

A. 4 . B. 5 . C. 6 . D. 3 .

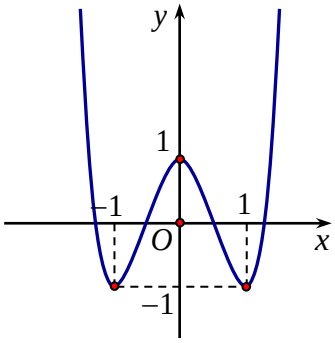
Câu 30: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Khi đó phương trình $4f(3x^4)-3=0$ có bao nhiêu nghiệm dương?

A. 2. B. 4. C. 5. D. 1.

Câu 31: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Số nghiệm của phương trình $2f(\sin x)-1=0$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ là

A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

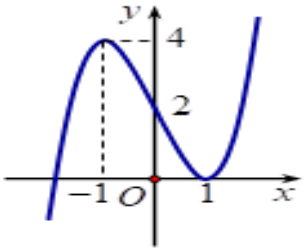
Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$			|	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2 |	↗	3	↘	1	↗	3	↘	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{7\pi}{3}\right]$ của phương trình $2.f(\cos x)-5=0$ là

A. 8. B. 7. C. 5. D. 6.

Câu 33: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thuộc đoạn $[0;5\pi]$ của phương trình $f(\cos x)=1$

A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 34: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	0	↘	-2	↗	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[0;5\pi]$ của phương trình $|f(\sin x)|=1$ là

A. 6. B. 4. C. 10. D. 8.

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	3	↘	1	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(\sin x+1)=2$ trên $[-\pi;2\pi]$ là

A. 6. B. 7. C. 5. D. 4.

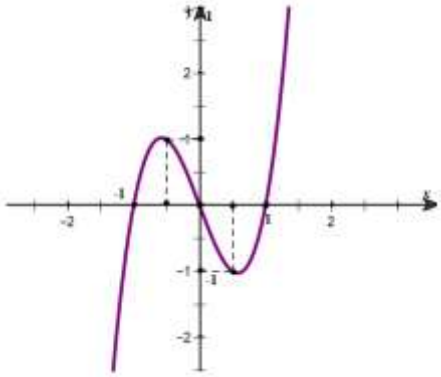
Câu 36: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	1	↘	-2	↗	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(\cot x+1)=1$ là

A. 7. B. 6. C. 8. D. 5.

Câu 37: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Số nghiệm thuộc đoạn $[0;3\pi]$ của phương trình $2|f(\cos x)|-1=0$ là

A. 12. B. 6. C. 10. D. 8.

Câu 38: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Số nghiệm thuộc khoảng $(-\pi;\pi)$ của phương trình $f^2(\cos x)-f(\cos x)=2$ là

A. 5. B. 6. C. 7. D. 9.

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	-4	↗	2	↘	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;\pi]$ của phương trình $f(2\cos^2 x-3)=3$ là

A. 8. B. 2. C. 6. D. 4.

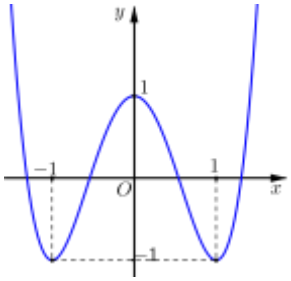
Câu 40: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-1	↗	1	↘	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[\frac{5\pi}{6};3\pi\right]$ của phương trình $4f(\cos 2x)-1=0$ là

A. 5. B. 9. C. 4. D. 10.

Câu 41: Cho hàm số trùng phương $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Số nghiệm thuộc $[0;2\pi)$ của phương trình $|f(\cos 2x)|=1$ bằng

A. 4. B. 6. C. 3. D. 8.

Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	1	↘	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[0;\pi]$ của phương trình $f(f(\cos 2x))=0$ là

A. 4. B. 2. C. 3. D. 8.

Câu 43: Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c,(a;b;c\in\mathbb{R},a\neq 0)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $a[f(x)]^4+b[f(x)]^2+c=0$ là

A. 11. B. 10. C. 9. D. 12.

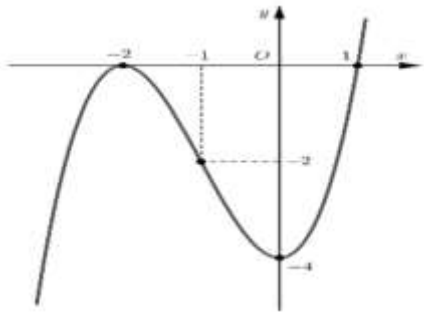
Câu 44: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	-4	↗	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $5f(\cos^2 x-\cos x)=1$ là

A. 11. B. 10. C. 9. D. 12.

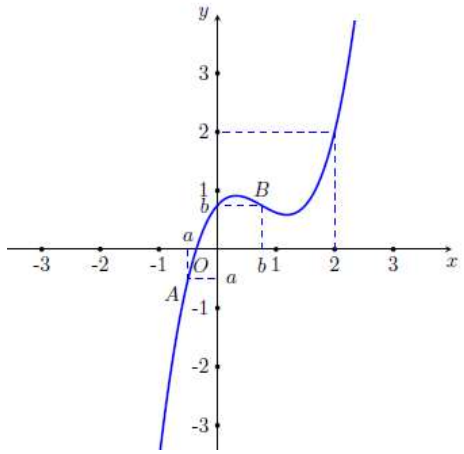
Câu 45: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau:



Số nghiệm của phương trình $f(\sin x+\cos x)+2=0$ trên đoạn $[0;2\pi]$ là

A. 5. B. 4. C. 3. D. 2.

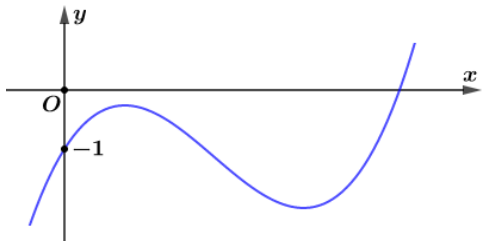
Câu 46: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ:



Số nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2};3\pi\right)$ của phương trình $f\left(\cos x+1\right)=\cos x+1$ là

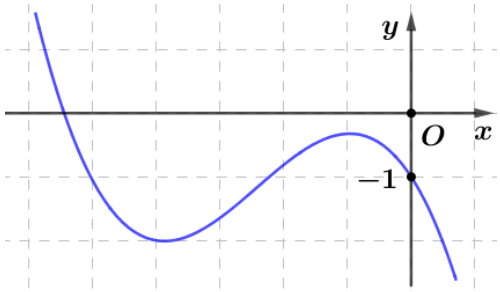
A. 2. B. 3. C. 5. D. 4.

Câu 47: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^3f\left(x\right)\right)+1=0$ là



A. 8. B. 5. C. 6. D. 4.

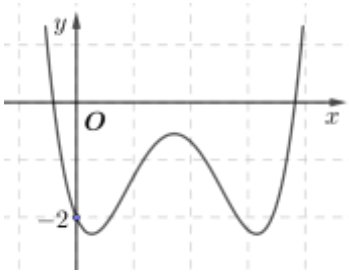
Câu 48: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^3f\left(x\right)\right)+1=0$ là

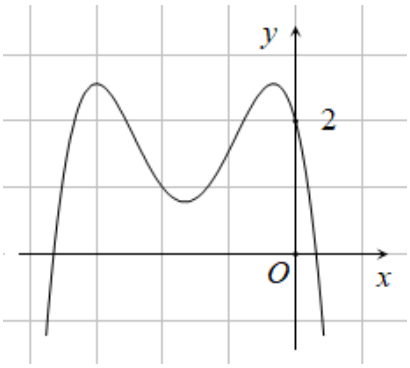
A. 6. B. 4. C. 5. D. 8.

Câu 49: Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^2f\left(x\right)\right)=2$ là



A. 8. B. 12. C. 6. D. 9.

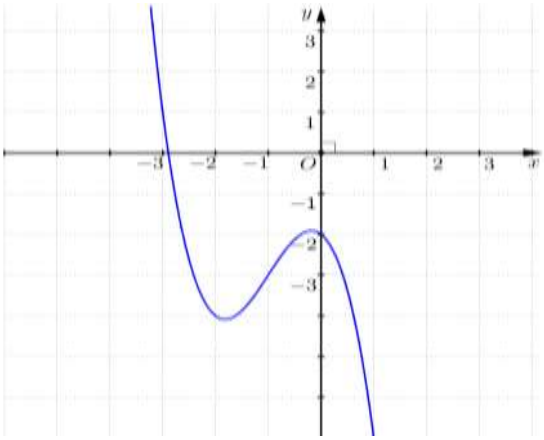
Câu 50: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x^2 f(x)\right) - 2 = 0$ là

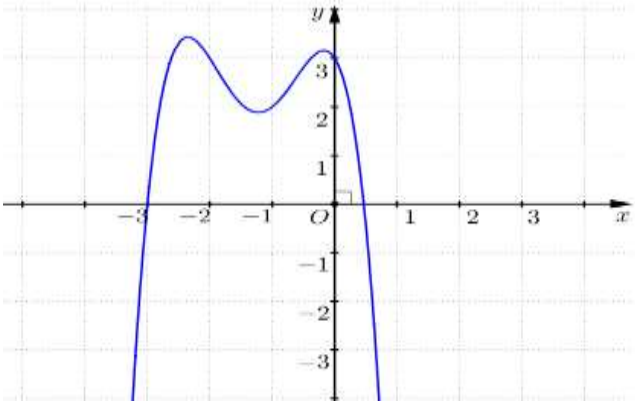
A. 6. B. 12. C. 8. D. 9.

Câu 51: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^5 f(x)\right) + 2 = 0$ là



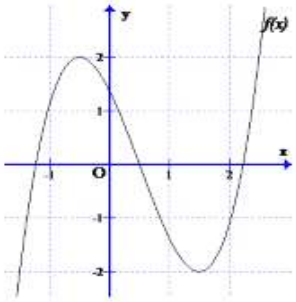
A. 8. B. 5. C. 6. D. 4.

Câu 52: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left((x+2)^2 f(x)\right) - 3 = 0$ là



A. 8. B. 6. C. 9. D. 12.

Câu 53: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(\left|f\left(x\right)\right|\right)\right|-\left|f\left(x\right)\right|=0$ là

A. 20. B. 24. C. 10. D. 4.

DẠNG 2: **BÀI TOÁN THAM SỐ**

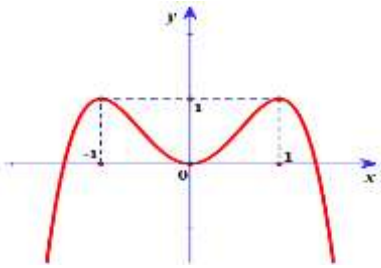
Câu 54: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$ ↘		-1 || $-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$

Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $f\left(x\right)=m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

A. $\left[-1;2\right]$. B. $\left(-1;2\right)$. C. $\left(-1;2\right]$. D. $\left(-\infty;2\right]$.

Câu 55: Cho hàm số $y=-x^4+2x^2$ có đồ thị như hình bên dưới:



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $-x^4+2x^2=m$ có bốn nghiệm thực phân biệt

A. $m>0$. B. $0\le m\le 1$. C. $0<m<1$. D. $m<1$.

Câu 56: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$ ↗		4	↘	-2	↗	$+\infty$

Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm phân biệt là

A. $(4;+\infty)$. B. $(-\infty;-2)$. C. $\left[-2;4\right]$. D. $(-2;4)$.

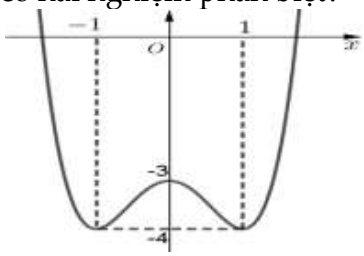
Câu 57: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3+3x^2-2=m$ có ba nghiệm phân biệt.

A. $m\in(2;+\infty]$. B. $m\in(-\infty;-2]$. C. $m\in(-2;2)$. D. $m\in[-2;2]$.

Câu 58: Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+m^2-1$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

A. $m>1$. B. $-1\le m\le 1$. C. $m\le -1$. D. $\left[\begin{array}{l} m\le -1 \\ m\ge 1\end{array}\right.$.

Câu 59: Cho hàm số $y=x^4-2x^2-3$ có đồ thị hàm số như hình bên dưới. Với giá trị nào của tham số m phương trình $x^4-2x^2-3=2m-4$ có hai nghiệm phân biệt?



A. $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m>\frac{1}{2}\end{array}\right.$. B. $0<m<\frac{1}{2}$. C. $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m=\frac{1}{2}\end{array}\right.$. D. $m\le\frac{1}{2}$.

Câu 60: Hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ $(a,\ b,\ c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	2	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $|f(x)|=3m$ có đúng 8 nghiệm phân biệt?

A. Vô số. B. 1. C. 4. D. 2.

Câu 61: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-1 ‖ $-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$

Tất cả giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị của hàm số $y=f(x)+m$ cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt là

A. $(-2;1]$. B. $(-1;2)$. C. $[-1;2)$. D. $(-2;1)$.

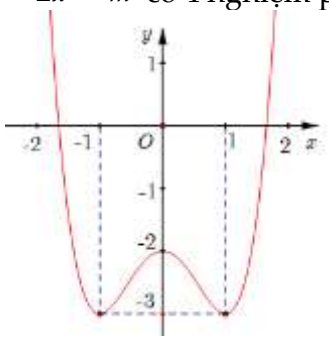
Câu 62: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $f(x)-1=m$ có đúng hai nghiệm.

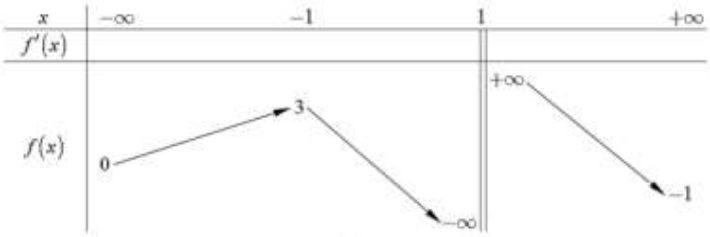
A. $m>0,\ m=-1$. B. $-2<m<-1$. C. $m\ge -1,\ m=-2$. D. $m>-1,\ m=-2$.

Câu 63: Đường cong trong hình vẽ là đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^4 - 2x^2 = m$ có 4 nghiệm phân biệt.



A. $m < -2$. B. $-1 < m < 0$. C. $m > -3$. D. $-3 < m < -2$.

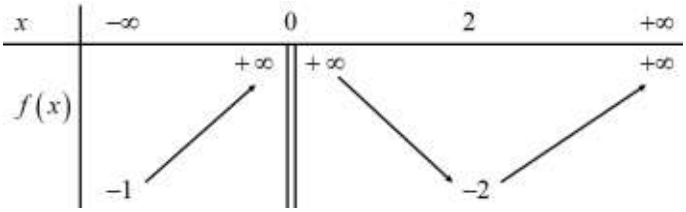
Câu 64: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:



Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm phân biệt là

A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

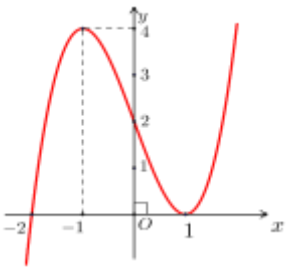
Câu 65: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt là

A. $(-\infty; 2)$. B. $[1; 2)$. C. $(1; 2)$. D. $(-2; +\infty)$.

Câu 66: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



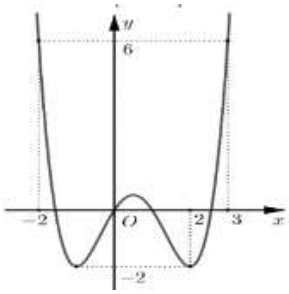
Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3 - 3x + 2 - 2m = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt.

A. $0 < m < 4$. B. $0 < m < 2$. C. $0 \le m \le 4$. D. $0 \le m \le 2$.

Câu 67: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2$. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $g(x)=f(|x|)+m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

A. 3. B. 10. C. 4. D. 6.

Câu 68: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x^3-3x)=m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$?

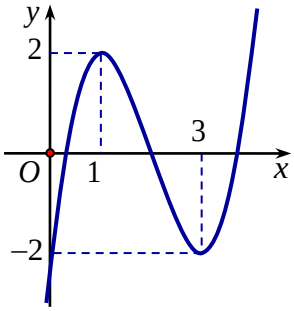


A. 3. B. 2. C. 6. D. 7.

Câu 69: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\frac{1}{3}|\cos^3 x|-3\cos^2 x+5|\cos x|-3+2m=0$ có đúng bốn nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$.

A. $-\frac{3}{2}<m<-\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{3}\le m<\frac{3}{2}$. C. $\frac{1}{3}<m<\frac{3}{2}$. D. $-\frac{3}{2}\le m\le -\frac{1}{3}$.

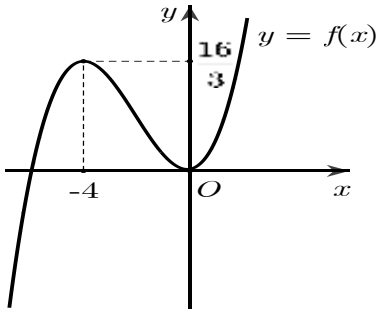
Câu 70: Cho đồ thị của hàm số $y=x^3-6x^2+9x-2$ như hình vẽ.



Khi đó phương trình $|x^3-6x^2+9x-2|=m$ (m là tham số) có 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi.

A. $-2\le m\le 2$. B. $0<m<2$. C. $0\le m\le 2$. D. $-2<m<2$.

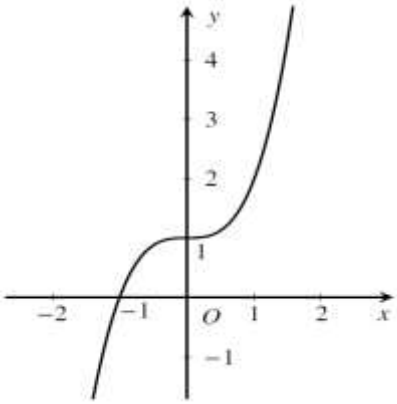
Câu 71: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|\frac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\right|\right)=f(m^2+4m+4)$ (1) có nghiệm?

A. 3. B. 4. C. 5. D. Vô số.

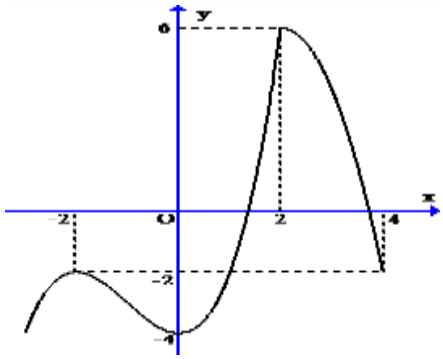
Câu 72: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của n để phương trình $f\left(16\cos^2 x+6\sin 2x-8\right)=f\left(n(n+1)\right)$ có nghiệm $x\in\mathbb{R}$?

A. 10. B. 4. C. 8. D. 6.

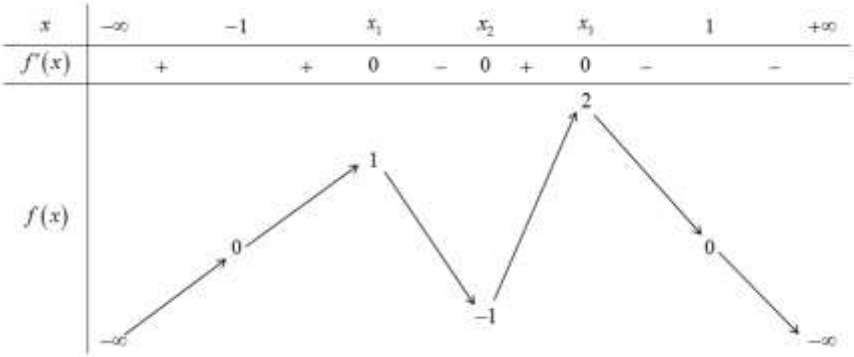
Câu 73: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2}+1\right)+x=m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-2;2]$?

