

A) TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ**I) KIẾN THỨC CƠ BẢN**

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D .

- Hàm số f đồng biến trên $D \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in D$ và $y' = 0$ chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm thuộc D .
- Hàm số f nghịch biến trên $D \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in D$ và $y' = 0$ chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm thuộc D .

- Nếu $y' = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) thì:

$$+ y' \geq 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

$$+ y' \leq 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

- Định lí về dấu của tam thức bậc hai $g(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$):

+ Nếu $\Delta < 0$ thì $g(x)$ luôn cùng dấu với a .

+ Nếu $\Delta = 0$ thì $g(x)$ luôn cùng dấu với a (trừ $x = -\frac{b}{2a}$)

+ Nếu $\Delta > 0$ thì $g(x)$ có hai nghiệm x_1, x_2 và trong khoảng hai nghiệm thì $g(x)$ khác dấu với a , ngoài khoảng hai nghiệm thì $g(x)$ cùng dấu với a .

- So sánh các nghiệm x_1, x_2 của tam thức bậc hai $g(x) = ax^2 + bx + c$ với số 0:

$$+ x_1 \leq x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \quad + 0 < x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \quad + x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P < 0$$

- $g(x) \leq m, \forall x \in (a; b) \Leftrightarrow \max_{(a; b)} g(x) \leq m$; $g(x) \geq m, \forall x \in (a; b) \Leftrightarrow \min_{(a; b)} g(x) \geq m$

II) CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN**1. Tìm điều kiện để hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên tập xác định (hoặc trên từng khoảng xác định).**

- Hàm số f đồng biến trên $D \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in D$ và $y' = 0$ chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm thuộc D .
- Hàm số f nghịch biến trên $D \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in D$ và $y' = 0$ chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm thuộc D .
- Nếu $y' = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) thì:

$$+ y' \geq 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

$$+ y' \leq 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

2. Tìm điều kiện để hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên khoảng $(a; b)$.

Ta có: $y' = f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

a) Hàm số f đồng biến trên $(a; b) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (a; b)$ và $y' = 0$ chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm thuộc $(a; b)$.

Trường hợp 1:

- Nếu bất phương trình $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow h(m) \geq g(x)$ (*)

thì f đồng biến trên $(a; b) \Leftrightarrow h(m) \geq \max_{(a; b)} g(x)$

- Nếu bất phương trình $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow h(m) \leq g(x)$ (**)

thì f đồng biến trên $(a; b) \Leftrightarrow h(m) \leq \min_{(a; b)} g(x)$

Trường hợp 2: Nếu bất phương trình $f'(x) \geq 0$ không đưa được về dạng (*) thì đặt $t = x - a$. Khi đó ta có: $y' = g(t) = 3at^2 + 2(3a\alpha + b)t + 3a\alpha^2 + 2b\alpha + c$.

$$\text{– Hàm số } f \text{ đồng biến trên khoảng } (-\infty; a) \Leftrightarrow g(t) \geq 0, \forall t < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{– Hàm số } f \text{ đồng biến trên khoảng } (a; +\infty) \Leftrightarrow g(t) \geq 0, \forall t > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P \geq 0 \end{cases}$$

b) Hàm số f nghịch biến trên $(a; b) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (a; b)$ và $y' = 0$ chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm thuộc $(a; b)$.

Trường hợp 1:

- Nếu bất phương trình $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow h(m) \geq g(x)$ (*)

thì f nghịch biến trên $(a; b) \Leftrightarrow h(m) \geq \max_{(a; b)} g(x)$

- Nếu bất phương trình $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow h(m) \leq g(x)$ (**)

thì f nghịch biến trên $(a; b) \Leftrightarrow h(m) \leq \min_{(a; b)} g(x)$

Trường hợp 2: Nếu bất phương trình $f'(x) \leq 0$ không đưa được về dạng (*) thì đặt $t = x - a$. Khi đó ta có: $y' = g(t) = 3at^2 + 2(3a\alpha + b)t + 3a\alpha^2 + 2b\alpha + c$.

