

Câu 1. (2,5 điểm) Cho hàm số $f(x) = -x^4 + 2mx^2 - m^2 - 1$. Tìm m để đồ thị hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị và ba điểm đó cùng gốc tọa độ O lập thành tứ giác nội tiếp đường tròn.

Câu 2. (4,0 điểm) 1. Giải phương trình $\frac{|\sin 3x| + \sqrt{3} \cos 3x - 1}{\cos x} = 0$ với $x \in (-\pi; 0)$.

2. Giải phương trình $\begin{cases} x + 3\sqrt{(x-y)(y+1)} = 4 + 5y & (1) \\ \sqrt{2x+2y-4} + 4 = 3x - 2y - \sqrt{2y-1} & (2) \end{cases}$

Câu 3. (5,0 điểm) 1. Một nhóm gồm 9 học sinh một lớp trong đó có ba bạn Việt, Nam và Hùng đi dự đại hội Đoàn trường, ban tổ chức sắp xếp ngẫu nhiên 9 học sinh này ngồi vào một dãy ghế được đánh số từ 1 đến 9. Tính xác suất để số ghế của bạn Hùng bằng trung bình cộng số ghế của hai bạn Việt và Nam.

2. Cho dãy số (u_n) thỏa $\begin{cases} u_1 = 2020 \\ (n^2 + 5n + 5)u_n = (2n^2 + 6n + 2)u_{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$

Tính $\lim \left(\frac{2^n u_n}{n^2} \right)$.

Câu 4. (6,0 điểm) Cho tứ diện $ABCD$ có $BC = AD = a, AC = BD = b, AB = CD = c$.

1. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD theo a, b, c .

2. Biết mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (ABD) . Chứng minh rằng $\cos A \cdot \cos B = \cos C$; với A, B, C là ký hiệu ba góc tương ứng với các đỉnh A, B, C của tam giác ABC .

3. Gọi S là diện tích toàn phần của tứ diện $ABCD$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\frac{S^2}{a^2 b^2} + \frac{S^2}{b^2 c^2} + \frac{S^2}{c^2 a^2}.$$

Câu 5. (2,5 điểm) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức $P = \sqrt{\frac{a+b+c}{c^2+2ab}} + (a+b)\sqrt{1+\frac{2}{a^2 b^2}} + \sqrt{c^2+\frac{2}{c^2}}$.

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = -x^4 + 2mx^2 - m^2 - 1$. Tìm m để đồ thị hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị và ba điểm đó cùng gốc tọa độ O lập thành tứ giác nội tiếp đường tròn.

Lời giải

$$f'(x) = -4x^3 + 4mx = 4x(-x^2 + m)$$

$$4x(-x^2 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}.$$

Để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị thì : $m > 0$.

Ba điểm cực trị là $A(0; -m^2 - 1)$; $B(\sqrt{m}; -1)$; $C(-\sqrt{m}; -1)$.

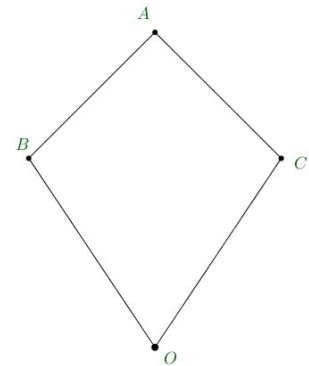
$$\overline{BA}(-\sqrt{m}; -m^2); \overline{BO}(-\sqrt{m}; 1).$$

Để ba điểm A, B, C và gốc tọa độ $O(0; 0)$ tạo thành tứ giác nội tiếp khi và chỉ khi

$$\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{B} = 90^\circ \text{ (do } \widehat{B} = \widehat{C} \text{)}.$$

$$\Leftrightarrow \overline{BA} \cdot \overline{BO} = 0 \Leftrightarrow m - m^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}.$$

Vậy $m = 1$.



Câu 2.1: Giải phương trình $\frac{|\sin 3x| + \sqrt{3} \cos 3x - 1}{\cos x} = 0$ với $x \in (-\pi; 0)$.

Lời giải

Trường hợp 1: $\sin 3x \geq 0$.

$$\frac{\sin 3x + \sqrt{3} \cos 3x - 1}{\cos x} = 0 \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x + \sqrt{3} \cos 3x = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 3x + \sqrt{3} \cos 3x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(\frac{\pi}{3} + 3x \right) = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k \frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{-\pi}{18} + k \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Theo đề bài $x \in (-\pi; 0)$ và $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ nên $x \in \left\{ \frac{-\pi}{8}; \frac{-13\pi}{18} \right\}$.