A. 11. B. 9. C. 8. D. 10.

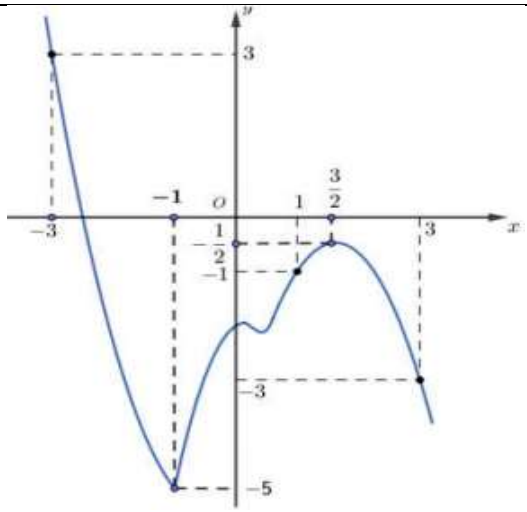
Câu 74: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây:



Để phương trình $3f(2x-1)=m-2$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $[0;1]$ thì giá trị của tham số m thuộc khoảng nào dưới đây?

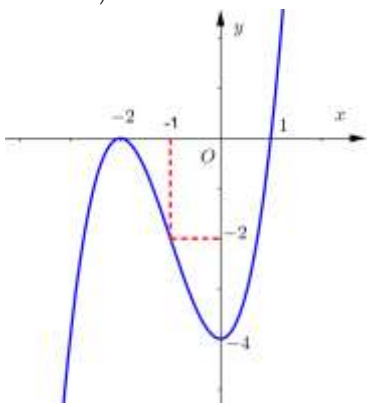
A. $(-\infty;-3)$. B. $(1;6)$. C. $(6;+\infty)$. D. $(-3;1)$.

Câu 75: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)+1+m^2=0$ có nghiệm là



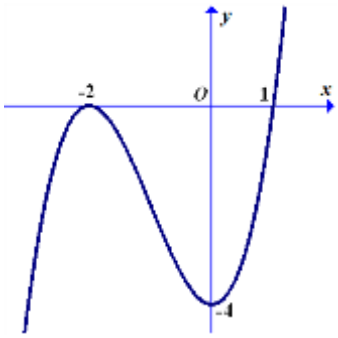
A. 6 . B. 4 . C. 5 . D. 7 .

Câu 76: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{4-x^2}-1\right) = m$ có nghiệm là



A. $[-2;0]$. B. $[-4;-2]$. C. $[-4;0]$. D. $[-1;1]$.

Câu 77: Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên dưới.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(x) - (m+5)|f(x)| + 4m + 4 = 0$ có 7 nghiệm phân biệt?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 78: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $(d): y = -x + m$ cắt đồ thị $(C): y = \dfrac{x+1}{1-x}$ tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 2\sqrt{6}$.

A. $m = -2; m = 2$. B. $m = -4; m = 4$. C. $m = 2$. D. $m = 4$.

Câu 79: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $y=-x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{x-2}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $OA+OB=4$?

A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Câu 80: Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=x-m+2$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{2x}{x-1}\ (C)$ tại hai điểm phân biệt A và B sao cho độ dài AB **ngắn nhất.**

A. $m=-3$. B. $m=3$. C. $m=1$. D. $m=-1$.

Câu 81: Cho hàm số $f(x)=x^3+3x^2+mx+1$. Gọi S là tổng tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt đường thẳng $y=1$ tại ba điểm phân biệt $A(0;1)$, B, C sao cho các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại B, C vuông góc với nhau. Gía trị của S bằng

A. $\frac{9}{2}$. B. $\frac{9}{5}$. C. $\frac{9}{4}$. D. $\frac{11}{5}$.

Câu 82: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2018;2019]$ để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+3$ và đường thẳng $y=3x+1$ có duy nhất một điểm chung?

A. 1. B. 2019. C. 4038. D. 2018.

Câu 83: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để phương trình $(x-1)(x-2)(x-m)=0$ có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân tăng?

A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 84: Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2x^3-3x^2=2m+1$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng

A. $-\frac{1}{2}$. B. $-\frac{3}{2}$. C. $-\frac{5}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 85: Giá trị k thỏa mãn đường thẳng $d: y=kx+k$ cắt đồ thị (H): $y=\frac{x-4}{2x-2}$ tại 2 điểm phân biệt A và B cùng cách đều đường thẳng $y=0$. Khi đó k thuộc khoảng

A. $(-2;-1)$. B. $(1;2)$. C. $(-1;0)$. D $(0;1)$.

Câu 86: Cho hàm số $y=\frac{x}{x-1}$ (C) và đường thẳng $d: y=-x+m$. Gọi S là tập hợp các số thực m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho tam giác OAB (O là gốc tọa độ) có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $2\sqrt{2}$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 8. B. 4. C. 1. D. 2.

Câu 87: Cho hàm số $y=x^4-(3m+2)x^2+3m$ có đồ thị là (C_m). Tìm m để đường thẳng $d: y=-1$ cắt đồ thị (C_m) tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2.

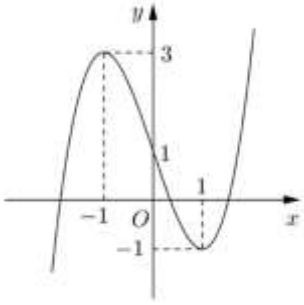
A. $-\frac{1}{3}<m<1$ và $m\neq 0$ B. $-\frac{1}{2}<m<1$ và $m\neq 0$

C. $-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{2}$ và $m\neq 0$ D. $-\frac{1}{3}<m<\frac{1}{2}$ và $m\neq 0$

Câu 88: Cho hai hàm số $y=x^2+x-1$ và $y=x^3+2x^2+mx-3$. Giá trị của tham số m để đồ thị của hai hàm số có 3 giao điểm phân biệt và 3 giao điểm đó nằm trên đường tròn bán kính bằng 3 thuộc vào khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-4)$. B. $(-4;-2)$. C. $(0;+\infty)$. D. $(-2;0)$.

Câu 89: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sin x)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ là



A. $[-1;3)$. B. $(-1;1)$. C. $(-1;3)$. D. $[-1;1)$.

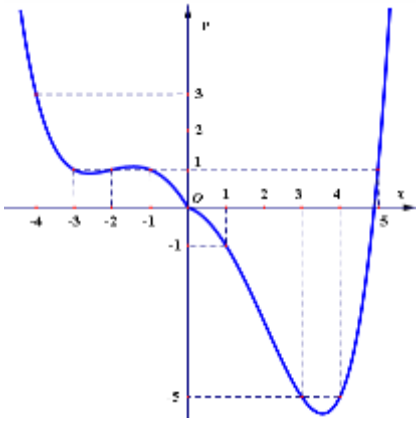
Câu 90: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	1	↗	2	↘	1	↗	$+\infty$

Tập hợp các giá trị m để phương trình $f(\cos 2x)-2m-1=0$ có nghiệm thuộc $\left(\frac{-\pi}{3};\frac{\pi}{4}\right)$ là

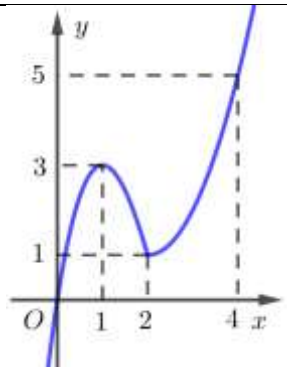
A. $\left[0;\frac{1}{2}\right]$. B. $\left(0;\frac{1}{2}\right]$. C. $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$. D. $\left(\frac{-2+\sqrt{2}}{4};\frac{1}{4}\right)$.

Câu 91: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2.f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)=m-3$ có nghiệm.



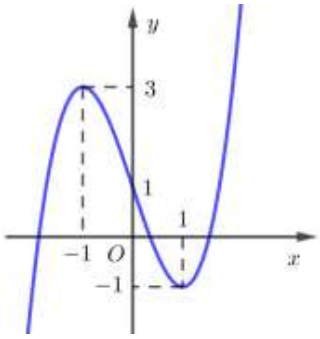
A. 13. B. 12. C. 8. D. 10.

Câu 92: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình: $f\left[4\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\right]=m$ có nghiệm.



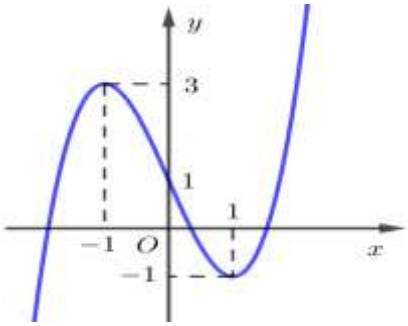
A. 2. B. 4. C. 3. D. 5.

Câu 93: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(\sin x))=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$.



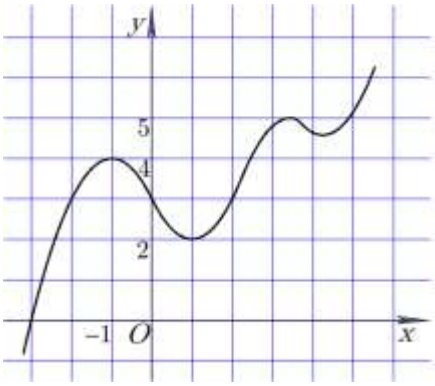
A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 94: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin x)=3\sin x+m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$. Tổng các phần tử của S bằng



A. -8. B. -10. C. -6. D. -5.

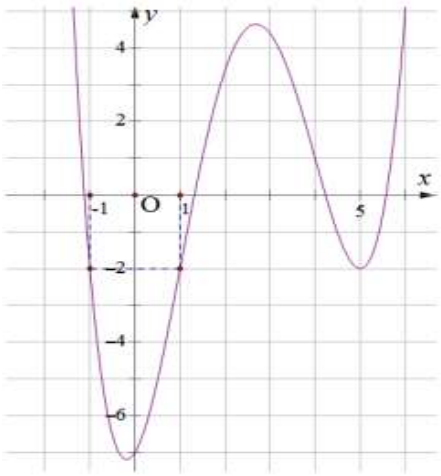
Câu 95: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Tìm số giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(x^2-2x\right)=m$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$.

A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.

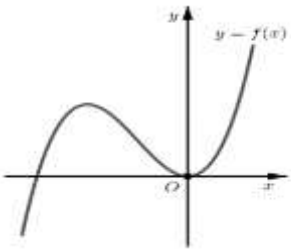
Câu 96: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Tồn tại bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sin x\right)=m$ có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\pi\right]$?

A. 4. B. 7. C. 5. D. 6.

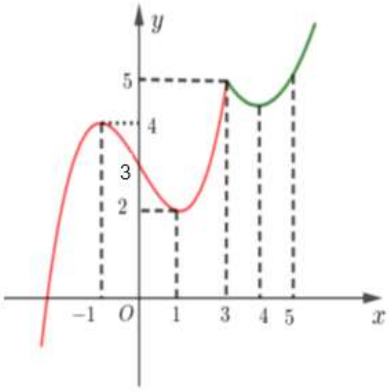
Câu 97: Cho hàm số $f\left(x\right)$ là đa thức và có đồ thị như hình vẽ:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(4^{\sin x}\right)=f\left(m^2+8m+17\right)$ có nghiệm?

A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 98: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tìm m để phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$?

A. $2<m<3$ hoặc $f(4)<m<5$.
B. $2<m\le 3$ hoặc $f(4)<m<5$.
C. $2\le m<3$ hoặc $f(4)<m<5$.
D. $2<m<3$ hoặc $f(4)<m\le 5$.

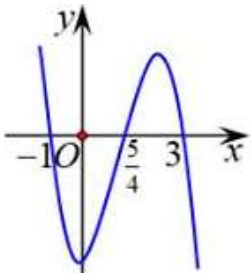
Câu 99: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=mx-m+1$ cắt đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2+x+2$ tại ba điểm A, B, C phân biệt sao cho $AB=BC$.

A. $m\in(-\infty;0)\cup[4;+\infty)$. B. $\forall m\in\mathbb{R}$. C. $m\in\left(-\frac{5}{4};+\infty\right)$. D. $m\in(-2;+\infty)$.

Câu 100: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=-mx$ cắt đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2-m+2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $AB=BC$.

A. $m\in(-\infty;3)$. B. $m\in(-\infty;-1)$. C. $m\in(-\infty;+\infty)$. D. $m\in(1;+\infty)$.

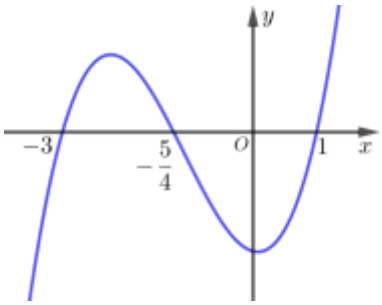
Câu 101: Cho hàm số $f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$, (với $m,n,p,q,r\in\mathbb{R}$). Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tập nghiệm của phương trình $f(x)=r$ có số phần tử là

A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 102: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+m$, (với $a,b,c,d,m\in\mathbb{R}$). Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tập nghiệm của phương trình $f(x)=m$ có số phần tử là

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

HẾT

Huế, ngày 16 tháng 7 năm 2023

Page: CLB GIÁO VIÊN TRẺ TP HUẾ

Chuyên đề: **KHẢO SÁT HÀM SỐ**

Chủ đề 5: **SỰ TƯƠNG GIAO**

Môn: TOÁN 12 _GIẢI TÍCH

LỜI GIẢI CHI TIẾT

DẠNG 1: TÌM GIAO ĐIỂM – SỐ GIAO ĐIỂM – TÍNH CHẤT GIAO ĐIỂM

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	-2	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(x)-2=0$ là

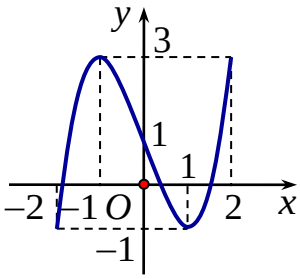
A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Lời giải:

Ta có: $f(x)-2=0 \Leftrightarrow f(x)=2$. Do $2\in(-2;4)$ nên phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

$\Rightarrow$ *Chọn đáp án B.*

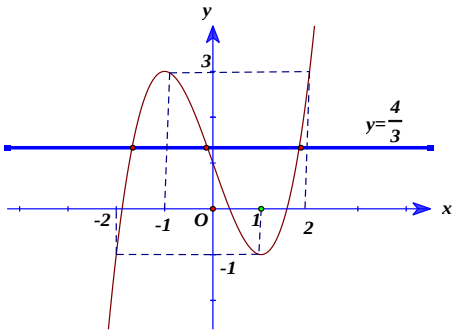
Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Số nghiệm của phương trình $3f(x)-4=0$ trên đoạn $[-2;2]$ là

A. 3. B. 4. C. 2. D. 1.

Lời giải:



Ta có: $3f(x)-4=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{4}{3}$.

Suy ra số nghiệm của phương trình trên đoạn $[-2;2]$ bằng số giao điểm của đồ thị $y=f(x)$ với đường thẳng $y=\frac{4}{3}$ trên đoạn $[-2;2]$.

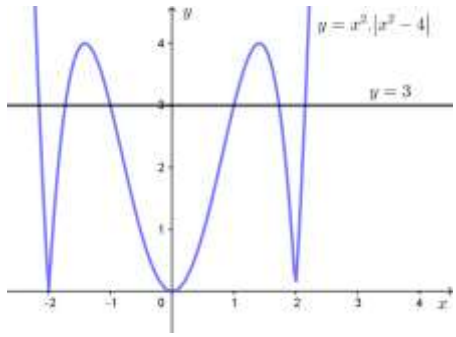
Dựa vào đồ thị ta thấy số giao điểm của đồ thị $y=f(x)$ với đường thẳng $y=\frac{4}{3}$ trên đoạn $[-2;2]$ là 3 điểm. Vậy số nghiệm của phương trình $3f(x)-4=0$ trên đoạn $[-2;2]$ là 3 nghiệm.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 3: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^2.|x^2-4|$ với đường thẳng $y=3$ là

A. 8. B. 2. C. 4. D. 6.

Lời giải:



Dựa vào đồ thị ở hình vẽ trên ta thấy, số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^2.|x^2-4|$ với đường thẳng $y=3$ là 6.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $2f(x)+3=0$ là

A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Lời giải:

Ta có $2f(x)+3=0 \Leftrightarrow f(x)=-\frac{3}{2}$.

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=-\frac{3}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $y_{CT}=-2<-\frac{3}{2}<1=y_{CD}$.

Vậy phương trình $2f(x)+3=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 5: Biết rằng đường thẳng $y=-2x+2$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+x+2$ tại một điểm duy nhất, ký hiệu $(x_0;y_0)$ là tọa độ điểm đó. Tìm y_0.

A. $y_0 = 4$. B. $y_0 = 0$. C. $y_0 = 2$. D. $y_0 - 1$.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm là: $x^3 + x + 2 = -2x + 2 \Leftrightarrow x^3 + 3x = 0$

$\Leftrightarrow x\left(x^2 + 3\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Do $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 2$.

$\Rightarrow$ *Chọn đáp án C.*

Câu 6: Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x - 2$ cắt trục tung tại điểm có tọa độ là

A. $(-1;0)$. B. $(0;-2)$. C. $(0;2)$. D. $(2;0)$.

Lời giải:

Thế $x = 0$ vào hàm số $y = x^3 - 3x - 2$ ta được $y = -2$.

Vậy đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x - 2$ cắt trục tung tại điểm có tọa độ là $(0;-2)$.

$\Rightarrow$ *Chọn đáp án B.*

Câu 7: Biết đường thẳng $y = x - 2$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ lần lượt x_A, x_B. Khi đó giá trị của $x_A + x_B$ bằng

A. 5. B. 3. C. 1. D. 2.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = x - 2$ và đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ là

$x - 2 = \dfrac{2x+1}{x-1} \Leftrightarrow (x-2)(x-1) = 2x + 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 1 = 0$ (*)

Ta có x_A, x_B là nghiệm của phương trình (*), theo định lí Viét ta có $x_A + x_B = 5$.

$\Rightarrow$ *Chọn đáp án A.*

Câu 8: Đồ thị của hàm số nào sau đây cắt trục tung tại điểm có tung độ âm?

A. $y = \dfrac{-2x+3}{x+1}$. B. $y = \dfrac{2x-3}{3x-1}$. C. $y = \dfrac{4x+1}{x+2}$. D. $y = \dfrac{3x+4}{x-1}$.

Lời giải:

Cho $x = 0$ thay vào các hàm số trên ta thấy chỉ có hàm số ở đáp án D là được $y = -4 < 0$.

$\Rightarrow$ *Chọn đáp án D.*

Câu 9: Biết rằng đường thẳng $y = 4x + 5$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2x + 1$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0.

A. $y_0 = 10$. B. $y_0 = 13$. C. $y_0 = 11$. D. $y_0 = 12$.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm là $x^3 + 2x + 1 = 4x + 5 \Leftrightarrow x^3 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Với $x = 2 \Rightarrow y = 13$. Vậy $y_0 = 13$.

$\Rightarrow$ *Chọn đáp án B.*

Câu 10: Đồ thị hàm số $y = 2x^3 - x^2 + x + 2$ cắt parabol $y = -6x^2 - 4x - 4$ tại một điểm duy nhất. Kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ điểm đó. Tính giá trị của biểu thức $x_0 + y_0$.

A. 1. B. -1. C. -22. D. 4.

Lời giải:

Ta có x_0 là nghiệm của phương trình: $2x^3 - x^2 + x + 2 = -6x^2 - 4x - 4$

$\Leftrightarrow 2x^3 + 5x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(2x^2 + x + 3) = 0 \Leftrightarrow x_0 = -2$.

Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = -20$. Vậy $x_0 + y_0 = -22$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 11: Đường thẳng Δ có phương trình $y = 2x + 1$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - x + 3$ tại hai điểm A và B với tọa độ được kí hiệu lần lượt là $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ trong đó $x_B < x_A$. Tính $x_B + y_B$.