$$\text{– Hàm số } f \text{ nghịch biến trên khoảng } (-\infty; a) \Leftrightarrow g(t) \leq 0, \forall t < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{– Hàm số } f \text{ nghịch biến trên khoảng } (a; +\infty) \Leftrightarrow g(t) \leq 0, \forall t > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P \geq 0 \end{cases}$$

3. Tìm điều kiện để hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên khoảng có độ dài bằng k cho trước.

- f đơn điệu trên khoảng $(x_1; x_2) \Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$ (1)

- Biến đổi $|x_1 - x_2| = d$ thành $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = d^2$ (2)

- Sử dụng định lý Viet đưa (2) thành phương trình theo m .
- Giải phương trình, so với điều kiện (1) để chọn nghiệm.

4. Tìm điều kiện để hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ (2), $(a, d \neq 0)$

a) Đồng biến trên $(-\infty; \alpha)$. b) Đồng biến trên $(\alpha; +\infty)$. c) Đồng biến trên $(\alpha; \beta)$. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-e}{d} \right\}$, $y' = \frac{adx^2 + 2aex + be - dc}{(dx + e)^2} = \frac{f(x)}{(dx + e)^2}$	
Trường hợp 1	Trường hợp 2
Nếu: $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq h(m)$ (i)	Nếu bpt: $f(x) \geq 0$ không đưa được về dạng (i) thì ta đặt: $t = x - \alpha$. Khi đó bpt: $f(x) \geq 0$ trở thành: $g(t) \geq 0$, với: $g(t) = adt^2 + 2a(d\alpha + e)t + ad\alpha^2 + 2ae\alpha + be - dc$
a) (2) đồng biến trên khoảng $(-\infty; \alpha)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-e}{d} \geq \alpha \\ g(x) \geq h(m), \forall x < \alpha \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-e}{d} \geq \alpha \\ h(m) \leq \min_{(-\infty; \alpha]} g(x) \end{cases}$	a) (2) đồng biến trên khoảng $(-\infty; \alpha)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-e}{d} \geq \alpha \\ g(t) \geq 0, \forall t < 0 \end{cases} \quad (ii)$ $(ii) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P \geq 0 \end{cases}$
b) (2) đồng biến trên khoảng $(\alpha; +\infty)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-e}{d} \leq \alpha \\ g(x) \geq h(m), \forall x > \alpha \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-e}{d} \leq \alpha \\ h(m) \leq \min_{[\alpha; +\infty)} g(x) \end{cases}$	b) (2) đồng biến trên khoảng $(\alpha; +\infty)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-e}{d} \leq \alpha \\ g(t) \geq 0, \forall t > 0 \end{cases} \quad (iii)$ $(iii) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P \geq 0 \end{cases}$
c) (2) đồng biến trên khoảng $(\alpha; \beta)$. $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-e}{d} \notin (\alpha; \beta) \\ g(x) \geq h(m), \forall x \in (\alpha; \beta) \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-e}{d} \notin (\alpha; \beta) \\ h(m) \leq \min_{[\alpha; \beta]} g(x) \end{cases}$	

B) CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

I) KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.
 - Hoành độ x_1, x_2 của các điểm cực trị là các nghiệm của phương trình $y' = 0$.
 - Để viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực đại, cực tiểu, ta có thể sử dụng phương pháp tách đạo hàm.
 - Phân tích $y = f'(x) \cdot q(x) + h(x)$.
 - Suy ra $y_1 = h(x_1), y_2 = h(x_2)$.
- Do đó phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực đại, cực tiểu là: $y = h(x)$.

- Gọi α là góc giữa hai đường thẳng $d_1: y = k_1x + b_1$, $d_2: y = k_2x + b_2$ thì $\tan \alpha = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2} \right|$

II) CÁC DẠNG THƯỜNG GẶP

Gọi k là hệ số góc của đường thẳng đi qua các điểm cực đại, cực tiểu.

1. Tìm điều kiện để đường thẳng đi qua các điểm cực đại, cực tiểu song song (vuông góc) với đường thẳng $d: y = px + q$.

- Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu.
- Viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực đại, cực tiểu.
- Giải điều kiện: $k = p$ (hoặc $k = -\frac{1}{p}$).