Trường hợp 2: $\sin 3x < 0$

$$\frac{-\sin 3x + \sqrt{3} \cos 3x - 1}{\cos x} = 0 \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$$

$$\Leftrightarrow -\sin 3x + \sqrt{3} \cos 3x = 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \sin 3x + \sqrt{3} \cos 3x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(\frac{2\pi}{3} + 3x \right) = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{6} + k \frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{18} + k \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Theo đề bài $x \in (-\pi; 0)$ và $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ nên $x \in \left\{ \frac{-5\pi}{6}; \frac{-\pi}{6}; \frac{-11\pi}{18} \right\}$.

Vậy nghiệm của phương trình trên là $x \in \left\{ \frac{-5\pi}{6}; \frac{-\pi}{6}; \frac{-11\pi}{18}; \frac{-\pi}{8}; \frac{-13\pi}{18} \right\}$.

Câu 2.2: Giải phương trình
$$\begin{cases} x + 3\sqrt{(x-y)(y+1)} = 4 + 5y & (1) \\ \sqrt{2x+2y-4} + 4 = 3x - 2y - \sqrt{2y-1} & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện:
$$\begin{cases} (x-y)(y+1) \geq 0 \\ 2x+2y-4 \geq 0 \\ 2y-1 \geq 0 \end{cases}$$

Ta có $(1) \Leftrightarrow (x-y) + 3\sqrt{(x-y)(y+1)} - 4(y+1) = 0$.

Đặt $u = \sqrt{x-y}, v = \sqrt{y+1}$ ($u \geq 0, v \geq 0$).

Khi đó (1) trở thành $u^2 + 3uv - 4v^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u = -4v \end{cases}$.

Với $u = v$ ta có $x = 2y + 1$, thay vào (2) ta được: $\sqrt{6y-2} + \sqrt{2y-1} - 4y + 1 = 0$.

Dễ dàng ta tìm được $y = 1 \Rightarrow x = 3$.

Vậy nghiệm của phương trình là $\{3; 1\}$.

Câu 3.1: Một nhóm gồm 9 học sinh một lớp trong đó có ba bạn Việt, Nam và Hùng đi dự đại hội Đoàn trường, ban tổ chức sắp xếp ngẫu nhiên 9 học sinh này ngồi vào một dãy ghế được đánh số từ 1 đến 9. Tính xác suất để số ghế của bạn Hùng bằng trung bình cộng số ghế của hai bạn Việt và Nam.

Lời giải

Số phần tử không gian mẫu $n(\Omega) = 9!$

Gọi A là biến cố mà số ghế của bạn Hùng bằng trung bình cộng số ghế của hai bạn Việt và Nam

Gọi số ghế của Hùng, Việt, Nam lần lượt là h, v, n

Có $h = \frac{v+n}{2}$ mà $\begin{cases} h, v, n \in \mathbb{N} \\ h, v, n \in [1; 9] \end{cases}$

$\Rightarrow v, n$ cùng lẻ hoặc cùng chẵn

Mỗi bộ v, n cùng lẻ hoặc cùng chẵn do 1 h duy nhất.

Các bộ v, n thỏa mãn là (Chưa xét hoán vị)

$(1; 3); (1; 5); (1; 7); (1; 9); (3; 5); (3; 7); (3; 9)$

$(5; 7); (5; 9); (7; 9); (2; 4); (2; 6); (2; 8)$

$(4; 6); (4; 8); (6; 8)$

$\Rightarrow 16$ bộ v, n

$\Rightarrow 16.2!.1$ cách xếp h, v, n thỏa mãn

$$\Rightarrow n(A) = (16.2!.1).6!$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{16.2!.1.6!}{9!} = \frac{4}{63}.$$

Câu 3.2: Cho dãy số (u_n) thỏa $\begin{cases} u_1 = 2020 \\ (n^2 + 5n + 5)u_n = (2n^2 + 6n + 2)u_{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$

Tính $\lim \left(\frac{2^n u_n}{n^2} \right).$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } u_{n+1} &= \frac{n^2 + 5n + 5}{2(n^2 + 6n + 2)} u_n = \frac{(n+1)^2 + 3(n+1) + 1}{2(n^2 + 3n + 1)} u_n \\ &= \frac{(n+1)^2 + 3(n+1) + 1}{2(n^2 + 3n + 1)} \cdot \frac{n^2 + 3n + 1}{2[(n-1)^2 + 3(n-1) + 1]} u_{n-1} = \frac{(n+1)^2 + 3(n+1) + 1}{2^2[(n-1)^2 + 3(n-1) + 1]} u_{n-1} \\ &= \frac{(n+1)^2 + 3(n+1) + 1}{2^3[(n-2)^2 + 3(n-2) + 1]} u_{n-2} = \dots = \frac{(n+1)^2 + 3(n+1) + 1}{2^n[(2-1)^2 + 3(2-1) + 1]} u_1 = \frac{n^2 + 5n + 5}{2^n} \cdot 404 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } u_n = \frac{n^2 + 3n + 1}{2^{n-1}} \cdot 404.$$

$$\text{Suy ra } \lim \left(\frac{2^n u_n}{n^2} \right) = 808.$$

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$ có $BC = AD = a, AC = BD = b, AB = CD = c$.