A. $x_B + y_B = -5$. B. $x_B + y_B = -2$. C. $x_B + y_B = 4$. D. $x_B + y_B = 7$.

Lời giải:

Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình: $x^3 - x + 3 = 2x + 1$

Giải phương trình ta được $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$. Vì $x_B < x_A$ Vậy $x_B = 1; y_B = 3 \Rightarrow x_B + y_B = 4$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 12: Tính tổng hoành độ của các giao điểm của đồ thị hàm số $y = \dfrac{5x+6}{x+2}$ và đường thẳng $y = -x$.

A. -7. B. -5. C. 5. D. 7.

Lời giải:

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{5x+6}{x+2} = -x$ (với $x \neq -2$)

$\Leftrightarrow 5x + 6 = -x(x+2) \Leftrightarrow x^2 + 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -6 \end{array}\right.$.

Khi đó tổng hoành độ của các giao điểm là: -7.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 13: Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị hàm số là (C). Tìm số giao điểm của (C) và trục hoành.

A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

Lời giải:

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{array}\right.$ `

Vậy có ba giao điểm.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 14: Cho hàm số $y = (x-2)(x^2+1)$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. (C) cắt trục hoành tại hai điểm. B. (C) cắt trục hoành tại một điểm.

C. (C) không cắt trục hoành. D. (C) cắt trục hoành tại ba điểm.

Lời giải:

Ta có: $(x-2)(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0$ (vì $x^2 + 1 > 0; \forall x \in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow x = 2$.

$\Rightarrow (C)$ cắt trục hoành tại một điểm.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 15: Đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$ và đồ thị của hàm số $y = -x^2 + 4$ có tất cả bao nhiêu điểm chung?

A. 0. B. 4. C. 1. D. 2.

Lời giải:

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^4-2x^2+2=-x^2+4 \Leftrightarrow x^4-x^2-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Vậy hai đồ thị có tất cả 2 giao điểm.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 16: Tìm số giao điểm n của đồ thị hàm số $y=x^4-8x^2+3$ và đường thẳng $y=10$.

A. $n=0$. B. $n=4$. C. $n=2$. D. $n=3$.

Lời giải:

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^4-8x^2+3=10 \Leftrightarrow x^4-8x^2-7=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{4+\sqrt{23}}$.

Vậy hai đồ thị có hai giao điểm.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 17: Tọa độ tất cả các giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^4-x^2-1$ và đường thẳng $y=-1$ là

A. $(0;-1),(-1;-1)$. B. $(1;-1);(-1;-1)$.

C. $(0;-1),(1;1)$. D. $(0;-1),(1;-1),(-1;-1)$.

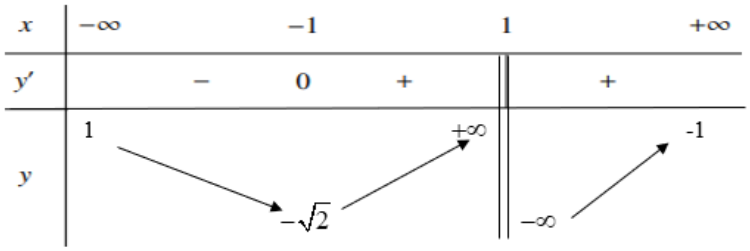
Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4-x^2-1=-1 \Leftrightarrow x^4-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=0$, $x^2=1 \Leftrightarrow$ $x=0$, $x=\pm1$.

Suy ra toạ độ các giao điểm là $(0;-1),(1;-1),(-1;-1)$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau:



Số nghiệm của phương trình $f(x)=-1$ là

A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.

Lời giải:

Số nghiệm của phương trình $f(x)=-1$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=-1$. Nhìn BBT trên ta thấy đường thẳng $y=-1$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 2 điểm. Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 19: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x+1$. Tìm số nghiệm của phương trình $f(f(x))=0$.

A. 5. B. 9. C. 4. D. 7.

Lời giải:

Xét phương trình $f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-3x+1=0$ dùng máy tính cầm tay ta ước lượng được phương trình có ba nghiệm và $\left[\begin{array}{l} x_1 \approx -1,879 \\ x_2 \approx 1,532 \\ x_3 \approx 0,347 \end{array}\right.$.

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x+1$, ta có bảng biến thiên của $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Xét phương trình $f(f(x))=0\,(1)$ ta ước lượng được $\left[\begin{array}{l} f(x) \approx -1,879 \\ f(x) \approx 1,532 \\ f(x) \approx 0,347 \end{array}\right.$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta có:

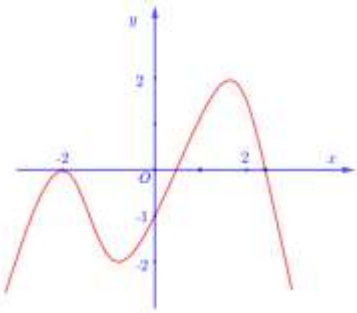
+ Với $f(x) \approx -1,879$ phương trình (1) có 1 nghiệm.

+ Với $f(x) \approx 1,532$ phương trình (1) có 3 nghiệm.

+ Với $f(x) \approx 0,347$ phương trình (1) có 3 nghiệm.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp nghiệm của phương trình $f(f(x))+1=0$ có bao nhiêu phần tử?



A. 4. B. 7. C. 6. D. 9.

Lời giải:

Dựa vào đồ thị ta có $f(f(x))+1=0$ $f(f(x))=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=a<-2 \\ f(x)=b\in(-2;-1) \\ f(x)=0 \\ f(x)=c>2 \end{array}\right.$.

+ Với $f(x)=a<-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1<-2 \\ x=x_2>2 \end{array}\right.$.

+ Với $f(x)=b\in(-2;-1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_3<-2\\x=x_4\in(-2;-1)\\x=x_5\in(-1;0)\\x=x_6>2\end{array}\right.$.

+ Với $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_7=-2\\x=x_8\in(0;1)\\x=x_9\in(2;3)\end{array}\right.$.

+ Với $f(x)=c>2$ vô nghiệm.

Ta thấy hàm số $y=f(x)$ đơn điệu trên $(-\infty;-2)$, $f(x_1)=a\neq b=f(x_3)$ nên $x_1\neq x_3$. Hàm số $y=f(x)$ đơn điệu trên $(2;+\infty)$, $f(x_6)=b\neq 0=f(x_9)$ nên $x_6\neq x_9$.

Vậy phương trình đã cho có 9 nghiệm phân biệt.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 21: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;-2);(-2;+\infty)$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $(f(x))^2-2f(x)-3=0$ là

A. 2. B. 1. C. 0. D. 4.

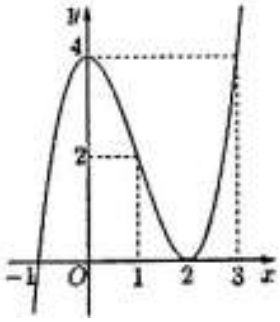
Lời giải:

Điều kiện: $x\neq -2$. Xét phương trình: $(f(x))^2-2f(x)-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=-1\\f(x)=3\end{array}\right.$

Từ bảng biến thiên ta có: phương trình $f(x)=-1$ có hai nghiệm phân biệt thỏa điều kiện: $x_1<-3<x_2<-2$ và phương trình $f(x)=3$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn điều kiện $-2<x_3<-1<x_4$. Vậy phương trình có bốn nghiệm thực phân biệt.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tập nghiệm của phương trình $f(x)\left[f(x)-4\right]=0$ là

A. $\{-1;0;1;2;3\}$. B. $\{-1;2\}$. C. $\{0;3\}$. D. $\{-1;0;2;3\}$.

Lời giải:

Ta có: $f(x)\left[f(x)-4\right]=0 \Leftrightarrow f(x)=0$ hoặc $f(x)=4$.

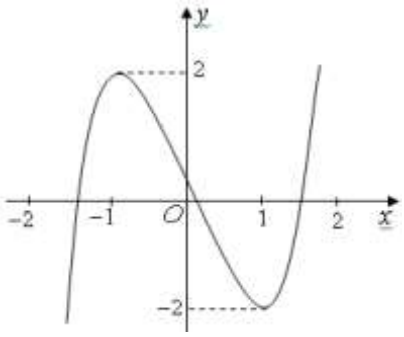
Từ đồ thị, ta thấy: $f(x)=0$ có hai nghiệm là $x=-1$ và $x=2$ vì đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $x=-1$ và $x=2$;

Mặt khác, đồ thị hàm số cắt đường $y=4$ tại hai điểm có hoành độ là $x=0$ và $x=3$ nên $f(x)=4$ có hai nghiệm là $x=0$ và $x=3$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $\{-1;0;2;3\}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 23: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,\ (a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

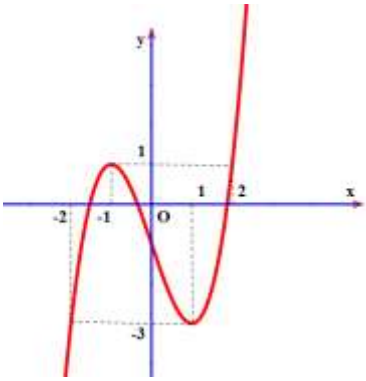
A. 3. B. 7. C. 9. D. 5.

Lời giải:

Đặt $t=f\left(x\right)$, phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=0$ trở thành $f\left(t\right)=0$ $\left(*\right)$ (số nghiệm phương trình $\left(*\right)$ là số giao điểm của đồ thị $f\left(x\right)$ với trục Ox). Nhìn vào đồ thị ta thấy phương trình $\left(*\right)$ có 3 nghiệm t thuộc khoảng $\left(-2;2\right)$, với mỗi giá trị t như vậy phương trình $f\left(x\right)=t$ có 3 nghiệm phân biệt. Vậy phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=0$ có 9 nghiệm.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 24: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Phương trình $f\left(3-2f\left(x\right)\right)=1$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 6. B. 5. C. 7. D. 4.

Lời giải:

Dựa vào đồ thị ta có: $f\left(3-2f\left(x\right)\right)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3-2f\left(x\right)=-1\\3-2f\left(x\right)=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=2\\f\left(x\right)=\frac{1}{2}\end{array}\right.$.

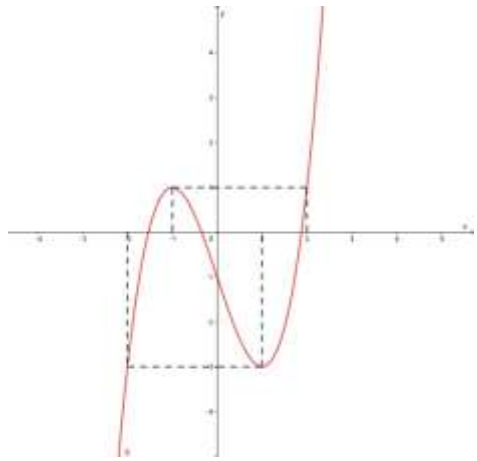
Mà $f\left(x\right)=2$ có 1 nghiệm duy nhất lớn hơn 2.

Và $f\left(x\right)=\frac{1}{2}$ có 3 nghiệm phân biệt $x_1\in\left(-2;-1\right), x_2\in\left(-1;0\right), x_3\in\left(1;2\right)$.

Vậy phương trình có 4 nghiệm thực phân biệt.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 25: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình bên dưới:



Phương trình $f\left(f\left(x\right)-1\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 6. B. 5. C. 7. D. 4.

Lời giải:

Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ ta có: $f\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=a\in\left(-2;-1\right)\\x=b\in\left(-1;0\right)\\x=c\in\left(0;2\right)\end{array}\right.$

Do đó $f\left(f\left(x\right)-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f\left(x\right)-1=a\left(1\right)\\f\left(x\right)-1=b\left(2\right)\\f\left(x\right)-1=c\left(3\right)\end{array}\right.$

$\left(1\right)\Leftrightarrow f\left(x\right)=a+1\in\left(-1;0\right)$

$\Rightarrow$pt $f\left(x\right)=a+1$ có 3 nghiệm x_1,x_2,x_3 thỏa mãn $x_1<a<-1<b<x_2<0<x_3<c$

$\left(2\right)\Leftrightarrow f\left(x\right)=b+1\in\left(0;1\right)$ $\Rightarrow$pt $f\left(x\right)=b+1$ có 3 nghiệm x_4,x_5,x_6 thỏa mãn

$x_1<a<x_4<-1<x_5<b<x_2<0<x_3<c<x_6$

$\left(3\right)\Leftrightarrow f\left(x\right)=c+1\in\left(1;3\right)$ $\Rightarrow$ pt $f\left(x\right)=c+1$ có nghiệm duy nhất $x_7>x_6$

Vậy phương trình $f\left(f\left(x\right)-1\right)=0$ có 7 nghiệm phân biệt.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 26: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	

y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $\left|f\left(x^2-2x\right)\right|=2$ là

A. 4. B. 2. C. 3. D. 8.

Lời giải:

BBT của hàm số $y=x^2-2x$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình $\left|f\left(x^2-2x\right)\right|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x^2-2x\right)=2 \\ f\left(x^2-2x\right)=-2 \end{array}\right.$

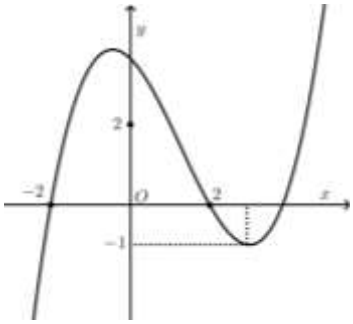
+) $f\left(x^2-2x\right)=2 \Leftrightarrow x^2-2x=a>1 \longrightarrow$ Có hai nghiệm phân biệt.

+) $f\left(x^2-2x\right)=-2 \Leftrightarrow x^2-2x=b<-1 \longrightarrow$ Vô nghiệm.

Vậy phương trình $\left|f\left(x^2-2x\right)\right|=2$ có 2 nghiệm phân biệt.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 27: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\frac{1}{2}$ là

A. 6. B. 10. C. 12. D. 3.

Lời giải:

Xét $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x^3-3x\right)=\frac{1}{2} \\ f\left(x^3-3x\right)=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Xét $g(x)=x^3-3x$, $g'(x)=3x^2-3=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Quan sát đồ thị:

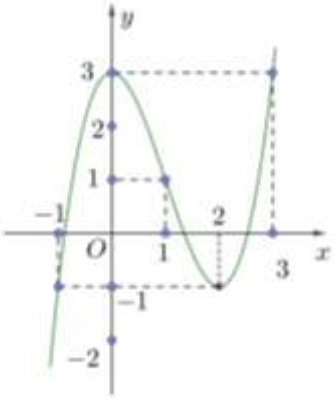
+ Xét $f\left(x^3-3x\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-3x=a\in(-2;0) \\ x^3-3x=b\in(0;2) \\ x^3-3x=c\in(2;+\infty) \end{array}\right.$ (có lần lượt 3, 3, 1 nên có tất cả 7 nghiệm).

+ Xet $f\left(x^3-3x\right)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-3x=c>2 \\ x^3-3x=d>2 \\ x^3-3x=c<-2 \end{array}\right.$ (có 3 nghiệm).

Rõ ràng 10 nghiệm này phân biệt. Vậy phương trình đã cho có tất cả 10 nghiệm.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 28: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:

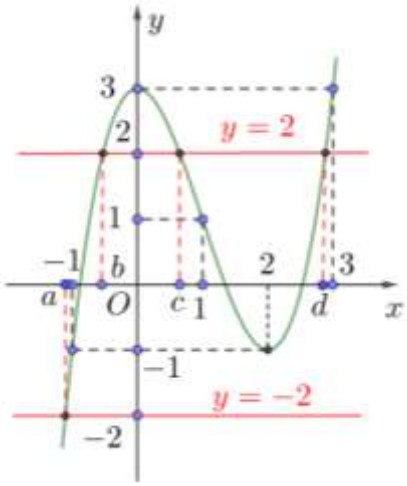


Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^4-2x^2\right)\right|=2$ là

A. 8. B. 9. C. 7. D. 10.

Lời giải:

Phương trình $\left|f\left(x^4-2x^2\right)\right|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x^4-2x^2\right)=2 \\ f\left(x^4-2x^2\right)=-2 \end{array}\right.$.



* Phương trình $f\left(x^4-2x^2\right)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^4-2x^2=b,\left(-1<b<0\right) \\ x^4-2x^2=c,\left(0<c<1\right) \\ x^4-2x^2=d,\left(2<d<3\right) \end{array}\right.$.

* Phương trình $f\left(x^4-2x^2\right)=-2 \Leftrightarrow x^4-2x^2=a,\left(-2<a<-1\right)$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=x^4-2x^2$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$

Dựa vào BBT trên ta có:

- Phương trình $x^4-2x^2=a,\left(-2<a<-1\right)$ không có nghiệm thực.
- Phương trình $x^4-2x^2=b,\left(-1<b<0\right)$ có 4 nghiệm thực phân biệt.
- Phương trình $x^4-2x^2=c,\left(0<c<1\right)$ có 2 nghiệm thực phân biệt.
- Phương trình $x^4-2x^2=d,\left(2<d<3\right)$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

Vậy phương trình $\left|f\left(x^4-2x^2\right)\right|=2$ có 8 nghiệm thực phân biệt.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 29: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-1	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f\left(3x^4-6x^2+1\right)=1$ là

A. 4. B. 5. C. 6. D. 3.

Lời giải:

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f(x)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\in(-\infty;-2) \\ x=b\in(-2;1) \\ x=c\in(1;+\infty) \end{array}\right.$.

Do đó $f(3x^4-6x^2+1)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^4-6x^2+1=a \ \ (1) \\ 3x^4-6x^2+1=b \ \ (2) \\ 3x^4-6x^2+1=c \ \ (3) \end{array}\right.$

Xét hàm số $g(x)=3x^4-6x^2+1$. Ta có: $g'(x)=12x^3-12x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

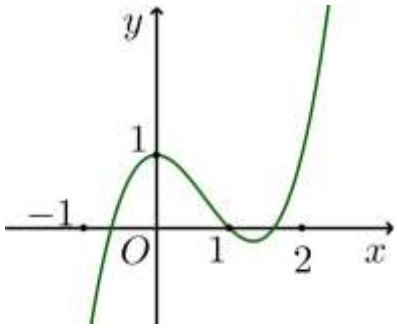
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	1	↘	-2	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, có:
- Phương trình (1) vô nghiệm.
- Phương trình (2) có đúng 4 nghiệm phân biệt.
- Phương trình (3) có đúng 2 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có tất cả 6 nghiệm.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 30: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Khi đó phương trình $4f(3x^4)-3=0$ có bao nhiêu nghiệm dương?

A. 2. B. 4. C. 5. D. 1.

Lời giải:

Bảng biến thiên của hàm số $y=3x^4$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

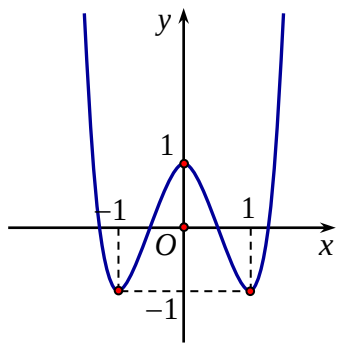
Ta có: $4f\left(3x^4\right)-3=0 \Leftrightarrow f\left(3x^4\right)=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 3x^4=x_1, & x_1\in(-1;0) \\ 3x^4=x_2, & x_2\in(0;1) \\ 3x^4=x_3, & x_3\in(1;2) \end{array}\right.$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có $3x^4=x_1$ vô nghiệm; $3x^4=x_2$ có một nghiệm âm một nghiệm dương; $3x^4=x_3$ có một nghiệm âm một nghiệm dương.