2. Tìm điều kiện để đường thẳng đi qua các điểm cực đại, cực tiểu tạo với đường thẳng $d: y = px + q$ một góc α .

- Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu.
- Viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực đại, cực tiểu.
- Giải điều kiện: $\left| \frac{k - p}{1 + kp} \right| = \tan \alpha$. (Đặc biệt nếu $d \equiv Ox$, thì giải điều kiện: $|k| = \tan \alpha$)

3. Tìm điều kiện để đường thẳng đi qua các điểm cực đại, cực tiểu cắt hai trục Ox , Oy tại hai điểm A, B sao cho ΔIAB có diện tích S cho trước (với I là điểm cho trước).

- Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu.
- Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua các điểm cực đại, cực tiểu.
- Tìm giao điểm A, B của Δ với các trục Ox, Oy .
- Giải điều kiện $S_{\Delta IAB} = S$.

4. Tìm điều kiện để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho ΔIAB có diện tích S cho trước (với I là điểm cho trước).

- Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu.
- Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua các điểm cực đại, cực tiểu.
- Giải điều kiện $S_{\Delta IAB} = S$.

5. Tìm điều kiện để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B đối xứng qua đường thẳng d cho trước.

- Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu.
- Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua các điểm cực đại, cực tiểu.
- Gọi I là trung điểm của AB .
- Giải điều kiện: $\begin{cases} \Delta \perp d \\ I \in d \end{cases}$.

5. Tìm điều kiện để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B cách đều đường thẳng d cho trước.

- Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu.
- Giải điều kiện: $d(A, d) = d(B, d)$.

6. Tìm điều kiện để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B và khoảng cách giữa hai điểm A, B là lớn nhất (nhỏ nhất).

- Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu.
- Tìm tọa độ các điểm cực trị A, B (có thể dùng phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị).
- Tính AB . Dùng phương pháp hàm số để tìm GTLN (GTNN) của AB .

7. Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu và hoành độ các điểm cực trị thỏa hệ thức cho trước.

- Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu.

– Phân tích hệ thức để áp dụng định lý Vi-et.

8. Tìm điều kiện để hàm số có cực trị trên khoảng $K_1 = (-\infty; \alpha)$ hoặc $K_2 = (\alpha; +\infty)$.

$$y' = f(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Đặt $t = x - \alpha$. Khi đó: $y' = g(t) = 3at^2 + 2(3a\alpha + b)t + 3a\alpha^2 + 2b\alpha + c$

Hàm số có cực trị thuộc $K_1 = (-\infty; \alpha)$	Hàm số có cực trị thuộc $K_2 = (\alpha; +\infty)$
Hàm số có cực trị trên khoảng $(-\infty; \alpha)$ $\Leftrightarrow f(x) = 0$ có nghiệm trên $(-\infty; \alpha)$. $\Leftrightarrow g(t) = 0$ có nghiệm $t < 0$	Hàm số có cực trị trên khoảng $(\alpha; +\infty)$ $\Leftrightarrow f(x) = 0$ có nghiệm trên $(\alpha; +\infty)$. $\Leftrightarrow g(t) = 0$ có nghiệm $t > 0$
$\Leftrightarrow \begin{cases} P < 0 \\ \Delta' \geq 0 \\ S < 0 \\ P \geq 0 \end{cases}$	$\Leftrightarrow \begin{cases} P < 0 \\ \Delta' \geq 0 \\ S > 0 \\ P \geq 0 \end{cases}$