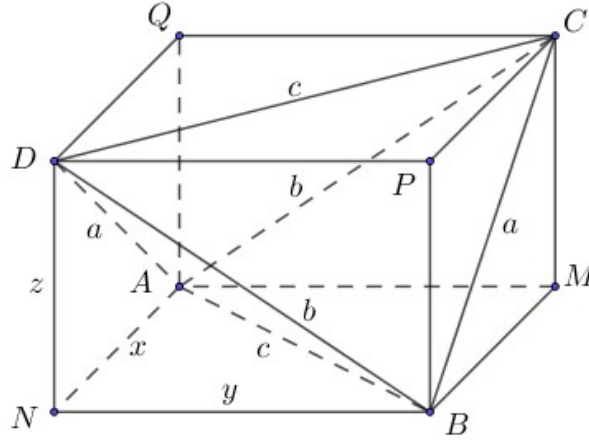
1. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD theo a, b, c .

2. Biết mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (ABD) . Chứng minh rằng $\cos A \cdot \cos B = \cos C$; với A, B, C là ký hiệu ba góc tương ứng với các đỉnh A, B, C của tam giác ABC .

3. Gọi S là diện tích toàn phần của tứ diện $ABCD$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\frac{S^2}{a^2 b^2} + \frac{S^2}{b^2 c^2} + \frac{S^2}{c^2 a^2}.$$

Lời giải



Dựng hình hộp chữ nhật $AMBN.QCPD$ (tham khảo hình vẽ)

Gọi x, y, z lần lượt là ba kích thước của hình hộp chữ nhật $AMBN.QCPD$.

Theo giả thiết, ta có
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = c^2 \\ y^2 + z^2 = b^2 \\ x^2 + z^2 = a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2) \\ y^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) \\ z^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2) \end{cases}$$

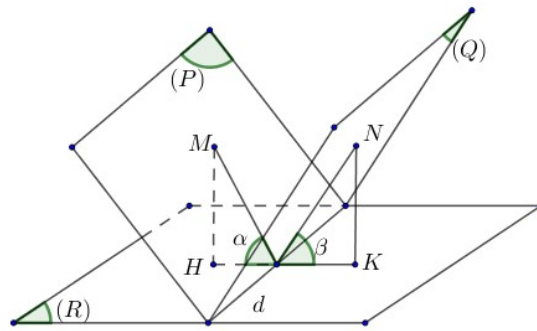
1. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD theo a, b, c .

Ta có
$$\begin{cases} AB \subset (AMBN) \\ CD \subset (QCPD) \\ (AMBN) \parallel (QCPD) \end{cases} \Rightarrow d(AB, CD) = d((AMBN), (QCPD)) = z = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}.$$

Vậy $d(AB, CD) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}.$

2. Chứng minh rằng $\cos A \cdot \cos B = \cos C$.

Cách 1: Sử dụng bổ đề sau:



Nếu $(P) \cap (Q) = d \subset (R)$ và $\begin{cases} ((P), (R)) = \alpha \\ ((Q), (R)) = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ((P), (Q)) = 180^\circ - (\alpha + \beta) \\ ((P), (Q)) = \alpha + \beta \end{cases}.$

Áp dụng vào bài toán như sau:

Gọi $((ABD), (AMBN)) = \alpha; ((ABC), (AMBN)) = \beta.$

Ta có $\tan \alpha = \frac{d(D, (AMBN))}{d(N, AB)} = \frac{z\sqrt{x^2 + y^2}}{xy} \quad (1).$

Tương tự, cũng có $\tan \beta = \frac{d(C, (AMBN))}{d(C, AB)} = \frac{z\sqrt{x^2 + y^2}}{xy} \quad (2).$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \tan \alpha = \tan \beta \Rightarrow \alpha = \beta.$

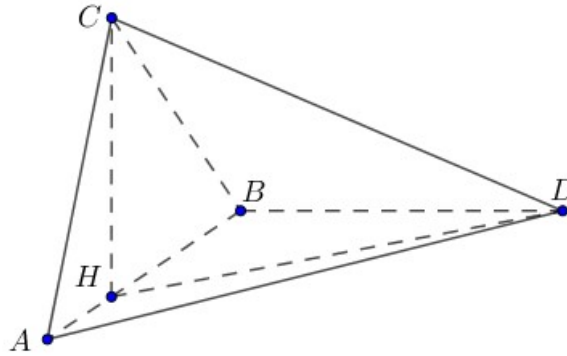
Do $(ABC) \perp (ABD) \Rightarrow \alpha = \beta = 45^\circ$

$$\Rightarrow z^2(x^2 + y^2) = x^2y^2 \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \cdot c^2 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

$$\Leftrightarrow \cos C = \cos A \cdot \cos B \quad (\text{đpcm}).$$

Cách 2:



Dựng $CH \perp AB$ vì $(ABC) \perp (ABD) \Rightarrow CH \perp (ABD).$

Ta có $CH = a \cdot \sin B$; $BH = a \cdot \cos B.$

Áp dụng định lý cosin trong tam giác BHD , ta có $DH^2 = BH^2 + BD^2 - 2BH \cdot BD \cdot \cos \widehat{ABD}$

$$\Leftrightarrow DH^2 = a^2 \cos^2 B + b^2 - 2a \cdot \cos B \cdot b \cdot \cos A \quad (\text{vì } \widehat{ABD} = \widehat{CAB})$$

$$\Leftrightarrow DH^2 = a^2 \cos^2 B + b^2 - 2ab \cos A \cos B$$

Lại có $\triangle CHD$ vuông tại H , nên $DH^2 = CD^2 - CH^2 \Rightarrow CD^2 = CH^2 + DH^2$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 \sin^2 B + a^2 \cos^2 B + b^2 - 2ab \cos A \cos B$$

$$\Leftrightarrow \cos A \cdot \cos B = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \cos C.$$

Vậy $\cos C = \cos A \cdot \cos B$ (đpcm).

3. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $\frac{S^2}{a^2b^2} + \frac{S^2}{b^2c^2} + \frac{S^2}{c^2a^2}.$

Đặt $T = \frac{S^2}{a^2b^2} + \frac{S^2}{b^2c^2} + \frac{S^2}{c^2a^2}.$

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , ta có $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C.$

Từ diện $ABCD$, có $BC = AD = a$, $AC = BD = b$, $AB = CD = c$

$$\Rightarrow S = 4 \cdot S_{\triangle ABC} = 8R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

Suy ra $T = 4(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C).$

$$\text{Ta có } T = 4(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) = 4 \left[1 - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + \sin^2 C \right]$$

$$\Leftrightarrow T = 4[1 - \cos(A+B)\cos(A-B) + \sin^2 C]$$

$$\Leftrightarrow T = 4[2 + \cos C \cdot \cos(A - B) - \cos^2 C]$$

$$\Leftrightarrow T = 4[2 + \cos C \cdot (\cos(A - B) + \cos(A + B))] = 8(1 + \cos A \cos B \cos C) \leq 9$$

(vì $\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}$).

Suy ra $T \leq 9$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức T bằng 9, xảy ra khi ΔABC đều.

Câu 5: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{\frac{a+b+c}{c^2+2ab}} + (a+b)\sqrt{1+\frac{2}{a^2b^2}} + \sqrt{c^2+\frac{2}{c^2}}.$$

Lời giải

Ta có $c^2 + 2ab \leq c^2 + a^2 + b^2 = 3$.

$$\text{Dễ thấy } (x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2) \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2+z^2} \geq \frac{x+y+z}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} \text{Từ đó suy ra } P &\geq \sqrt{\frac{a+b+c}{3}} + (a+b)\sqrt{1+\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2b^2}} + \sqrt{c^2+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{c^2}} \\ &\geq \sqrt{\frac{a+b+c}{3}} + (a+b)\frac{1+\frac{2}{c}}{\sqrt{3}} + \frac{c+\frac{2}{c}}{\sqrt{3}} \\ &\Rightarrow \sqrt{3}P \geq \sqrt{a+b+c} + a+b+c + \frac{2(ab+bc+ca)}{abc} \\ &\Rightarrow \sqrt{3}P \geq \sqrt{3\sqrt{abc}} + 3\sqrt{abc} + \frac{6\sqrt{a^2b^2c^2}}{abc} = \sqrt{3}\sqrt[6]{abc} + 3\sqrt[3]{abc} + \frac{6}{\sqrt[3]{abc}} \end{aligned}$$

Đặt $t = \sqrt[6]{abc}, 0 < t \leq 1$. Ta được $\sqrt{3}P \geq \sqrt{3}t + 3t^2 + \frac{6}{t^2}$.

Xét $f(t) = \sqrt{3}t + 3t^2 + \frac{6}{t^2}$ liên tục trên $(0;1]$ và có

$$f'(t) = \sqrt{3} + 6t - \frac{12}{t^3} = \frac{\sqrt{3}t + 6(t^4 - 2)}{t^3} < 0, t \in (0;1].$$

nên $f(t)$ nghịch biến trên $(0;1]$ suy ra $f(t) \geq f(1) = 9 + \sqrt{3} \Rightarrow P \geq 3\sqrt{3} + 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $3\sqrt{3} + 1$ đạt được khi $a = b = c = 1$.

----- **HẾT** -----