Vậy phương trình $4f\left(3x^4\right)-3=0$ có 2 nghiệm dương.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 31: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Số nghiệm của phương trình $2f(\sin x)-1=0$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ là

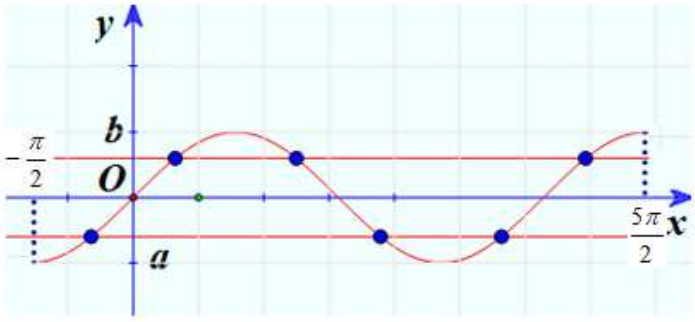
A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Lời giải:

Đặt $t=\sin x$, $t\in[-1;1]$ ta được: $f(t)=\frac{1}{2}$. Dựa vào đồ thị ta có $\left[\begin{array}{l} t=a,(-1<a<0) \\ t=b,(0<b<1) \end{array}\right.$

Xét hàm số $g(x)=\sin x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$

Đồ thị của hàm số $g(x)=\sin x$ tên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ là



Dựa vào đồ thị ta có $\sin x=a$ có 3 nghiệm trên $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$, $\sin x=b$ có 3 nghiệm trên $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$.

Vậy phương trình $2f(\sin x)-1=0$ có 6 nghiệm trên $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$			||	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2 ||	↗	3	↘	1	↗	3	↘	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{7\pi}{3}\right]$ của phương trình $2.f\left(\cos x\right)-5=0$ là

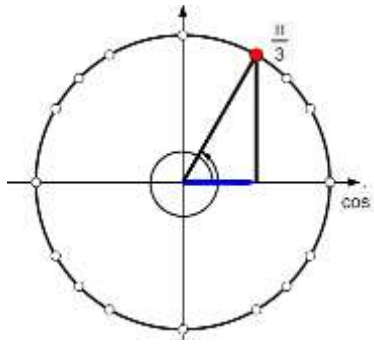
A. 8. B. 7. C. 5. D. 6.

Lời giải:

Xét phương trình $2.f\left(x\right)-5=0 \Leftrightarrow f\left(x\right)=\frac{5}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f\left(x\right)=\frac{5}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\in\left(-1;0\right) \\ x=b\in\left(0;\frac{1}{2}\right) \\ x=c\in\left(\frac{1}{2};1\right) \\ x=d\in\left(1;+\infty\right) \end{array}\right.$.

Do đó $2.f\left(\cos x\right)-5=0 \Leftrightarrow f\left(\cos x\right)=\frac{5}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x=a\in\left(-1;0\right) & (1) \\ \cos x=b\in\left(0;\frac{1}{2}\right) & (2) \\ \cos x=c\in\left(\frac{1}{2};1\right) & (3) \\ \cos x=d\in\left(1;+\infty\right) & (4) \end{array}\right.$.



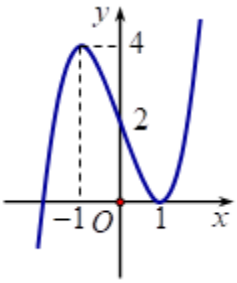
Dựa vào đường tròn lượng giác, trên đoạn $\left[0;\frac{7\pi}{3}\right]$ ta có:

- Phương trình (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt.
- Phương trình (2) có đúng 2 nghiệm phân biệt.
- Phương trình (3) có đúng 3 nghiệm phân biệt.
- Phương trình (4) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có tất cả 7 nghiệm.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 33: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thuộc đoạn $[0;5\pi]$ của phương trình $f(\cos x)=1$

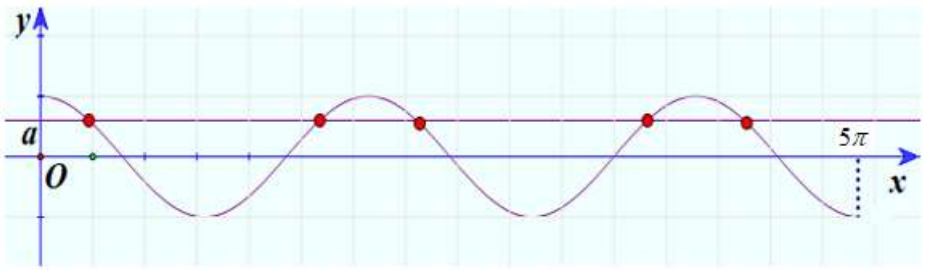
A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Lời giải:

Đặt $t=\cos x$, $t\in[-1;1]$ ta được $f(t)=1 \Leftrightarrow t=a$ với $a\in(0;1)$

Xét hàm số $g(x)=\cos x$ trên đoạn $[0;5\pi]$

Đồ thị của hàm số $g(x)=\cos x$ tên đoạn $[0;5\pi]$ là



Dựa vào đồ thị ta có $\cos x=a$ có 5 nghiệm trên $[0;5\pi]$

Vậy phương trình $f(\cos x)=1$ có 5 nghiệm trên $[0;5\pi]$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 34: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	0	↘	-2	↗	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[0;5\pi]$ của phương trình $|f(\sin x)|=1$ là

A. 6. B. 4. C. 10. D. 8.

Lời giải:

Từ bảng biến thiên ta được

$$f(\sin x)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=t_1\in(-\infty;-1)(VN) \\ \sin x=t_2\in(-1;0) \\ \sin x=t_3\in(1;+\infty)(VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x=t_2\in(-1;0) \quad (1).$$

Dựa vào đường tròn lượng giác, phương trình (1) có 4 nghiệm nằm trong đoạn $[0;5\pi]$.

$$f(\sin x)=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=t_4\in(-\infty;-1)(VN) \\ \sin x=t_5\in(0;1) \\ \sin x=t_6\in(1;+\infty)(VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x=t_5\in(0;1)\ \ (2).$$

Dựa vào đường tròn lượng giác, ta được phương trình (2) có 6 nghiệm nằm trong đoạn $[0;5\pi]$.

Vậy phương trình ban đầu có tất cả 10 nghiệm.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(\sin x+1)=2$ trên $[-\pi;2\pi]$ là

A. 6. B. 7. C. 5. D. 4.

Lời giải:

Dựa vào bảng biến thiên hàm số $f(x)$, ta thấy $f(x)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\,(a<0) \\ x=b\,(0<b<1) \\ x=c\,(1<c<2) \\ x=d\,(d>2) \end{array}\right.$.

Đặt $t=\sin x+1$. Phương trình đã cho tương đương với $f(t)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=a\ (1) \\ t=b\ (2) \\ t=c\ (3) \\ t=d\ (4) \end{array}\right.$

Ta có: $t'(x)=\cos x \Rightarrow t'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Ta có bảng biến thiên hàm số $t(x)$ trên $[-\pi;2\pi]$ là:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$t'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$t(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

Từ bảng biến thiên này, ta thấy các phương trình (1) và (4) vô nghiệm, phương trình (2) có 4 nghiệm và phương trình (3) có đúng 2 nghiệm. Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 36: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(\cot x+1)=1$ là

A. 7. B. 6. C. 8. D. 5.

Lời giải:

Đặt $t=\cot x+1$, phương trình tương đương với $f(t)=1$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy

$$f(t)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=a\,(a<-1)\\t=1\\t=b\,(b>2)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cot x+1=a\\\cot x+1=b\\\cot x+1=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cot x=a-1<0\\\cot x=b-1>0\\\cot x=0\end{array}\right.$$

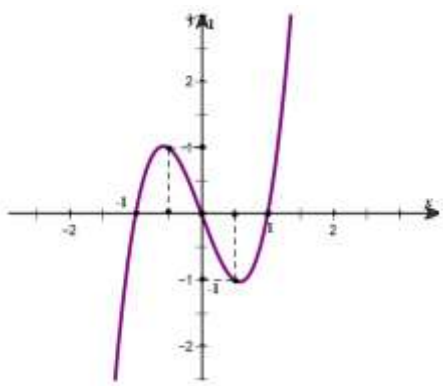
Xét $t'=-\frac{1}{\sin^2 x}<0$ nên ta có bảng biến thiên hàm $t(x)$ trên $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ như sau

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		π		$\frac{3\pi}{2}$
t'		$-$	‖	$-$	‖	$-$	
t	0	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	0

Từ đó, phương trình $\cot x=a-1$ có đúng 2 nghiệm, phương trình $\cot x=b-1$ có đúng 2 nghiệm và phương trình $\cot x=0$ có đúng 3 nghiệm thuộc $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ nên phương trình đã cho có 7 nghiệm.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 37: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Số nghiệm thuộc đoạn $[0;3\pi]$ của phương trình $2|f(\cos x)|-1=0$ là

A. 12 . B. 6 . C. 10 . D. 8 .

Lời giải:

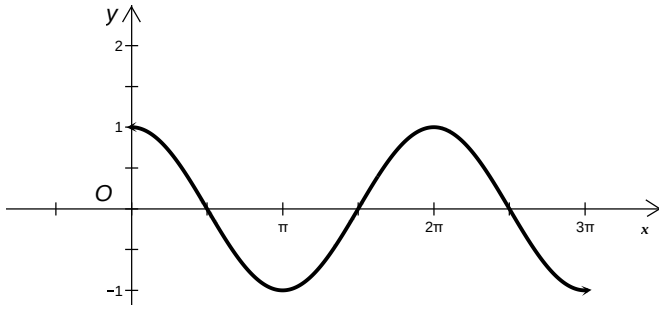
$$2\left|f\left(\cos x\right)\right|-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(\cos x\right)=\dfrac{1}{2}\\ f\left(\cos x\right)=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

Căn cứ vào đồ thị ta thấy: $f\left(\cos x\right)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=a,-1<a<-\dfrac{1}{2}\left(1\right)\\ \cos x=b,-\dfrac{1}{2}<b<0\left(2\right)\\ \cos x=c,c>1\left(3\right)\end{array}\right.$

$$f\left(\cos x\right)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=d,d<-1\left(4\right)\\ \cos x=e,0<e<\dfrac{1}{2}\left(5\right)\\ \cos x=g,\dfrac{1}{2}<g<1\left(6\right)\end{array}\right.$$

Các phương trình $\left(3\right)$, $\left(4\right)$ đều vô nghiệm.

Xét đồ thị hàm số $y=\cos x$ trên đoạn $\left[0;3\pi\right]$



Ta thấy các phương trình $\left(1\right),\left(2\right),\left(5\right),\left(6\right)$ lần lượt có 3 nghiệm phân biệt và trong số chúng không có 2 nghiệm nào trùng nhau. Vậy phương trình ban đầu có 12 nghiệm.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 38: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Số nghiệm thuộc khoảng $\left(-\pi;\pi\right)$ của phương trình $f^2\left(\cos x\right)-f\left(\cos x\right)=2$ là

A. 5. B. 6. C. 7. D. 9.

Lời giải:

Đặt $t=\cos x$, $x\in\left(-\pi;\pi\right)$. Ta có bảng biến thiên (*)

x	$-\pi$		0		π
t	-1	↗	1	↘	-1

$\Rightarrow t\in(-1;1]$.

Phương trình đã cho trở thành $f^2(t)-f(t)-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(t)=2\quad(1)\\ f(t)=-1\ (2)\end{array}\right.$.

Từ bảng biến thiên của đề bài, với $t\in(-1;1]$ ta có nghiệm của phương trình (1) là $t=a\in(-1;0)$ hay $t=b\in(0;1)$ và nghiệm của phương trình (2) là $t=1$.

x	$-\infty$		-1		a		0		b		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$			0			$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗			3	↘			-1	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên (*), ta có:

$t=a\in(-1;0)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\in(-\pi;0)\\ x=x_2\in(0;\pi)\end{array}\right.$.

$t=b\in(0;1)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_3\in(-\pi;0)\\ x=x_4\in(0;\pi)\end{array}\right.$.

x	$-\pi$		x_1		x_3		0		x_4		x_2		π
t	-1	↗					1					↘	-1

$t=1\Rightarrow x=0$.

Vậy, phương trình đã cho có 5 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-\pi;\pi)$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	-4	↗	2	↘	$-\infty$

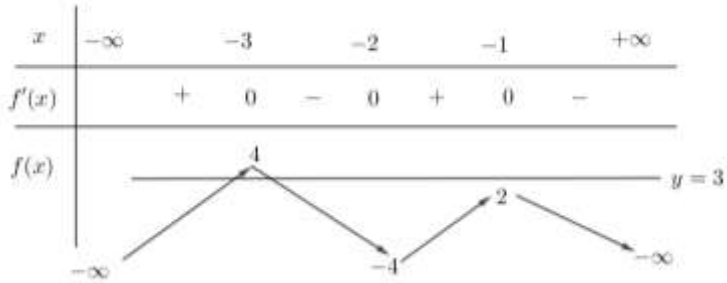
Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;\pi]$ của phương trình $f(2\cos^2x-3)=3$ là

A. 8 . B. 2 . C. 6 . D. 4 .

Lời giải:

Đặt $t=2\cos^2x-3$, vì $x\in[-\pi;\pi]$ nên $t\in[-3;-1]$. Ta có phương trình $f(t)=3$, $t\in[-3;-1]$

Dựa vào BBT ta có:



Vậy $f(t)=3 \Rightarrow t=a,\ a\in(-3,-2)$

Ta có: $2\cos^2 x-3=a$, $a\in(-3,-2)$. Suy ra $\cos^2 x=b$, $b\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

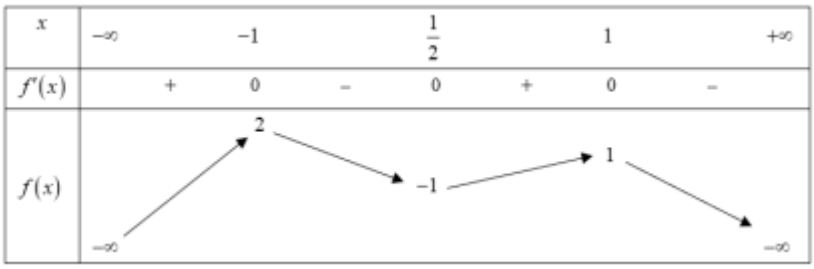
Suy ra $\left[\begin{array}{l}\cos x=\sqrt{b}\\ \cos x=-\sqrt{b}\end{array}\right.$ với $\sqrt{b}\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Với mọi $x\in[-\pi;\pi]$ thì phương trình $\cos x=\sqrt{b}$ có 2 nghiệm và phương trình $\cos x=-\sqrt{b}$ có 2 nghiệm. (Dựa vào đường tròn lượng giác hoặc đồ thị hàm số $y=\cos x$ để kiểm tra nghiệm)

Vậy có 4 nghiệm thỏa yêu cầu bài toán.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 40: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[\frac{5\pi}{6};3\pi\right]$ của phương trình $4f(\cos 2x)-1=0$ là

A. 5. B. 9. C. 4. D. 10.

Lời giải:

Đặt $t=\cos 2x$, ta có $4f(t)-1=0 \Leftrightarrow f(t)=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=a, a\in(-\infty;-1)\\ t=b, b\in\left(-1;\frac{1}{2}\right)\\ t=c, c\in\left(\frac{1}{2};1\right)\\ t=d, d\in(1;+\infty)\end{array}\right.$

Khảo sát hàm số $t=\cos 2x$ trên $\left[\frac{5\pi}{6};3\pi\right]$. Ta có $t'=-2\sin 2x$

Cho $t'=0 \Leftrightarrow \sin 2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$. Vì $x\in\left[\frac{5\pi}{6};3\pi\right] \Rightarrow x\in\left\{\pi;\frac{3\pi}{2};2\pi;\frac{5\pi}{2};3\pi\right\}$.

Ta có BBT của hàm $t=\cos 2x$ như sau:

x	$\frac{5\pi}{6}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π		$\frac{5\pi}{2}$		3π
t'		+	0	−	0	+	0	−	0	+	
t	$\frac{1}{2}$	↗	1	↘	−1	↗	1	↘	−1	↗	1

Từ BBT trên ta thấy:

Với $t=a, a\in(-\infty;-1)$ $\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Với $t=b, b\in\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ $\Rightarrow$ phương trình có 4 nghiệm.

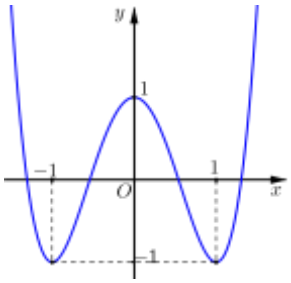
Với $t=c, c\in\left(\frac{1}{2};1\right)$ $\Rightarrow$ phương trình có 5 nghiệm.

Với $t=d, d\in(1;+\infty)$ $\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình ban đầu có 9 nghiệm.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 41: Cho hàm số trùng phương $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Số nghiệm thuộc $[0;2\pi)$ của phương trình $|f(\cos 2x)|=1$ bằng

A. 4. B. 6. C. 3. D. 8.

Lời giải:

Ta có $|f(\cos 2x)|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(\cos 2x)=1 \\ f(\cos 2x)=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x=0 \\ \cos 2x=a>1\ (VN) \\ \cos 2x=b<-1\ (VN) \\ \cos 2x=\pm 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x=0 \\ \sin 2x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin 4x=0$

Phương trình $\sin 4x=0$ có 8 nghiệm thuộc $[0;2\pi)$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

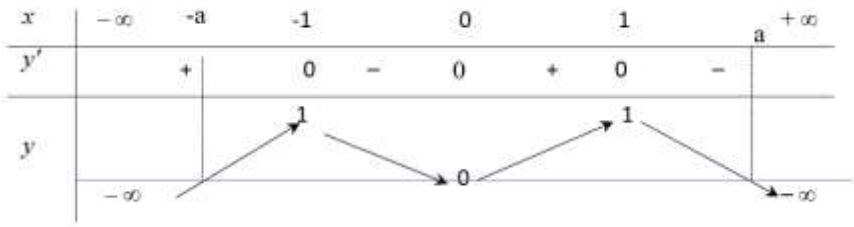
Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	0	−	
y	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	1	↘	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[0;\pi]$ của phương trình $f(f(\cos 2x))=0$ là

A. 4. B. 2. C. 3. D. 8.

Lời giải:



Dựa và bảng biến thiên ta có $f(x)\le 1,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(f(\cos 2x))=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(\cos 2x)=a \\ f(\cos 2x)=-a \\ f(\cos 2x)=0 \end{array}\right.$ với $a>1$.

Với $f(\cos 2x)=a$ thì phương trình vô nghiệm.

Với $f(\cos 2x)=-a \Leftrightarrow \cos 2x=\pm b$ với $b>1$ nên phương trình vô nghiệm.

Với $f(\cos 2x)=0 \Leftrightarrow \cos 2x=0 \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} \xrightarrow{x\in[0;\pi]} x=\frac{\pi}{4}; x=\frac{3\pi}{4}$.

Vậy phương trình $f(f(\cos 2x))=0$ có 2 nghiệm thuộc đoạn $[0;\pi]$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

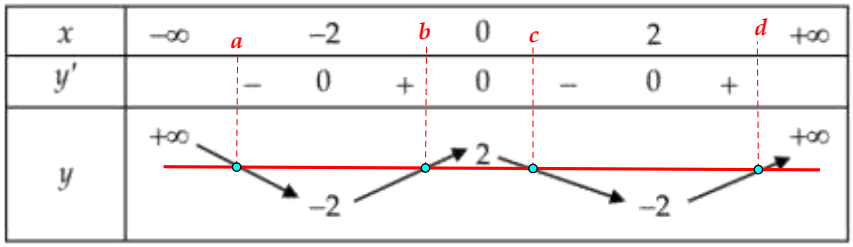
Câu 43: Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c,(a;b;c\in\mathbb{R},a\ne 0)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $a[f(x)]^4+b[f(x)]^2+c=0$ là

A. 11. B. 10. C. 9. D. 12.

Lời giải:



Ta có: $a[f(x)]^4+b[f(x)]^2+c=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=a\in(-\infty;-2) \xrightarrow{\text{Dựa vào tương giao } f(x)=m} \text{Không có nghiệm.} \\ f(x)=b\in(-2;0) \xrightarrow{\text{Dựa vào tương giao } f(x)=m} \text{Có 4 nghiệm phân biệt.} \\ f(x)=c\in(0;2) \xrightarrow{\text{Dựa vào tương giao } f(x)=m} \text{Có 4 nghiệm phân biệt.} \\ f(x)=d\in(2;+\infty) \xrightarrow{\text{Dựa vào tương giao } f(x)=m} \text{Có 2 nghiệm phân biệt.} \end{array}\right.$

Rõ ràng 10 nghiệm này phân biệt.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 44: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ:

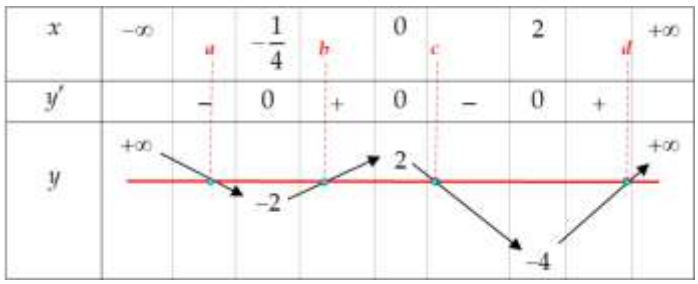
x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	-4	↗	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $5f\left(\cos^2 x-\cos x\right)=1$ là

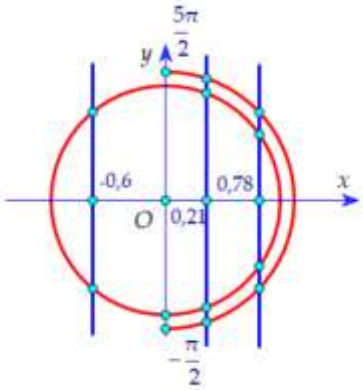
A. 11. B. 10. C. 9. D. 12.