9. Tìm điều kiện để hàm số có hai cực trị x_1, x_2 thỏa:

a) $x_1 < \alpha < x_2$

b) $x_1 < x_2 < \alpha$

c) $\alpha < x_1 < x_2$

$$y' = f(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Đặt $t = x - \alpha$. Khi đó: $y' = g(t) = 3at^2 + 2(3a\alpha + b)t + 3a\alpha^2 + 2b\alpha + c$

a) Hàm số có hai cực trị x_1, x_2 thỏa $x_1 < \alpha < x_2$

$$\Leftrightarrow g(t) = 0 \text{ có hai nghiệm } t_1, t_2 \text{ thỏa } t_1 < 0 < t_2 \Leftrightarrow P < 0$$

b) Hàm số có hai cực trị x_1, x_2 thỏa $x_1 < x_2 < \alpha$

$$\Leftrightarrow g(t) = 0 \text{ có hai nghiệm } t_1, t_2 \text{ thỏa } t_1 < t_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$$

c) Hàm số có hai cực trị x_1, x_2 thỏa $\alpha < x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow g(t) = 0 \text{ có hai nghiệm } t_1, t_2 \text{ thỏa } 0 < t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$$

C) SỰ TƯƠNG GIAO CỦA 2 ĐỒ THỊ HÀM SỐ

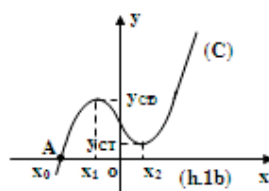
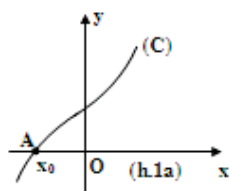
I) KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Cho hai đồ thị $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = g(x)$. Để tìm hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) ta giải phương trình: $f(x) = g(x)$ (*) (gọi là phương trình hoành độ giao điểm).
Số nghiệm của phương trình (*) bằng số giao điểm của hai đồ thị.
- Số giao điểm của đồ thị (C) của hàm số bậc ba: $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với trục hoành bằng số nghiệm của phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (1)

II) CÁC BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP

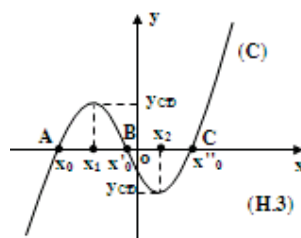
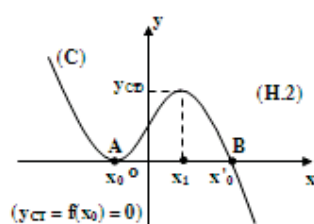
1. Tìm điều kiện để đồ thị (C) và trục hoành có 1 điểm chung duy nhất.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ không có cực trị} \\ f \text{ có 2 cực trị} \\ y_{CB} \cdot y_{CT} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{Phương trình (1) có 1 nghiệm duy nhất}$$



2. Tìm điều kiện để đồ thị (C) và trục hoành có 2 điểm chung phân biệt.

$$\Leftrightarrow (C) \text{ tiếp xúc với } Ox \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ có 2 cực trị} \\ y_{CB} \cdot y_{CT} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{Phương trình (1) có đúng 2 nghiệm}$$

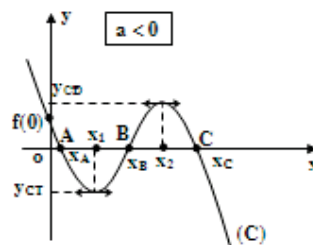
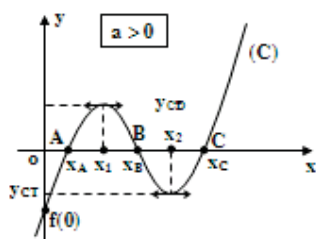


3. Tìm điều kiện để đồ thị (C) và trục hoành có 3 điểm chung phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ có 2 cực trị} \\ y_{CB} \cdot y_{CT} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt}$$

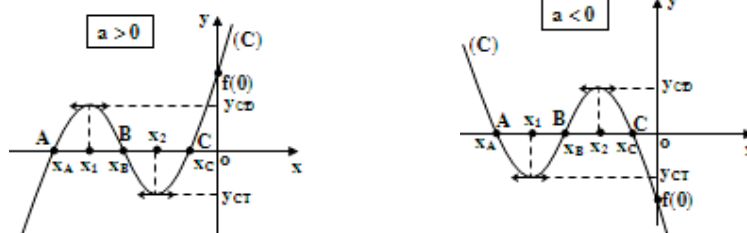
4. Tìm điều kiện để đồ thị (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ có 2 cực trị} \\ y_{CB} \cdot y_{CT} < 0 \\ x_{CB} > 0, x_{CT} > 0 \\ a \cdot f(0) < 0 \text{ (hay } ad < 0) \end{cases} \Leftrightarrow \text{Phương trình (1) có 3 nghiệm dương phân biệt.}$$



5. Tìm điều kiện để đồ thị (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ âm.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ có 2 cực trị} \\ y_{CB} \cdot y_{CT} < 0 \\ x_{CB} < 0, x_{CT} < 0 \\ a \cdot f(0) > 0 \text{ (hay } ad > 0) \end{cases} \Leftrightarrow \text{Phương trình (1) có 3 nghiệm âm phân biệt.}$$



6. Tìm điều kiện để đồ thị (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ tạo thành một cấp số cộng.

a, b, c lập thành một cấp số cộng $\Leftrightarrow a + c = 2b$

– Giả sử (1) có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số cộng.

– Viết (1) dưới dạng: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \Leftrightarrow a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$

$$\Leftrightarrow a[x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3] = 0$$

– x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow x_1 + x_3 = 2x_2 \Rightarrow x_2 = -\frac{b}{3a}$ là 1 nghiệm của (1).

– Thế $x_2 = -\frac{b}{3a}$ vào (1) để suy ra điều kiện cần tìm.

Chú ý: Đây chỉ là điều kiện cần nên phải thử lại kết quả tìm được.

7. Tìm điều kiện để đồ thị (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ tạo thành một cấp số nhân.

a, b, c lập thành một cấp số nhân $\Leftrightarrow ac = b^2$

– Giả sử (1) có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số nhân.

– Viết (1) dưới dạng: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \Leftrightarrow a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$

$$\Leftrightarrow a[x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3] = 0$$

– x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số nhân $\Leftrightarrow x_1x_3 = x_2^2 \Rightarrow x_2^3 = -\frac{d}{a}$ là 1 nghiệm của (1).

– Thế $x_2 = \sqrt[3]{-\frac{d}{a}}$ vào (1) để suy ra điều kiện cần tìm.

Chú ý: Đây chỉ là điều kiện cần nên phải thử lại kết quả tìm được

D) TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

I) KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Ý nghĩa hình học của đạo hàm: Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.

Khi đó phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ là:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad (y_0 = f(x_0))$$

- Điều kiện cần và đủ để hai đường $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = g(x)$ tiếp xúc nhau là hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \quad (*)$$

Nghiệm của hệ (*) là hoành độ của tiếp điểm của hai đường đó.

- Nếu $(C_1): y = px + q$ và $(C_2): y = ax^2 + bx + c$ thì

(C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau $\Leftrightarrow$ phương trình $ax^2 + bx + c = px + q$ có nghiệm kép.

II) CÁC BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP**1. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C): $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$:**

- Nếu cho x_0 thì tìm $y_0 = f(x_0)$.
- Nếu cho y_0 thì tìm x_0 là nghiệm của phương trình $f(x) = y_0$.
- Tính $y' = f'(x)$. Suy ra $y'(x_0) = f'(x_0)$.
- Phương trình tiếp tuyến Δ là: $y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0)$.

2. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C): $y = f(x)$, biết Δ có hệ số góc k cho trước.**Cách 1:** Tìm tọa độ tiếp điểm.

- Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Tính $f'(x_0)$.
- Δ có hệ số góc $k \Rightarrow f'(x_0) = k$ (1)
- Giải phương trình (1), tìm được x_0 và tính $y_0 = f(x_0)$. Từ đó viết phương trình của Δ .

Cách 2: Dùng điều kiện tiếp xúc.

- Phương trình đường thẳng Δ có dạng: $y = kx + m$.
- Δ tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = kx + m \\ f'(x) = k \end{cases} (*)$$

- Giải hệ (*), tìm được m . Từ đó viết phương trình của Δ .