Lời giải:

Đặt $u=\cos^2 x-\cos x$. Với $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ thì $u\in\left[-\frac{1}{4};2\right]$ (Lập bảng biến thiên hoặc *sử dụng MTCT*)



Lúc đó: $5f\left(u\right)=1\Leftrightarrow f\left(u\right)=\frac{1}{5}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=a\in\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right)\left(\text{vô nghiệm}\right)\\ u=b\in\left(-\frac{1}{4};0\right)\\ u=c\in\left(0;2\right)\\ u=d\in\left(2;+\infty\right)\left(\text{vô nghiệm}\right)\end{array}\right.$.



Chọn giá trị để tính!

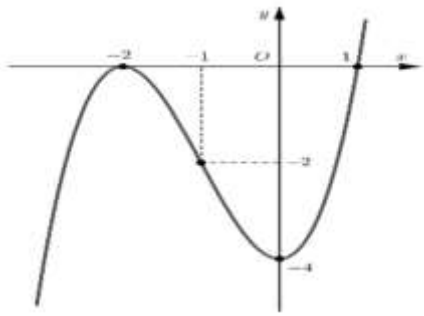
+) $u=\cos^2 x-\cos x=-\frac{1}{6}\in\left(-\frac{1}{4};0\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x\approx 0,78\xrightarrow{\text{Dùng đường tròn lượng giác}}4\text{ nghiệm phân biệt}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]\\ \cos x\approx 0,21\xrightarrow{\text{Dùng đường tròn lượng giác}}4\text{ nghiệm phân biệt}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]\end{array}\right.$

+) $u=\cos^2 x-\cos x=1\in(0;2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x\approx 1,6\,(\text{vô nghiệm})\\ \cos x\approx -0,6\xrightarrow{\text{Dùng đường tròn lượng giác}}2\text{ nghiệm phân biệt}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]\end{array}\right.$

Rõ ràng 10 nghiệm này phân biệt.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 45: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau:



Số nghiệm của phương trình $f(\sin x+\cos x)+2=0$ trên đoạn $[0;2\pi]$ là

A. 5. B. 4. C. 3. D. 2.

Lời giải:

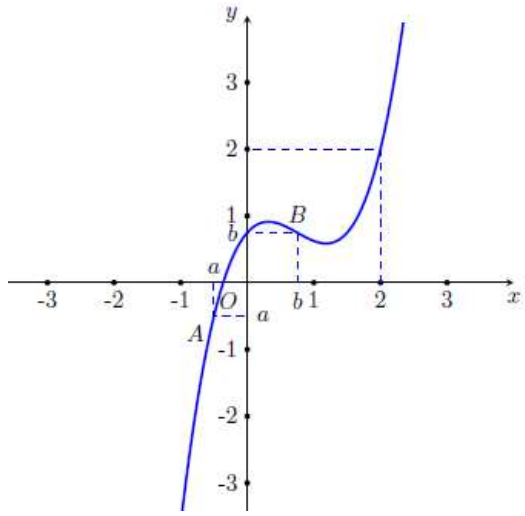
Ta có: $f(\sin x+\cos x)+2=0\Leftrightarrow f(\sin x+\cos x)=-2$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=a<-2\,(\text{Vô nghiệm})\\ \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1\\ \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=b\in(0;1)\end{array}\right.$. Với $x\in[0;2\pi]$ thì $x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{9\pi}{4}\right]$.

Lúc đó: $\left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1\\ \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=b\in(0;1)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{b}{\sqrt{2}}\in\left(0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\end{array}\right.\xrightarrow{\text{Dùng đường tròn lượng giác}}$ 4 nghiệm phân biệt trên $\left[\frac{\pi}{4};\frac{9\pi}{4}\right]$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

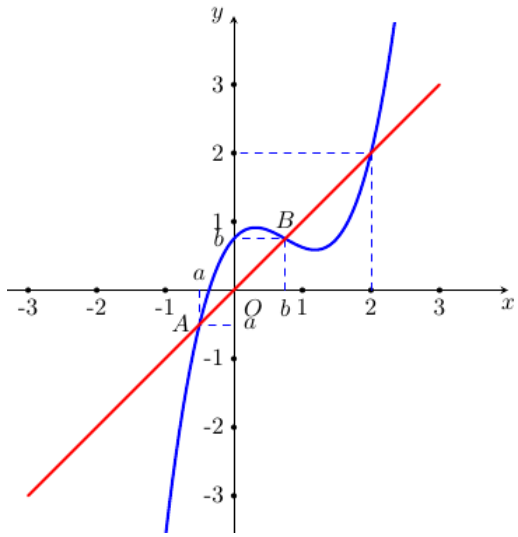
Câu 46: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ:



Số nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2};3\pi\right)$ của phương trình $f\left(\cos x+1\right)=\cos x+1$ là

A. 2. B. 3. C. 5. D. 4.

Lời giải:



Từ đồ thị ta có $f\left(x\right)=x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\in\left(-\infty;0\right) \\ x=b\in\left(0;1\right) \\ x=2 \end{array}\right.$

Do đó $f\left(\cos x+1\right)=\cos x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x+1=a\in\left(-\infty;0\right) \\ \cos x+1=b\in\left(0;1\right) \\ \cos x+1=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x=a-1=t_1\in\left(-\infty;-1\right) & (VN) \\ \cos x=b-1=t_2\in\left(-1;0\right) & (1) \\ \cos x=1 & (2) \end{array}\right.$

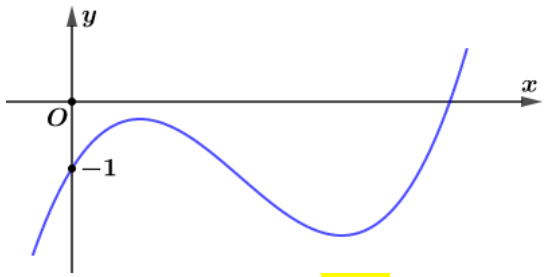
Dựa vào đường tròn lượng giác, phương trình (1) có 3 nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2};3\pi\right)$.

Phương trình (2) có 2 nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2};3\pi\right)$.

Vậy phương trình ban đầu có tất cả 5 nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2};3\pi\right)$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 47: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^3 f(x)\right)+1=0$ là



A. 8. B. 5. C. 6. D. 4.

Lời giải:

$f\left(x^3 f(x)\right)+1=0 \Leftrightarrow f\left(x^3 f(x)\right)=-1 \ (*)$

Dựa vào đồ thị, $(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{lll} x^3 f(x)=0 & (1) & \\ x^3 f(x)=a & (2) & (2<a<3) \\ x^3 f(x)=b & (3) & (5<b<6) \end{array}\right.$.

$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=0 & \\ x=x_1 & (5<x_1<6) \end{array}\right.$.

Xét (2): dễ thấy $x=0$ không là nghiệm. Với $x \neq 0$, $(2) \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{a}{x^3}$.

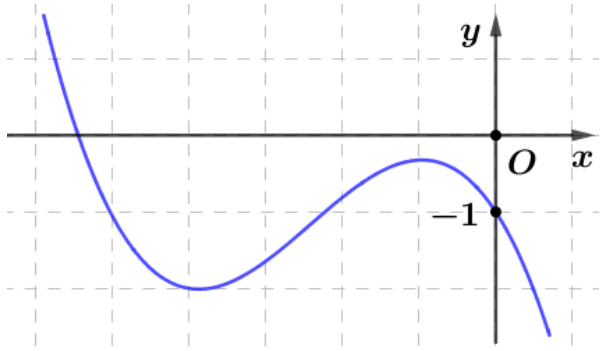
Vẽ đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{a}{x^3}$ $(2<a<3)$ và hàm số $y=f(x)$ trên cùng hệ trục tọa độ suy ra phương trình có 2 nghiệm.

Tương tự xét phương trình (3) phương trình có 2 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 48: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^3 f(x)\right)+1=0$ là

A. 6. B. 4. C. 5. D. 8.

Lời giải:

Ta có $f\left(x^3f(x)\right)+1=0 \Leftrightarrow f\left(x^3f(x)\right)=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^3f(x)=a\ (-3<a<-1) & (1) \\ x^3f(x)=b\ (-5<b<-3) & (2) \\ x^3f(x)=0 & (3) \end{array}\right.$, với $a,b<0$.

+ Với $m<0$, xét phương trình $x^3f(x)=m \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{m}{x^3}$.

Đặt $g(x)=\dfrac{m}{x^3}$, $g'(x)=\dfrac{-3m}{x^4}>0, \forall x\neq 0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	‖	$+$	
$g(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

Dựa vào bảng biến thiên và đề bài, suy ra trong mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$ phương trình $f(x)=g(x)$ có đúng một nghiệm.

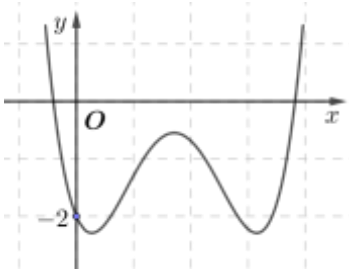
Suy ra mỗi phương trình (1) và (2) có 2 nghiệm.

+ Xét $(3): x^3f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=c<0 \end{array}\right.$, với c khác các nghiệm của (1) và (2).

Vậy phương trình $f\left(x^3f(x)\right)+1=0$ có đúng 6 nghiệm.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 49: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^2f(x)\right)=2$ là



A. 8. B. 12. C. 6. D. 9.

Lời giải:

Ta có $f\left(x^2f(x)\right)+2=0 \Leftrightarrow f\left(x^2f(x)\right)=-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2f(x)=a & (1) \\ x^2f(x)=b & (2) \\ x^2f(x)=c & (3) \\ x^2f(x)=0 & (4) \end{array}\right.$, với $a,b,c>0$.

+ Với $m>0$, xét phương trình $x^2f(x)=m \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{m}{x^2}$ $(*)$.

Xét hàm số $g(x)=\frac{m}{x^2}, m>0$, ta có $g'(x)=\frac{-2m}{x^3}, \forall x\neq 0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0; \lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=+\infty; \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=+\infty$.

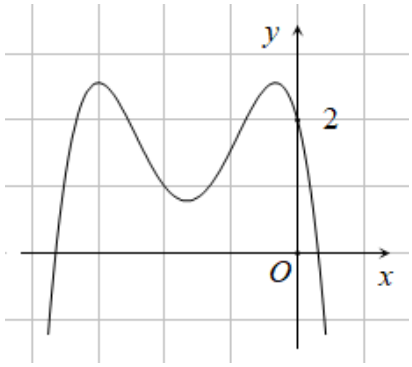
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	‖	$-$	
$g(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

Dựa vào bảng biến thiên và hình vẽ, suy ra trong mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và khoảng $(0;+\infty)$ phương trình $f(x)=g(x)$ có đúng một nghiệm. Do đó phương trình $(*)$ có đúng 2 nghiệm.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 50: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x^2 f(x)\right)-2=0$ là

A. 6. B. 12. C. 8. D. 9.

Lời giải:

Ta có $f\left(x^2 f(x)\right)-2=0 \Leftrightarrow f\left(x^2 f(x)\right)=2$.

Dựa vào đồ thị ta thấy: $\left[\begin{array}{ll} x^2 f(x)=0 & (1) \\ x^2 f(x)=a(-1<a<0) & (2) \\ x^2 f(x)=b(-3<b<-2) & (3) \\ x^2 f(x)=c(-4<c<-3) & (4) \end{array}\right.$.

Giải $(1)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=x_1 \\ x=x_2 \end{array}\right.$ (có 3 nghiệm phân biệt).

Giải $(2)\Leftrightarrow f(x)=\frac{a}{x^2}$.

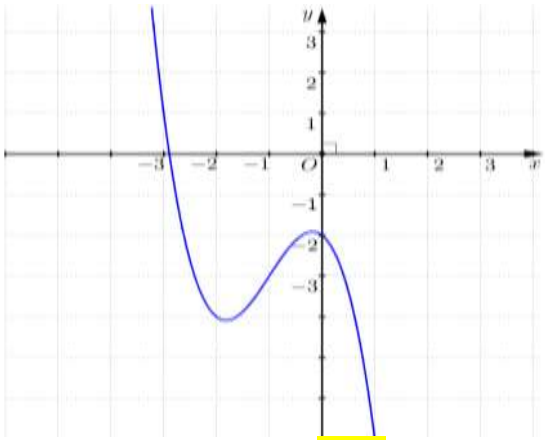
Vẽ đồ thị hàm số $y=\frac{a}{x^2}$ lên cùng hệ tọa độ Oxy. Ta thấy đồ thị hàm số $y=\frac{a}{x^2}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 2 nghiệm phân biệt.

Tương tự với (3) và (4) đều có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy có phương trình $f\left(x^2 f\left(x\right)\right)=2$ có 9 nghiệm phân biệt.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 51: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^5 f\left(x\right)\right)+2=0$ là



A. 8. B. 5. C. 6. D. 4.

Lời giải:

$f\left(x^5 f\left(x\right)\right)+2=0 \Leftrightarrow f\left(x^5 f\left(x\right)\right)=-2 \quad (*)$

Dựa vào đồ thị, $(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{lll} x^5 f\left(x\right)=0 & (1) & \\ x^5 f\left(x\right)=a & (2) & \left(-1<a<0\right) \\ x^5 f\left(x\right)=b & (3) & \left(-3<b<-2\right) \end{array}\right.$.

$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f\left(x\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=0 & \\ x=x_1 & \left(-3<x_1<-2\right) \end{array}\right.$.

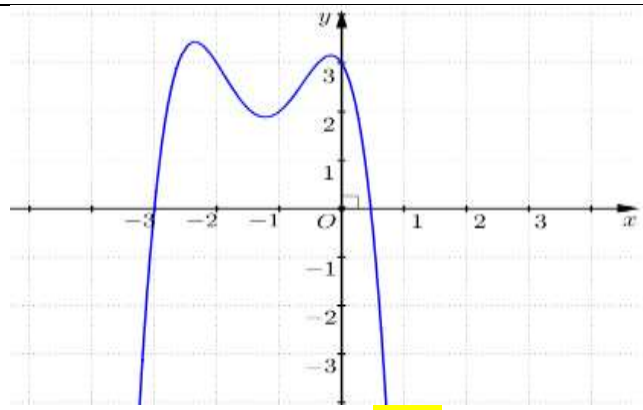
Xét (2): dễ thấy $x=0$ không là nghiệm. Với $x\neq 0$, $(2) \Leftrightarrow f\left(x\right)=\dfrac{a}{x^5}$.

Vẽ đồ thị hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{a}{x^5} \quad \left(-1<a<0\right)$ và hàm số $y=f\left(x\right)$ trên cùng hệ trục tọa độ suy ra phương trình có 2 nghiệm. Tương tự xét phương trình (3) phương trình có 2 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 52: Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(\left(x+2\right)^2 f\left(x\right)\right)-3=0$ là



A. 8. B. 6. C. 9. D. 12.

Lời giải:

$f\left(\left(x+2\right)^2 f\left(x\right)\right)-3=0 \Leftrightarrow f\left(\left(x+2\right)^2 f\left(x\right)\right)=3 \ (*)$

Ta có: $f\left(\left(x+2\right)^2 f\left(x\right)\right)=3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\left(x+2\right)^2 f\left(x\right)=0\\ \left(x+2\right)^2 f\left(x\right)=a<0\\ \left(x+2\right)^2 f\left(x\right)=b<0\\ \left(x+2\right)^2 f\left(x\right)=c<0\end{array}\right.$.

Xét phương trình: $\left(x+2\right)^2 f\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2\\ f\left(x\right)=0\end{array}\right.$ mà $f\left(x\right)=0$ có hai nghiệm $\Rightarrow \left(x+2\right)^2.f\left(x\right)=0$ có ba nghiệm.

Xét phương trình: $\left(x+2\right)^2 f\left(x\right)=a<0$

Do $\left(x+2\right)^2 \ge 0$; $x=-2$ không là nghiệm của phương trình $\Rightarrow f\left(x\right)=\dfrac{a}{\left(x+2\right)^2}<0$

Xét $g\left(x\right)=\dfrac{a}{\left(x+2\right)^2} \Rightarrow g'\left(x\right)=\dfrac{-2a}{\left(x+2\right)^3}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	‖	$+$	
$g(x)$	0 ↘	$-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0

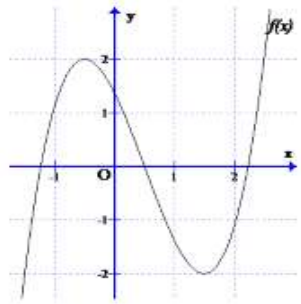
Từ bảng biến thiên với $f\left(x\right)<0 \Rightarrow f\left(x\right)=\dfrac{a}{\left(x+2\right)^2}$ có 2 nghiệm.

Tương tự: $\left(x+2\right)^2 f\left(x\right)=b$ và $\left(x+2\right)^2 f\left(x\right)=c$ $\left(b,c<0\right)$ mỗi phương trình cũng có hai nghiệm.

Vậy số nghiệm của phương trình $f\left(\left(x+2\right)^2 f\left(x\right)\right)=3$ là 9 nghiệm.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 53: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ sau:

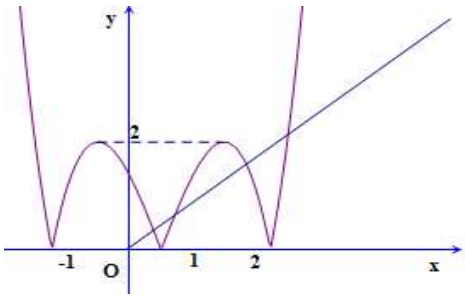


Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(\left|f\left(x\right)\right|\right)\right|-\left|f\left(x\right)\right|=0$ là

A. 20. B. 24. C. 10. D. 4.

Lời giải:

Đặt $\left|f\left(x\right)\right|=t\geq 0$. Khi đó phương trình trở thành: $\left|f\left(t\right)\right|=t,\left(1\right)$.



Từ đồ thị hàm số ta có:

Phương trình $\left(1\right)$ có 4 nghiệm $\left[\begin{array}{l} t=a,\left(0<a<1\right) \\ t=b,\left(a<b<1\right) \\ t=c,\left(1<c<2\right) \\ t=d,\left(2<d\right) \end{array}\right.$

Khi đó các phương trình $\left|f\left(x\right)\right|=a,\left|f\left(x\right)\right|=b,\left|f\left(x\right)\right|=c$ mỗi phương trình có 6 nghiệm phân biệt không trùng nhau. Phương trình $\left|f\left(x\right)\right|=d$ có 2 nghiệm phân biệt không trùng với nghiệm của 3 phương trình trên.

Vậy phương trình đã cho có 20 nghiệm phân biệt.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

DẠNG 2: BÀI TOÁN THAM SỐ

Câu 54: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$ ↘		-1 || $-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$

Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $f\left(x\right)=m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

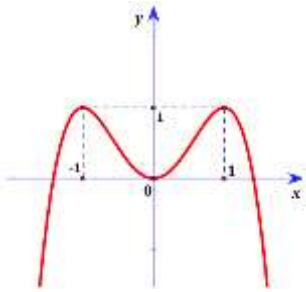
A. $[-1;2]$. B. $(-1;2)$. C. $(-1;2]$. D. $(-\infty;2]$.

Lời giải:

Dựa vào bảng biến thiên đã cho, phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-1<m<2$ hay $m\in(-1;2)$ vì lúc đó, đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại ba điểm phân biệt.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 55: Cho hàm số $y=-x^4+2x^2$ có đồ thị như hình bên dưới:



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $-x^4+2x^2=m$ có bốn nghiệm thực phân biệt

A. $m>0$. B. $0\le m\le 1$. C. $0<m<1$. D. $m<1$.

Lời giải:

Số nghiệm thực của phương trình $-x^4+2x^2=m$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^4+2x^2$ và đường thẳng $y=m$. Dựa vào đồ thị suy ra $-x^4+2x^2=m$ có bốn nghiệm thực phân biệt khi $0<m<1$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 56: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm phân biệt là

A. $(4;+\infty)$. B. $(-\infty;-2)$. C. $[-2;4]$. D. $(-2;4)$.

Lời giải:

+) Số nghiệm của phương trình $f(x)=m$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=m$.

+) Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ suy ra $f(x)=m$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m\in(-2;4)$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 57: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3+3x^2-2=m$ có ba nghiệm phân biệt.

A. $m\in(2;+\infty]$. B. $m\in(-\infty;-2]$. C. $m\in(-2;2)$. D. $m\in[-2;2]$.

Lời giải:

Xét hàm số $y=x^3+3x^2-2$, $y'=3x^2+6x$.

Lập bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $x^3+3x^2-2=m(*)$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-2$ và đường thẳng $y=m$.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra PT (*) có 3 nghiệm phân biệt khi $-2<m<2$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 58: Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+m^2-1$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

A. $m>1$. B. $-1\le m\le 1$. C. $m\le -1$. D. $\left[\begin{array}{l} m\le -1 \\ m\ge 1 \end{array}\right.$.

Lời giải:

Xét phương trình: $x^4-2mx^2+m^2-1=0\ (*)$

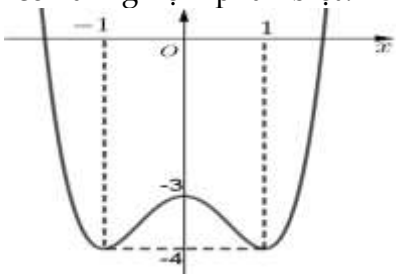
Đặt $x^2=t\ (t\ge 0)$. Khi đó phương trình (*) trở thành $t^2-2mt+m^2-1=0\ (**)$

Để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+m^2-1$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (**) có hai nghiệm phân biệt dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ S>0 \\ P>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1>0 \\ 2m>0 \\ m^2-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m>1$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 59: Cho hàm số $y=x^4-2x^2-3$ có đồ thị hàm số như hình bên dưới. Với giá trị nào của tham số m phương trình $x^4-2x^2-3=2m-4$ có hai nghiệm phân biệt?



A. $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m>\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$. B. $0<m<\dfrac{1}{2}$. C. $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$. D. $m\le\dfrac{1}{2}$.

Lời giải:

Số nghiệm của phương trình $x^4-2x^2-3=2m-4$ bằng số giao điểm của đường thẳng $y=2m-4$ và đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2-3$.

Dựa vào đồ thị ta có phương trình $x^4-2x^2-3=2m-4$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$\left[\begin{array}{l} 2m-4=-4 \\ 2m-4>-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m>\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 60: Hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ $(a,\ b,\ c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	2	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $|f(x)|=3m$ có đúng 8 nghiệm phân biệt?

A. Vô số. B. 1. C. 4. D. 2.

Lời giải:

+) Lấy đối xứng phần đồ đồ thị phía dưới Ox của hàm số $y=f(x)$ qua trục Ox.

+) Bỏ phần đồ thị $y=f(x)$ phía dưới Ox.

Khi đó ta có đồ thị hàm số $y=|f(x)|$.

x	$-\infty$		x_1		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		x_2		0		x_3		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		x_4		$+\infty$
$f'(x)$				-	0	+			0	-			0			+	
$\lvert f(x)\rvert$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0	↗	2	↘	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $|f(x)|=3m$ là số giao điểm của 2 đồ thị $y=|f(x)|$ và $y=m$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy đồ thị $y=|f(x)|$ cắt đường thẳng $y=m$ tại 8 điểm phân biệt khi và chỉ khi $0<m<2$. Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=1$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 61: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-1 ‖ $-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$

Tất cả giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị của hàm số $y=f(x)+m$ cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt là

A. $(-2;1]$. B. $(-1;2)$. C. $[-1;2)$. D. $(-2;1)$.

Lời giải:

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $f(x)+m=0 \Leftrightarrow f(x)=-m\ (*)$.

Số giao điểm giữa đường thẳng $y=-m$ và đồ thị $y=f(x)$ cũng chính là số nghiệm của phương trình $(*)$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y=-m$ cắt đồ thị $y=f(x)$ tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi $-1<-m<2$ hay $-2<m<1$. Vậy $-2<m<1$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 62: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $f(x)-1=m$ có đúng hai nghiệm.

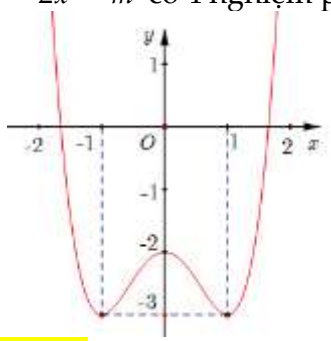
A. $m>0,\ m=-1$. B. $-2<m<-1$. C. $m\ge -1,\ m=-2$. D. $m>-1,\ m=-2$.

Lời giải:

Ta có $f(x)-1=m \Leftrightarrow f(x)=1+m$. Để phương trình có hai nghiệm thì $\left[\begin{array}{l} m+1=-1 \\ m+1>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m>-1 \end{array}\right.$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 63: Đường cong trong hình vẽ là đồ thị của hàm số $y=x^4-2x^2-2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^4-2x^2=m$ có 4 nghiệm phân biệt.



A. $m<-2$. B. $-1<m<0$. C. $m>-3$. D. $-3<m<-2$.

Lời giải:

Phương trình đã cho tương đương $x^4-2x^2-2=m-2$ (1).

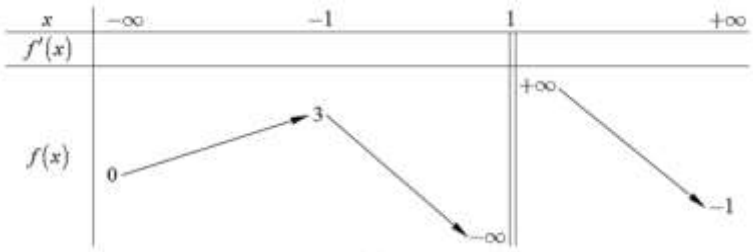
Số nghiệm của phương trình (1) chính là số giao điểm của đường thẳng $d: y=m-2$ (song song hoặc trùng với trục hoành) và đồ thị hàm số $(C): y=x^4-2x^2-2$.

Do đó (1) có 4 nghiệm phân biệt khi d cắt (C) tại 4 điểm phân biệt.

Dựa vào đồ thị suy ra $-3<m-2<-2 \Leftrightarrow -1<m<0$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 64: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:



Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có 3 nghiệm phân biệt là

A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Lời giải:

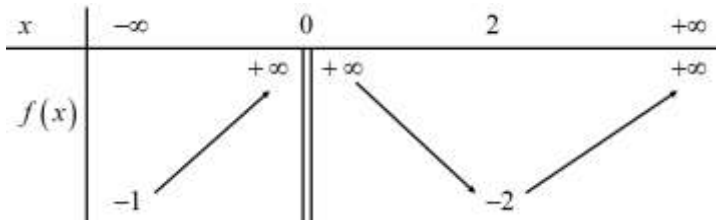
Ta có số nghiệm của phương trình $f(x)=m$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=m$.

Do đó, dựa vào bảng biến thiên ta thấy, phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0<m<3$. Kết hợp điều kiện $m\in\mathbb{Z}$ suy ra $m\in\{1;2\}$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 65: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x)+m=0$ có hai nghiệm phân biệt là

A. $(-\infty;2)$. B. $[1;2)$. C. $(1;2)$. D. $(-2;+\infty)$.

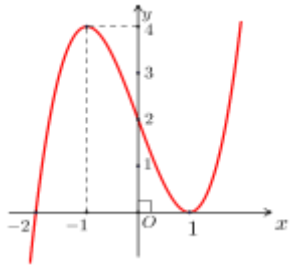
Lời giải:

$f(x)+m=0 \Leftrightarrow f(x)=-m$

Phương trình $f(x)=-m$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y=-m$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow -2<-m\le -1 \Leftrightarrow 1\le m<2$. Vậy $m\in[1;2)$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

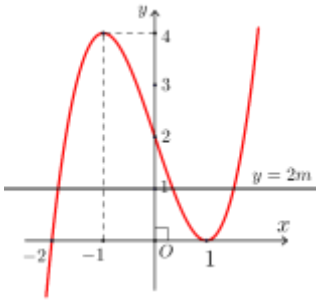
Câu 66: Cho hàm số $y=x^3-3x+2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3-3x+2-2m=0$ có ba nghiệm thực phân biệt.

A. $0<m<4$. B. $0<m<2$. C. $0\le m\le 4$. D. $0\le m\le 2$.

Lời giải:



Số nghiệm của phương trình $x^3-3x+2-2m=0$ là số giao điểm của đồ thị $y=x^3-3x+2$ và đường thẳng $y=2m$.

Nhìn vào đồ thị suy ra phương trình có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 0<2m<4 \Leftrightarrow 0<m<2$.

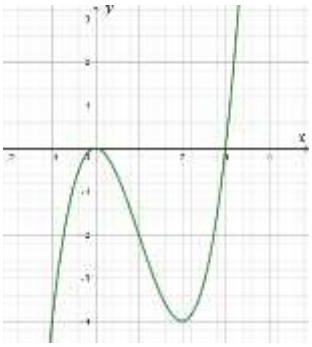
$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 67: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2$. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $g(x)=f(|x|)+m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

A. 3. B. 10. C. 4. D. 6.

Lời giải:

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2$. Ta có đồ thị hàm số $y=f(x)$ như sau:



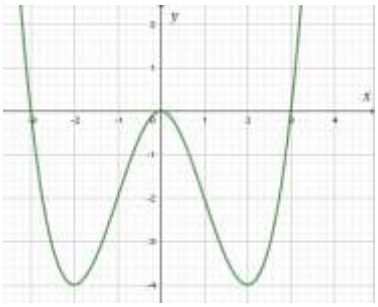
Như ta đã biết: để vẽ đồ thị hàm số $y=f(|x|)$ từ đồ thị $y=f(x)$ ta thực hiện:

Bước 1: Giữ nguyên phần đồ thị $y=f(x)$ gồm các điểm bên phải và các điểm nằm trên trục Oy; bỏ phần đồ thị bên trái trục Oy. Ta được phần đồ thị P_1

Bước 2: Lấy đối xứng phần đồ thị P_1 qua trục Oy ta được phần đồ thị P_2

Khi đó: Đồ thị $y=f(|x|)$ bao gồm đồ thị P_1 và P_2.

Từ đó ta có đồ thị hàm số $y=f(|x|)=|x|^3-3|x|^2$ như sau:

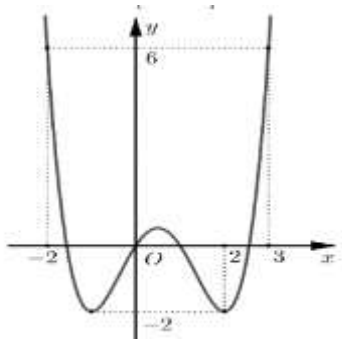


Để đồ thị hàm số $g(x)=f(|x|)+m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt thì phương trình $g(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt. Do đó phương trình $f(|x|)=-m$ có 4 nghiệm phân biệt hay đường thẳng $y=-m$ cắt đồ thị hàm số $y=f(|x|)=|x|^3-3|x|^2$ tại 4 điểm phân biệt.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(|x|)$ suy ra bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi $-4<-m<0 \Leftrightarrow 0<m<4$. Kết hợp yêu cầu đề bài $m\in\mathbb{Z}$, do đó $m\in\{1;2;3\}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 68: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x^3-3x)=m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$?



A. 3. B. 2. C. 6. D. 7.

Lời giải:

Đặt $t=x^3-3x$, với $x\in[-1;2]$ ta có bảng biến thiên

x	-1		1		2
t'		$-$	0	$+$	
t	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2

Với $t\in(-2;2]$ thì có 2 nghiêm $x\in[-1;2]$

Để phương trình có 6 nghiệm thì phương trình $f(t)=m$ có 3 nghiệm $t\in(-2;2]$

Dựa vao đồ thị ta có $m=0; m=1$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 69: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\frac{1}{3}|\cos^3 x|-3\cos^2 x+5|\cos x|-3+2m=0$ có đúng bốn nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$.

A. $-\frac{3}{2}<m<-\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{3}\le m<\frac{3}{2}$. C. $\frac{1}{3}<m<\frac{3}{2}$. D. $-\frac{3}{2}\le m\le-\frac{1}{3}$.

Lời giải:

Đặt $|\cos x|=t\ge 0$

Phương trình: $\frac{1}{3}|\cos^3 x|-3\cos^2 x+5|\cos x|-3+2m=0$ có đúng bốn nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}t^3-3t^2+5t-3+2m=0$ có 1 nghiệm $t\in(0;1)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t - 3 = -2m$ có 1 nghiệm $t \in (0;1)$

Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t - 3$ với $t \in (0;1)$. Ta có $f'(t) = t^2 - 6t + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 5 \end{array}\right.$

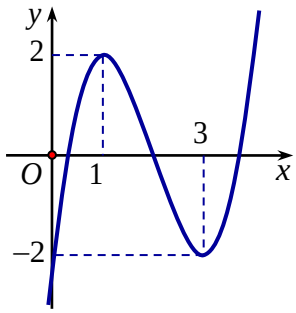
Bảng biến thiên:

x	0		1		5
y'		+			
y	-3	↗	$-\frac{2}{3}$		

Vậy $-3 < -2m < -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{2} > m > \frac{1}{3}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 70: Cho đồ thị của hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ như hình vẽ.



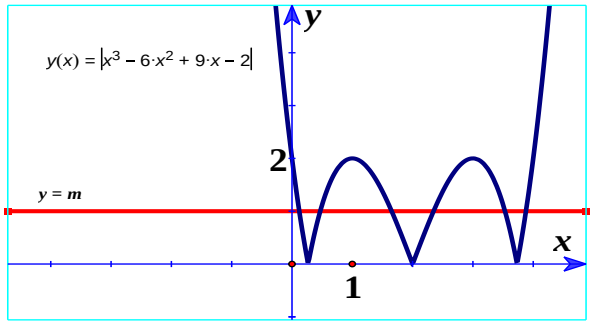
Khi đó phương trình $\left|x^3 - 6x^2 + 9x - 2\right| = m$ (m là tham số) có 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi.

A. $-2 \le m \le 2$. B. $0 < m < 2$. C. $0 \le m \le 2$. D. $-2 < m < 2$.

Lời giải:

+) Đồ thị hàm số $y = \left|x^3 - 6x^2 + 9x - 2\right|$ có được bằng cách biến đổi đồ thị (C) hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$:

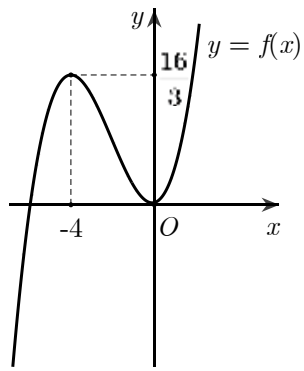
- Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm trên trục hoành.
- Lấy đối xứng phần đồ thị của (C) phần dưới trục hoành qua trục hoành.
- Xóa phần đồ thị còn lại của (C) phía dưới trục hoành.



+) Số nghiệm của phương trình $\left|x^3-6x^2+9x-2\right|=m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left|x^3-6x^2+9x-2\right|$ và đồ thị hàm số $y=m$. Để phương trình có 6 nghiệm phân biệt thì điều kiện cần và đủ là $0<m<2$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 71: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|\dfrac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\right|\right)=f\left(m^2+4m+4\right)$ (1) có nghiệm?

A. 3. B. 4. C. 5. D. Vô số.

Lời giải:

Đặt $t=\dfrac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\Leftrightarrow(2t+1)\cos x-(t+3)\sin x=-1-4t$ $(*)$.

Phương trình $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow(2t+1)^2+(t+3)^2\ge(4t+1)^2\Leftrightarrow-\dfrac{9}{11}\le t\le 1$.

Suy ra $0\le|t|\le 1$.

Từ đồ thị $y=f(x)$ ta có

* $y=f(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$

* $m^2+4m+4=(m+2)^2\in[0;+\infty)$.

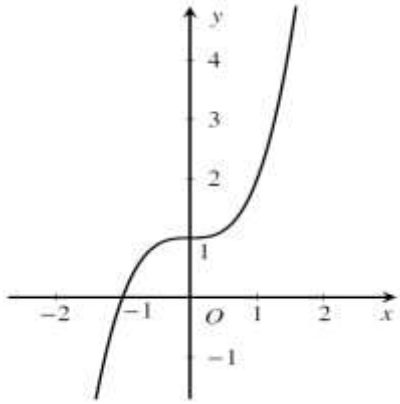
* $|t|\in[0;+\infty)$

Nên $f\left(\left|\dfrac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\right|\right)=f\left(m^2+4m+4\right)\Leftrightarrow f(|t|)=f\left(m^2+4m+4\right)\Leftrightarrow|t|=m^2+4m+4$ Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow 0\le m^2+4m+4\le 1\Leftrightarrow m^2+4m+4\le 1\Leftrightarrow -3\le m\le -1$.

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-3;-2;-1\}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 72: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của n để phương trình $f\left(16\cos^2 x+6\sin 2x-8\right)=f\left(n\left(n+1\right)\right)$ có nghiệm $x\in\mathbb{R}$?

A. 10. B. 4. C. 8. D. 6.

Lời giải:

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó: $f\left(16\cos^2 x+6\sin 2x-8\right)=f\left(n\left(n+1\right)\right)\Leftrightarrow 16\cos^2 x+6\sin 2x-8=n\left(n+1\right)$

$\Leftrightarrow 16.\dfrac{1+\cos 2x}{2}+6\sin 2x-8=n\left(n+1\right)\Leftrightarrow 8\cos 2x+6\sin 2x=n\left(n+1\right)$

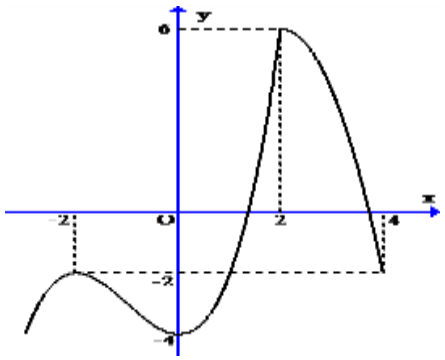
Phương trình có nghiệm $x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 8^2+6^2\ge n^2\left(n+1\right)^2\Leftrightarrow n^2\left(n+1\right)^2\le 100$

$\begin{cases}n\left(n+1\right)\ge -10\\ n\left(n+1\right)\le 10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n^2+n+10\ge 0\\ n^2+n-10\le 0\end{cases}\Leftrightarrow n^2+n-10\le 0\Leftrightarrow\dfrac{-1-\sqrt{41}}{2}\le n\le\dfrac{-1+\sqrt{41}}{2}$.

Vì $n\in\mathbb{Z}$ nên $n\in\left\{-3;-2;-1;0;1;2\right\}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 73: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\dfrac{1}{3}f\left(\dfrac{x}{2}+1\right)+x=m$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[-2;2\right]$?