Chú ý: Hệ số góc k của tiếp tuyến Δ có thể được cho gián tiếp như sau:+ Δ tạo với trục hoành một góc α thì $|k| = \tan \alpha$.+ Δ song song với đường thẳng $d: y = ax + b$ thì $k = a$ + Δ vuông góc với đường thẳng $d: y = ax + b$ ($a \neq 0$) thì $k = -\frac{1}{a}$ + Δ tạo với đường thẳng $d: y = ax + b$ một góc α thì $\left| \frac{k-a}{1+ka} \right| = \tan \alpha$ **3. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C): $y = f(x)$, biết Δ đi qua điểm $A(x_A; y_A)$.****Cách 1:** Tìm tọa độ tiếp điểm.

- Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Khi đó: $y_0 = f(x_0)$, $y'(x_0) = f'(x_0)$.
- Phương trình tiếp tuyến Δ tại M: $y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0)$
- Δ đi qua $A(x_A; y_A)$ nên: $y_A - y_0 = f'(x_0).(x_A - x_0)$ (2)
- Giải phương trình (2), tìm được x_0 . Từ đó viết phương trình của Δ .

Cách 2: Dùng điều kiện tiếp xúc.

- Phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(x_A; y_A)$ và có hệ số góc k : $y - y_A = k(x - x_A)$
- Δ tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = k(x - x_A) + y_A \\ f'(x) = k \end{cases} (*)$$

- Giải hệ (*), tìm được x (suy ra k). Từ đó viết phương trình tiếp tuyến Δ .

4. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C): $y = f(x)$, biết Δ tạo với trục Ox một góc α .

- Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Tiếp tuyến có hệ số góc $k = f'(x_0)$.
- Δ tạo với trục Ox một góc $\alpha \Leftrightarrow |f'(x_0)| = \tan \alpha$. Giải phương trình tìm được x_0 .
- Phương trình tiếp tuyến Δ tại M: $y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0)$

5. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C): $y = f(x)$, biết Δ tạo với đường thẳng $d: y = ax + b$ một góc α .

- Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Tiếp tuyến có hệ số góc $k = f'(x_0)$.
- Δ tạo với d một góc $\alpha \Leftrightarrow \left| \frac{k-a}{1+ka} \right| = \tan \alpha$. Giải phương trình tìm được x_0 .
- Phương trình tiếp tuyến Δ tại M: $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

6. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C): $y = f(x)$, biết Δ cắt hai trục tọa độ tại A và B sao cho tam giác OAB vuông cân hoặc có diện tích S cho trước.

- Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Tiếp tuyến có hệ số góc $k = f'(x_0)$.
- ΔOAB vuông cân $\Leftrightarrow \Delta$ tạo với Ox một góc 45° và $O \notin \Delta$. (a)
- $S_{\Delta OAB} = S \Leftrightarrow OA \cdot OB = 2S$. (b)
- Giải (a) hoặc (b) tìm được x_0 . Từ đó viết phương trình tiếp tuyến Δ .

8. Lập phương trình tiếp tuyến chung của hai đồ thị $(C_1): y = f(x)$, $(C_2): y = g(x)$.

- a) Gọi $\Delta: y = ax + b$ là tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) .
 u là hoành độ tiếp điểm của Δ và (C_1) , v là hoành độ tiếp điểm của Δ và (C_2) .
 Δ tiếp xúc với (C_1) và (C_2) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(u) = au + b & (1) \\ f'(u) = a & (2) \\ g(v) = av + b & (3) \\ g'(v) = a & (4) \end{cases}$$

- Từ (2) và (4) $\Rightarrow f'(u) = g'(v) \Rightarrow u = h(v)$ (5)
- Thế a từ (2) vào (1) $\Rightarrow b = k(u)$ (6)
- Thế (2), (5), (6) vào (3) $\Rightarrow v \Rightarrow a \Rightarrow u \Rightarrow b$. Từ đó viết phương trình của Δ .
- b) Nếu (C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ x_0 thì một tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) cũng là tiếp tuyến của (C_1) (và (C_2)) tại điểm đó.

9. Tìm những điểm trên đồ thị (C): $y = f(x)$ sao cho tại đó tiếp tuyến của (C) song song hoặc vuông góc với một đường thẳng d cho trước.

- Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$. Δ là tiếp tuyến của (C) tại M. Tính $f'(x_0)$.
- Vì $\Delta // d$ nên $f'(x_0) = k_d$ (1)

hoặc $\Delta \perp d$ nên $f'(x_0) = -\frac{1}{k_d}$ (2)

- Giải phương trình (1) hoặc (2) tìm được x_0 . Từ đó tìm được $M(x_0; y_0) \in (C)$.

10. Tìm những điểm trên đường thẳng d mà từ đó có thể vẽ được 1, 2, 3, ... tiếp tuyến với đồ thị (C): $y = f(x)$.

Giả sử $d: ax + by + c = 0$. $M(x_M; y_M) \in d$.

- Phương trình đường thẳng Δ qua M có hệ số góc k : $y = k(x - x_M) + y_M$
- Δ tiếp xúc với (C) khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = k(x - x_M) + y_M & (1) \\ f'(x) = k & (2) \end{cases}$$

- Thế k từ (2) vào (1) ta được: $f(x) = (x - x_M) \cdot f'(x_M) + y_M$ (3)
- Số tiếp tuyến của (C) vẽ từ M = Số nghiệm x của (3)

11. Tìm những điểm mà từ đó có thể vẽ được 2 tiếp tuyến với đồ thị (C): $y = f(x)$ và 2 tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

Gọi $M(x_M; y_M)$.

- Phương trình đường thẳng Δ qua M có hệ số góc k : $y = k(x - x_M) + y_M$

- Δ tiếp xúc với (C) khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = k(x - x_M) + y_M \\ f'(x) = k \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

- Thế k từ (2) vào (1) ta được: $f(x) = (x - x_M).f'(x_M) + y_M \quad (3)$
- Qua M vẽ được 2 tiếp tuyến với (C) $\Leftrightarrow (3)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 .
- Hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau $\Leftrightarrow f'(x_1).f'(x_2) = -1$

Từ đó tìm được M.

Chú ý: Qua M vẽ được 2 tiếp tuyến với (C) sao cho 2 tiếp điểm nằm về hai phía với trục hoành thì $\begin{cases} (3) \text{ có 2 nghiệm phân biệt} \\ f(x_1).f(x_2) < 0 \end{cases}$

E) NHỮNG BÀI TOÁN VỀ ĐIỂM ĐẶC BIỆT CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1) Khoảng cách giữa hai điểm A, B: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

2) Khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0)$ đến đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$:

$$d(M, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Đặc biệt: + Nếu $\Delta: x = a$ thì $d(M, \Delta) = |x_0 - a|$

+ Nếu $\Delta: y = b$ thì $d(M, \Delta) = |y_0 - b|$

+ Tổng các khoảng cách từ M đến các trục tọa độ là: $|x_0| + |y_0|$.

3) Diện tích tam giác ABC: $S = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2 - (\overline{AB.AC})^2}$

4) Các điểm A, B đối xứng nhau qua điểm I $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B = 2x_I \\ y_A + y_B = 2y_I \end{cases}$

5) Các điểm A, B đối xứng nhau qua đường thẳng $\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} AB \perp \Delta \\ I \in \Delta \end{cases}$ (I là trung điểm AB).

Đặc biệt: + A, B đối xứng nhau qua trục Ox $\Leftrightarrow \begin{cases} x_B = x_A \\ y_B = -y_A \end{cases}$

+ A, B đối xứng nhau qua trục Oy $\Leftrightarrow \begin{cases} x_B = -x_A \\ y_B = y_A \end{cases}$

6) Khoảng cách giữa đường thẳng Δ với đường cong (C) bằng khoảng cách nhỏ nhất giữa một điểm $M \in \Delta$ và một điểm $N \in (C)$.

7) Điểm $M(x; y)$ được gọi là có tọa độ nguyên nếu x, y đều là số nguyên.

THẦY THIÊN (3T) CHUYÊN LUYỆN THI 9 VÀO 10
LUYỆN THI MÔN TOÁN CÁC KHỐI 10,11,12- ONLINE VÀ OFFLINE
TẠI CÁC CƠ SỞ TẠI BÁCH KHOA, ĐƯỜNG LẮNG, YÊN HÒA