A. 11. B. 9. C. 8. D. 10.

Lời giải:

Đặt $t=\dfrac{x}{2}+1$, khi $-2\le x\le 2$ thì $0\le t\le 2$.

Phương trình đã cho trở thành $\dfrac{1}{3}f\left(t\right)+2t-2=m\Leftrightarrow f\left(t\right)+6t-6=3m$.

Xét hàm số $g\left(t\right)=f\left(t\right)+6t-6$ trên đoạn $\left[0;2\right]$.

Ta có $g'(t)=f'(t)+6$. Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ nên $f'(t)>0,\forall t\in(0;2)$ $\Rightarrow g'(t)>0,\forall t\in(0;2)$ và $g(0)=-10$; $g(2)=12$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(t)$ trên đoạn $[0;2]$

t	0		2
$g'(t)$		+	
$g(t)$	-10	↗	12

Phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn $[-2;2]$ khi và chỉ khi phương trình $g(t)=3m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;2]$ hay $-10\le 3m\le 12$ $\Leftrightarrow -\dfrac{10}{3}\le m\le 4$.

Mặt khác m nguyên nên $m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$. Vậy có 8 giá trị m thoả mãn bài toán.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 74: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây:

x	$-\infty$		-1		x_1		x_2		x_3		1		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	0	−	0	+	0	−		−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	1	↘	-1	↗	2	↘	0	↘	$-\infty$

Để phương trình $3f(2x-1)=m-2$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $[0;1]$ thì giá trị của tham số m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-3)$. B. $(1;6)$. C. $(6;+\infty)$. D. $(-3;1)$.

Lời giải:

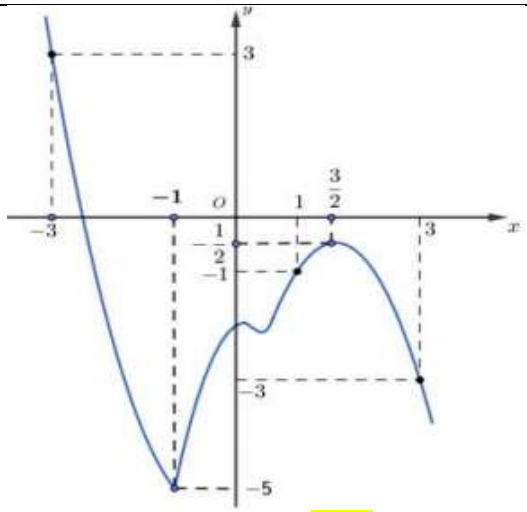
Đặt $t=2x-1$. Ta thấy t là hàm đồng biến theo x và $x\in[0;1]\Leftrightarrow t\in[-1;1]$.

Do đó phương trình $3f(2x-1)=m-2$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $[0;1]$ $\Leftrightarrow f(t)=\dfrac{m-2}{3}$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $[-1;1]$.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $\dfrac{m-2}{3}=1\Leftrightarrow m=5$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 75: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)+1+m^2=0$ có nghiệm là



A. 6 . B. 4 . C. 5 . D. 7 .

Lời giải:

Đặt $t=3-4\sqrt{6x-9x^2}=3-4\sqrt{1-(3x-1)^2}\Rightarrow t\in[-1;3]$.

Dựa vào đồ thị ta có khi $t\in[-1;3]$ thì $f(t)\in\left[-5;-\frac{1}{2}\right]$.

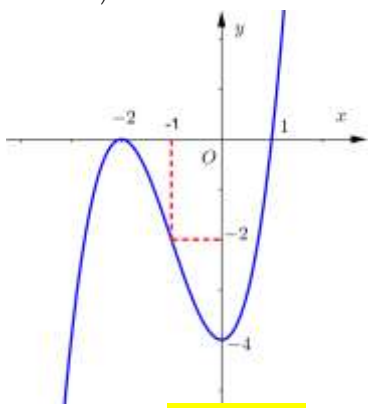
Khi đó phương trình $f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)+1+m^2=0$ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình

$f(t)=-1-m^2$ có nghiệm thuộc $[-1;3]\Leftrightarrow -5\le -1-m^2\le -\frac{1}{2}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le m^2\le 4\Leftrightarrow -2\le m\le 2$.

Kết hợp điều kiện $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-2;-1;0;1;2\}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 76: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{4-x^2}-1\right)=m$ có nghiệm là



A. $[-2;0]$. B. $[-4;-2]$. C. $[-4;0]$. D. $[-1;1]$.

Lời giải:

Đặt $t=\sqrt{4-x^2}-1$ với $x\in[-2;2]\Rightarrow t'=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$; $t'=0\Leftrightarrow x=0$

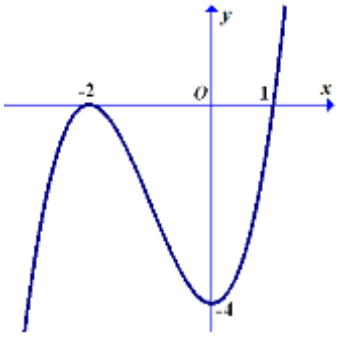
x	-2		0		$+2$
t'		$+$	0	$-$	
t	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

Khi đó ta đi tìm m để phương trình $f(t)=m$ có nghiệm trên $[-1;1]$

Dựa vào đồ thị trên $[-1;1]$, để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -4\le m\le 0$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 77: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên dưới.

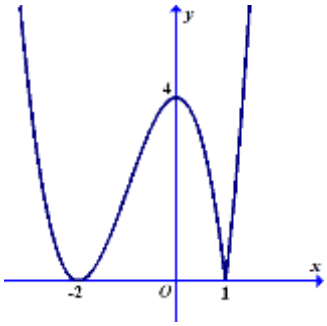


Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(x)-(m+5)|f(x)|+4m+4=0$ có 7 nghiệm phân biệt?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải:

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$, vẽ được đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ như sau:



Ta có $f^2(x)-(m+5)|f(x)|+4m+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}|f(x)|=4 & (1)\\ |f(x)|=m+1 & (2)\end{array}\right.$

Từ đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ suy ra phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy để phương trình đã cho có 7 nghiệm phân biệt thì (2) có 4 nghiệm phân biệt và khác với các nghiệm của (1) $\Leftrightarrow 0<m+1<4 \Leftrightarrow -1<m<3$. Do đó có 3 giá trị nguyên của m.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 78: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $(d): y=-x+m$ cắt đồ thị $(C): y=\dfrac{x+1}{1-x}$ tại 2 điểm phân biệt A,B sao cho $AB=2\sqrt{6}$.

A. $m=-2; m=2$. B. $m=-4; m=4$. C. $m=2$. D. $m=4$.

Lời giải:

Xét phương trình: $\frac{x+1}{1-x}=m-x \Rightarrow x+1=(m-x)(1-x)$.

$\Leftrightarrow x+1=m-mx-x+x^2 \Leftrightarrow x^2-(m+2)x-1+m=0(1)$.

Để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt A,B.

$\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=m^2+4m+4-4(-1+m)>0\\ 1-(m+2)-1+m\neq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}m^2+8>0\\ -2\neq 0\end{cases}$ luôn đúng với mọi $m\in\mathbb{R}$.

Gọi $A(x_A;m-x_A);B(x_B;m-x_B)\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;x_A-x_B)\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right|^2=AB^2=2.(x_B-x_A)^2$.

x_A,x_B là nghiệm của (1). Nên theo hệ thức viét ta có $\begin{cases}x_A+x_B=m+2\\ x_A.x_B=-1+m\end{cases}$

Ta có: $AB^2=24\Leftrightarrow 2.(x_B-x_A)^2=24\Leftrightarrow 2\left[(x_B+x_A)^2-4x_Ax_B\right]=24$.

$\Leftrightarrow (x_B+x_A)^2-4x_Ax_B=12\Leftrightarrow (m+2)^2-4(m-1)=12\Leftrightarrow m^2-4=0\Leftrightarrow m=\pm 2$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 79: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $y=-x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{x-2}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $OA+OB=4$?

A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Lời giải:

Ta có: $\frac{x-2}{x-1}=-x+m\Leftrightarrow \begin{cases}x\neq 1\\ x^2-mx+m-2=0(1)\end{cases}$

Đường thẳng $y=-x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{x-2}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases}-1\neq 0\\ m^2-4m+8>0\end{cases}\Leftrightarrow$ thỏa mãn với mọi số thực m.

Với mọi số thực m đường thẳng $y=-x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{x-2}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt $A(x_1;-x_1+m)$, $B(x_2;-x_2+m)$, trong đó x_1,x_2 là hai nghiệm phân biệt của (1).

Ta có: $OA=\sqrt{x_1^2+(-x_1+m)^2}=\sqrt{2(x_1^2-mx_1)+m^2}=\sqrt{2(-m+2)+m^2}=\sqrt{m^2-2m+4}$.

Tương tự ta được: $OB=\sqrt{m^2-2m+4}$.

Do đó: $OA+OB=4\Leftrightarrow m^2-2m=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=0\\ m=2\end{array}\right.$. Vậy có 2 giá trị thỏa mãn yêu cầu đề bài.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 80: Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d:y=x-m+2$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{2x}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho độ dài AB **ngắn nhất.**

A. $m=-3$. B. $m=3$. C. $m=1$. D. $m=-1$.

Lời giải:

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Xét phương trình: $x-m+2=\dfrac{2x}{x-1}\ (x\neq 1) \Leftrightarrow g(x)=x^2-(m+1)x+m-2=0 \qquad (1)$.

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B thì (1) có hai nghiệm phân biệt $x\neq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2+2m+1-4(m-2)=m^2-2m+9>0 \\ g(1)=-2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m\in\mathbb{R}.$$

Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của (1) thì $A(x_1;x_1-m+2)$, $A(x_2;x_2-m+2)$.

Khi đó $AB^2=2(x_1-x_2)^2=2\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]=2\left[(m+1)^2-4(m-2)\right]=2\left[(m-1)^2+8\right]\geq 16.$

Vậy AB ngắn nhất khi $m=1$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 81: Cho hàm số $f(x)=x^3+3x^2+mx+1$. Gọi S là tổng tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt đường thẳng $y=1$ tại ba điểm phân biệt $A(0;1)$, B, C sao cho các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại B, C vuông góc với nhau. Gía trị của S bằng

A. $\dfrac{9}{2}$. B. $\dfrac{9}{5}$. C. $\dfrac{9}{4}$. D. $\dfrac{11}{5}$.

Lời giải:

Xét phương trình: $x^3+3x^2+mx+1=1 \Leftrightarrow x(x^2+6x+m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+6x+m=0\ (*) \end{array}\right.$

Để đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt đồ thị hàm số $y=1$ tại ba điểm phân biệt $A(0;1)$, $B(x_1;y_1)$, $C(x_2;y_2)$ thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác $0 \Rightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \Delta=9-4m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m<\dfrac{9}{4} \end{cases}$.

Theo hệ thức Viet, ta có $\begin{cases} x_1+x_2=-3 \\ x_1.x_2=m \end{cases}$.

Để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại B, C vuông góc với nhau thì

$f'(x_1).f'(x_2)=-1 \Leftrightarrow (3x_1^2+6x_1+m).(3x_2^2+6x_2+m)=-1$

$\Leftrightarrow 9x_1^2x_2^2+18x_1x_2(x_1+x_2)+3m(x_1^2+x_2^2)+6m(x_1+x_2)+36x_1x_2+m^2+1=0$

$$\Leftrightarrow 4m^2-9m+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{9+\sqrt{65}}{8} \\ m=\dfrac{9-\sqrt{65}}{8} \end{array}\right. \Rightarrow S=\frac{9+\sqrt{65}}{8}+\frac{9-\sqrt{65}}{8}=\frac{9}{4}.$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 82: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2018;2019]$ để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+3$ và đường thẳng $y=3x+1$ có duy nhất một điểm chung?

A. 1. B. 2019. C. 4038. D. 2018.

Lời giải:

Xét phương trình: $x^3-3mx+3=3x+1 \Leftrightarrow x^3-3x+2=3mx \Leftrightarrow 3m=\dfrac{x^3-3x+2}{x}$ (1).

Xét hàm $f(x)=\dfrac{x^3-3x+2}{x}=x^2-3+\dfrac{2}{x}$; $f'(x)=2x-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{2x^3-2}{x^2}$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘		$-\infty$ || $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m<0$. Mà $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in[-2018;2019]$ nên có 2018 giá trị thỏa mãn.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 83: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để phương trình $(x-1)(x-2)(x-m)=0$ có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân tăng?

A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Lời giải:

Ta có: $(x-1)(x-2)(x-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=m \end{array}\right.$

Phương trình có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân tăng khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} 1.2=m^2 \\ 1.m=2^2 \\ 2.m=1^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\sqrt{2}\Rightarrow 1;\sqrt{2};2 \\ m=-\sqrt{2}\Rightarrow 1;-\sqrt{2};2\,(l) \\ m=4\Rightarrow 1;2;4 \\ m=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \dfrac{1}{2};1;2 \end{array}\right.$. Vậy có 3 giá trị m thỏa mãn.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 84: Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2x^3-3x^2=2m+1$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng

A. $-\dfrac{1}{2}$. B. $-\dfrac{3}{2}$. C. $-\dfrac{5}{2}$. D. $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải:

Xét hàm số: $y=2x^3-3x^2 \Rightarrow y'=6x^2-6x \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của hai đồ thị: $\begin{cases} (C): y=2x^3-3x^2 \\ d: y=2m+1 \end{cases}$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m+1=-1 \\ 2m+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow S=\left\{-1;-\frac{1}{2}\right\}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 85: Giá trị k thỏa mãn đường thẳng $d: y=kx+k$ cắt đồ thị (H): $y=\frac{x-4}{2x-2}$ tại 2 điểm phân biệt A và B cùng cách đều đường thẳng $y=0$. Khi đó k thuộc khoảng

A. $(-2;-1)$. B. $(1;2)$. C. $(-1;0)$. D $(0;1)$.

Lời giải:

Xét phương trình: $\frac{x-4}{2x-2}=kx+k \ (x\neq 1) \Leftrightarrow 2kx^2-x-2k+4=0 \ (x\neq 1)$

Đường thẳng d cắt (H) tại 2 điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi phương trình có 2 nghiệm phân biệt khác 1 $\Rightarrow \begin{cases} (-1)^2+2k(2k-4)>0 \\ 2k-1-2k+4\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4k^2-8k+1>0 \\ 3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>\frac{2+\sqrt{3}}{2} \\ x<\frac{2-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$

Gọi x_A, x_B là 2 nghiệm phương trình ta có $A(x_A;kx_A+k)$ và $B(x_B;kx_B+k)$ vì A, B cùng cách đều đường thẳng $y=0$ nên $kx_A+k=-(kx_B+k) \Leftrightarrow x_A+x_B=-2$.

Mà $x_A+x_B=\frac{1}{2k} \Rightarrow -2=\frac{1}{2k} \Rightarrow k=-\frac{1}{4}\in(-1;0)$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 86: Cho hàm số $y=\frac{x}{x-1}$ (C) và đường thẳng $d: y=-x+m$. Gọi S là tập hợp các số thực m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho tam giác OAB (O là gốc tọa độ) có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $2\sqrt{2}$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 8. B. 4. C. 1. D. 2.

Lời giải:

Xét phương trình: $\frac{x}{x-1}=-x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-mx+m=0 \ (*) \\ x\neq 1 \end{cases}$.

Để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A,B thì phương trình $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1 nên ta có $\begin{cases} \Delta=m^2-4m>0 \\ 1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>4 \\ m<0. \end{array}\right.$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $(*)$, ta có $x_1+x_2=m$.

Do đó $A(x_1;-x_1+m) \Leftrightarrow A(x_1;x_2)$, $B(x_2;-x_2+m) \Leftrightarrow B(x_2;x_1)$

+) $OA=OB=\sqrt{x_1^2+x_2^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}=\sqrt{m^2-2m}$. +) $h_O=d(O,d)=\frac{|m|}{\sqrt{2}}$.

Ta có $S_{OAB}=\frac{1}{2}AB.h_O=\frac{OA.OB.AB}{4R} \Leftrightarrow 2R.h_O=OA.OB \Leftrightarrow m^2-2m=4|m| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=6 \\ m=-2. \end{array}\right.$

Vậy tổng các phần tử của tập S bằng 4.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 87: Cho hàm số $y=x^4-(3m+2)x^2+3m$ có đồ thị là (C_m). Tìm m để đường thẳng $d: y=-1$ cắt đồ thị (C_m) tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2.

A. $-\frac{1}{3}<m<1$ và $m\neq 0$ B. $-\frac{1}{2}<m<1$ và $m\neq 0$

C. $-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{2}$ và $m\neq 0$ D. $-\frac{1}{3}<m<\frac{1}{2}$ và $m\neq 0$

Lời giải:

Xét phương trình: $x^4-(3m+2)x^2+3m=-1 \Leftrightarrow x^4-(3m+2)x^2+3m+1=0$

Đặt $t=x^2$, $(t\geq 0)$, phương trình trở thành $t^2-(3m+2)t+3m+1=0$ (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=3m+1 \end{array}\right.$

Đường thẳng $d: y=-1$ cắt đồ thị (C_m) tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2 khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $0<t_1<t_2<4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3m+1\neq 1 \\ 0<3m+1<4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ -\frac{1}{3}<m<1 \end{cases}.$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 88: Cho hai hàm số $y=x^2+x-1$ và $y=x^3+2x^2+mx-3$. Giá trị của tham số m để đồ thị của hai hàm số có 3 giao điểm phân biệt và 3 giao điểm đó nằm trên đường tròn bán kính bằng 3 thuộc vào khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-4)$. B. $(-4;-2)$. C. $(0;+\infty)$. D. $(-2;0)$.

Lời giải:

Giả sử m là số thực thỏa mãn bài toán.

Xét phương trình: $x^2+x-1=x^3+2x^2+mx-3 \Leftrightarrow x^3+x^2+(m-1)x-2=0$ (1).

Gọi $M(x_0;y_0)$ là một trong 3 giao điểm.

Ta có: $\begin{cases} y_0=x_0^2+x_0-1 \\ x_0^3+x_0^2+(m-1)x_0-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0^2=x_0^4+2x_0^3-x_0^2-2x_0+1 & (2) \\ x_0^3+x_0^2+(m-1)x_0-2=0 & (3) \end{cases}$.

Từ (2) và (3) suy ra

$$y_0^2=(x_0+1)\left[x_0^3+x_0^2+(m-1)x_0-2\right]+(-m-1)x_0^2-(m-1)x_0+3=(-m-1)x_0^2-(m-1)x_0+3.$$

Hay $y_0^2+x_0^2=-mx_0^2-(m-1)x_0+3=-m(y_0-x_0+1)-(m-1)x_0+3$.

Rút gọn ta được $x_0^2+y_0^2-x_0+my_0+m-3=0$ (4). Đây là phương trình đường tròn khi

$\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{2}\right)^2-m+3>0$ $(*)$.

Với điều kiện $(*)$ thì $M(x_0;y_0)$ thuộc đường tròn có bán kính $R=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{2}\right)^2-m+3}$.

Theo đề bài $R=3 \Leftrightarrow \frac{m^2+1}{4}-m+3=9 \Leftrightarrow m^2-4m-23=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2+3\sqrt{3} \\ m=2-3\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Thử lại.

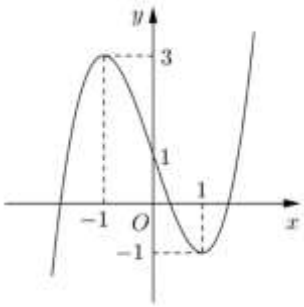
Với $m=2+3\sqrt{3}$ thì phương trình (1) có 1 nghiệm. Do đó, $m=2+3\sqrt{3}$ không thỏa mãn.

Với $m=2-3\sqrt{3}$ thì phương trình (1) có 3 nghiệm và cũng thỏa mãn $(*)$.

Vậy giá trị m cần tìm là $m=2-3\sqrt{3}\in(-4;-2)$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 89: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sin x)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ là



A. $[-1;3)$. B. $(-1;1)$. C. $(-1;3)$. D. $[-1;1)$.

Lời giải:

Đặt $t=\sin x$. Với $x\in(0;\pi)$ thì $t\in(0;1]$.

Do đó phương trình $f(\sin x)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t)=m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $(0;1]$.

Quan sát đồ thị ta suy ra điều kiện của tham số m là $m\in[-1;1)$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 90: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Tập hợp các giá trị m để phương trình $f(\cos 2x)-2m-1=0$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{-\pi}{3};\frac{\pi}{4}\right)$ là

A. $\left[0;\frac{1}{2}\right]$. B. $\left(0;\frac{1}{2}\right]$. C. $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$. D. $\left(\frac{-2+\sqrt{2}}{4};\frac{1}{4}\right)$.

Lời giải:

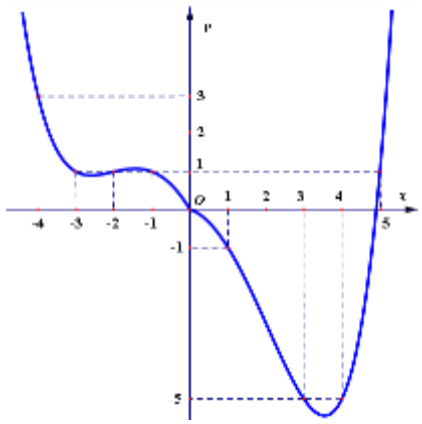
Đặt $\cos 2x=t, x\in\left(\frac{-\pi}{3};\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow t\in\left(-\frac{1}{2};1\right]$.

Yêu cầu đề bài tương đương với phương trình $f(t)=2m+1$ có nghiệm $t\in\left(-\frac{1}{2};1\right]$.

Từ bảng biến thiên suy ra yêu cầu $\Leftrightarrow 1\le 2m+1\le 2\Leftrightarrow 0\le m\le\frac{1}{2}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 91: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2.f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)=m-3$ có nghiệm.



A. 13. B. 12. C. 8. D. 10.

Lời giải:

Với $x\in\left[0;\frac{2}{3}\right]$, ta có $0\le\sqrt{6x-9x^2}=\sqrt{1-(1-3x)^2}\le 1\Leftrightarrow 0\ge -4\sqrt{6x-9x^2}\ge -4$

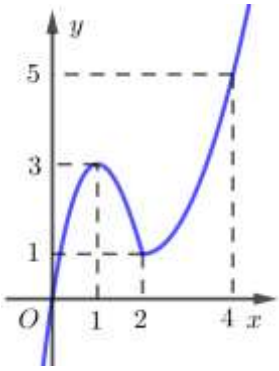
$\Leftrightarrow 3\ge 3-4\sqrt{6x-9x^2}\ge -1$. Dựa vào đồ thị đã cho suy ra $f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)\in[-5;1]$.

Khi đó phương trình $2.f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)=m-3$ có nghiệm $\Leftrightarrow -5\le\frac{m-3}{2}\le 1\Leftrightarrow -7\le m\le 5$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;5\}$, có 13 giá trị của m thỏa đề.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 92: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình: $f\left[4\left(\sin^4x+\cos^4x\right)\right]=m$ có nghiệm.



A. 2. B. 4. C. 3. D. 5.

Lời giải:

Đặt $t=4\left(\sin^4x+\cos^4x\right)=4-2\sin^2 2x\Rightarrow t\in[2;4]$.

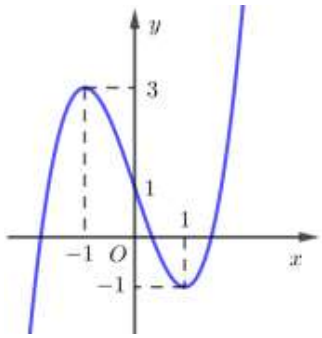
Do đó phương trình $f\left[4\left(\sin^4x+\cos^4x\right)\right]=m$ có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $f(t)=m$ có nghiệm trên đoạn $[2;4]$.

Dựa vào đồ thị đã cho ta thấy: phương trình $f(t)=m$ có nghiệm t với $t\in[2;4]\Leftrightarrow 1\le m\le 5$.

Vậy $m\in\{1;2;3;4;5\}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 93: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(\sin x))=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$.



A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải:

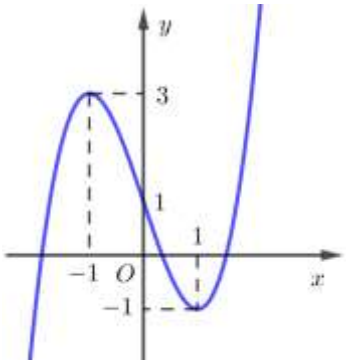
Đặt $t=f(\sin x)$, do $x\in(0;\pi)\Rightarrow \sin x\in(0;1]\Rightarrow t\in[-1;1)$.

Do đó phương trình $f(f(\sin x))=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t)=m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $[-1;1)$.

Quan sát đồ thị đã cho: yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m\in(-1;3]$.

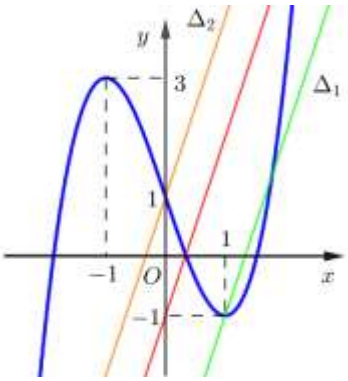
$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 94: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin x)=3\sin x+m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$. Tổng các phần tử của S bằng



A. -8. B. -10. C. -6. D. -5.

Lời giải:



Đặt $t=\sin x$, do $x\in(0;\pi)\Rightarrow \sin x\in(0;1]\Rightarrow t\in(0;1]$.

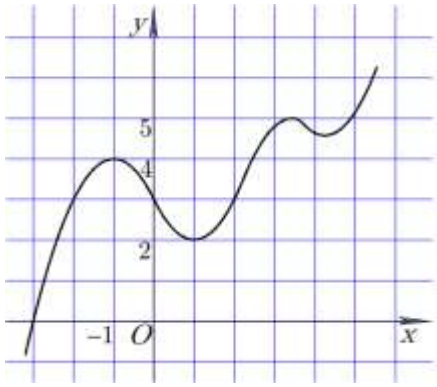
Gọi Δ_1 là đường thẳng qua điểm $(1;-1)$ và song song với đường thẳng $y=3x$ có phương trình $y=3x-4$.

Gọi Δ_2 là đường thẳng qua điểm $(0;1)$ và song song với đường thẳng $y=3x$ có phương trình $y=3x+1$.

Do đó phương trình $f(\sin x)=3\sin x+m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t)=3t+m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $(0;1] \Leftrightarrow -4\le m<1$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 95: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Tìm số giá trị nguyên của m để phương trình $f(x^2-2x)=m$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$.

A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.

Lời giải:

Đặt $t=x^2-2x$, $x\in\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$

Bảng biến thiên:

x	$\frac{-3}{2}$		1		$\frac{7}{2}$
t'		$-$	0	$+$	
t	$\frac{21}{4}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{21}{4}$

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow t\in\left[-1;\frac{21}{4}\right]$. Ta có: $f(x^2-2x)=m$ (1) $\Leftrightarrow f(t)=m$ (2).

Ta thấy, với mỗi giá trị $t\in\left(-1;\frac{21}{4}\right]$ ta tìm được hai giá trị của $x\in\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$.

Do đó, phương trình (1) có 4 nghiệm thực phân biệt thuộc $\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$

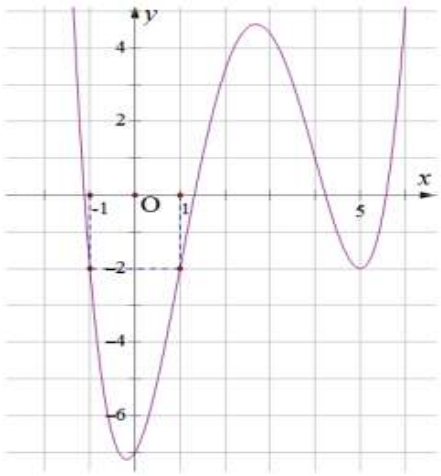
$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm thực phân biệt thuộc $\left(-1;\frac{21}{4}\right]$

$\Leftrightarrow$ Đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=f(t)$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ thuộc $\left(-1;\frac{21}{4}\right]$.

Dựa vào đồ thị ta thấy có hai giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu là $m=3$ và $m=5$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 96: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Tồn tại bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin x)=m$ có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $[0;\pi]$?

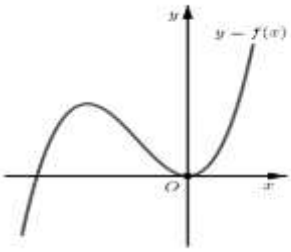
A. 4. B. 7. C. 5. D. 6.

Lời giải:

Đặt $t=\sin x$, $x\in[0;\pi]$ thì $t\in[0;1]$. Để phương trình $f(\sin x)=m$ có đúng hai nghiệm $x\in[0;\pi]$ thì phương trình $f(t)=m$ có đúng một nghiệm $t\in[0;1)$. Dựa vào đồ thị ta có $m\in[-7;-2)$, do m nguyên nên $m\in\{-7;-6;-5;-4;-3\}$. Vậy có 5 giá trị.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 97: Cho hàm số $f(x)$ là đa thức và có đồ thị như hình vẽ:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(4^{\sin x}\right)=f\left(m^2+8m+17\right)$ có nghiệm?

A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Lời giải:

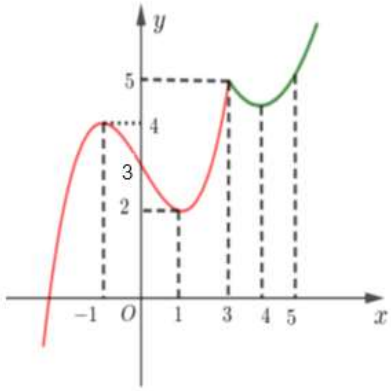
Ta có: $\begin{cases} 4^{\sin x}\in\left[\frac{1}{4};4\right],\forall x\in\mathbb{R} \\ m^2+8m+17=(m+4)^2+1\ge 1,\forall m\in\mathbb{R} \end{cases}$.

Để ý rằng trên $(0;+\infty)$, $f(x)$ đồng biến nên $f\left(4^{\sin x}\right)=f\left(m^2+8m+17\right)\Leftrightarrow 4^{\sin x}=m^2+8m+17$ (*)

Phương trình (*) có nghiệm $m^2+8m+17\in\left[\frac{1}{4};4\right]\Rightarrow m\in\{-5;-4;-3\}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 98: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tìm m để phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$?

A. $2<m<3$ hoặc $f(4)<m<5$.

B. $2<m\le 3$ hoặc $f(4)<m<5$.

C. $2\le m<3$ hoặc $f(4)<m<5$.

D. $2<m<3$ hoặc $f(4)<m\le 5$.

Lời giải:

Đặt $t=\left|x^2-2x\right|$, với $x\in\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$.

Ta thấy hàm số $u(x)=x^2-2x$ liên tục trên đoạn $\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$ và $u'=2x-2$; $u'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\frac{3}{2}$		0		1		2		$\frac{7}{2}$
$u'(x)$			$-$		0		$+$		
$u(x)$	$\frac{21}{4}$	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	$\frac{21}{4}$
$t=\lvert u(x)\rvert$	$\frac{21}{4}$	↘	0	↗	1	↘	0	↗	$\frac{21}{4}$

Nhận xétrằng với $t=0$ hoặc $1<t\le\frac{21}{4}$ thì phương trình $t=\left|x^2-2x\right|$ có 2 nghiệm phân biệt; với $t=1$ thì phương trình $t=\left|x^2-2x\right|$ có 3 nghiệm phân biệt; với mỗi $t\in(0;1)$ thì phương trình $t=\left|x^2-2x\right|$ có 4 nghiệm phân biệt.

Với $t=\left|x^2-2x\right|$ phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ thành $f(t)=m,\left(t\in\left[0;\frac{21}{4}\right]\right)$

Dựa vào đồ thị f ta biện luận số nghiệm của phương trình $f(t)=m,\left(t\in\left[0;\frac{21}{4}\right]\right)$ trong các trường hợp sau

TH1: $m=2$

$f(t)=2\Leftrightarrow t=1$. Khi đó phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có 3 nghiệm phân biệt.

TH2: $2<m<3$

$f(t)=m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=a\in(0;1)\\t=b\in(1;3)\end{array}\right.$. Khi đó phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có 6 nghiệm phân biệt.

TH3: $m=3$

$f(t)=m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=b\in(1;3)\end{array}\right.$. Khi đó phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có 4 nghiệm phân biệt.

TH4: $3<m<f(4)$

$f(t)=m\Leftrightarrow t=a\in(1;4)$. Khi đó phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có 2 nghiệm phân biệt.

TH5: $m=f(4)$

$f(t)=m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=4\\t=b\in(1;4)\end{array}\right.$. Khi đó phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có 4 nghiệm phân biệt.

TH6: $f(4)<m<5$

$f(t)=m$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $(1;5)$. Khi đó phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có 6 nghiệm phân biệt.

TH7: $m=5$

$f(t)=m$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc $(1;5)$. Khi đó phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có 4 nghiệm phân biệt.

TH8: $5<m<f\left(\frac{21}{4}\right)$

$f(t)=m$ có 1 nghiệm thuộc $\left(1;\frac{21}{4}\right)$. Khi đó phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$ khi và chỉ khi $2<m<3$ hoặc $f(4)<m<5$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 99: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=mx-m+1$ cắt đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2+x+2$ tại ba điểm A, B, C phân biệt sao cho $AB=BC$.

A. $m\in(-\infty;0)\cup[4;+\infty)$. B. $\forall m\in\mathbb{R}$. C. $m\in\left(-\frac{5}{4};+\infty\right)$. D. $m\in(-2;+\infty)$.

Lời giải:

Ta có $(C): y = x^3 - 3x^2 + x + 2$ và $d: y = mx - m + 1$.

Xét phương trình: $x^3 - 3x^2 + x + 2 = mx - m + 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + (1-m)x + 1 + m = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - m - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - 2x - m - 1 = 0 \ (1) \end{array}\right.$

Đồ thị (C) cắt đường thẳng d tại ba điểm A, B, C phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1 $1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + m + 1 > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2 \ (*)$

Cách 1: Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt sao cho $AB = BC \Rightarrow$ điểm B chính là điểm uốn của đồ thị (C).

Ta có $y'' = 6x - 6$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$, $y = 1 \Rightarrow$ điểm uốn $B(1;1) \in d$, $\forall m > -2$.

Vậy với $m \in (-2; +\infty)$ thì yêu cầu bài toán được thỏa mãn.

Chú ý. Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$ có hoành độ điểm uốn là nghiệm của phương trình $y'' = 0$ và điểm uốn chính là tâm đối xứng của đồ thị hàm bậc ba.

Cách 2: Với $m > -2$, phương trình $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{2+m} \\ x = 1 - \sqrt{2+m} \end{array}\right.$. Ta gán $\begin{cases} x_A = 1 - \sqrt{2+m} \\ x_B = 1 \\ x_C = 1 + \sqrt{2+m} \end{cases}$, với cách gán như vậy, rõ ràng $x_B - x_A = x_C - x_B, \forall m > -2$. Suy ra $AB = BC$ với mọi $m > -2$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 100: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -mx$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - m + 2$ tại ba điểm phân biệt *A, B, C* sao cho $AB = BC$.

A. $m \in (-\infty; 3)$. B. $m \in (-\infty; -1)$. C. $m \in (-\infty; +\infty)$. D. $m \in (1; +\infty)$.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - m + 2 \ (C)$ và đường thẳng $y = -mx \ (d)$ là: $x^3 - 3x^2 - m + 2 = -mx \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x + m - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - 2x + m - 2 = 0 \ (*) \end{array}\right.$

Để đường thẳng $y = -mx$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - m + 2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C

$\Leftrightarrow$ (*) có ba nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m < 3$.

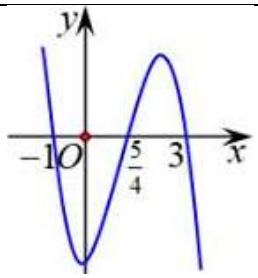
Đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại ba điểm A, B, C phân biệt sao cho $AB = BC$ thì điểm B chính là điểm uốn của đồ thị (C).

Ta có : $y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow y'' = 6x - 6$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$. y'' đổi dấu khi x đi qua $x = 1$. Điểm uốn của đồ thị (C) là $B(1; -m)$. Mặt khác điểm $B(1; -m)$ thuộc đường thẳng (d) $y = -mx$ với mọi m.

Vậy với $m < 3$ thì yêu cầu bài toán thỏa mãn.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 101: Cho hàm số $f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$, (với $m, n, p, q, r \in \mathbb{R}$). Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tập nghiệm của phương trình $f(x)=r$ có số phần tử là

A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

Lời giải:

Ta có $f'(x)=4mx^3+3nx^2+2px+q$ (1)

Dựa vào đồ thị $y=f'(x)$ ta thấy phương trình $f'(x)=0$ có ba nghiệm đơn là -1, $\frac{5}{4}$, 3.

Do đó $f'(x)=m(x+1)(4x-5)(x-3)$ và $m\neq 0$. Hay $f'(x)=4mx^3-13mx^2-2mx+15m$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $n=-\frac{13}{3}m$, $p=-m$ và $q=15m$.

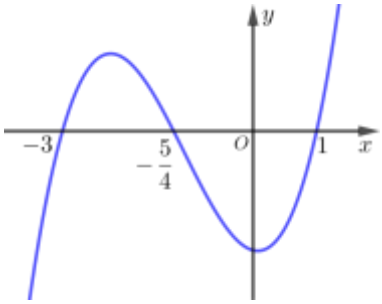
Khi đó phương trình $f(x)=r \Leftrightarrow mx^4+nx^3+px^2+qx=0 \Leftrightarrow m\left(x^4-\frac{13}{3}x^3-x^2+15x\right)=0$

$\Leftrightarrow 3x^4-13x^3-3x^2+45x=0 \Leftrightarrow x(3x+5)(x-3)^2=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-\frac{5}{3} \vee x=3$ (nghiệm kép).

Vậy tập nghiệm của phương trình $f(x)=r$ là $S=\left\{-\frac{5}{3};0;3\right\}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 102: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+m$, (với $a,b,c,d,m\in\mathbb{R}$). Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tập nghiệm của phương trình $f(x)=m$ có số phần tử là

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải:

Cách 1: Ta có $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$ (1).

Dựa vào đồ thị ta có $f'(x)=a(x-1)(4x+5)(x+3)=4ax^3+13ax^2-2ax-15a$ (2) và $a\neq 0$.

Từ (1) và (2) suy ra $b=\frac{13}{3}a$, $c=-a$ và $d=-15a$.

Khi đó: $f(x)=m \Leftrightarrow ax^4+bx^3+cx^2+dx=0 \Leftrightarrow a\left(x^4+\frac{13}{3}x^3-x^2-15x\right)=0$

$\Leftrightarrow 3x^4+13x^3-3x^2-45x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{5}{3} \\ x=-3 \end{array}\right.$. Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\dfrac{5}{3};0;-3\right\}$.

Cách 2: Từ đồ thị ta có $a\neq 0$.

$f(x)=m \Leftrightarrow ax^4+bx^3+cx^2+dx+m=m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ ax^3+bx^2+cx+d=0\ (2) \end{array}\right.$.

Ta có $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$ có 3 nghiệm $x_1=-3;\ x_2=-\dfrac{5}{4};\ x_3=1$.

Áp dụng định lý Viet ta có: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{3b}{4a} \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=\dfrac{2c}{4a} \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{4a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{13}{4}=-\dfrac{3b}{4a} \\ -\dfrac{1}{2}=\dfrac{2c}{4a} \\ \dfrac{15}{4}=-\dfrac{d}{4a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{13}{3}a \\ c=-a \\ d=-15a \end{cases}$.

Thế vào (2) ta có: $a\left(x^3+\dfrac{13}{3}x^2-x-15\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=\dfrac{5}{3} \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\dfrac{5}{3};0;-3\right\}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

HẾT

Huế, *ngày 16 tháng 7 năm 2023*